学祭展示「ピザ定理とランベルトの方法」

解説マニュアル

高校生向け・展示スタッフ用

原資料：菊池和徳・岩井雅崇

2026 年 10 月 12 日改訂版

1　面積と体積を、別の見方で調べよう

円形のピザを、中心からずれた点を通るように切ります。一つ一つの切れは大きさが違うのに、交互に取り分けると二人の取り分は等しくなります。また、丸い地球を平らな地図に描くと形がゆがみますが、面積の割合を保つ地図は作れます。この冊子では、二つの展示の「なぜそうなるのか」を証明します。

証明では、見た目だけで判断せず、**どの部分とどの部分が対応するか、どの長さや面積が等しいか**を確かめます。同じ問題にも、切り貼り・微分・積分など、複数の解き方があります。自分の知っている方法から読み始めて構いません。

この冊子で使う数学

図形の証明では、合同、円周角、三平方の定理、三角比、三角形・平行四辺形・円すいの面積や体積を使います。**微分・積分を使う証明**では、数学 III の一変数の微分と定積分を使います。角度を積分するときには、度ではなく弧度法（ラジアン）を使います。

偏微分や多重積分は前提としません。K 先生の方法も、一方の座標を固定して普通の微分として説明します。

ページ案内

内容	ページ
ピザ定理の主張・切り貼りの証明	2–3
T 院生の 6 段階の証明	4–5
K 先生の証明：直交する弦と面積の変化	6–7
積分による証明・一般化	8–9
円筒図法・球面の帯の面積	10–11
正積方位図法の作り方と性質	12–13
球の体積・ポスターの体積問題・積分による別解	14–17

2　ピザ定理

2.1　切る角度をそろえると、合計の面積がそろう

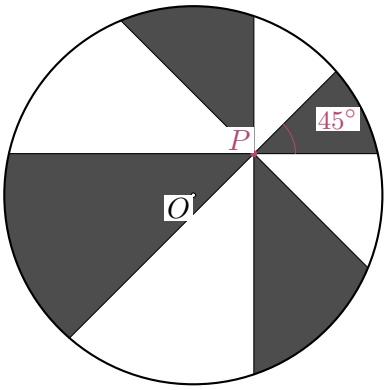
円の中心を O、半径を R とし、円の**内部**に点 P を取ります。P を通る 4 本の直線を、隣り合う切れ目の角度が 45° となるように引きます。これで円は 8 個の部分に分かれます。

ピザ定理（8 切れの場合）

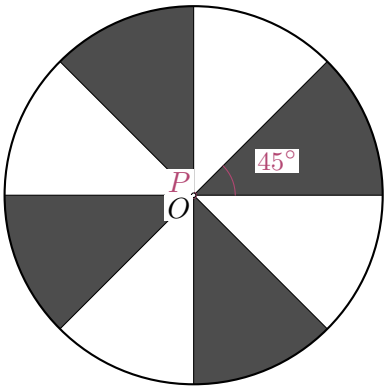
8 個の部分を円周に沿う順に白・黒と交互に塗ると、白の 4 切れの合計面積と、黒の 4 切れの合計面積は等しくなります。どちらも

$$\frac{\pi R^2}{2}$$

です。点 P は円の中心でなくても構いません。



中心からずれた点で切る



中心で切る

点 P が中心なら、8 切れは合同な扇形です。この場合は白も黒も 4 切れずつなので、面積が等しいことはすぐにわかります。問題は、P が中心からずれた場合です。**角度が等しくても、個々の切れの面積は等しくありません。**定理が述べるのは 4 切れの合計についてです。

また、ピザ定理が直接保証するのは**面積**です。厚さと密度が一様なら重さも等しくなりますが、具の置き方が不均一なら具の量まで等しくなるとは限りません。

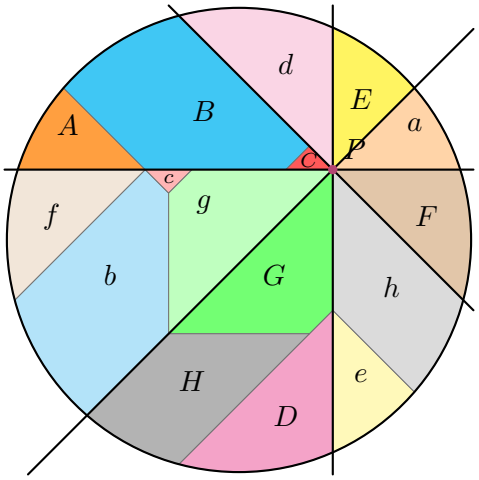
証明で何を確かめればよいか

白と黒をさらに小さな部分に分けて、面積の等しい相手を見つける方法があります。一方、切る点を動かしても白の合計面積が変わらないと示せば、中心で切った場合に帰着できます。以下では、これらの方法と積分による計算を順に紹介します。

2　ピザ定理：細かく分けて合同な相手を探す

切り貼りの証明（Carter–Wagon）

元の 4 本の切れ目に補助線を加え、白と黒をさらに小さな部分へ分けます。大文字は元の白、小文字は元の黒に含まれる部分です。同じ文字どうし、例えば A と a が合同な相手です。色の濃淡と文字で対応を示しています。



大文字の部分と、小文字の部分を一組ずつ比較します。細い線は分割のための補助線です。図は元資料に掲載された Cmglee の図を TikZ で描き直しています。

対応する組	重ねる操作
A, a と F, f	円の中心を通る縦の直線で反転
D, d と E, e	円の中心を通る横の直線で反転
B, b と H, h	円の中心のまわりに 90° 回転
C, c	縦軸上にある対応する頂点の中点のまわりに 180° 回転
G, g	二つの四角形の対応する頂点の中点を中心に 180° 回転

反転・回転は長さと角度を保つので、合同な二つの部分は面積も等しくなります。円弧を含む組では円の中心を通る軸や円の中心のまわりで動かすため、円弧も重なります。円弧を含まない C, c と G, g では、補助線の平行関係と 45° の角度から頂点の対応を確認します。

白を作る小片と黒を作る小片を、これらの組で一つずつ対応させられます。したがって、小片の面積の等式をすべて足すと、白と黒の合計面積が等しくなります。図中の補助線は切る点の位置に合わせて引きます。境界が重なって面積 0 となる小片があっても、面積の等式は変わりません。

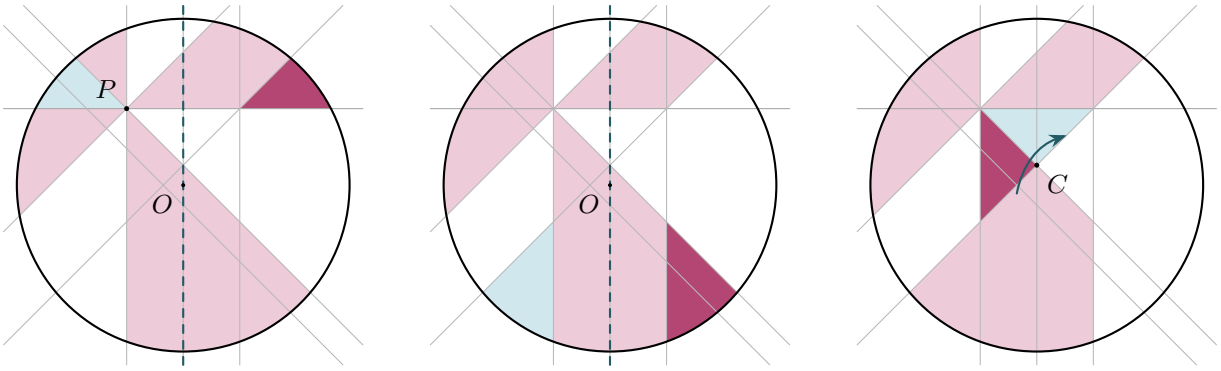
2　ピザ定理：同じ面積の部分を交換する〈T 院生〉

前半：反転と回転で、色付きの部分を移す

この方法では、色付きの 4 切れを少しずつ交換して、最後に半円を作ります。**濃い赤を消して、同じ面積の青を塗る**ので、色付きの合計面積は変わりません。薄い赤は、それまでに色が付いている部分です。

図全体を回転・反転し、必要なら二つの色を交換して、円の中心を $O(0,0)$、切る点を $P(-a,b)$ とします。$0 \le a \le b$ としてよく、$a^2+b^2 < R^2$ です。元の切れ目に平行な補助線を引き、$c=b-a$、$C=(0,c)$ とおきます。

1　右上を反転　　**2　右下も反転**　　**3　三角形を回転**



1　右上の赤を、縦の直径で反転する。図 1 の赤い部分を y 軸について反転すると、左上の青い部分になります。反転では円も円自身に移るので、円弧の部分も対応します。赤と青が合同であるため、交換しても合計面積は変わりません。

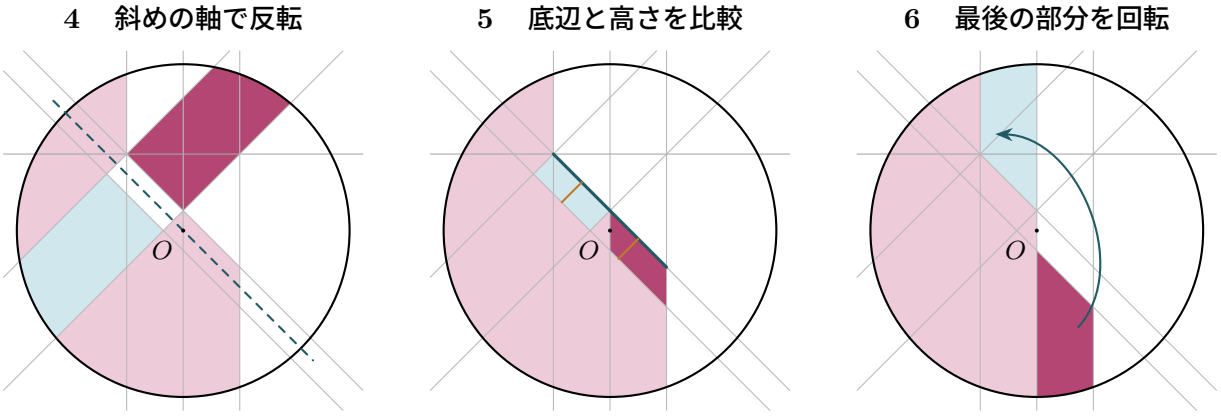
2　右下の赤も、同じ縦の直径で反転する。図 2 では下側の円弧を含む部分を交換します。これも赤の境界線を反転すると青の境界線になり、円弧も重なります。1 回目の交換後に残った右下の赤を消し、左下の青を塗ります。

3　小さな三角形を、点 C のまわりに 90° 回す。赤い三角形の頂点は C、$(-a,b)$、$(-a,b-2a)$ です。これを C のまわりに時計回りに 90° 回すと、C、(a,b)、$(-a,b)$ を頂点とする青い三角形になります。回転の中心は円の中心 O ではなく、**点 C** です。

ここまでで、赤と青が合同な三組を交換しました。元の色付き部分の面積を S とすると、交換後も合計面積は S のままです。残りの交換を次のページで行います。

2　ピザ定理：T 院生の証明〈後半〉

後半：平行四辺形を比べて、半円を完成させる

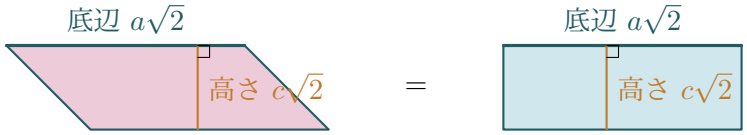


4　斜めの直径 $y = -x$ について反転する。図 4 の上側の赤を斜めの直径で反転すると、左側の青になります。反転で円も保たれるため、円弧を含めて二つの部分が合同になります。この交換によって、左半分の大きな空白が埋まります。

5　二つの平行四辺形を、底辺と高さで比較する。図 5 の赤と青は、一般には合同ではありません。しかし、太く示した斜めの辺の長さはともに $a\sqrt{2}$ で、その辺を底辺とした**垂直な高さ**も、ともに $c\sqrt{2}$ です。平行四辺形の面積は「底辺 × 高さ」なので、どちらの面積も

$$(a\sqrt{2})(c\sqrt{2}) = 2ac$$

となります。したがって、この交換でも面積は変わりません。



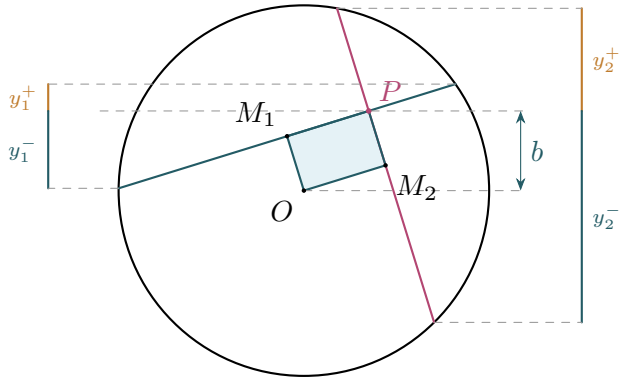
手順 5 の二つの部分の、底辺が水平になるように向きをそろえた拡大図。高さは底辺に垂直に測ります。

6　右下に残った部分を、円の中心 O のまわりに $180°$ 回す。図 6 の赤が左上の青に重なり、左半円がちょうど埋まります。6 回の交換を通して面積を保ったので、元の色付き部分の面積も $\pi R^2/2$ です。残りの部分も円全体から引けば同じ面積になります。

2　ピザ定理：切る点を動かす〈K 先生〉

準備：直交する 2 本の弦についての補題

円の中心を $O(0,0)$、切る点を $P(a,b)$ とします。ここでの a,b は座標であり、T 院生の図の a,b とは別の設定です。P を通る直交する 2 本の弦を考え、その中点を M_1, M_2 とします。



直交する弦の補題

各弦について、P から上の端点までの**縦方向の長さ**を y_k^+、下の端点までを y_k^- とします。弦そのものの長さではなく、縦軸へ投影した長さです。このとき

$$(y_1^- + y_2^-) - (y_1^+ + y_2^+) = 2b$$

が成り立ちます。弦を傾けても、右辺は変わりません。

証明。 円の中心と弦の中点を結ぶ線は弦に垂直です。2 本の弦も直交しているため、OM_1PM_2 は長方形になります。向かい合う辺が平行で等しいことから、中点の縦座標を b_1, b_2 とすると

$$b_1 + b_2 = b$$

です。弦の上端・下端の縦座標を u_k, v_k とすると、中点なので $u_k + v_k = 2b_k$ です。よって

$$y_k^- - y_k^+ = (b - v_k) - (u_k - b) = 2b - 2b_k.$$

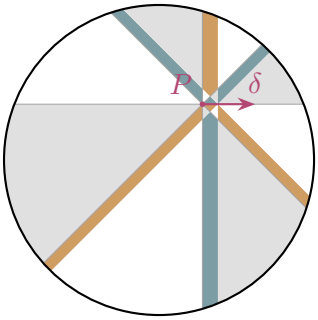
2 本分を足すと、$4b - 2(b_1 + b_2) = 2b$ を得ます。 □

水平な弦では二つの縦成分は 0 です。長方形の一辺が長さ 0 となる場合も、同じ座標の等式で補題は成り立ちます。

2　ピザ定理：K 先生の証明〈面積の変化〉

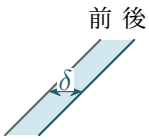
横に動かしても、縦に動かしても面積は変わらない

白い 4 切れの面積を $S(a,b)$ とします。まず b を固定して $f(a)=S(a,b)$ とおき、切る点を右へ δ だけ動かします。縦の切れ目と、斜めの切れ目が動くことで、白が増える細い帯と減る細い帯ができます。横の切れ目は動きません。



青：白が増える部分

橙：白が減る部分



同じ高さで測る
横幅は δ

図では移動を大きく描いています。変化率を計算するときには、δ を 0 に近づけます。

縦横の切れ目による変化。縦の切れ目の下側では白が増え、上側では減ります。細い帯の面積の変化は、縦の長さの差に δ を掛けたものに近づきます。縦横の直交する 2 本の弦に補題を使うと、その差は $2b$ なので、変化率は $2b$ です。

斜めの切れ目による変化。右上・左上では白が増え、右下・左下では減ります。斜めの帯でも、同じ高さで見た横幅は δ なので、面積は「縦方向の長さ $\times\delta$」で計算できます。2 本の斜めの弦は直交するため、補題によって変化率は $-2b$ です。

切る点の近くで帯が重なる部分や、円周の端で生じる誤差を $e(\delta)$ とすると、

$$f(a+\delta)-f(a)=2b\delta-2b\delta+e(\delta),\qquad \lim_{\delta\to0}\frac{e(\delta)}{\delta}=0.$$

点 P が円の内部なら、各弦は円周を横切ります。端点の移動も δ に比例する大きさなので、端での誤差は縦横ともに δ 程度の小さな部分です。その面積を δ で割ると 0 に近づきます。したがって

$$f'(a)=\lim_{\delta\to0}\frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta}=2b-2b=0.$$

微分係数が区間全体で 0 なら、関数はその区間で一定です。よって、横に動かしても白の面積は変わりません。縦の移動も、横方向の長さを使う同じ議論で示せます。

最後に $P(a,b)$ を $(0,b)$ へ、次に $(0,0)$ へ動かします。この経路は円内にあります。中心なら 8 等分なので、$S(a,b)=S(0,0)=\pi R^2/2$ です。　□

2　ピザ定理：積分で面積を計算する

直角方向の 4 本の長さを組にする

点 P から、角度 θ の方向に伸ばした半直線が円周に達するまでの長さを $r(\theta)$ とします。角度 $\Delta\theta$ が小さい区画の面積は、半径 $r(\theta)$ の細い扇形として

$$\frac{1}{2}r(\theta)^2\Delta\theta$$

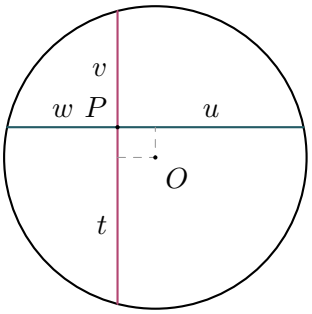
で近似できます。区画を細かくして足し合わせると、角度 α から β までの面積は $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2\,d\theta$ となります。

三平方の定理から得られる長さの関係

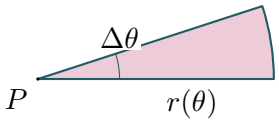
直交する 2 本の弦によって、4 方向の長さを順に u, v, w, t とすると

$$u^2 + v^2 + w^2 + t^2 = 4R^2$$

です。点 P の位置や、2 本の弦の向きを変えても、この和は一定です。



直角方向の 4 本の長さ



小さな区画を扇形で近似する
角度はラジアンで測る。

長さの関係の証明。この 2 本の弦を横軸・縦軸として、P を原点、円の中心を (p, q) とします。弦の中点はそれぞれ $(p, 0)$、$(0, q)$ なので、三平方の定理より

$$R^2 = p^2 + \left(\frac{v+t}{2}\right)^2, \qquad R^2 = q^2 + \left(\frac{u+w}{2}\right)^2.$$

$p = (u-w)/2$、$q = (v-t)/2$ を代入して足し、$(s+h)^2 + (s-h)^2 = 2s^2 + 2h^2$ を使うと、主張を得ます。

白の 1 区画の始まりを θ_0 とすると、他の白い区画はそこから $\pi/2$ ずつずれています。よって白の合計面積は

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_0+\pi/4}\sum_{j=0}^{3} r\left(\theta + \frac{j\pi}{2}\right)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_0+\pi/4} 4R^2\,d\theta = \frac{\pi R^2}{2}.$$

2　ピザ定理：人数と切れ目を増やす

n 人で順番に取り分ける一般化

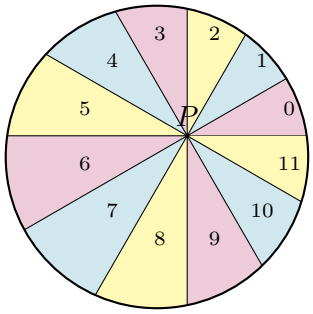
円内の一点を通る $2n$ 本の直線を使い、角度

$$\alpha = \frac{\pi}{2n}$$

ずつの $4n$ 切れを作ります。円周に沿って切れを $0, 1, \ldots, 4n-1$ と番号付けし、n 人に順番に配ります。第 k 番目の人（$k = 0, \ldots, n-1$）は

$$k, \quad k+n, \quad k+2n, \quad k+3n$$

の 4 切れを受け取ります。番号が n 違うと角度は $n\alpha = \pi/2$ 違うので、その人の 4 切れは直角方向に並びます。



$n = 3$：12 切れを 3 人に配る
赤：$0, 3, 6, 9$
青：$1, 4, 7, 10$
黄：$2, 5, 8, 11$

前ページの長さの等式を使うと、第 k 番目の人の面積は

$$\frac{1}{2}\int_{k\alpha}^{(k+1)\alpha} \sum_{j=0}^{3} r\left(\theta + \frac{j\pi}{2}\right)^2 d\theta = 2R^2\alpha = \frac{\pi R^2}{n}.$$

したがって、全員が円全体の $1/n$ を受け取ります。取り分の番号を指定すれば、人数が増えても同じ計算で面積を確かめられます。

二人で交互に取る一般化とは、配り方が違う

K 先生の補足にある、$8, 12, 16, \ldots$ 切れを**二人で交互に**取る場合も、面積は半分ずつになります。しかし、12 切れを 3 人に配る上の証明だけでは、二人に 6 切れずつ配る主張は示せません。この二人の場合の一般化は、ここでは結果の紹介に留め、証明は省略します。

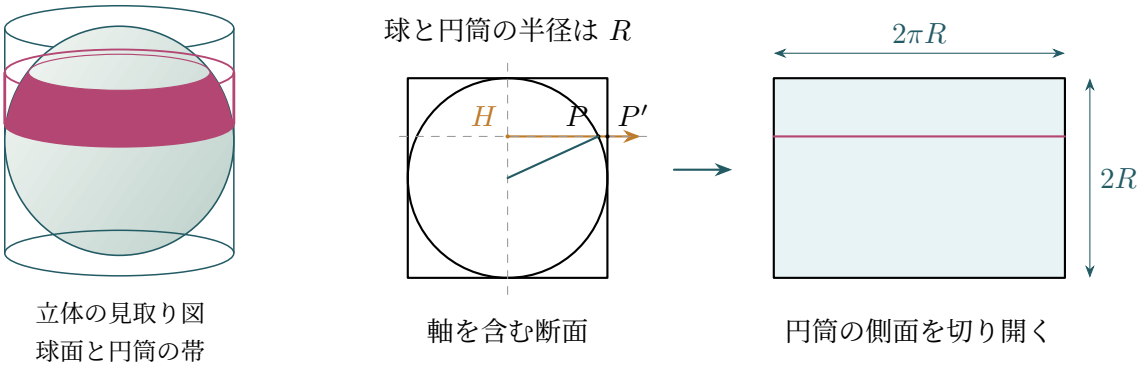
円形の具の領域についても、切る点がその円の内部にあれば同じ定理を適用できます。中心がずれた同心でない円でも構いません。切る点が円の外にある場合には、面積が等しいという保証は一般にはありません。

3　ランベルトの方法と、面積を保つ地図

3.1　正積円筒図法は、どう作るのか

丸い地球の表面を平らな紙へ描くと、距離・角度・面積などのどれかがゆがみます。**正積図法**とは、地図上の面積が地表の面積に一定の倍率で比例する図法です。例えば、ある地域の実際の面積が別の地域の 2 倍なら、地図でも 2 倍になります。形や距離がすべて正しいという意味ではありません。

ランベルト正積円筒図法を、半径 R の球で説明します。赤道に接するように、半径 R、高さ $2R$ の円筒を巻きます。球面上の点を、**同じ経度、同じ高さ**の円筒上の点へ移し、円筒の側面を切り開いて地図にします。



立体の見取り図
球面と円筒の帯

軸を含む断面

円筒の側面を切り開く

図の H は点 P と同じ高さの地軸上の点です。H から水平方向へ進み、球面の P を通って円筒に達した点が P' です。光で例えるなら、**各高さの地軸上に、それぞれ光源がある**と考えます。光源は球の中心の一点に固定せず、高さごとに取ります。

経度を λ（ラジアン）、球の中心からの高さを y とすれば、切り開いた地図の横座標と縦座標は

$$X = R\lambda, \qquad Y = y$$

です。経度の切れ目をどこに置くかで横座標の基準は変わります。北極・南極では経度が一意に決まりませんが、これらの点は面積 0 なので面積の比較には影響しません。

他の地図との関係

イコールアース図法も面積の割合を保つ図法ですが、ここで説明するランベルト図法とは別の作り方です。メルカトル図法は局所的な角度を保つ一方、高緯度の面積を大きく描きます。何を比較したいかによって、地図の図法を選びます。2026 年 9 月 4 日には、国連総会で、大陸の相対的な面積が重要な場面でイコールアースなどの正積図法の活用を促す決議が採択されました。これは用途に応じた活用の推奨であり、地図を一つの図法へ統一するものではありません。

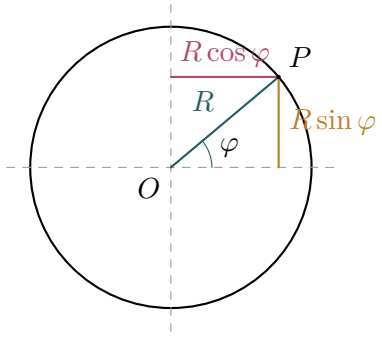
3　ランベルトの方法：球面の帯の面積を求める

横の伸びと、縦の縮みが打ち消し合う

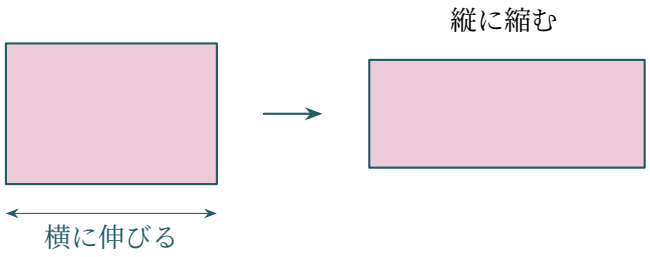
緯度 φ の位置で、球面の小さな区画を考えます。φ は赤道から測った角度で、$y = R\sin\varphi$ です。緯線の半径は $R\cos\varphi$ なので、経度の小さな変化 $\Delta\lambda$ に対する球面上の横幅は

$$R\cos\varphi\,\Delta\lambda$$

です。円筒では横幅が $R\Delta\lambda$ となるので、横に $1/\cos\varphi$ 倍に伸びます。



緯度と緯線の半径



二つの倍率の積は 1

一方、球面上で緯度が $\Delta\varphi$ だけ変わると、南北方向の長さは $R\Delta\varphi$ です。円筒では高さの変化となり、$y = R\sin\varphi$ の微分から

$$\Delta y \simeq R\cos\varphi\,\Delta\varphi$$

となります。つまり縦には $\cos\varphi$ 倍に縮みます。小さな区画の面積を決める倍率の積は

$$\frac{1}{\cos\varphi} \times \cos\varphi = 1$$

です。区画を細かくして足し合わせる極限で、面積が保たれることがわかります。$\simeq$ は小さな変化についての近似を表し、有限の区画で長方形の近似が完全に等しいという意味ではありません。

球面の帯と、円筒の帯

二つの高さの間にある球面の帯を、高さを変えずに円筒へ移します。高さの差を h とすると、円筒を開いた帯は幅 $2\pi R$、高さ h の長方形です。したがって、球面の帯の面積は

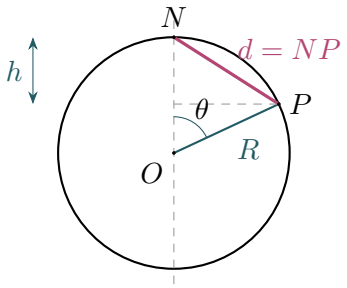
$$2\pi Rh.$$

球全体なら $h = 2R$ なので、表面積は $4\pi R^2$ です。

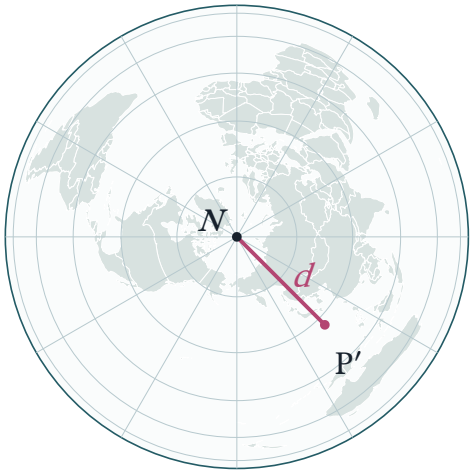
3　ランベルト正積方位図法：地図の作り方

北極からの方向と、弦の長さで点を置く

今度は円筒を使わず、北極を中心とする円形の地図を作ります。北極を N、球面上の点を P とし、その経度を λ とします。北極に対応する地図の中心も N と書き、経度 λ に対応する方向に点 P' を置きます。中心からの距離は、球の内部を通る**直線 NP の長さ**にします。



球の軸を含む断面



北極を中心にした地図（ポスター③）

点を写す規則

北極から測った中心角を $\theta = \angle NOP$ とすると、二等辺三角形 NOP を半分に分けることで

$$d = NP = 2R\sin\frac{\theta}{2}$$

を得ます。地図上では $NP' = d$ とし、経度に応じた方向へ点を置きます。

ここで使う d は、球面に沿って歩く距離 $R\theta$ とは異なります。北極から遠いほど、地図の半径方向の距離は球面上の距離より縮みます。一方、円周方向は伸びるので、面積を保てるかどうかは二つの変化を合わせて調べます。

球全体の地図の半径は $2R$ です。南極では経度が定まらず、地図の外周がその点に対応します。北極からの方向を示す性質を持ちますが、任意の二地点間の距離や、すべての形を保つ図法ではありません。

3　ランベルト正積方位図法：なぜ面積を保つのか

球面の帽子と、地図の円を比較する

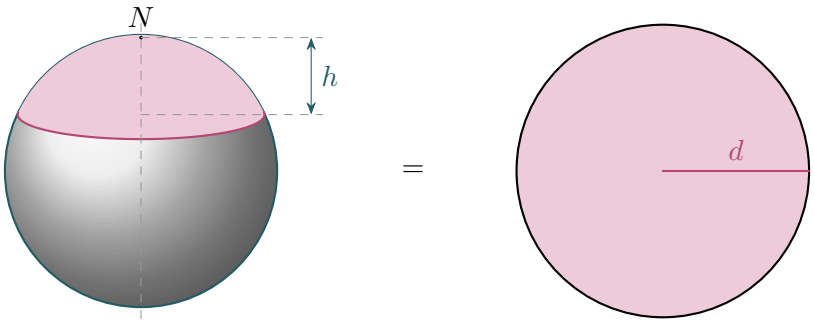
北極から高さ h までの球面の部分を「球面の帽子」と呼びます。11 頁の帯の公式から、その面積は $2\pi Rh$ です。帽子の端の点までの中心角を θ とすると

$$h = R(1-\cos\theta) = 2R\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

地図上の半径は $d = 2R\sin(\theta/2)$ なので、$d^2 = 2Rh$ です。したがって、地図上の円の面積は

$$\pi d^2 = 2\pi Rh.$$

これで、球面の帽子全体と地図の円全体の面積が等しいことがわかります。



球面の帽子：$2\pi Rh$　　地図の円：πd^2

左は立体の見取り図。赤い部分は球の内部ではなく、北極側の球面です。高さ h は北極から水平な境界面までの高さです。

帽子全体だけでなく、小さな部分も比較する

帽子と円の面積が等しいだけでは、任意の国や地域の面積が保たれるとまでは言えません。そこで、二つの高さと二つの経度で囲まれた**帯の一部分**を比べます。

北極から測った高さが h_1, h_2 の間で、経度の差が β（ラジアン）の部分を取ります。球面側の面積は、帯全体の $\beta/(2\pi)$ 倍なので

$$\frac{\beta}{2\pi}\,2\pi R(h_2-h_1) = R\beta(h_2-h_1).$$

地図上では、半径 d_1, d_2 の間にある角度 β の円環扇形になります。その面積は

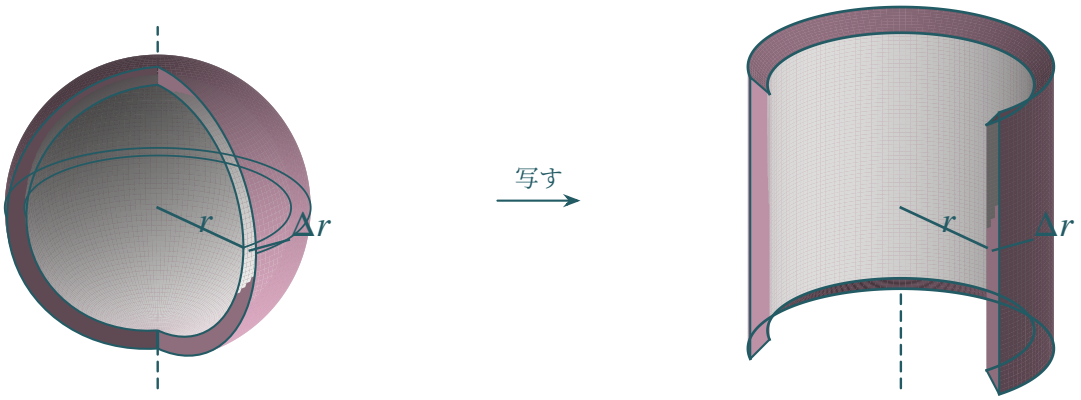
$$\frac{\beta}{2}(d_2^2-d_1^2) = \frac{\beta}{2}\{2Rh_2-2Rh_1\} = R\beta(h_2-h_1)$$

で、球面側と等しくなります。任意の地域をこのような小さな部分に分けて近似し、細かくする極限を取れば、地域全体でも面積が保たれます。

3　ランベルトの方法：球面の層から、立体の体積へ

各半径の球面を、同じ半径の円筒へ移す

半径 R の球の内部の点について、中心 O からの距離を r、高さを y、y 軸からの距離を ρ とします。ここで、R は球全体の半径、r は各層の半径、ρ は軸からの距離です。三平方の定理より $r^2 = \rho^2 + y^2$ です。この点を、**同じ高さ・同じ軸のまわりの方向**で、軸からの距離が r となる点へ移します。半径 r の球面が、半径 r の円筒へ移る規則です。



球面に沿う薄い殻　　対応する円筒状の薄い殻

立体の一部を切り開き、厚さ Δr を見やすく大きく描いた図です。どちらも中心からの距離が r から $r+\Delta r$ の層に対応します。半径と各点の高さをそろえて移します。

半径 r から $r+\Delta r$ までの薄い球の層の体積は、球面積に厚さを掛けて $4\pi r^2 \Delta r$ に近づきます。対応する円筒状の層も、円周 $2\pi r$、高さ $2r$、厚さ Δr の積で同じ値に近づきます。ただし、有限の厚さでは近似なので、正確さを次の断面積の計算で確かめます。

同じ高さの円環は、面積が正確に等しい

$|y| \le r_1 < r_2$ として、中心からの距離が r_1, r_2 の間の層を高さ y で切ります。球側の円環の外半径・内半径は $\sqrt{r_2^2 - y^2}$、$\sqrt{r_1^2 - y^2}$ なので、面積は

$$\pi\{(r_2^2 - y^2) - (r_1^2 - y^2)\} = \pi(r_2^2 - r_1^2).$$

移した側の外半径・内半径は r_2, r_1 なので、同じ面積です。

同じ高さの断面積が等しい立体は、高さ方向の薄い層を足すと同じ体積になります。これが体積についてのカヴァリエリの原理です。$r_1 < |y| \le r_2$ では、球側は円板、移した側は内半径 $|y|$ の円環となり、どちらの面積も $\pi(r_2^2 - y^2)$ です。

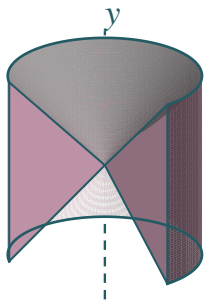
3　ランベルトの方法：なぜ円柱から円すい 2 個を引くのか

球全体を移した後の形を調べる

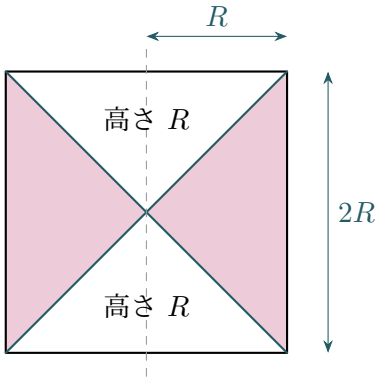
球の中の点では $|y| \le r \le R$ です。移した後の軸からの距離を u とすると $u = r$ なので、

$$|y| \le u \le R$$

となります。外側の境界 $u = R$ は半径 R の円柱です。内側の境界 $u = |y|$ は、軸からの距離と高さの絶対値が等しい円すい面です。



立体を切り開いた見取り図



円柱から円すい 2 個を除いた立体

右は軸を含む断面です。白い三角形を軸のまわりに回すと、取り除く円すいになります。左の見取り図は、その内部が見えるように立体の一部を切り開いています。

上側の白い部分は、頂点が球の中心の高さにあり、底面が高さ R にある円すいです。底面の半径も R です。下側にも同じ寸法の円すいがあります。したがって、球の体積は

$$\begin{aligned} V &= \pi R^2 \cdot 2R - 2\left(\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\right) \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

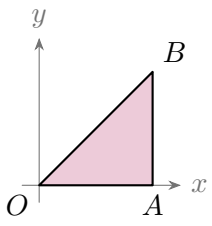
断面積でも、球とこの立体の対応を確かめられる

高さ y における球の断面は、半径 $\sqrt{R^2 - y^2}$ の円板です。その面積は $\pi(R^2 - y^2)$ です。右の立体の断面は外半径 R、内半径 $|y|$ の円環で、面積は同じ $\pi(R^2 - y^2)$ です。球面の面積が等しいというだけでなく、**同じ高さの断面積が等しい**ことで、体積が等しいと確かめられます。

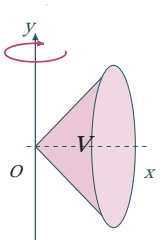
3　ポスターの体積問題：2 回の回転でできる形

三角形から円すいへ、円すいから求める立体へ

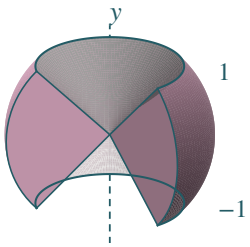
三角形 OAB の頂点を $O(0,0,0)$、$A(1,0,0)$、$B(1,1,0)$ とします。この三角形を x 軸のまわりに 1 回転すると、高さ 1、底面の半径 1 の円すい V ができます。さらに、V 全体を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体を W とします。



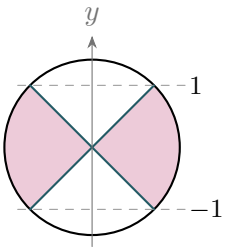
三角形 OAB
x 軸のまわりに回す



円すい V
次に y 軸のまわりに回す



回転後の立体 W
一部を切り開いた見取り図



W の軸を含む断面
上下の白い部分を除く

なぜこの形になるのか。 V 内の点は $0 \le x \le 1$、$y^2 + z^2 \le x^2$ を満たします。y 軸のまわりの回転では高さ y と、軸からの距離 $\rho = \sqrt{x^2 + z^2}$ が変わりません。よって

$$\rho^2 \ge y^2, \qquad \rho^2 + y^2 = x^2 + z^2 + y^2 \le 2x^2 \le 2.$$

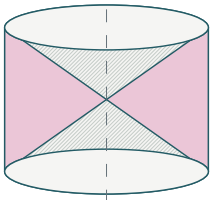
逆に、この二つの条件を満たす (ρ, y) には、$x^2 = (\rho^2 + y^2)/2$、$z^2 = (\rho^2 - y^2)/2$ と選べば V 上の点が対応します。したがって W は半径 $\sqrt{2}$ の球のうち、$\rho \ge |y|$ の部分です。上下の 45° の円すい面の内側が除かれています。

ランベルトの方法を適用する。 中心からの距離 $r = \sqrt{\rho^2 + y^2}$ を、移した後の軸からの距離 u にすると、

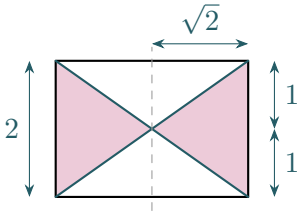
$$\sqrt{2}\,|y| \le u \le \sqrt{2}.$$

よって高さの範囲は $-1 \le y \le 1$ です。移した立体は、半径 $\sqrt{2}$、高さ 2 の円柱から、底面の半径 $\sqrt{2}$、高さ 1 の円すいを上下に一つずつ除いた形です。体積は

$$\pi(\sqrt{2})^2 \cdot 2 - 2\left(\frac{1}{3}\pi(\sqrt{2})^2 \cdot 1\right) = \boxed{\frac{8\pi}{3}}.$$



移した後の見取り図



軸を含む断面

円柱の半径：$\sqrt{2}$
高さ：2
円すいの底面半径：$\sqrt{2}$
高さ：それぞれ 1

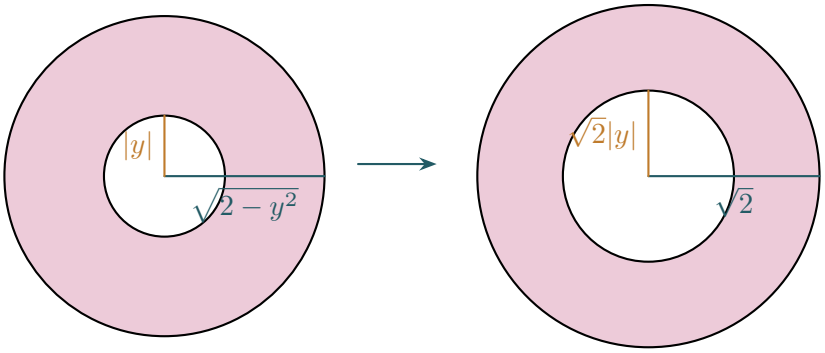
3　ポスターの体積問題：積分で解く別解

同じ高さの切り口を、円環として計算する

前ページの立体 W を、高さ y で水平に切ります。条件

$$|y| \le \rho \le \sqrt{2-y^2}$$

から、切り口は外半径 $\sqrt{2-y^2}$、内半径 $|y|$ の円環です。内半径が外半径を超えないためには、$y^2 \le 2-y^2$、すなわち $-1 \le y \le 1$ が必要です。



高さ y における W の切り口　　移した後の切り口

同じ高さで比較すると、内外の半径は変わりますが、円環の面積は変わりません。図は $y=\frac{1}{2}$ の場合で、以下の半径の式に合わせて描いています。

断面積 $A(y)$ は、外側の円の面積から内側の円の面積を引いて

$$A(y) = \pi(2-y^2) - \pi y^2 = 2\pi(1-y^2)$$

です。高さ Δy の薄い層の体積は $A(y)\Delta y$ に近づきます。これを $y=-1$ から $y=1$ まで足す極限が体積の積分なので、

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(W) &= \int_{-1}^{1} A(y)\,dy = 2\pi \int_{-1}^{1} (1-y^2)\,dy \\ &= 2\pi\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{8\pi}{3}}.\end{aligned}$$

ランベルトの方法では、同じ断面積を持つ、体積を計算しやすい立体へ移しました。積分の方法では、その断面積を直接足し上げました。二つの解法が同じ答えになる理由も、この断面積の一致からわかります。

原資料・図の出典

原解説：菊池和徳・岩井雅崇（2026 年 4 月 26 日）。書式：数学展示の解説マニュアル（2026 年 10 月 8 日）。本冊子では証明の途中を補い、図を加えて説明しました。

切り貼り図：Carter–Wagon の証明に基づく Cmglee の Pizza theorem visual proof.svg を TikZ で再描画。当該図の再描画部分は CC BY-SA 4.0。

積分の証明・n 人への一般化：Hirschhorn ら、The Pizza Theorem。

地図と一部の立体図は展示ポスター③・④から再利用。地図の地理データは Natural Earth（public domain）。

図法の名称：PROJ 公式資料の正積円筒図法・ランベルト正積方位図法・イコールアース図法。国連の決議：2026 年 9 月 4 日の総会報道（2026 年 10 月 12 日確認）。