学祭展示「数学の未解決問題」

解説マニュアル

展示スタッフ用

2026 年 10 月 8 日版

1　ミレニアム問題と、この展示の読み方

数学には、問題の意味は説明できても、正しいとも間違っているとも決着していない主張があります。**予想**とは、正しいと期待されているが、まだ一般の場合の証明を持たない主張です。たくさんの計算例が合うことと、条件を満たすすべての場合について証明することには違いがあります。一方、「すべて成り立つ」という主張を否定するには、条件を満たしながら結論に反する**反例**が一つあれば十分です。

ミレニアム懸賞問題は、クレイ数学研究所が 2000 年に選んだ七つの問題です。各問題に 100 万ドルの賞金が設けられました。七つは、P 対 NP、ホッジ予想、ポアンカレ予想、リーマン予想、ヤン – ミルズ理論と質量ギャップ、ナビエ – ストークス問題、BSD 予想です。ポアンカレ予想にはペレルマンによる解決があります。ナビエ – ストークス問題については 2026 年 9 月に解決を主張する発表があり、研究上の結果と懸賞の認定を区別して扱います。

この展示で取り上げる四つの問い

ナビエ – ストークス	滑らかに始まった流れは、いつまでも滑らかか。
ホッジ予想	特別な「形の情報」は、方程式で定まる部分から作れるか。
BSD 予想	分数で表せる解の構造を、別の関数から読み取れるか。
ヤコビアン予想	各点の近くで戻せる多項式の変換は、全体でも戻せるか。

ヤコビアン予想は、七つのミレニアム問題には含まれません。本展示では、予想・反例・研究の進展を比較するために取り上げます。各節の数学部分は、学部の微積分・線形代数・基本的な群の知識を出発点に、主張を正確に読むことを目指します。深い定理の証明は省き、使う定理を明記します。

ページ案内　第 2 節：2–5 頁、第 3 節：6–10 頁、第 4 節：11–14 頁、第 5 節：15–17 頁、第 6 節：18–19 頁。各問題の最終頁は一般向けの説明です。出典は 20 頁にまとめました。研究状況の確認日は 2026 年 10 月 8 日です。

参照：[1], [2], [5]。

2　ナビエ – ストークス問題

2.1　数学的な解説：方程式と、解に求める条件

水や空気を連続した物質として扱い、場所 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$、時刻 $t \geq 0$ における速度を $u(x,t) = (u_1, u_2, u_3)$、圧力を $p(x,t)$ とします。密度を一定として規格化した、非圧縮性ナビエ – ストークス方程式は

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \nu \Delta u + f, \qquad \nabla \cdot u = 0 \tag{1}$$

です。$\nu > 0$ は動粘性係数、$f(x,t)$ は単位質量あたりの外力です。微分は成分ごとに取り、$((u \cdot \nabla)u)_i = \sum_{j=1}^{3} u_j \partial_{x_j} u_i$、$\Delta u_i = \sum_j \partial_{x_j}^2 u_i$ と読みます。$\nabla \cdot u = \sum_j \partial_{x_j} u_j = 0$ は、小さな領域の体積が流れによって変わらないことに対応します。

何を未知数として、何を与えるか

与えるものは ν、初期速度 $u_0(x)$、外力 $f(x,t)$ です。このとき $u(x,0) = u_0(x)$ を満たす速度 u と圧力 p を求めます。圧力は独立に自由に選べる外力ではなく、非圧縮条件を保つ役割を担います。空間的に一定の関数 $c(t)$ を p に加えても、∇p は変わりません。

滑らかな解とは、ここでは空間・時間について何回でも微分でき、方程式を各点で満たす解です。時間区間 $[0,T)$ の解は、$t < T$ の各時刻では滑らかでも、$t \uparrow T$ で速度やその微分が際限なく大きくなる可能性があります。有限の T で滑らかな解を継続できなくなる現象を、**有限時間での特異点形成（blowup）**と呼びます。$t = 0$ からすべての時刻へ存在する解が大域解です。

全空間での有限エネルギーは、

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 := \int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^2 \, dx < \infty$$

を意味します。これに対し $\|u(t)\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^3} |u(x,t)|$ は速度の最大の大きさを測ります。連続な速度については通常の上限と一致します。前者は空間全体での総量、後者は局所的な最大値です。

具体例：粘性によって弱まる流れ

周期的な空間 $\mathbb{T}^3 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^3$ で

$$u(x,t) = (e^{-\nu t} \sin x_2, 0, 0), \qquad p = 0, \qquad f = 0$$

とおくと、$\nabla \cdot u = 0$、$(u \cdot \nabla)u = 0$、$\Delta u = -u$ なので式 (1) を満たします。これは全時間で滑らかな一例です。ただし、この一例が全時間で滑らかでも、すべての初期速度でそうなるとは結論できません。

参照：[2]。周期空間は、向かい合う面を同一視した立方体と考えられます。

2　ナビエ – ストークス問題：正確な問いと既知の結果

元の問題で、どこまでが許されているか

全空間版の初期速度は $\nabla \cdot u_0 = 0$ を満たす C^∞ 級の関数で、すべての導関数が無限遠で急減少するとします。正確には任意の多重指数 α と整数 $K \geq 0$ に対して

$$|\partial_x^\alpha u_0(x)| \leq C_{\alpha,K}(1+|x|)^{-K}$$

を要求します。多重指数は $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$、$\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\partial_{x_3}^{\alpha_3}$ の略記です。CMI の定式化には、全空間版・周期版それぞれに、存在を示す方向と破綻を示す方向があります。

CMI の全空間版：存在の方向と、破綻の方向

存在の方向（A）：外力 $f = 0$ のもとで、条件を満たす**どの** u_0 にも、$t \geq 0$ で滑らかで、$\sup_{t\geq 0}\|u(t)\|_{L^2} < \infty$ となる解が存在することを示す。
破綻の方向（C）：条件を満たす**ある** u_0 と滑らかな外力 f について、そのような大域解が存在しないことを示す。外力にも、任意の α, m, K に対して

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)| \leq C_{\alpha,m,K}(1+|x|+t)^{-K}$$

を要求する。周期版の対応する主張は（B）と（D）である。

このため、滑らかな外力を使う反例は公式問題の破綻の方向に含まれます。一方、それだけで「外力ゼロでも破綻する」とは言えません。$\nu = 0$ としたオイラー方程式も、粘性のある式 (1) とは別の問題です。

何が分かっていたか：エネルギー評価と、その限界

十分に滑らかで無限遠で減衰する解について、式 (1) と u の内積を積分し、部分積分すると

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} f(x,t)\cdot u(x,t)\,dx \tag{2}$$

を得ます。移流項と圧力項の積分が消えるのは $\nabla \cdot u = 0$ のためです。$f = 0$ なら総エネルギーは増えません。しかし L^2 の上界は L^∞ の上界を与えません。例えば、非零の滑らかな台がコンパクトな関数 ϕ に対し、

$$v_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-3/2}\phi(x/\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \|v_\varepsilon\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2}, \qquad \|v_\varepsilon\|_{L^\infty} = \varepsilon^{-3/2}\|\phi\|_{L^\infty}.$$

これは総量が一定でも狭い領域に集中できるという例であり、流体方程式の解を構成したものではありません。従来から、滑らかなデータに対する短時間の解、二次元での大域的正則性、三次元での適切な小ささの仮定のもとでの大域解、三次元での大域的な弱解の存在が知られていました。**弱解**は方程式を試験関数に対する積分の形で満たすもので、その存在だけでは各点での滑らかさは保証されません。

参照：[2]。外力の有無・次元・解の意味をそろえて結果を比較します。

2　ナビエ – ストークス問題：2026 年の主定理を読む

滑らかな外力のもとでの速度の発散

OpenAI が 2026 年 9 月に公開した原稿の主定理は、次の存在主張です。C_c^∞ は「滑らかで、台がコンパクト」を表し、台とは関数が零でない場所の閉包です。外力は有限の領域・有限の時間帯にしか働かず、発散時刻を含めて滑らかである点が条件の核心です。

公開原稿の主定理 1.1（記号を本書に合わせた形）

任意の $\nu > 0$ に対して、

$$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0,\infty);\mathbb{R}^3), \qquad K \subset \mathbb{R}^3\text{: コンパクト集合}$$

および $\mathbb{R}^3 \times [0,1)$ 上の滑らかな u, p が存在し、式 (1) と $u(x,0) = 0$ を満たす。さらに、すべての $0 \le t < 1$ で

$$\operatorname{supp} u(\cdot,t) \cup \operatorname{supp} p(\cdot,t) \subset K,$$

かつ

$$\sup_{0\le t<1} \|u(t)\|_{L^2} < \infty, \qquad \limsup_{t\uparrow 1} \|u(t)\|_{L^\infty} = \infty$$

となる。同じ初期値と外力に対し、全時間で滑らかで一様に有限エネルギーを持つ解は存在しないと結論する。 [3]

$\limsup = \infty$ は、1 に近づく時刻の列に沿って最大速度が際限なく大きくなるという意味です。各 $t < 1$ では滑らかであり、エネルギーも一様に有界なので、初めから特異なデータを与えたわけでも、エネルギーが無限になったわけでもありません。また量化記号は「どの粘性 $\nu > 0$ に対しても、**その粘性に応じた**外力が存在する」です。任意の外力で発散するという主張ではありません。

Buckmaster・Alpöge の仕事との関係

これに先立つ 9 月 7 日、Tristan Buckmaster と Levent Alpöge は、滑らかな外力を持つ三次元**オイラー方程式**で有限時間の正則性の破綻を構成したと発表しました。NYU の説明では、Diego Córdoba と Luis Martínez-Zoroa による戦略を発展させた仕事で、AI の支援と Lean による形式的検証が報告されています。ここで発散する量として挙げられているのは渦度などであり、粘性のある上の主定理と同一視しません。 [4]

ここまでの進展と、区別して残す問い

外力つきのナビエ – ストークス方程式については、公式問題の破綻の方向を満たす結果として原稿が公開されています。外力ゼロの三次元問題は、この定理では決着しません。CMI は 9 月 11 日に発表への声明を出しましたが、業績評価・貢献の認定には所定の過程を設けています。研究者の先行する方法、個々の論文、AI の役割、懸賞の認定を分けて説明します。 [5]

参照：[3] Theorem 1.1、[4] 2026 年 9 月 14 日付の研究機関による説明、[5]。

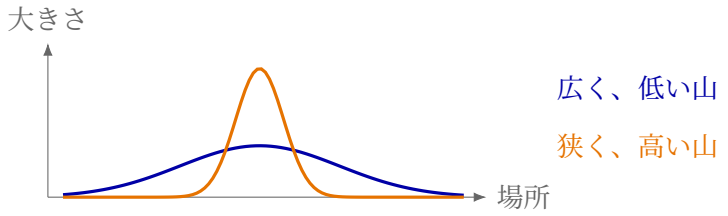
2　ナビエ – ストークス問題：一般向けの説明

最初の 30 秒：何を知りたい問題か

そのまま話せる説明

水や空気の動きを表す方程式があります。なめらかに始まった流れは、ずっとなめらかでしょうか。それとも有限の時間で、速度などが際限なく大きくなる場所ができるでしょうか。出発条件と外から加える力を決め、この問いを数学的に調べます。

図を指しながら：総量と、狭い場所での大きさ



図は集中のイメージです。流体の解や、同じエネルギーを持つ二つの曲線を描いたものではありません。

流れ全体のエネルギーが限られていても、それがごく狭い場所に集まれば、その場所での値は大きくなり得ます。「全体として暴走していないから、どこでも安全だ」とは言えないところが難しさです。数学では、この二つを総量を測る L^2 と、最大値を測る L^∞ などで区別します。

もう 1 分：現在どこまで進んだか

2026 年には、なめらかな外力を加えた場合に破綻する流れを構成したという発表がありました。Buckmaster・Alpöge らのオイラー方程式の仕事と、OpenAI が公開した粘性のある方程式の仕事は、関係を持つ別の成果です。「誰か一人、あるいは AI だけが突然すべてを解いた」とまとめず、それぞれの条件と貢献を伝えます。外から力を加えない場合まで、上の結果で決着したわけではありません。

Q. 現実の水が無限の速さになるのですか？

数学的な連続体モデルについての主張です。分子の大きさや、モデルが成り立つ範囲まで含めた現実の水の予言ではありません。

Q. 乱流があることとは違うのですか？

複雑で激しい動きがあることと、数学的な滑らかさが有限時間で失われることは別です。見た目が複雑でも滑らかな解はあり得ます。

Q. 計算機で流れを描けば証明できますか？

数値計算には、刻みの細かさや丸め誤差の影響があります。主張の範囲全体を保証するには、数学的な議論が必要です。

参照：数学的な対応は 2–4 頁。「外力つき」という条件を添えて説明します。

3　ホッジ予想

3.1　数学的な解説：どのような空間を扱うか

ホッジ予想は、方程式が定める空間の「位相的な情報」と、その中でさらに方程式が定める部分の関係を問います。ここで位相的とは、長さや角度そのものではなく、連続的な変形に対して保たれる構造を扱うという意味です。主張の舞台は**滑らかな複素射影代数多様体**です。この三つの条件から確認します。

複素射影空間 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ は、$\mathbb{C}^{N+1}$ の原点以外の点を、零でない複素数倍の違いを無視して同一視した空間です。

$$\mathbb{P}^N(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times, \qquad [z_0 : \cdots : z_N] = [\lambda z_0 : \cdots : \lambda z_N].$$

$z_0 \neq 0$ の部分では $[1 : z_1/z_0 : \cdots : z_N/z_0]$ と書けるので、通常の $\mathbb{C}^N$ が一つの座標領域として含まれます。射影空間は、これに無限遠の方向を加えてコンパクトにしたものです。$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ は複素平面に一点を加えたリーマン球面で、実二次元の球面と同じ位相を持ちます。

射影代数多様体 $X \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ は、有限個の斉次多項式 F_j による方程式 $F_j = 0$ の共通零点集合です。斉次であるため、座標を同時に定数倍しても「零になるか」は変わりません。**滑らか**とは、各点の近くが複素数の座標 $z_1, \ldots, z_n$ で記述でき、特異点を持たないことです。例えば超曲面 $F = 0$ では、全偏微分が同時に零になる射影点がなければ滑らかです。

具体例：複素射影平面の中の直線と曲線

$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ は複素次元 2、実次元 4 の空間です。その中の $L = \{z_2 = 0\}$ は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ と同じで、複素次元 1 の「直線」です。また

$$C = \{z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

は滑らかな二次曲線です。偏微分は $2z_0, 2z_1, 2z_2$ で、これらが同時に零となるのは射影点を表さない原点だけです。図で描く線を、そのまま実一次元の曲線だと思わないことが大切です。

複素次元が n の X の中で、部分多様体 Z の複素次元が $n - p$ なら、Z の**複素余次元**は p です。実次元で数えると X は $2n$ 次元、Z は $2n - 2p$ 次元になります。この「2 倍」が、ホッジ予想に H^{2p} という偶数次数の情報が現れる理由です。

仮定の読み方

「任意の滑らかな複素射影代数多様体 X」が対象です。特異点を持つ空間、非コンパクトな空間、任意の実多様体に、これから述べる形の予想をそのまま当てはめることはできません。複素座標と射影性の両方が、次の頁の分解を保証するために使われます。

参照：[6]。この節では X を連結とします。

3　ホッジ予想：コホモロジーと型の分解

微分形式で「積分して分かる情報」を表す

多様体上の k 次微分形式とは、向きを持つ k 次元の領域に積分できる量です。例えば $\mathbb{R}^2$ では $a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ が 1 形式、$c(x,y)\,dx \wedge dy$ が 2 形式です。外微分 d は k 形式を $k+1$ 形式に送り、$d^2 = 0$ を満たします。$d\omega = 0$ となる形式を**閉形式**、$\omega = d\eta$ と書けるものを**完全形式**と呼びます。

ド・ラームコホモロジー

複素数を係数とする滑らかな k 形式の空間を $A^k(X;\mathbb{C})$ とし、

$$H^k_{\mathrm{dR}}(X;\mathbb{C}) = \frac{\ker(d : A^k \to A^{k+1})}{\mathrm{im}(d : A^{k-1} \to A^k)}$$

と定義します。つまり、閉形式のうち完全形式だけ異なるものを同一視します。境界のない k 次元のサイクル γ に対して、ストークスの定理から $\int_\gamma d\eta = 0$ です。そのため $\int_\gamma \omega$ は代表元を変えても変わりません。

例えば円 S^1 上の $d\theta$ は局所的には角度の微分ですが、円周に沿う積分は 2π です。もし全体で定義された関数 g の微分 dg ならこの積分は零なので、$d\theta$ は完全形式ではありません。実際、$H^1_{\mathrm{dR}}(S^1;\mathbb{R})$ はこの類で生成される一次元の空間です。「穴の情報」という説明は、このように閉じた経路に沿う積分の例から来ています。

コホモロジーには、空間を単体と呼ばれる基本的な図形で調べる**特異コホモロジー** $H^k(X;\mathbb{Q})$ もあります。これは有理数を係数とする有限次元ベクトル空間で、ド・ラームの定理により

$$H^k(X;\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq H^k_{\mathrm{dR}}(X;\mathbb{C})$$

と比較できます。本書では右辺を $H^k(X;\mathbb{C})$ と書き、この同型によって $H^k(X;\mathbb{Q})$ をその中に入れて考えます。「有理数係数の類」はこの有理構造についての条件であり、微分形式の係数関数が常に有理数値という意味ではありません。

複素座標によるホッジ分解

複素座標 $z_j = x_j + iy_j$ では dz_j と $d\bar{z}_j$ を区別できます。前者を a 個、後者を b 個外積した項からなる形式を (a,b) 型といいます。例えば $dz_1 \wedge d\bar{z}_2$ は $(1,1)$ 型です。滑らかな射影多様体では、ホッジ理論によって

$$H^k(X;\mathbb{C}) = \bigoplus_{a+b=k} H^{a,b}(X), \qquad \overline{H^{a,b}(X)} = H^{b,a}(X)$$

と分解されます。$H^{a,b}(X)$ は、閉じた (a,b) 型の形式を代表に持つ類の部分空間です。この直和分解が成り立つという定理をここでは使い、その証明は扱いません。特に $k = 2p$ の中で、左右の数が等しい (p,p) 型が次の頁の対象になります。

参照：[6]。H^k の上付き k は次数、ベクトル空間の次元ではありません。

3　ホッジ予想：代数的サイクルと、正確な主張

部分多様体からコホモロジーの類へ

X の複素次元を n とします。方程式で定まる既約な部分多様体 $Z \subset X$ で、複素余次元が p のものを考えます。既約とは、それ自身より小さい二つの代数的な閉集合の和には分けられないことです。Z は実次元 $2n-2p$ の基本類を持ち、**ポアンカレ双対**によって $2p$ 次のコホモロジー類 $[Z] \in H^{2p}(X;\mathbb{Q})$ を定めます。$[Z]$ は、相補的な次数の閉形式 η に対して

$$\int_X [Z] \wedge \eta = \int_Z \eta$$

を満たす類と考えられます。左辺は $[Z]$ の微分形式による代表を使って計算します。Z 自身に特異点があっても、基本類を通じて同じ対応を定義できます。

有限個のこのような Z_i に有理数 q_i を付けた形式的な和 $\sum_i q_i Z_i$ を、**有理係数の代数的サイクル**と呼びます。対応する類は $\sum_i q_i [Z_i]$ です。係数には負の数や分数も使い、実物の図形を切って貼る操作そのものではありません。代数的な Z_i の類は必ず (p,p) 型になります。予想は、この必要条件が十分かを問います。

ホッジ予想（有理係数）

任意の滑らかな複素射影代数多様体 X、任意の $0 \le p \le \dim_{\mathbb{C}} X$ に対して、

$$\mathrm{Hdg}^{2p}(X) := H^{2p}(X;\mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(X)$$

の各要素 α は、複素余次元 p の代数的部分多様体 $Z_1, \dots, Z_m$ と有理数 $q_1, \dots, q_m$ を用いて

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} q_i [Z_i]$$

と表せる。交わりは $H^{2p}(X;\mathbb{C})$ の中で取る。

計算できる具体例：射影空間

$X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ では、超平面の類を $h \in H^2(X;\mathbb{Q})$ とすると

$$H^*(\mathbb{P}^n;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[h]/(h^{n+1}), \qquad \deg h = 2$$

です。積はコホモロジーのカップ積（微分形式では外積に対応）です。H^{2p} は h^p で生成され、h^p は p 枚の一般の超平面の交わり $\mathbb{P}^{n-p}$ の類です。したがって、どの有理ホッジ類も $q[\mathbb{P}^{n-p}]$ と書け、この場合に予想が成り立つことが分かります。

$\mathbb{P}^2$ の二次曲線の類は $2h$ です。一般の直線と 2 点で交わるという次数の情報が、直線の類の 2 倍として記録されます。二次曲線そのものが二本の直線の集合になる、という意味ではありません。**図形が違っても同じコホモロジー類を持ち得る**ことが、この例で確認できます。

参照：[6]。主張の対象はすべてのコホモロジー類ではなく、有理数係数の (p,p) 型の類です。

3　ホッジ予想：既知の範囲と、残る問題

以前から分かっていた場合

余次元 1 では、レフシェッツの $(1,1)$ 定理により予想が成り立ちます。具体的には、整係数の $(1,1)$ 類は正則な直線束の第一チャーン類であり、射影多様体では因子の類として表されます。直線束は各点の上に一次元複素ベクトル空間を連続的・正則に付けたもの、因子は余次元 1 の部分多様体の整数係数の形式和です。有理数係数の類については、分母を払ってこの定理を使います。

余次元 0 は X 全体、余次元 n は点の類で扱えます。さらに**複素次元が 3 以下**の滑らかな射影多様体では予想が成り立ちます。3 次元で残る余次元 2 については、超平面類 h との積が

$$h \smile - : H^2(X;\mathbb{Q}) \longrightarrow H^4(X;\mathbb{Q})$$

の同型になるという**強レフシェッツ定理**を使います。この写像は型を (a,b) から $(a+1,b+1)$ に移すので、有理 $(2,2)$ 類は有理 $(1,1)$ 類と h の積です。$(1,1)$ 定理で得た因子を超平面と交わらせれば、代数的な類として表せます。

「整数係数でも同じ」と言ってよいか

有理数係数を整数係数に置き換えた**整係数ホッジ予想**には反例が知られています。したがって「分数を使わずに代数的部分を足し引きできる」という主張に強めることはできません。元の有理係数の予想が反証されたわけでもありません。係数体は主張の一部です。

2026 年に公開された、特別なクラスでの成果

2026 年 10 月の OpenAI の成果概要では、Family 032 として **CM 型アーベル多様体の有理ホッジ予想**を全次元・全余次元で扱う結果が記載されています。ここでアーベル多様体は、群としての加法を持つ滑らかな射影代数多様体です。複素数上では、射影的な複素トーラス $A = \mathbb{C}^g/\Lambda$ と考えられます。Λ は実ベクトル空間としての $\mathbb{C}^g$ における階数 $2g$ の格子です。どの複素トーラスも射影的とは限りません。

$\mathrm{End}(A)$ を原点を保つ代数的自己準同型の環とし、$\mathrm{End}^0(A) = \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ と書きます。CM 型であるとは、$\mathrm{End}^0(A)$ が $\mathbb{Q}$ 上の次元 $2g$ の可換半単純代数を含むことです。ここで可換半単純代数とは、有限個の数体の直積です。例えば楕円曲線 $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ は $z \mapsto iz$ という通常の整数倍以外の自己準同型を持ち、$\mathbb{Q}(i)$ が現れます。

何がなお一般の問題として残るか

この成果概要で扱う対象は、追加の対称性を持つ特別な多様体です。**任意の滑らかな複素射影代数多様体**に対する有理ホッジ予想全体の解決とは区別します。「ある多様体族で全次元」という言葉も、「すべての多様体」という意味ではありません。原稿群の検証状況については 19 頁で説明します。

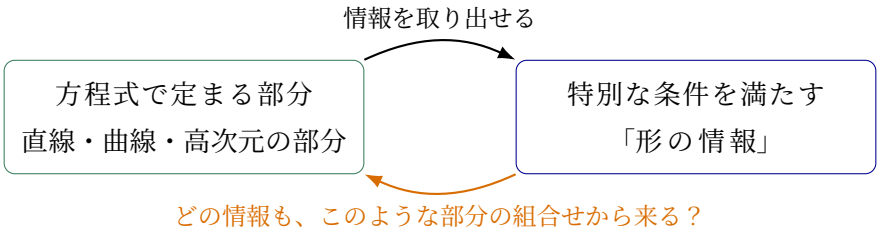
参照：従来の定理と係数の区別：[6]。2026 年の成果概要：[9] Family 032。

3　ホッジ予想：一般向けの説明

最初の 30 秒：同じ空間を二つの方法で調べる

そのまま話せる説明

方程式でできる空間を、二つの見方で調べます。一つは、その空間から「形の情報」を取り出す見方。もう一つは、その中に、さらに方程式で決まる部分を見つける見方です。ホッジ予想は、ある特別な条件を満たす形の情報なら、後者の部分の情報を組み合わせて全部説明できるはずだ、という予想です。



もう 1 分：図形そのものと、図形の情報を区別する

例えば、ある曲線が一般の直線と何回交わるかを記録すると、その曲線の細かい形をすべて覚えなくても、重要な情報を残せます。異なる曲線が同じ記録を持つこともあります。ホッジ予想で組み合わせるのも、図形そのものを切り分けた部品というより、こうして取り出した情報です。組合せには分数倍や引き算も使います。

ただし、どんな形の情報でも対象になるわけではありません。複素数の座標を使ったときの特別な対称性と、有理数係数で表せるという条件の両方を満たす情報に限ります。数学部分の「有理ホッジ類」がそれに当たり、「方程式で定まる部分の組合せ」が「代数的サイクル」に当たります。

Q. ドーナツの穴の数を数える問題ですか？

穴の数は、形から数値を取り出す身近な入口です。ただし本当の予想は、高次元の複素数の空間と、より豊かな情報を扱います。「穴を全部数えれば解ける」とは説明しません。

Q. 複雑な図形を、簡単な図形に分解するのですか？

そのイメージは入口には使えますが、実際に空間を切り分ける主張ではありません。取り出した情報を、部分空間から来る情報の足し引きで表す主張です。

Q. 何も分かっていないのですか？

複素次元が 3 以下の場合など、以前から証明されている範囲があります。2026 年にも特別な多様体族での成果が公開されていますが、一般の場合全体は別の問いです。

参照：数学的な対応は 6–9 頁。「特別な条件」「情報の組合せ」の二点を残して説明します。

4　BSD 予想（バーチ・スウィンナートン＝ダイアー予想）

4.1　数学的な解説：楕円曲線と有理点の群

楕円曲線とは、指定した基点 O を持つ、滑らかな射影曲線で種数が 1 のものです。複素数上の種数は、向きづけられた曲面としての「取っ手の数」に当たります。ここでは $\mathbb{Q}$ 上で定義された曲線を扱います。標数 0 では、座標を選ぶと

$$E:\ y^2 = x^3 + ax + b, \qquad a, b \in \mathbb{Q}, \qquad 4a^3 + 27b^2 \neq 0$$

と書けます。正確には射影化した $Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$ と無限遠点 $O = [0:1:0]$ まで含めたものです。判別式 $\Delta = -16(4a^3 + 27b^2)$ が零でない条件は、特異点がないことを保証します。

有理点とは、座標が有理数である点のことです。例えば $E: y^2 = x^3 - x + 1$ では、$(0,1)$、$(3,5)$、$(1/4, 7/8)$ が有理点です。実数の解がグラフ上に連続して見えても、その全部が有理点ではありません。有理点全体に O を加えた集合を $E(\mathbb{Q})$ と書きます。

点の足し算：座標を足すわけではない

異なる点 P, Q を通る直線を引き、曲線との第 3 の交点を R とします。R を x 軸で反転した点を $P + Q$ と定めます。$P = Q$ なら接線を使い、$P + (-P) = O$、$P + O = P$ とします。この演算で $E(\mathbb{Q})$ は可換群になります。

例えば $P = (0,1)$ では、接線の傾きは $m = (3x_P^2 - 1)/(2y_P) = -1/2$ です。倍点の公式から

$$x_{2P} = m^2 - 2x_P = \frac{1}{4}, \qquad y_{2P} = m(x_P - x_{2P}) - y_P = -\frac{7}{8}$$

を得ます。有理数の点から有理数の点が作られることが分かります。

モーデル – ヴェイユの定理と階数

$\mathbb{Q}$ 上の任意の楕円曲線について、$E(\mathbb{Q})$ は有限生成可換群であり、

$$E(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}^r \oplus T$$

と書けます。$T = E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}}$ は有限群で、ある正整数倍が O になる点からなります。非負整数 r を**階数（rank）**と呼びます。

つまり、独立な点 $P_1, \dots, P_r$ を選べば、任意の有理点は $n_1P_1 + \cdots + n_rP_r + \tau$（$n_i \in \mathbb{Z}$, $\tau \in T$）と書けます。階数は有理点の個数ではなく、有限部分を除いて点を作るのに必要な独立な生成元の数です。$r = 0$ なら有理点は有限個、$r > 0$ なら無限個あります。群が有限生成であるという定理だけでは、各曲線の r をすぐに計算できるわけではありません。

参照：[7]。この頁の具体的な座標計算だけで、その曲線の階数を決定したとはしていません。

4　BSD 予想：素数ごとの点の数から関数を作る

有限体上の点を数える

素数 p に対し、$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は p 個の元を持つ体です。楕円曲線を整係数の方程式で表し、p で割った余りで考えます。必要なら xy や y の項も許すモデルを選び、滑らかな射影曲線として還元できるとき、p で**良い還元**を持つといいます。このとき

$$N_p = \#E(\mathbb{F}_p), \qquad a_p = p + 1 - N_p$$

と定めます。N_p は無限遠点 O を含む数です。例えば $E : y^2 = x^3 - x + 1$ を $p = 5$ で考えると、次のようになります。

x の余り	0	1	2	3	4
$x^3 - x + 1$ の余り	1	1	2	0	1
y の候補	1, 4	1, 4	なし	0	1, 4

平面内の 7 点に O を加えて $N_5 = 8$、したがって $a_5 = 6 - 8 = -2$ です。実数のグラフを読む問題から、素数ごとに有限個の候補を数える問題へと移ったことに注意してください。

L 関数と、解析接続

良い還元を持つ素数の点の数を、次の無限積にまとめます。本書では零点の位数を読むことを目的に、悪い還元を持つ有限個の素数の因子を省く、CMI 公式問題文と同じ規約を使います。

楕円曲線の L 関数（悪い素数の因子を省いた形）

$$L(E, s) = \prod_{p\text{: 良い還元}} (1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s})^{-1} \qquad (\operatorname{Re} s > 3/2).$$

まず絶対収束する範囲で定義します。$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線のモジュラー性の定理から、この関数は複素平面全体へ正則に**解析接続**できます。$L(E, 1)$ やその微分は、接続後の関数について考えます。

解析接続は、元の範囲で一致する正則関数を、広い範囲へ延ばすことです。収束していない無限積に、単に $s = 1$ を代入する操作ではありません。省いた因子は $s = 1$ で零でも無限大でもないため、元に戻しても零点の位数は同じです。ただし、先頭係数の精密な公式には補正が必要です。

「零になる次数」を読む

$s = 1$ の近くで $L(E, s) = c(s-1)^m +$ 高次の項（$c \neq 0$）と書くとき、$m = \operatorname{ord}_{s=1} L(E, s)$ を解析的階数と呼びます。$L(E, 1) \neq 0$ なら $m = 0$、$L(E, 1) = 0$ かつ $L'(E, 1) \neq 0$ なら $m = 1$ です。$L(E, 1) = 0$ という値だけでは $m = 1$ と $m = 2$ 以上を区別できません。

参照：[7]。悪い素数の因子を省いても、次頁の階数に関する予想は同値です。

4　BSD 予想：正確な主張と、到達している範囲

BSD 予想の階数に関する主張

任意の $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E について、

$$\boxed{\operatorname{rank} E(\mathbb{Q}) = \operatorname{ord}_{s=1} L(E,s)}$$

が成り立つ。すなわち、有理点の群の独立な生成元の数と、解析接続した L 関数が $s=1$ で零になる位数が等しい。

左辺は有理点の群を調べる**代数的・算術的**な量、右辺は素数ごとの情報をまとめた関数の振る舞いを測る**解析的**な量です。位数が 2 なら、独立な生成元も二つ必要だと予測します。「零点が二つ」「有理点が二つ」という意味ではありません。

特に予想が成り立つなら、$L(E,1) \neq 0$ と有理点が有限個であることが同値で、$L(E,1) = 0$ と無限個であることが同値です。この有限・無限の判定は重要な帰結ですが、予想そのものは正確な階数まで一致させる、より強い主張です。

従来の定理：解析的階数が 0 または 1 なら

Gross–Zagier、Kolyvagin らの仕事とモジュラー性の定理により、$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線について

$$\operatorname{ord}_{s=1} L(E,s) \in \{0,1\} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rank} E(\mathbb{Q}) = \operatorname{ord}_{s=1} L(E,s)$$

が知られています。この仮定は**解析的**階数に関する条件です。単に「階数が小さければ全部分かる」と省略すると、何を先に仮定しているかが見えなくなります。一般の高い階数も含め、任意の曲線を一つの定理で扱うことが残る問題です。

精密な BSD 予想と、2026 年の成果を読む補足

精密な BSD 予想は、零点の位数だけでなく、$L(E,s)$ の最初の零でない係数も、有理点の高さ、実周期、各素数での補正、テイト – シャファレヴィッチ群という群から計算できると主張します。本書の主目標は上の階数の等式であり、この精密公式の全項やその証明までは扱いません。

2026 年 10 月の成果概要の Family 002 には、「ある素数 q に対し、全 q 冪セルマー群のコランクが 0 または 1」という仮定のもとで、この精密公式とテイト – シャファレヴィッチ群の有限性を示す結果が記載されています。セルマー群は、有理点を $q, q^2, \ldots$ 倍で調べる情報と、すべての素数および実数上での局所条件をまとめた補助的な群です。そのコランクは、この群の q 進的な「独立な無限方向」の数を測ります。

展示での説明範囲

従来の解析的階数 0・1 での定理と、2026 年の精密公式の結果は、仮定も結論も異なります。後者は「特定の条件下で、より精密な形に進展」と伝え、**任意の楕円曲線について BSD 予想全体が解決したとはしません。**

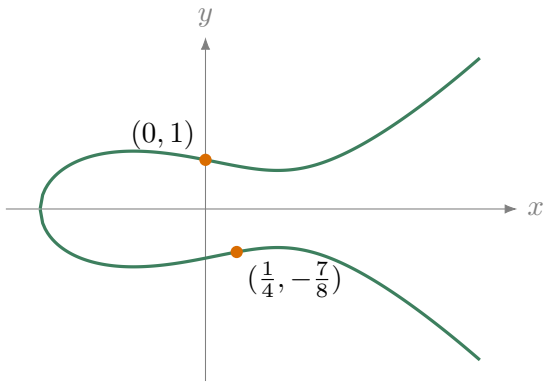
参照：階数の主張と従来の定理：[7]。2026 年の公開概要：[9] Family 002。

4　BSD 予想：一般向けの説明

最初の 30 秒：分数で表せる点を探す

そのまま話せる説明

この曲線の上で、横の座標も縦の座標も分数で書ける点を探します。点は有限個しかないのでしょうか。それとも無限個あるのでしょうか。BSD 予想は、こうした点の作られ方を、素数ごとに集めた情報から作る別の関数で読み取れるはずだ、という予想です。



曲線上の点すべてが
分数で書けるわけではない

$y^2 = x^3 - x + 1$

実数のグラフに、有理点の例を二つ示しています。$1 = 1/1$、$0 = 0/1$ も有理数です。

もう 1 分：「何個か」から「どう作れるか」へ

楕円曲線には、二つの点から別の点を作る、足し算に似た規則があります。点の中には、繰り返し足すと元に戻るものもあります。その有限のグループを別にすると、独立な少数の出発点を足し引きして、すべての点を作れます。その独立な出発点の必要数が「階数」です。

もう一方では、5 で割った余り、7 で割った余り、というように素数ごとに方程式の解を数えます。それらを集めて作るのが L 関数です。BSD 予想は、この関数が特別な場所で「何段階零になるか」と、さきほどの階数が一致すると言います。関数の値が零かどうかだけでなく、零になり方の深さまで見るところがポイントです。

Q. 曲線を拡大すれば、分数の点を見分けられますか？

小数の近似値から、その値が正確に分数で書けるかを判定することはできません。図は問いをつかむために使い、点の性質は式で調べます。

Q. 点が無限個なら、全部調べるのは不可能では？

一つずつ列挙する代わりに、点を作る規則と、その規則の出発点を調べます。無限個の対象を有限個の情報で理解しようとするのが、この問題の面白さです。

Q. もう解けている場合はありますか？

はい。L 関数の零になり方が 0 段階・1 段階の場合には、階数との一致が知られています。2026 年にも条件を限定した精密な結果が公開されていますが、一般の場合は別です。

参照：数学的な対応は 11–13 頁。「独立な生成元の数」と「零点の位数」を結びます。

5　ヤコビアン予想

5.1　数学的な解説：局所的な逆と、大域的な逆

$F=(f_1,\dots,f_n):\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ の各成分 f_i が変数 $x_1,\dots,x_n$ の多項式であるとき、F を**多項式写像**といいます。その**ヤコビ行列**は偏微分を並べた

$$JF(x)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1\le i,j\le n}$$

であり、$F(x+h)=F(x)+JF(x)h+$高次の項 の線形部分を表します。行列式 $\det JF(x)$ が零でなければ、この線形近似は可逆です。

逆関数定理が保証するのは、各点の近くの逆

$\det JF(a)\neq 0$ なら、a と $F(a)$ の十分小さな近傍 U,V を取って、$F:U\to V$ を一対一対応にでき、正則な逆写像が存在します。正則とは、複素数の変数で微分可能なことです。ただし U の外の別の点が同じ値に移る可能性や、逆写像が多項式になるかは、この定理では分かりません。

一方、**多項式逆写像**があるとは、多項式写像 $G:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ が存在して $G\circ F=F\circ G=\mathrm{id}$ となることです。このとき F は全体で一対一かつ全射です。連鎖律から

$$\det JG(F(x))\,\det JF(x)=1$$

なので、$\det JF$ は多項式環の可逆元、すなわち零でない定数になります。ヤコビアン予想は、この必要条件が十分かを問うものでした。

ヤコビアン予想の元の主張（標数 0・複素数上）

任意の多項式写像 $F:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ が

$$\det JF(x)\equiv c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

を満たすなら、F は多項式逆写像を持つか。

具体例と、一次元の場合

$F(x,y)=(x+y^2,y)$ では $JF=\left(\begin{smallmatrix}1&2y\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ なので行列式は 1 です。実際、$G(u,v)=(u-v^2,v)$ が多項式逆写像です。y の値を保存しているため、横にずらした分を戻せます。

$n=1$ なら条件は $f'(x)=c\neq 0$ なので、$f(x)=cx+b$、逆は $(y-b)/c$ です。高次元では、行列の各成分が変化しても行列式だけ一定にでき、この議論は使えません。また $z\mapsto e^z$ は導関数がどこでも零でなくても大域的に一対一ではありませんが、多項式ではないので予想への反例ではありません。対象と条件を両方満たす例が必要です。

参照：[8]。この節のヤコビアン予想はミレニアム懸賞問題とは別の問題です。

5　ヤコビアン予想：反例を式で確かめる

2026 年に公表された三次元の反例

2026 年 7 月に Alpöge が公表した反例について、Gao の原稿は次の具体的な式を記載しています。$u = 1 + xy$ とおき、$F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ を

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= u^3 z + y^2 u(4 + 3xy), \\ f_2(x,y,z) &= y + 3xu^2 z + 3xy^2(4 + 3xy), \\ f_3(x,y,z) &= 2x - 3x^2 y - x^3 z \end{aligned} \tag{3}$$

で定めます。各成分は多項式で、次数はそれぞれ 7、6、4 です。

この写像が反例であるための二つの確認

仮定を満たす：偏微分して行列式を展開すると、すべての x, y, z に対して

$$\det JF(x,y,z) = -2 \neq 0$$

となります。したがって、どの点の近くでも局所的には逆を持ちます。

結論を満たさない：異なる三点が同じ点に移ります。

$$F\left(0, 0, -\frac{1}{4}\right) = F\left(1, -\frac{3}{2}, \frac{13}{2}\right) = F\left(-1, \frac{3}{2}, \frac{13}{2}\right) = \left(-\frac{1}{4}, 0, 0\right).$$

よって F は単射ではなく、全体で定義された逆写像を持ちません。特に多項式逆写像も持ちません。 [8, §3.4]

二番目の点を代入すると $u = -1/2$、$4 + 3xy = -1/2$ なので、$f_1 = -13/16 + 9/16 = -1/4$、$f_2 = -3/2 + 39/8 - 27/8 = 0$、$f_3 = 2 + 9/2 - 13/2 = 0$ です。行列式の恒等式と、この同じ値への写像は、本書の作成時にも有理数の正確な演算で確認しています。

以前の結果と、残る二次元の問題

以前から、任意の次元で次数 2 以下の場合に予想が成り立つことが知られていました。また全次元の問題をまとめて、三次の斉次項を使う特別な形へ帰着する定理もあります。ただし、この帰着では次元が変わり得るので、「高次元の反例があるなら二次元にもある」とは言えません。

三次元の反例があれば、$n > 3$ に対して $\widetilde{F}(x_1, \ldots, x_n) = (F(x_1, x_2, x_3), x_4, \ldots, x_n)$ と拡張できます。行列式は同じく -2 で、単射でもないため、**すべての** $n \geq 3$ で元の主張は成り立ちません。Gao の原稿には、これに加えて高次元でのさらに一般的な構成が与えられています。一方、$n = 2$ **の場合は未解決**として残ります。反例が見つかることも、予想に対する明確な決着です。

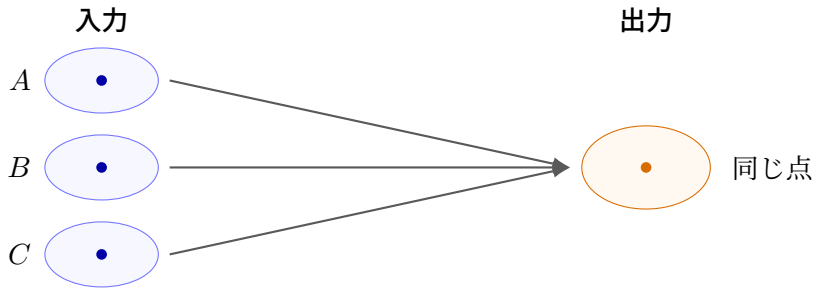
参照：[8]、特に Theorem 3.3。Alpöge の反例、Gallagher の族、Speyer の幾何的説明という経緯も同原稿に記載されています。

5　ヤコビアン予想：一般向けの説明

最初の 30 秒：近くで戻せるなら、全体でも戻せるか

そのまま話せる説明

座標を別の座標へ変える規則を考えます。どの場所を拡大して見ても、つぶれず、近くの点を区別できるとします。それなら、全体でも元の点を一つに決めて戻せるでしょうか。変換の規則を多項式に限定し、ヤコビアンという量を零でない一定値にしたのが、この問題です。



各入力の近くでは、別々に逆が作れる。
出力だけを見ても、どの入力から来たかは一つに決まらない。

図は三つの局所的な逆がある状況を模式的に表しています。二次元の反例を描いたものではありません。

もう 1 分：反例が、予想のどこを変えたか

予想は「条件を満たすなら、いつでも戻せる」という主張でした。2026 年に公表された三次元の例では、どの点の近くでも逆が作れるのに、離れた三つの点が同じ点へ移ります。したがって、出力から元の点をただ一つに決めることはできません。15–16 頁の式で、この重なりを実際に代入して確かめられます。

ここで「三次元」は、複素数の座標を三つ使うという意味です。普通の立体の変形をそのまま見せているわけではありません。同じ考えから、それより高い次元にも反例を作れますが、複素数の座標が二つの場合には、まだ問いが残っています。

Q. どの場所でもつぶれていないのに、なぜ戻せないのですか？

一つの場所のすぐ近くを調べることと、離れた場所どうしが同じ出力にならないことは、別の条件だからです。図の三つの入力の近くでは、それぞれ違う戻り方を選べます。

Q. 反例が見つかるのは、失敗ではありませんか？

予想の答えが「いいえ」だと分かった、大切な成果です。どの条件では成り立ち、どの条件では成り立たないかが、以前より正確になります。

Q. 二次元なら、絵を描けば分かりますか？

複素二次元は実四次元です。さらに、すべての多項式変換を扱う必要があり、いくつかの図を描くだけでは一般の結論は出せません。

参照：数学的な対応は 15–16 頁。展示では「複素三次元以上で反例、二次元は残る」と伝えます。

6　まとめと、AI と数学の現在

6.1　四つの問題から、何を持ち帰ってもらうか

四つの問題は、別々の分野の問いですが、いずれも**条件をはっきりさせ、異なる種類の情報の関係を調べる**という姿勢を共有しています。方程式が書けることと、解の性質が分かることは違います。また、計算例が合うこと、一部の場合に定理があること、全体が解決することも違います。

問題	比べているもの	2026 年 10 月 8 日時点での説明
ナビエ – ストークス	滑らかな出発条件と、時間が進んだ後の解の正則性	滑らかな外力つきの破綻を構成したという発表。外力ゼロの場合と認定手続を区別する。
ホッジ予想	有理ホッジ類と、代数的部分多様体から来る類	低次元などで既知。CM 型アーベル多様体に関する成果が公開されているが、一般形は別。
BSD 予想	有理点の群の階数と、L 関数の零点の位数	解析的階数 0・1 では階数の等式が既知。追加条件下での精密公式の進展と一般形を分ける。
ヤコビアン予想	各点の近くでの可逆性と、全体での多項式逆写像	複素三次元の反例が公表され、高次元にも拡張できる。複素二次元は未解決。

「解けた」という言葉を使うときの確認

対象と仮定を言う。「三次元か二次元か」「外力があるか」「任意の多様体か特別な族か」が変われば、別の主張になります。専門用語をすべて来場者に伝える必要はありませんが、結論の範囲を変えてしまう条件は省きません。

結論の強さを言う。点が有限か無限かを判断することと、階数を正確に決めることは違います。特異点が起こり得る例を一つ作ることと、すべての流れが特異になることも違います。「ある」と「すべて」を意識して説明します。

根拠と検証の状態を言う。公開原稿に定理として記載された段階、専門家による検討、形式的検証、懸賞の正式な認定は、同じ出来事ではありません。2026 年の結果は更新が速いため、本書では日付と一次資料を明記しています。

展示の最後に伝える言葉

数学は、答えがまだ分からない問いを扱う学問でもあります。証明が見つかることだけでなく、反例が見つかったり、正しい条件が絞られたりすることも進歩です。今日の展示では、何を知りたいのか、何が分かり、どこに問いが残るのかを見ていただきました。

参照：各結果の条件は第 2–5 節、対応する一次資料は 20 頁を参照。

6　まとめと、AI と数学の現在

6.2　AI の成果を、どの単位で数えるか

OpenAI は 2026 年 10 月 6 日、AI を用いた数学研究の原稿群を公開しました。公表された数は **722 本の原稿、372 の関連成果群（families）**です。一つの成果群には、中心となる結果のほか、関連する帰結、補助的な議論、別の証明などが含まれます。したがって、この数字をそのまま「722 個の独立した未解決問題を解決した」と読み替えることはできません。[9]

ミレニアム問題に関係する成果もある

成果概要には、BSD 予想の精密公式を特定のセルマー群の条件下で扱う Family 002、CM 型アーベル多様体の有理ホッジ予想を扱う Family 032 などが挙げられています。いずれも本展示の問題に直接つながる話題です。ただし、**追加条件を外した予想全体の解決**とは区別します。背景となる用語と対象の違いは 9 頁・13 頁で説明しました。

AI が証明を書くことと、証明を確かめること

数学研究では、例を探す、補題を提案する、計算を検算する、既存の方法を別の問題へ使う、文章や形式化を整える、といった多くの作業があります。AI はこれらに関わりますが、役割は成果ごとに異なります。OpenAI の今回の説明は研究用の内部モデルについてのもので、普段利用する対話サービスが同じ研究能力を持つことを、そのまま意味するものではありません。

Lean などの証明支援系では、定義・仮定・結論と証明を形式言語で記述し、推論が規則に従っているかを機械的に検証します。自然言語で説得的に見える説明を読むこととは異なる確認です。一方、形式化された命題が元の数学的な問いを正確に表しているか、どの仮定や既存の定理を使っているかも重要です。公開原稿群すべてが同じ検証段階にあり、すべてが形式化済みであると説明してはいけません。

研究者の仕事と、AI の役割を一緒に伝える

ナビエ – ストークスに関連する進展では、Buckmaster・Alpöge らの成果と、その背景にある研究の戦略を含めて説明します。各研究者による問題設定・方法・判断と、AI が支援した部分は、個別の原稿の貢献説明に沿って読みます。「AI が一人で全部解いた」という一文では、数学が積み重なって進む過程が見えなくなります。

一般向けに話すなら、このくらいの長さで

AI を使った数学研究の原稿が、2026 年にまとまって公開されました。展示した難問につながる成果もあります。ただし、原稿の本数が、そのまま解決した難問の数ではありません。どの条件で何を示したかを読み、研究者や証明を確かめる仕組みによって検討していくことが大切です。AI によって研究の進め方も変わり始めています。

参照：[9] 公開説明・README・成果概要。[4] 流体方程式に関する研究者と形式化の説明。

参考文献・一次資料

本書の研究状況は **2026 年 10 月 8 日**に確認した公開資料に基づきます。角括弧の番号は本文の参照番号です。青い文字はリンクで、PDF から一次資料を開けます。最新の結果は公開後に修訂され得るため、展示の改訂時には原稿の版と発表元の更新も確認してください。

[1] Clay Mathematics Institute, *The Millennium Prize Problems* および各問題の案内。
https://www.claymath.org/millennium/

[2] Charles L. Fefferman, *Existence and Smoothness of the Navier–Stokes Equation*, CMI 公式問題文（末尾の修訂も参照）。条件（A）–（D）、初期値と外力の減衰条件、従来の存在結果。
CMI 公式 PDF：navierstokes.pdf

[3] OpenAI, *Finite Time Blowup for Navier–Stokes*, 2026 年 9 月公開原稿。特に Theorem 1.1、Corollary 10.6。発表ページと原稿へのリンク：
https://openai.com/index/navier-stokes-solution/
主定理を確認した公開原稿 PDF（166 頁）

[4] NYU Courant, *Tristan Buckmaster Constructs Finite-Time Blowup for 3D Euler with Smooth Forcing*, 2026 年 9 月 14 日。Buckmaster・Alpöge の成果、Córdoba・Martínez-Zoroa の戦略との関係、AI 支援・Lean 形式化についての研究機関による説明。
https://cims.nyu.edu/dynamic/news/1528/

[5] Clay Mathematics Institute, *Navier-Stokes Announcement*, 2026 年 9 月 11 日。発表に対する声明と評価・貢献認定の過程。
https://www.claymath.org/news/navier-stokes-announcement/

[6] Pierre Deligne, *The Hodge Conjecture*, CMI 公式問題文。ホッジ類・代数的サイクル、有理係数と整係数の違い、既知の範囲。
CMI 公式 PDF：hodge.pdf

[7] Andrew Wiles, *The Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture*, CMI 公式問題文。階数・L 関数・予想の主張、解析的階数 0・1 での定理。本文の N_p は無限遠点を含めており、この資料の平面内の点の数とは 1 だけ異なります。
CMI 公式 PDF：birchswin.pdf

[8] Shuhong Gao, *Counterexamples to the Jacobian conjecture in dimensions greater than two*, arXiv:2608.00222v1, 2026 年 7 月 31 日。特に第 2 節、§3.4、Theorem 3.3。式 (3) と三点の像は同原稿に基づきます。
https://arxiv.org/abs/2608.00222

[9] OpenAI, *Sharing AI progress in mathematics*, 2026 年 10 月 6 日、および公開リポジトリ `openai/math` の README・`overview.tex`。本書は Family 002・032 の範囲について**公開概要**を参照しており、各証明全体の再検証を行ったものではありません。
https://openai.com/index/sharing-ai-progress-in-mathematics/
https://github.com/openai/math