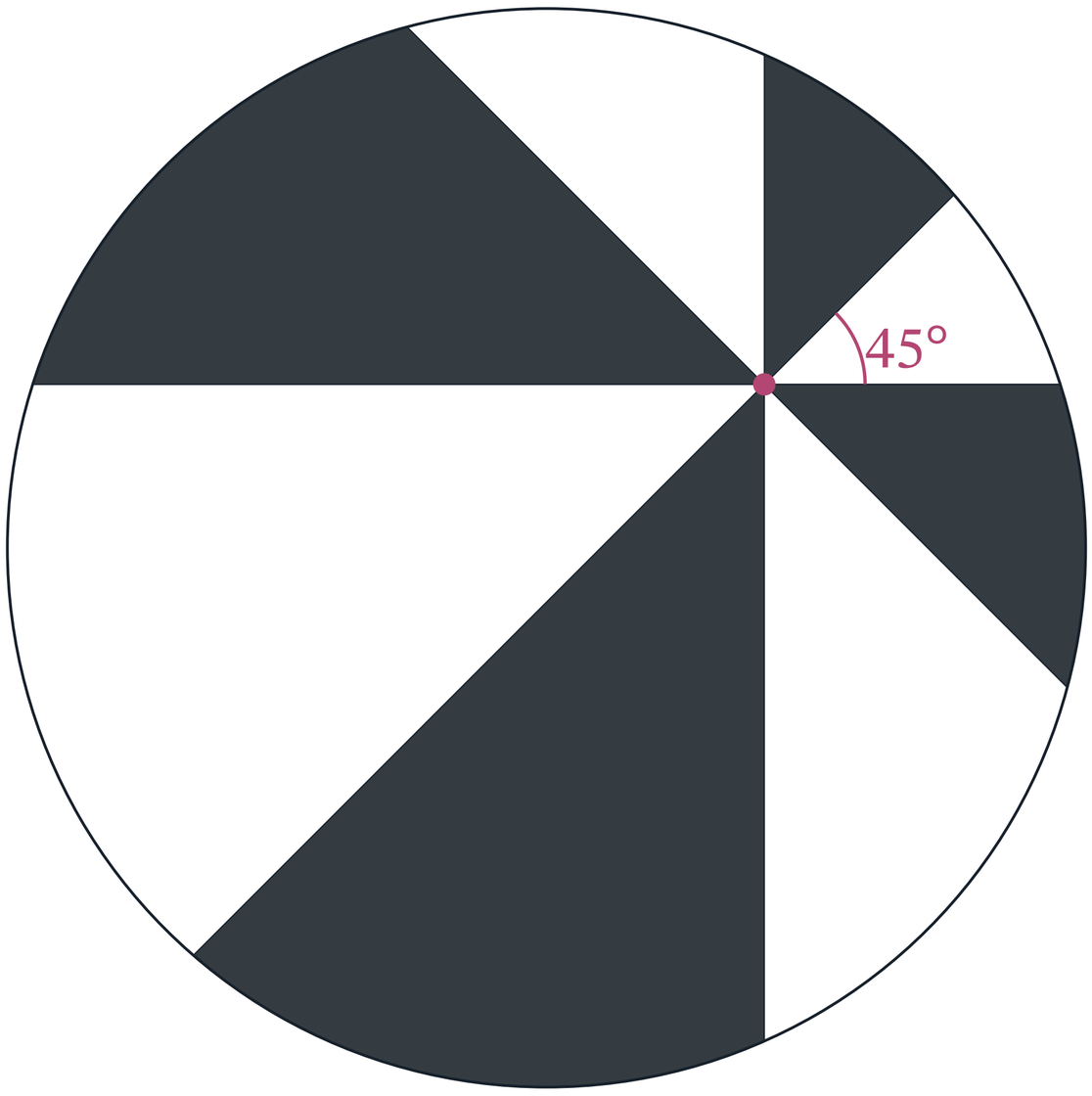
ピザ定理

3 通りの証明

切る位置がずれても、半分ずつ？



円の内側の一点を通る
4 本の直線で、
45° ずつ 8 切れにします。

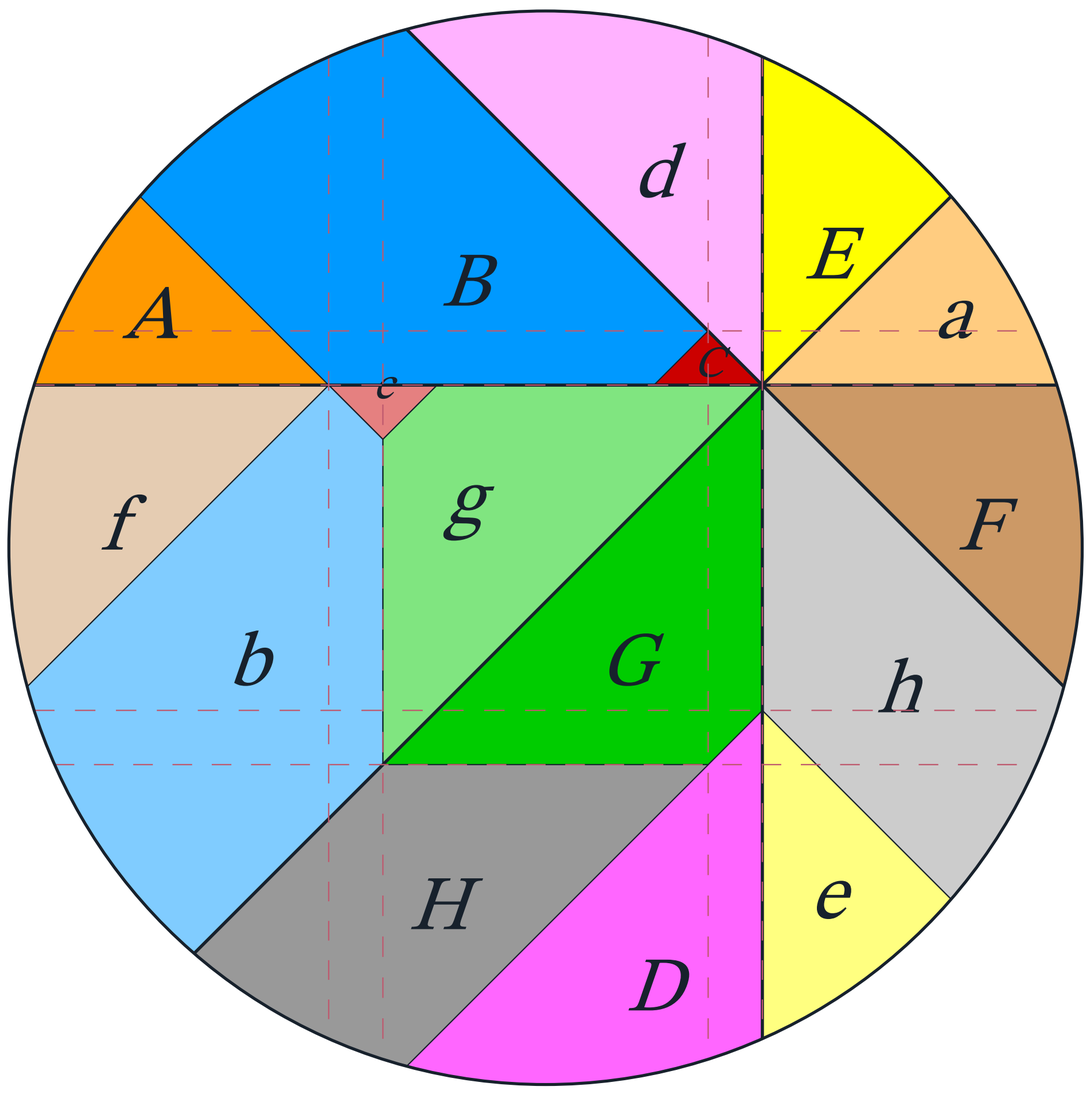
白と黒を交互に取ります。

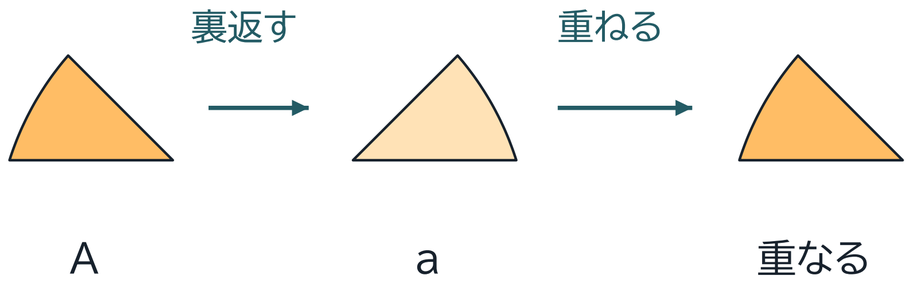
白 4 切れの合計
＝ 黒 4 切れの合計

一切れずつの大きさは違っても、
合計すると半分ずつになります。

証明 1　同じ形の部分を対応させる

大文字：黒の取り分　小文字：白の取り分





裏返すと、A と a が
ぴったり重なります。
B と b、C と c… も同じ。

対応する部分を足すと、
大文字と小文字の合計は同じ。

同じ面積の部分を組み合わせるので、半分ずつです。

図: Cmglee / Wikimedia Commons, CC BY-SA 4.0 (編集)

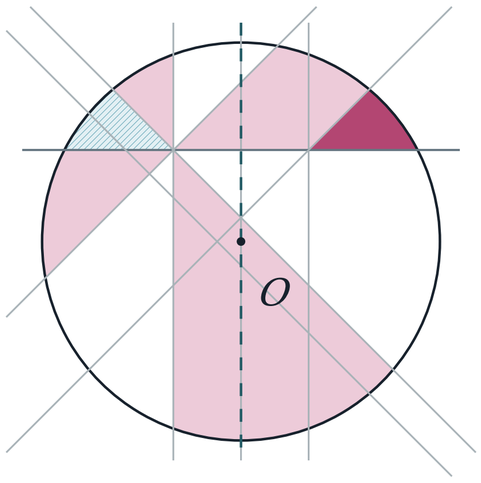
ピザ定理

証明２・３

証明２　同じ面積の部分を交換する〈Ｔ院生〉

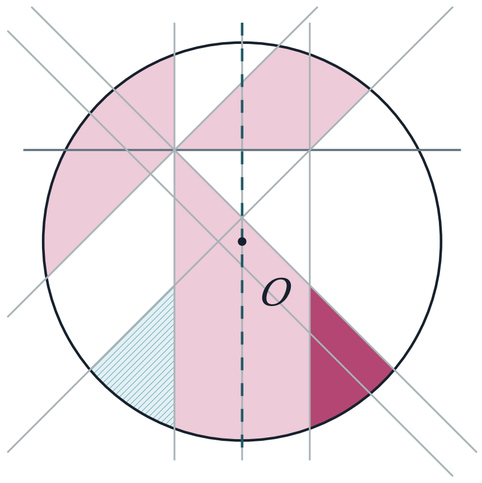
赤い部分を消し、同じ面積の青い部分を塗ります。

１　左右に裏返す



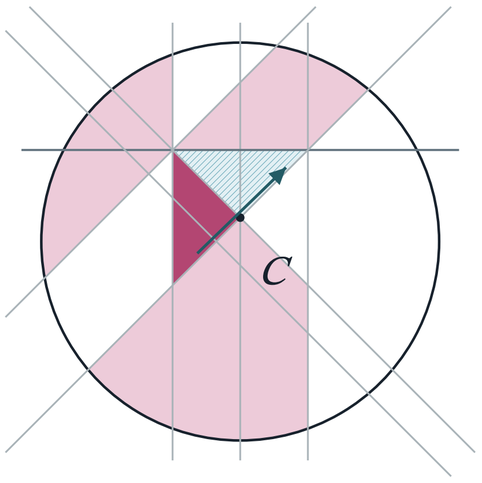
赤と青が重なります。

２　下の部分も裏返す



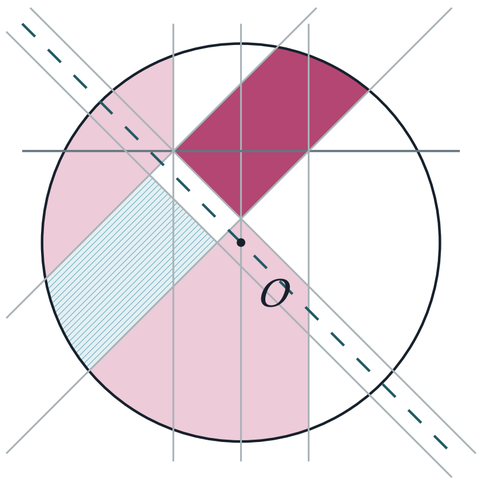
下の赤も、左下の青へ。

３　三角形を 90° 回す



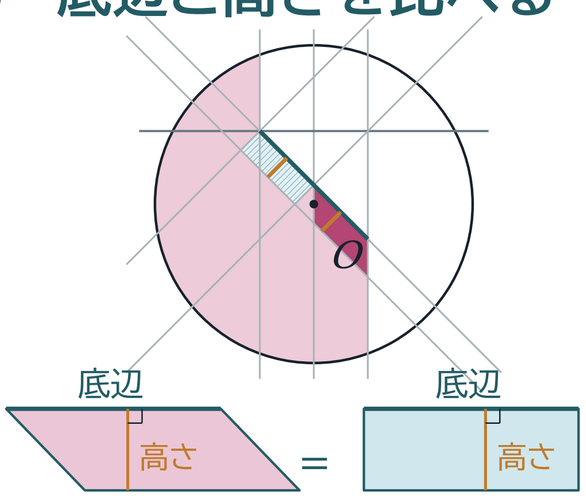
中心 C のまわりに回転。

４　斜めの直径で裏返す



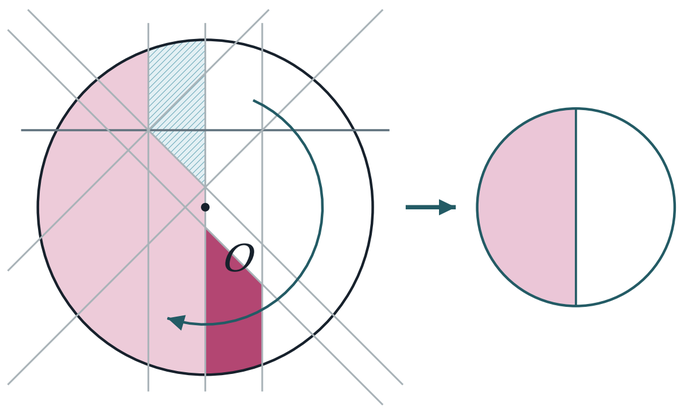
斜めの直径を軸に反転。

５　底辺と高さを比べる



底辺と高さが同じ。

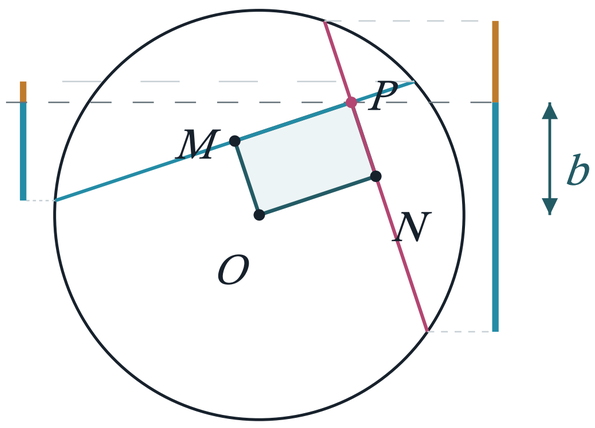
６　残りを 180° 回す



左半分が埋まります。

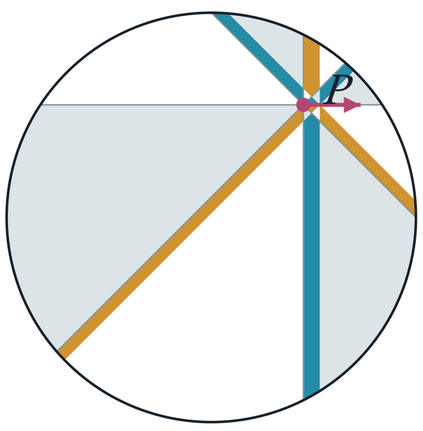
証明３　切る点を動かす〈Ｋ先生〉

S :白４切れの合計面積　a :切る点 P の横の位置　b : P の高さ



O :円の中心　M・N :弦の中点

切る点を少し動かす



青:増える　橙:減る

① 直交する２本の弦についての補題

中心 O と弦の中点を結ぶ線は、弦に垂直です。
そのため、M・N と P で長方形 OMPN ができます。
M と N の高さの合計は、P の高さ b 。
中点で上下が等しいので、２本分の縦の長さは

下向き − 上向き = 2b

② 横へ動かしたときの面積の変化

縦横の切れ目による変化率は 2b 。
斜めの切れ目による変化率は− 2b 。
補題によって、両者が打ち消し合います。

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2b - 2b = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

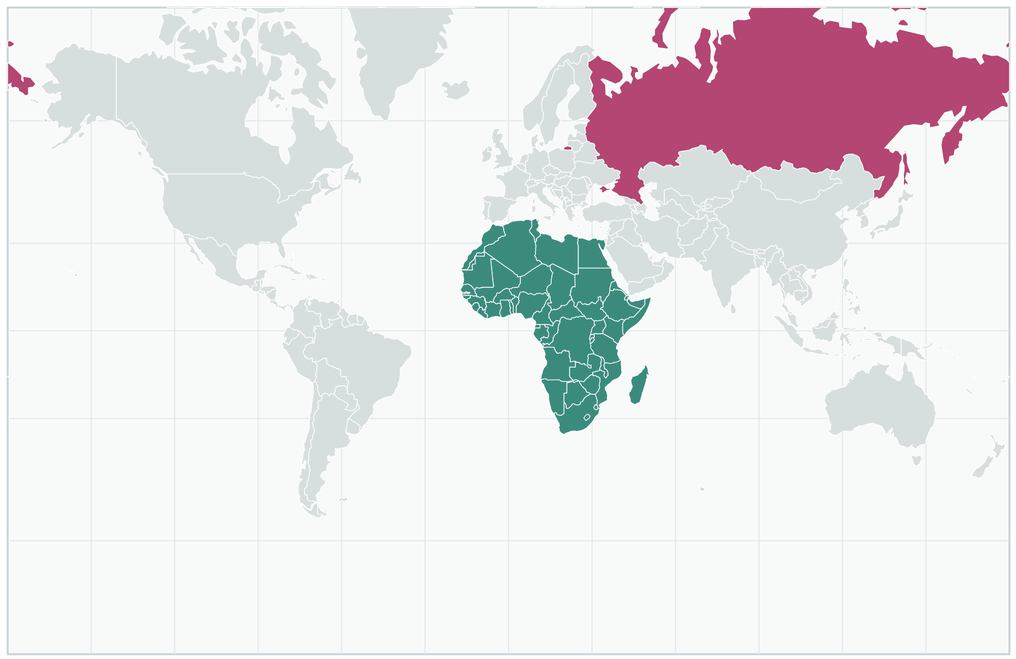
上下の移動も同様。中心なら８等分なので、白の合計は円の半分。

面積を保つ地図

イコールアース図法とランベルトの方法

地図で、地域の大きさの見え方が変わる？

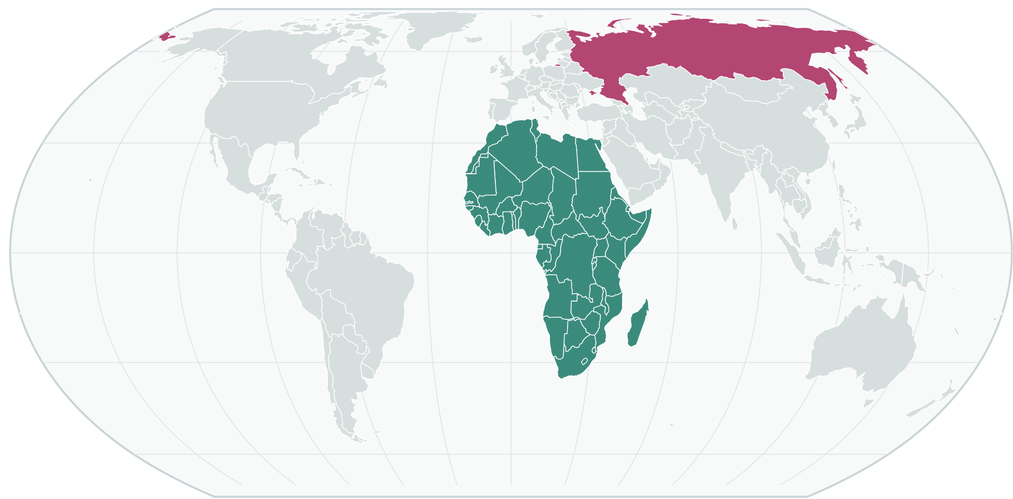
メルカトル



高緯度の地域ほど
大きく見えます。

■ ロシア　■ アフリカ

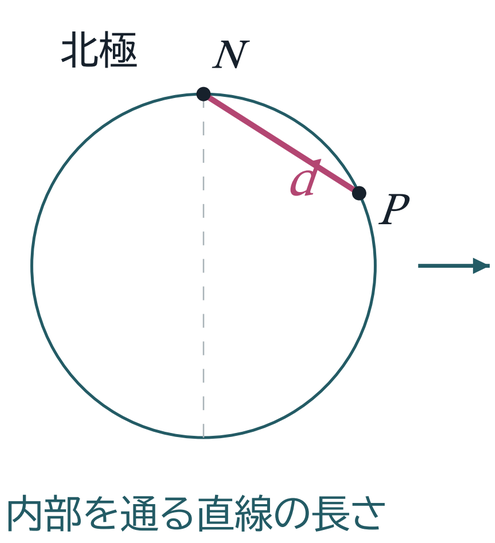
イコールアース



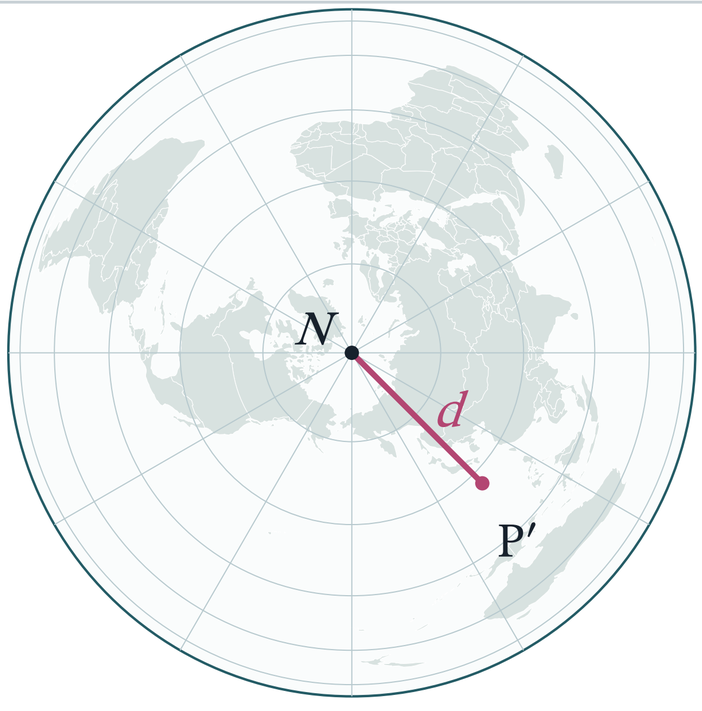
地球上で面積が 2 倍なら、
地図でも 2 倍です。

2026 年 9 月、国連総会は面積の比較が重要な場面で、
イコールアース図法などの利用を勧める決議を採択しました。

ランベルト正積方位図法の作り方と性質



内部を通る直線の長さ



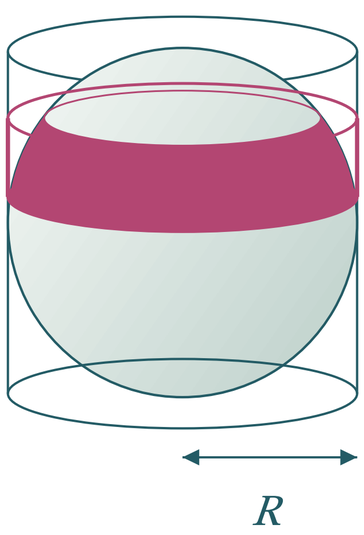
北極 N を中心にして描く地図

① 北極 N を地図の中心に。
② P を同じ経線の方向へ。
③ 中心からの距離を、
　直線 NP の長さ d にします。

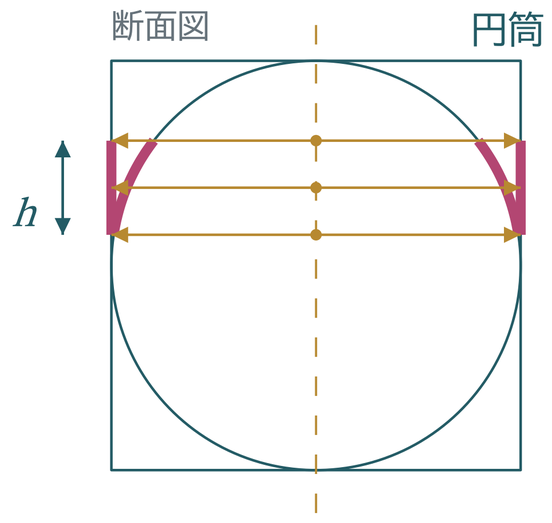
地域の面積比を保ちます。
中心から見た方向も同じ。

経線は放射状、
緯線は同心円になります。

もう一つの写し方：球面の帯を円筒へ



球を囲む円筒



地軸上の光源

球面の点を、同じ経度・
同じ高さの円筒へ写します。
横の伸びと縦の縮みが
打ち消し合い、面積を保ちます。

球面の帯と円筒の帯の面積

$$2\pi R \times h = 2\pi Rh$$

R：球の半径　h：帯の高さ

この面積の対応を、次のポスターの体積計算に使います。

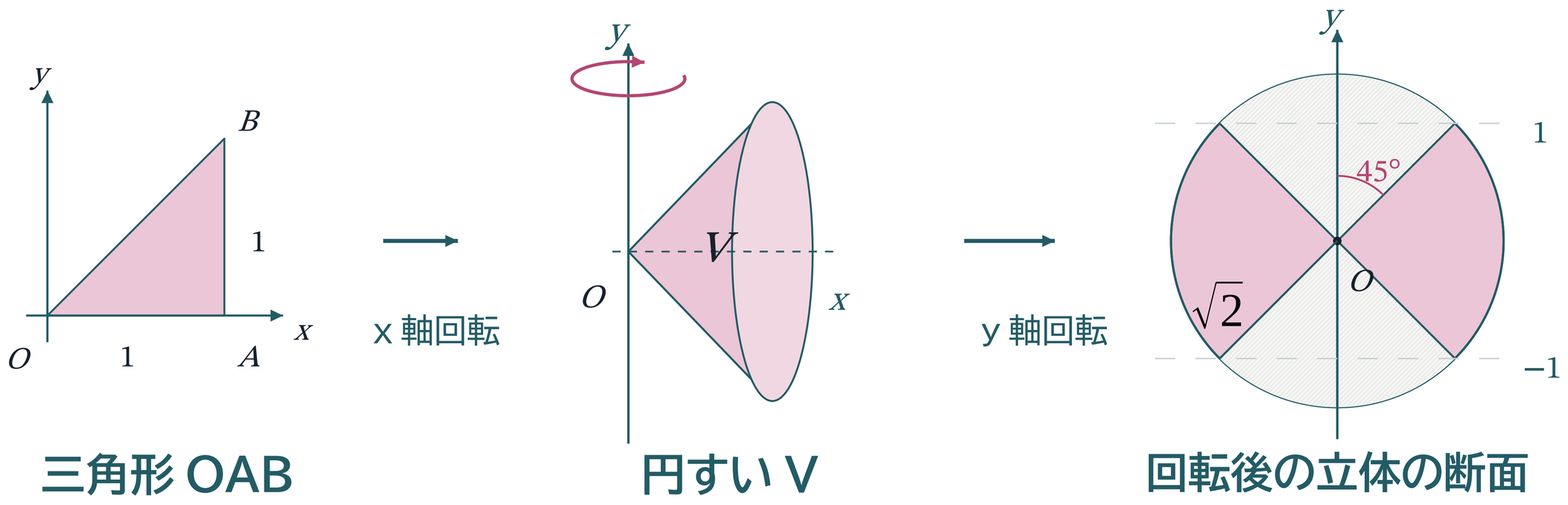
算数で解こう阪大入試

2013 年度 前期理系 第 4 問

三角形 OAB を x 軸のまわりに回して、円すい V を作ります。

さらに V を y 軸のまわりに回します。この立体の体積は？

$O(0,0,0)$,　$A(1,0,0)$,　$B(1,1,0)$



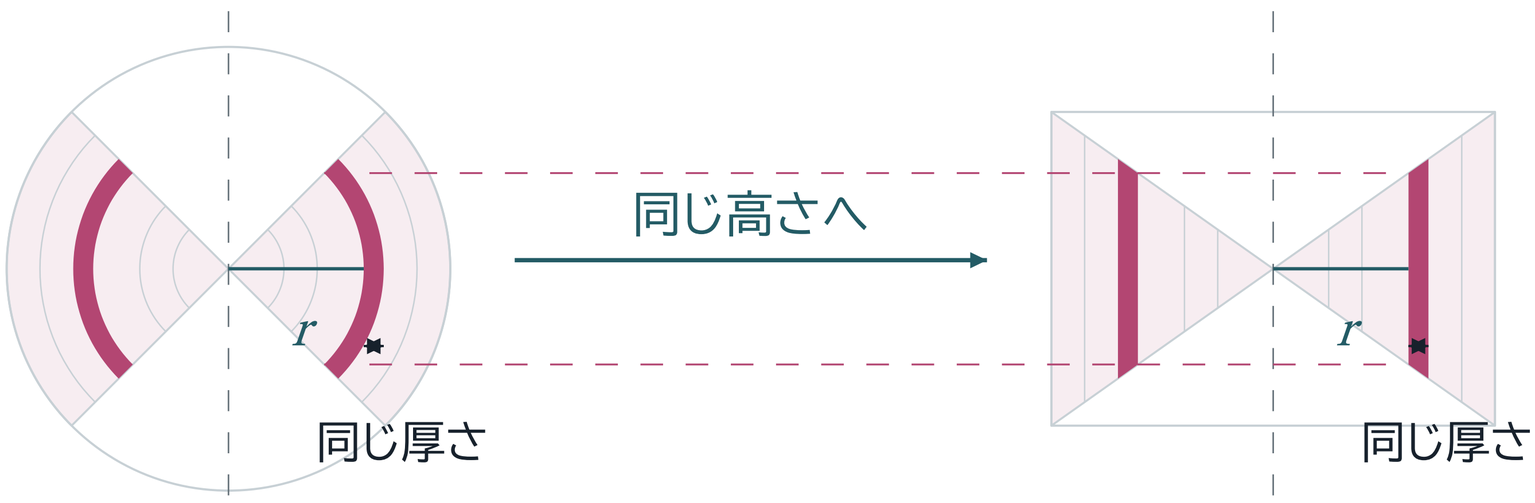
三角形 OAB　　円すい V　　回転後の立体の断面

球から、上下の円すい状の部分を除いた形です。

球を薄い殻に分け、体積を保って写す

玉ねぎのように、中心からの距離ごとに薄い殻に分けます。

各殻を、同じ半径の円筒へ、高さを変えずに写します。



半径 r の薄い殻　　半径 r の円筒の殻

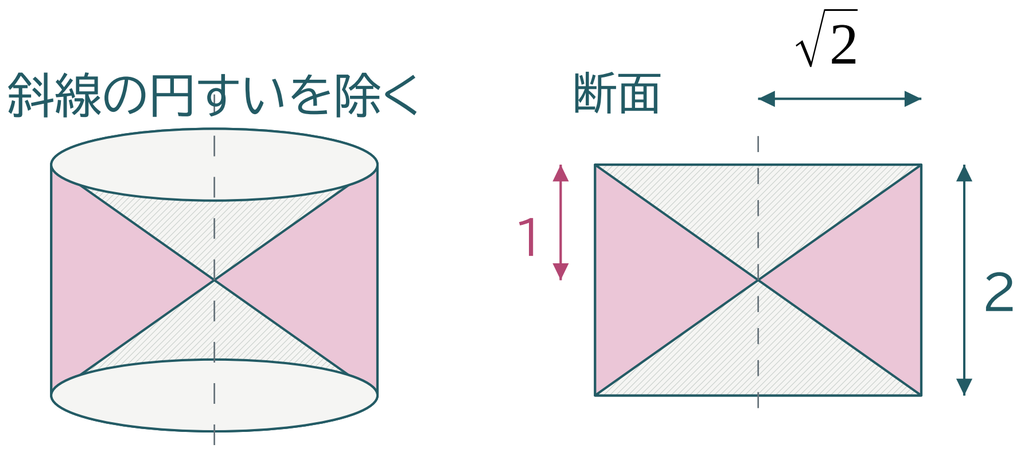
帯の面積と殻の厚さが対応するので、十分薄く重ねると体積も同じ。

殻の半径と端の高さは同じ割合で増えるので、端を結ぶ線は直線です。

この境界を軸のまわりに回すと、上下 2 個の円すいになります。

重ねると、円柱から円すい 2 個を除いた形

外側の殻の端は高さ ±1 。写した後も同じ高さなので、円柱の高さは 2 。



円柱：半径　$\sqrt{2}$　、高さ 2

$$\pi\left(\sqrt{2}\right)^2 \times 2 = 4\pi$$

円すい 2 個：高さは各々 1

$$2 \times \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2 \times 1 = \frac{4\pi}{3}$$

答え　$$4\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$