学祭展示「未解決問題に触れてみよう」

一般向け解説マニュアル

学祭展示資料

2026 年 10 月 13 日版

1　未解決問題を楽しむために

足し算、割り算、図形の長さなど、身近な言葉だけで説明できるのに、まだ答えが分からない数学の問題があります。この冊子では、展示の七つの問題を「問題・例・いま分かっていること」の順に紹介します。気になる問題から読んで、素数表や平方数表を使いながら例を確かめてみてください。

素数は、1 と自分自身以外の正の約数を持たない、2 以上の整数です。2、3、5、7、11 などが素数で、1 は素数に含めません。例えば 6 は 2×3 と分けられるので素数ではありません。**平方数**は、同じ整数を二つ掛けた数です。$1^2 = 1$、$2^2 = 4$、$3^2 = 9$、$4^2 = 16$ などが平方数です。

「予想」と「証明」

予想は、正しいと期待されているが、すべての場合を保証する証明がまだない主張です。**証明**は、決めた条件のもとで必ず成り立つ理由を示すことです。例をいくつも確認することは大切な手がかりになりますが、調べていない数についても成り立つ理由が必要です。

例えば「2 より大きい偶数は素数ではない」と言えます。どれほど大きな数でも、偶数なら必ず 2 で割り切れるからです。この理由は、一つずつ数を調べなくても使えます。未解決問題では、こうしたすべての場合に届く理由が、まだ見つかっていません。

この冊子の案内

問題	何を知りたいか	頁
双子素数予想	差が 2 の素数の組は無限にあるか	2
ゴールドバッハ予想	偶数は二つの素数の和になるか	3
ルジャンドル予想	隣り合う平方数の間に素数はあるか	4
回文素数	左右から同じに読める素数は無限にあるか	5
196 とリクレル数	数字を反転して足すと、いつか回文になるか	6
コラッツ予想	決めた操作を繰り返すと必ず 1 になるか	7
完全直方体	辺とすべての対角線が整数の直方体はあるか	8–9

研究状況の確認日は 2026 年 10 月 12 日です。本文の角括弧の番号は、10 頁の参考文献に対応します。

2　双子素数は無限にある？

問題

差が 2 である二つの素数を**双子素数**と呼びます。例えば 3 と 5、11 と 13 です。どれほど大きい数の先へ進んでも、さらに双子素数を見つけられるでしょうか。**双子素数の組は無限に存在する**というのが、双子素数予想です。

例：二つの数が両方とも素数かを調べる

次の表では、どの組も両方が素数で、差は 2 です。展示の素数表を使うと、8009 と 8011 も確かめられます。小さい数だけで起こる現象ではありません。

小さい方の素数	大きい方の素数	差	判定
3	5	2	双子素数
11	13	2	双子素数
17	19	2	双子素数
29	31	2	双子素数
8009	8011	2	双子素数

差が 2 なら何でもよいわけではありません。例えば 13 と 15 の差は 2 ですが、$15 = 3 \times 5$ なので、双子素数ではありません。まず小さい方を素数表で見つけ、そこから 2 大きい数も表に載っているかを確かめると探しやすくなります。

「無限にある」とは、何を言っているか

ここでの無限は、「たくさんある」ということより強い主張です。もし非常に大きい双子素数を一組見つけても、それが最後の組ではないと保証する必要があります。素数自体が無限にあることは証明されていますが、その中に差 2 の組が無限にあるかは、さらに別の条件を調べる問いです。

いま分かっていること

2013 年に張益唐（チャン）は「差が 7000 万以下の素数の組は無限にある」と証明し、その後メイナードや共同研究 Polymath によって、差の上限は 600、246 へと縮まりました。 [1]

2026 年には、Stadlmann による 240 以下の原稿と、その方法を発展させて 212 以下とする予備的草稿が公開されています。これは「差がその値以下の組が無限にある」という意味です。差がちょうど 212 の組を数えた結果ではありません。**差が 2 の組が無限にあるかという目標は、なお未解決です。** [2, 3]

参照：[1]–[3]。2026 年の原稿は、公表時の位置づけを付して紹介しています。

3　ゴールドバッハ予想

問題

4 以上のどんな偶数も、二つの素数の和として表せるでしょうか。これがゴールドバッハ予想です。同じ素数を二度使っても構いません。例えば、$4 = 2 + 2$ は条件を満たします。

例：足して元の偶数になる素数を探す

偶数	二つの素数の和にする例
4	$2 + 2$
6	$3 + 3$
8	$3 + 5$
10	$3 + 7$、$5 + 5$
20	$3 + 17$、$7 + 13$
30	$7 + 23$、$11 + 19$、$13 + 17$
100	$3 + 97$、$47 + 53$

一つの偶数に、いくつもの分け方が見つかることがあります。予想が要求するのは、**少なくとも一通り**見つかることです。和の順番を入れ替えた $7 + 13$ と $13 + 7$ は、同じ分け方として考えます。

探すときは、元の偶数から素数を一つ引き、残った数も素数かを調べます。例えば 50 なら、まず 3 を引くと 47 です。3 も 47 も素数なので、$50 = 3 + 47$ とすぐに確かめられます。素数表は、和の候補を試すためにも使えます。

偶数に注目する理由

2 以外の素数はすべて奇数で、奇数と奇数を足すと偶数になります。そこで「素数二つの和で、どの偶数まで作れるか」が自然な問いになります。ただし、この説明だけでは、すべての偶数を作れることまでは保証できません。

いま分かっていること

関連する大きな成果として、ヘルフゴットは 2013 年に **7 以上のすべての奇数は、三つの素数の和になる**という主張の証明を発表しました。例えば、$21 = 3 + 7 + 11$ です。 [4]
これは、数の種類と使う素数の個数を変えた問題への答えです。**4 以上のすべての偶数を、二つの素数の和で表せるか**という元のゴールドバッハ予想は、なお未解決です。

参照：[4]。二つの素数の予想と、三つの素数についての結果を区別します。

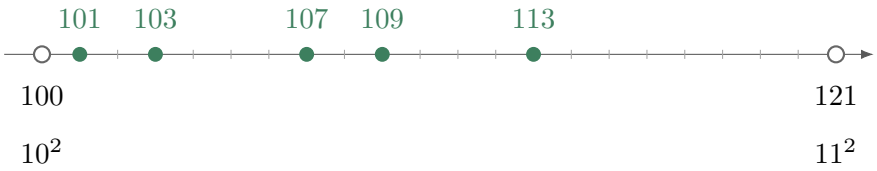
4　ルジャンドル予想

問題

平方数を小さい順に並べると、1、4、9、16、25、36、…となります。**隣り合う二つの平方数の間には、必ず素数が一つ以上あるでしょうか。**両端の平方数を含めず、その間にある数を調べます。

例：100 と 121 の間を見てみる

$10^2 = 100$ と $11^2 = 121$ の間には、101、103、107、109、113 という五つの素数があります。次の数直線で、緑の点が素数です。



他の区間でも、次のように素数が見つかります。表はそれぞれの区間にある素数をすべて記しています。

隣り合う平方数	間にある素数
1 と 4	2、3
4 と 9	5、7
9 と 16	11、13
25 と 36	29、31

一般に、隣り合う平方数は n^2 と $(n+1)^2$ と書けます。ここで n は 1 以上の整数です。間隔は数が大きくなるほど広がりますが、その一方で素数は全体としてまばらになっていきます。区間が広がることだけから、必ず素数が入るとは言い切れません。

いま分かっていること

Dudek と Johnston は 2025 年に、**どの隣り合う平方数の間にも、素数を 4 個以内掛けてできる数がある**と示す原稿を公開しました。素数そのものも、素数を一個だけ使う場合として含みます。同じ素数を繰り返し掛けたときは、その回数も数えます。[5]

例えば 25 と 36 の間には、$30 = 2 \times 3 \times 5$ があります。これは結果の意味を示す一例です。素数そのものが**どの**区間にも必ずあるというルジャンドル予想は、なお未解決です。

参照：[5]。十分に大きい平方数だけでなく、すべての区間を扱う進展です。

5　回文素数は無限にある？

問題

十進法で、左から読んでも右から読んでも同じになる数を**回文数**と呼びます。例えば 121 や 13531 です。その数が素数でもあるとき、**回文素数**と呼びます。**回文素数は無限に存在するでしょうか。**

例：回文かどうかと、素数かどうかを別々に確かめる

数	回文数か	素数か	確かめ方・補足
11	はい	はい	偶数桁の回文素数
131	はい	はい	回文素数の例
121	はい	いいえ	$121 = 11 \times 11$
13531	はい	いいえ	$13531 = 7 \times 1933$
123	いいえ	いいえ	反転すると 321、$123 = 3 \times 41$

13531 は左右どちらからも同じに読めますが、7 で割り切れます。「回文」という数字の並び方と、「素数」という割り切れ方の条件を、同時に満たすことが必要です。素数表から、桁の並びが左右対称な数を探してみてください。

偶数桁の回文数には、特別な性質がある

偶数桁の回文数は、必ず 11 で割り切れます。例えば、$1221 = 11 \times 111$、$7337 = 11 \times 667$ です。11 で割り切れるかを調べる方法の一つに、桁の数字を交互に足したり引いたりする方法があります。1221 なら $1 - 2 + 2 - 1 = 0$ となり、偶数桁の回文数では、対称な位置の数字が打ち消し合います。

そのため、**偶数桁の回文素数は 11 だけ**です。11 以外なら、11 と自分自身以外の約数を持つことになるからです。無限にあるかという問題では、主に奇数桁の回文数を探すことになります。ただし、奇数桁なら必ず素数になるわけではなく、表の 121 や 13531 がその例です。

いま分かっていること

Tuxanidy と Panario は、2024 年に刊行された論文で、**素数を 6 個以内掛けてできる回文数は無限にある**と示しました。例えば $121 = 11 \times 11$ は、素数を二個掛けてできる回文数です。同じ素数を繰り返しても、一個ずつ数えます。[6]
これは、素数そのものという条件を、少数の素数の積という条件まで広げた進展です。**回文素数そのものが無限にあるかは、なお未解決です。**

参照：[6]。この冊子の回文数は、通常の十進法で考えます。

6　196 はリクレル数？

問題

数の桁を左右反転して元の数に足す操作を、十進法で繰り返します。**196 から始めると、いつか回文数になるでしょうか。**永遠に回文数にならない数を**リクレル数**と呼びます。

例：数字を反転して、足してみる

47 は一回、183 は四回で回文になります。表では、各行の足した結果から、次の操作を始めます。

元の数	反転した数	足した結果	回文になったか
47	74	121	はい
183	381	564	まだ
564	465	1029	まだ
1029	9201	10230	まだ
10230	3201	13431	はい

10230 を反転すると、数字の並びは 03201 になります。先頭の 0 は数の値に影響しないので、3201 として足します。回文になったら、ここでの確認は終了します。

196 では、簡単には回文が現れない

最初の数回を計算すると、

$$196 \longrightarrow 887 \longrightarrow 1675 \longrightarrow 7436 \longrightarrow 13783 \longrightarrow \cdots$$

となります。例えば最初の操作は $196 + 691 = 887$、次は $887 + 788 = 1675$ です。この範囲ではまだ回文になっていません。ただし、183 の例のように、すぐには現れなくても後で回文になる数があります。

いま分かっていること

196 は計算機でも長く調べられています。Dolbeau らの 2014 年の報告では、計算で現れる数が **6 億桁**に達するまで進めても、回文が現れなかったとされています。これは 6 億**回**という意味ではなく、途中の数が持つ**桁の数**です。[7]

有限のところまで回文が現れないことを確認しても、それより先で現れる可能性は残ります。**196 が永遠に回文にならないかは、なお未解決です。**そのため、196 を確定したリクレル数とはせず、候補として紹介します。

参照：[7]。6 億桁は 2014 年の報告に記載された規模で、現在の最高記録という意味ではありません。

7　コラッツ予想

問題

正の整数から始め、**偶数なら 2 で割り、奇数なら 3 倍して 1 を足す**という操作を繰り返します。どんな正の整数から始めても、いつか必ず 1 に到達するでしょうか。これがコラッツ予想です。

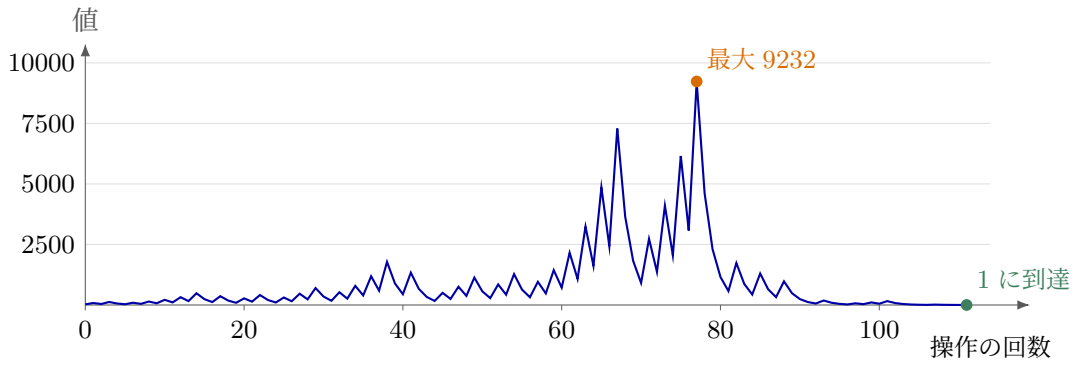
例：12 から始める場合と、27 から始める場合

12 から始めると、次のように 1 へ到達します。

$$12 \to 6 \to 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

1 になった後も操作を続けると $1 \to 4 \to 2 \to 1$ を繰り返します。「1 に到達する」というのは、この繰り返しに入ることです。

27 から始めると、1 までに 111 回の操作が必要で、途中の最大値は 9232 です。下のグラフは、途中の値をすべて計算して描いたものです。横軸は操作の回数、縦軸はその時点の値を表します。



27 から始めた一例です。ほかの出発点での振る舞いを、そのまま示すものではありません。

途中で値が大きく増えても、そのまま増え続けるとは限りません。この例では、大きく上下した後で 1 に到達します。操作は簡単ですが、すべての出発点について、このように戻ってくることを保証するのが難しいところです。

いま分かっていること

タオは 2019 年、途中の値が出発点の桁数以下まで下がる出発点が、特別な数え方で「ほとんどすべて」を占めることを示しました。例えば、100 桁の数から途中で 100 以下まで下がる、といった大幅な減少を意味します。[8]

この数え方を**対数密度**といい、出発点 n に $1/n$ の重みを付けます。その重みで測った割合が、調べる範囲を広げると 1 に近づくという主張です。

「ほとんどすべて」には、例外がないという意味までは含まれません。すべての出発点が 1 に到達することも、まだ示されていません。**コラッツ予想全体は、なお未解決です。**

参照：[8]。グラフの 111 回は、偶数・奇数それぞれの操作を一回ずつ数えた値です。

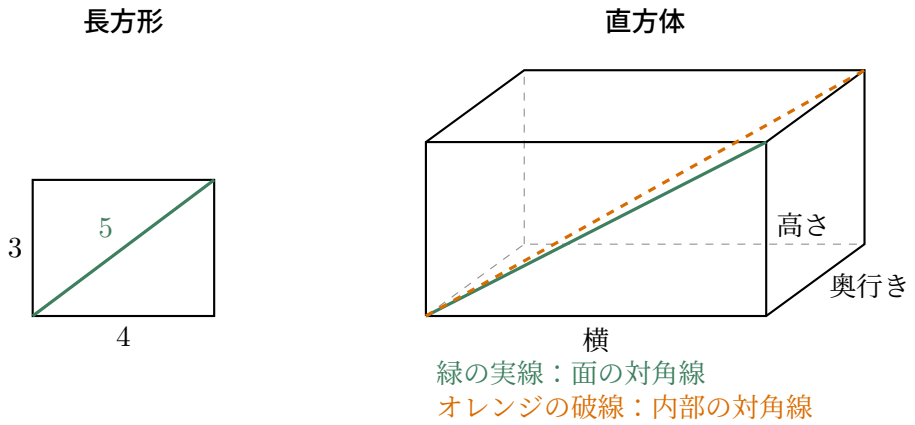
8　完全直方体は存在する？

問題

辺の長さがすべて整数の直方体を考えます。**各面の対角線と、立体の内部を通る対角線も、すべて整数の長さになる直方体は存在するでしょうか。**この条件を全部満たすものを**完全直方体**と呼びます。長さは正の整数で、0 は使いません。

例の準備：長方形では、対角線も整数にできる

横 4、縦 3 の長方形では、対角線の長さは 5 です。三平方の定理による $3^2+4^2=5^2$、つまり $9+16=25$ から確かめられます。辺の長さが整数でも、対角線が整数になるとは限らず、横 1、縦 1 の正方形の対角線は $\sqrt{2}$ です。



右図の灰色の破線は、奥に隠れた辺です。図は対角線の位置を示す模式図です。

直方体では、条件が増える

直方体には「横と奥行き」「横と高さ」「奥行きと高さ」の三種類の面があります。それぞれの面の対角線が、整数になる必要があります。反対側の面は同じ大きさなので、対角線の長さも同じです。

さらに、立体の内部を通って、反対側の頂点へ届く対角線も調べます。横・奥行き・高さを a, b, c とすれば、その長さ d は

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

を満たします。面の対角線の長さが全部整数になっても、この最後の対角線まで整数になるとは限りません。

次のページで確かめる例

辺 44、117、240 では、三種類の面の対角線がすべて整数になります。次頁で、内部の対角線まで整数になるかを計算します。 [9]

8　完全直方体：例と、いま分かっていること

例：面の対角線が整数になる直方体

辺の長さを 44、117、240 とします。三平方の定理を使って、各面の対角線の長さを調べます。次の表では、右の列の数を二乗すると、中央の列の計算結果と一致します。

面の二つの辺	二乗の和	面の対角線
44 と 117	$44^2 + 117^2 = 15625 = 125^2$	125
44 と 240	$44^2 + 240^2 = 59536 = 244^2$	244
117 と 240	$117^2 + 240^2 = 71289 = 267^2$	267

このように、辺と面の対角線が全部整数になる直方体は、**オイラーの直方体（Euler brick）**とも呼ばれます。展示の図は、この例に対応しています。

内部の対角線も、整数になるか

内部の対角線の長さ d については、

$$d^2 = 44^2 + 117^2 + 240^2 = 73225$$

です。近くの平方数と比べると、

$$270^2 = 72900 \ < \ 73225 \ < \ 73441 = 271^2$$

なので、$270 < d < 271$ です。したがって、d は整数ではありません。この直方体は、面の対角線まで条件を満たしますが、**完全直方体ではありません。**「ほとんど満たす例」と「すべて満たす例」の間に、最後の条件が残っています。

いま分かっていること

辺と面の対角線まで整数になる例は、上の三つの辺を同じ正の整数倍にするだけでも無限に作れます。85、132、720 のような別の形の例もあります。

以前から、**縦と横の比が 3 対 4 の長方形は、完全直方体の面にはなれない**ことが分かっています。対角線を整数にできる面でも、ほかの長さまで全部整数になるとは限りません。2024 年の de Grey らは、使えない縦横比をさらに多数調べました。こうした条件で候補を除き、残るものに探索を絞ります。[9]

完全直方体はまだ見つかっておらず、存在しないという証明もありません。一つでも条件を全部満たす例が見つかれば「存在する」と決着します。「存在しない」と言うには、どれほど大きな辺の組も含めて、可能性をすべて否定する理由が必要です。

参照：[9]。三平方の定理による表の計算で、各対角線の性質を確認できます。

参考文献・研究状況の確認日

この冊子は、展示の七つの問題を一般向けに説明するための資料です。研究状況は **2026 年 10 月 12 日** に確認した公開資料に基づきます。本文の参照番号は下の番号に対応します。青い文字から、論文や公開原稿を開けます。2026 年の双子素数に関する原稿は、公表時の位置づけも記しています。

[1] D. H. J. Polymath, *Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes*, Research in the Mathematical Sciences 1, 12 (2014). 差 246 以下の素数の組が無限にあるという結果。張益唐・メイナードの仕事からの経緯も参照。
https://arxiv.org/abs/1407.4897

[2] Julia Stadlmann, *Bounded gaps between primes*, arXiv:2608.31126, 2026 年 8 月 31 日公開のプレプリント。差 240 以下の結果。
https://arxiv.org/abs/2608.31126

[3] François Charton ほか, *A New Bound for Small Gaps Between Primes*, 2026 年 9 月 3 日付の予備的草稿。差 212 以下の結果を記載。本文の 212・240 は、現在の最高記録という意味では使っていません。
https://primegaps.axiommath.ai/bgp212.pdf

[4] Harald Andrés Helfgott, *The ternary Goldbach problem*, arXiv:1501.05438 (2015). 2013 年の証明原稿を発展させた書籍原稿。奇数を三つの素数の和で表す結果。
https://arxiv.org/abs/1501.05438

[5] Adrian W. Dudek and Daniel R. Johnston, *Almost primes between all squares*, Journal of Number Theory 278 (2026), 726–745. プレプリント公開は 2025 年。素因数を重複込みで 4 個以内にした結果。
https://arxiv.org/abs/2501.18048

[6] Aleksandr Tuxanidy and Daniel Panario, *Infinitude of palindromic almost-prime numbers*, International Mathematics Research Notices 2024, no.18, 12466–12503. プレプリント公開は 2023 年。素因数を重複込みで 6 個以内にした結果。
https://arxiv.org/abs/2307.16637

[7] Romain Dolbeau, Monika Kwiatkowska and Lukasz Swierczewski, *The p196_mpi Implementation of the Reverse-And-Add Algorithm for the Palindrome Quest*, International Supercomputing Conference 2014 の研究ポスター。6 億桁への到達を報告。公開資料名：`isc2014-2.pdf`。
https://open.icm.edu.pl/handle/123456789/4704

[8] Terence Tao, *Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values*, Forum of Mathematics, Pi 10 (2022), e12. 初版公開は 2019 年。本文の「ほとんどすべて」は対数密度による主張。出発点の桁数以下という説明は、この定理から得られる一つの帰結。
https://arxiv.org/abs/1909.03562

[9] Aubrey de Grey, Philip Gibbs and Louie Helm, *Novel required properties of, and efficient algorithms to seek, perfect cuboids*, arXiv:2401.06784 (2024). 完全直方体の定義、候補の条件、探索方法に関する研究。
https://arxiv.org/abs/2401.06784

付録 A　ベルトランの定理の証明

ベルトランの定理

どんな正の整数 n に対しても、$n < p \leq 2n$ を満たす素数 p が存在します。

例えば $n = 10$ なら、10 より大きく 20 以下の範囲に 11、13、17、19 という素数があります。この定理は、どれほど大きい n についても、その範囲に素数が少なくとも一つあると保証します。

証明では、二項係数 $B = \binom{2n}{n}$ を調べます。これは非常に大きな整数ですが、もし n と $2n$ の間に素数がなければ、その素因数から作れる大きさには厳しい上限が付きます。その上限が必要な大きさに届かないことを示します。組合せ・素因数分解・指数・数学的帰納法を使い、微分や対数は使いません。

A.1　二項係数の意味と、その大きさ

二項係数 $\binom{r}{k}$ は、r 個のものから k 個を選ぶ方法の数です。その値は

$$\binom{r}{k} = \frac{r!}{k!(r-k)!}$$

で計算できます。ここで $r! = 1 \cdot 2 \cdots r$、$0! = 1$ です。例えば

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

なので、6 個から 3 個を選ぶ方法は 20 通りあります。

r 個のものをそれぞれ「選ぶ」「選ばない」の二通りに分けると、選び方は全部で 2^r 通りです。それを選んだ個数ごとに数えれば、$\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} = 2^r$ となります。特に $r = 2n$ とすると、

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n. \tag{A.1}$$

この和の中では、中央の $B = \binom{2n}{n}$ が最大です。その理由は、隣り合う項の比が

$$\frac{\binom{2n}{k+1}}{\binom{2n}{k}} = \frac{2n-k}{k+1}$$

となるからです。$0 \leq k < n$ では、この比は 1 より大きく、中央までは値が増えます。また、$\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k}$ なので、中央を過ぎると同じ順序を逆にたどって減ります。

式 (A.1) の両端の項は、それぞれ 1 です。残りの $2n-1$ 個の項はすべて B 以下なので、

$$4^n \leq (2n-1)B + 2.$$

さらに $B \geq 2$ であることから、$(2n-1)B + 2 \leq 2nB$ です。したがって、

$$\boxed{\frac{4^n}{2n} \leq B} \tag{A.2}$$

が得られました。これが、二項係数の大きさの下限です。

A.2　小さい素数を全部掛けた積の上限

実数 $x \geq 2$ に対して、

$$T(x) = \prod_{\substack{p \leq x \\ p \text{ は素数}}} p$$

と書きます。これは、x 以下の素数を一つずつ掛けた積です。例えば、$T(10) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ です。素数が一つもない範囲の積は 1 とします。

次の不等式を証明します。

$$\boxed{T(x) \leq 4^{x-1} \qquad (x \geq 2)} \tag{A.3}$$

まず、整数 x について数学的帰納法で示します。$x = 2$ では、$T(2) = 2 \leq 4$ なので成立します。

続いて、2 から $N-1$ までのすべての整数について成立すると仮定し、整数 $N \geq 3$ の場合を考えます。N が素数でなければ、新しい素数は増えないので、

$$T(N) = T(N-1) \leq 4^{N-2} < 4^{N-1}.$$

N が素数なら、2 より大きい素数は奇数なので、$N = 2m+1$ と書けます。このとき、

$$T(2m+1) = T(m+1) \prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p.$$

帰納法の仮定から、$T(m+1) \leq 4^m$ です。

後半の積は、二項係数

$$\binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$$

を使って評価します。$m+1 < p \leq 2m+1$ を満たす素数 p は、分子の階乗には現れますが、分母の階乗には現れません。したがって、この二項係数は p で割り切れます。異なる素数がそれぞれ割り切るなら、その積でも割り切れるため、

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m}.$$

また、$\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$ であり、この二つは、和 $\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1}$ に含まれています。すべての項が正なので、

$$2\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m+1}, \qquad \binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m}.$$

以上を合わせると、

$$T(2m+1) \leq 4^m 2^{2m} = 4^{2m} = 4^{N-1}.$$

これで整数について証明できました。

実数 $x \geq 2$ については、x 以下の最大の整数を N とすれば、$T(x) = T(N) \leq 4^{N-1} \leq 4^{x-1}$ です。したがって式 (A.3) が成立します。

A.3　二項係数に含まれる素数を数える

素因数分解では、同じ素数が何回掛けられているかが重要です。例えば $72 = 2^3 \cdot 3^2$ では、素数 2 は 3 回、素数 3 は 2 回現れています。

階乗 $r!$ に、素数 p が何回現れるかを数えましょう。p の倍数は少なくとも一つの因子 p を持ち、p^2 の倍数はさらにもう一つ、p^3 の倍数はさらにもう一つ持ちます。このように数えると、その回数は

$$\left\lfloor \frac{r}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{p^3} \right\rfloor + \cdots$$

です。記号 $\lfloor y \rfloor$ は、y 以下の最大の整数を表します。例えば $\lfloor 10/3 \rfloor = 3$ は、1 から 10 までに 3 の倍数が三つあることに対応します。

例えば $10!$ に含まれる因子 2 の個数は、

$$\left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{8} \right\rfloor = 5 + 2 + 1 = 8$$

です。さて、$B = (2n)!/(n!)^2$ に素数 p が現れる回数を e_p と書くと、分子の回数から分母の回数を引いて、

$$e_p = \sum_{j \geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^j} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor \right) \tag{A.4}$$

となります。ここで、各括弧の中は 0 か 1 です。実際、$y = a + t$ と書き、a を整数、$0 \leq t < 1$ とすると、

$$\lfloor 2y \rfloor - 2\lfloor y \rfloor = \lfloor 2t \rfloor.$$

$0 \leq 2t < 2$ なので、右辺は 0 か 1 になります。

また、$p^j > 2n$ なら、式 (A.4) のその項は 0 です。$p \leq 2n$ とし、$p^L \leq 2n$ を満たす最大の整数 L を考えると、0 でない可能性がある項は高々 L 個なので、$e_p \leq L$ です。したがって、

$$\boxed{p^{e_p} \leq p^L \leq 2n} \tag{A.5}$$

となります。**一つの素数が二項係数の中で受け持つ部分は、せいぜい** $2n$ です。さらに $p > \sqrt{2n}$ なら $p^2 > 2n$ なので、式 (A.4) には最初の項しか残りません。この範囲の素数は高々 1 回しか現れません。

A.4　大きい数の場合：素数がないと仮定する

ここからは $n \geq 1024$ とします。反証法を使い、$n < p \leq 2n$ を満たす素数が一つもないと仮定します。

まず、$2n/3 < p \leq n$ を満たす素数を調べます。この範囲では、

$$2 \leq \frac{2n}{p} < 3, \qquad 1 \leq \frac{n}{p} < \frac{3}{2}$$

なので、

$$\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = 2 - 2 = 0.$$

さらに、$n \geq 1024$ なら $p^2 > (2n/3)^2 > 2n$ なので、式 (A.4) の二番目以降の項もすべて 0 です。したがって、$2n/3 < p \leq n$ **の素数は** B **を割りません。**

分子に現れた因子 p が、分母の因子 p と打ち消し合うためです。例えば $n = 10$、$p = 7$ では、分子の 20! にある 7 と 14 から二つの因子 7 が現れますが、分母の二つの 10! にも一つずつ現れ、全部消えます。

したがって、B の素因数として残り得るのは、次の二つの範囲だけです。

素数の範囲	残り得る因子
$p \leq \sqrt{2n}$	同じ素数が何回も現れ得る。ただし $p^{e_p} \leq 2n$。
$\sqrt{2n} < p \leq 2n/3$	各素数は高々 1 回現れる。

$2n/3 < p \leq n$ の素数は打ち消され、$n < p \leq 2n$ の素数は、ないと仮定しています。$2n$ より大きい素数も、分子の階乗に現れません。

ここで $M = \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ とおきます。最初の範囲にある素数の個数は、1 から M までの整数の個数を超えないので、M 個以下です。一つの素数の寄与は $2n$ 以下だから、その積は $(2n)^M$ 以下です。

二番目の範囲の積は、$2n/3$ 以下の素数をすべて掛けた積以下です。式 (A.3) から、$T(2n/3) \leq 4^{2n/3-1} < 4^{2n/3}$ となります。よって、

$$B < (2n)^M 4^{2n/3}.$$

一方、式 (A.2) から $B \geq 4^n/(2n)$ でした。合わせて整理すると、

$$\boxed{4^{n/3} < (2n)^{M+1}} \tag{A.6}$$

となります。次に、この不等式が $n \geq 1024$ では成立しないことを示します。

A.5　最後の大小比較も、帰納法で示す

先に、整数 $k \geq 11$ について、

$$\boxed{\sqrt{2^k} > 3k + 4} \tag{A.7}$$

を証明します。$(4/3)^2 = 16/9 < 2$ なので、$\sqrt{2} > 4/3$ です。$k = 11$ では、

$$\sqrt{2^{11}} = 32\sqrt{2} > 32 \cdot \frac{4}{3} = \frac{128}{3} > 37 = 3 \cdot 11 + 4.$$

ある $k \geq 11$ について式 (A.7) が成立すると仮定すると、

$$\sqrt{2^{k+1}} = \sqrt{2}\sqrt{2^k} > \frac{4}{3}(3k + 4) = 4k + \frac{16}{3}.$$

さらに、$4k + 16/3 - (3k + 7) = k - 5/3 > 0$ なので、$\sqrt{2^{k+1}} > 3k + 7 = 3(k + 1) + 4$ です。これで、すべての $k \geq 11$ について式 (A.7) が成立しました。

さて、$x = 2n$、$s = \sqrt{x}$ とおきます。$n \geq 1024$ なら $x \geq 2048 = 2^{11}$ なので、$2^k \leq x < 2^{k+1}$ を満たす整数 $k \geq 11$ を選べます。これは、x が隣り合う二つの 2 の累乗の間に入る、ということです。

式 (A.7) から、$s = \sqrt{x} \geq \sqrt{2^k} > 3k + 4$、すなわち $s - 1 > 3(k + 1)$ です。両辺に正の数 $s + 1$ を掛けると、

$$x - 1 = s^2 - 1 > 3(k + 1)(s + 1).$$

$M = \lfloor s \rfloor$ なので $M + 1 \leq s + 1$ です。したがって、$x/3 > (k + 1)(M + 1)$ となります。また $x < 2^{k+1}$ なので、

$$x^{M+1} < (2^{k+1})^{M+1} = 2^{(k+1)(M+1)} < 2^{x/3}.$$

$x = 2n$ を戻すと、

$$\boxed{(2n)^{M+1} < 2^{2n/3} = 4^{n/3}} \tag{A.8}$$

です。式 (A.6) と式 (A.8) は、大小関係が正反対です。これは矛盾です。したがって、「$n < p \leq 2n$ に素数がない」という仮定が誤りでした。これで、$n \geq 1024$ の場合を証明できました。

A.6　残る小さい場合を確認する

最後に $1 \le n \le 1023$ を確認します。使うのは、次の素数の列です。

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 13,\ 23,\ 43,\ 83,\ 163,\ 317,\ 521,\ 1031.$$

これらが素数であることは、平方根以下の素数で割って調べられます。合成数 a が $a = bc$、$b, c \ge 2$ と書けたなら、b, c の少なくとも一方は $\sqrt{a}$ 以下です。両方とも $\sqrt{a}$ より大きければ、積が a より大きくなってしまうからです。その小さい因子には素因数があるので、合成数は必ず平方根以下の素数で割り切れます。

列の数を調べる割り算は、次のとおりです。余りがすべて 0 でないことを確認できます。

数	割ってみる素数	余り（左と同じ順序）
2、3	平方根以下に素数がない	—
5、7	2	どちらも 1
13	2、3	1、1
23	2、3	1、2
43	2、3、5	1、1、3
83	2、3、5、7	1、2、3、6
163	2、3、5、7、11	1、1、3、2、9
317	2、3、5、7、11、13、17	1、2、2、2、9、5、11
521	2、3、5、7、11、13、17、19	1、2、1、3、4、1、11、8
1031	2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31	1、2、1、2、8、4、11、5、19、16、8

この列では、次の数が、前の数の 2 倍より小さくなっています。例えば、

$$317 < 2 \cdot 163, \qquad 521 < 2 \cdot 317, \qquad 1031 < 2 \cdot 521$$

です。他の隣り合う数についても確認できます。

$2 \le n \le 1023$ とし、列の中で初めて n より大きくなる素数を p、その直前の素数を q とします。最後の 1031 が n より大きいので、必ずそのような p があります。p を初めて n より大きくなる素数として選んだので、$q \le n < p$ です。列の性質から $p < 2q$ でもあるため、

$$n < p < 2q \le 2n.$$

これで求める素数が見つかりました。$n = 1$ の場合は $p = 2$ とすれば、$1 < 2 \le 2$ となります。

以上で、すべての正の整数 n について、

$$\boxed{n < p \le 2n \text{ を満たす素数 } p \text{ が存在する}}$$

ことを証明できました。 □

A.7　ルジャンドル予想へ

ベルトランの定理を 100 に適用すると、$100 < p \leq 200$ に素数があると保証できます。ルジャンドル予想が求めるのは、さらに狭い $100 < p < 121$ という区間にも素数があることです。そして、これが 100 と 121 だけでなく、すべての隣り合う平方数 n^2、$(n+1)^2$ について成り立つと予想しています。

今回証明したベルトランの定理を出発点に、「必ず素数があると保証できる区間を、どこまで狭くできるか」という問いへ進めます。

付録の参考文献

[A1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, 6th edition, Springer, 2018, Chapter 2, “Bertrand’s postulate”. 最後の大小比較は、微分を使わずに数学的帰納法で読めるように書き換えています。
https://doi.org/10.1007/978-3-662-57265-8_2

[A2] P. Erdős, *Beweis eines Satzes von Tschebyschef*, Acta Sci. Math. (Szeged) 5 (1932), 194–198. 二項係数を用いた証明の原論文。
https://acta.bibl.u-szeged.hu/13396/