

SHARP SEPARATION FROM TWELVE INTERSECTION POLYNOMIALS: LONG VIRTUAL KNOTS WITH IDENTICAL CLOSURES

CHATGPT 6ASTRA

ABSTRACT. We determine the least crossing bound for separation by the Satoh–Wada polynomials from the full twelve-polynomial intersection package: it is two. If both degree-two GPV invariants and the entire oriented closure must also agree, the least bound is three. An explicit family on the flat strings $\alpha_{2m,2m}$ has identical closures and identical intersection packages, whereas its two V -polynomials are $-t^{m+1}(1+t+\cdots+t^{m-1})^2$ and those of its partner are obtained by $t \mapsto t^{-1}$. We give all twelve closed formulas, prove crossing number $4m$ and supporting genus two, and prove that the Jones polynomial is one. An unreduced enumeration through four crossings and two exact implementations provide reproducible checks. The novelty claim concerns these joint separation statements, not the pre-existing invariants or flat strings.

CONTENTS

1. Introduction	3
2. Preliminaries	4
2.1. Diagrams, surfaces, and signs	4
2.2. An exact endpoint formula	4
2.3. The full twelve-polynomial package	5
2.4. The pair-counting and older invariants	6
3. Exact computational framework	6
3.1. Enumeration and completeness	6
3.2. Arithmetic and independent checks	7
4. Small-crossing search and sharp minimality	7
4.1. Exhaustive tables	7
4.2. Two crossings	8
4.3. Three crossings with trivial closures	8
5. The infinite family	9
5.1. An explicit endpoint specification	9
5.2. Every intersection number	9
5.3. Identical closures	10
6. Closed formulas and proof of separation	10
7. Further consequences	11

Date: September 10, 2026.

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 57K12; Secondary 57K14, 57K16.

Key words and phrases. long virtual knot, intersection polynomial, Gauss diagram, exact enumeration, based matrix, separation.

7.1. Crossing number and supporting genus	11
7.2. The Jones polynomial and the scope of older invariants	12
7.3. A bounded-treewidth family	12
8. Novelty audit	13
8.1. Comparison of theorem statements	13
8.2. Search record and source limitations	14
Appendix A. Computer-assisted verification	15
Appendix A. Computer-assisted verification	15
日本語版：12 個の交叉多項式からの sharp な分離	16
日本語版	16
1. 序論	16
2. 準備	17
2.1. 図式、曲面、符号	17
2.2. 端点による exact な交叉公式	18
2.3. 12 個すべての交叉多項式	18
2.4. 対を数える多項式と比較対象の不変量	19
3. Exact な計算の枠組み	19
3.1. 全列挙と完全性	19
3.2. 演算と独立検証	20
4. 小交点数での探索と sharp minimality	20
4.1. 全列挙表	20
4.2. 2 交点の対	21
4.3. closure が自明な 3 交点の対	21
5. 無限族	22
5.1. 端点による明示的定義	22
5.2. 全交叉数の計算	22
5.3. closure の一致	22
6. 閉公式と分離の証明	23
7. 追加の帰結	23
7.1. 交点数と supporting genus	23
7.2. Jones 多項式と旧不変量の一致の範囲	24
7.3. Treewidth が有界な族	25
8. Novelty audit	26
8.1. 定理の statement の比較	26
8.2. 検索記録と出典の限界	26
付録 A. Computer-assisted verification	27
付録 A. Computer-assisted verification	27
References	28

This note was generated by ChatGPT 6. Iwai has NOT verified any of its mathematical content. It may therefore contain mathematical errors and should be read with caution. A Japanese version is provided below.

1. INTRODUCTION

A long virtual knot retains a point at infinity that is forgotten by its closure. This distinction is essential for finite-type invariants: the two GPV invariants $v_{2,1}, v_{2,2}$ already depend on this extra information [2, §§1.6, 3.2]. We study the comparison between the twelve intersection polynomials of Nakamura–Nakanishi–Satoh–Wada [7, 8] and their recent pair-counting refinements V_1, V_2 introduced by Satoh–Wada [9].

Write, in the displayed order,

$$(1.1) \quad \mathcal{F}(K) = (F_{00}, F_{01}, F_{10}, F_{11}, G_{00}, G_{01}, G_{10}, G_{11}, H_{00}, H_{01}, H_{10}, H_{11})(K; t).$$

An equality of packages means componentwise equality in $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Let $c(K)$ be the minimum number of real (classical) crossings among all long virtual diagrams of K ; virtual crossings are not counted. The closure $\widehat{K}$ is an oriented virtual knot.

Theorem 1.1 (Sharp thresholds). *The minimum of $\max\{c(K), c(L)\}$ subject to $\mathcal{F}(K) = \mathcal{F}(L)$ and $(V_1, V_2)(K) \neq (V_1, V_2)(L)$ is two. If one also requires*

$$(v_{2,1}, v_{2,2})(K) = (v_{2,1}, v_{2,2})(L), \quad \widehat{K} \simeq \widehat{L},$$

then the minimum is three. The latter minimum is attained with both closures trivial, and with $(V_1, V_2) = (-t, 0)$ and $(-t^{-1}, 0)$.

Thus even supplying the entire closure, rather than a finite list of closure invariants, does not allow reconstruction of V_1, V_2 from the intersection package and the two GPV values.

For $m \geq 1$, put $S_m(t) = 1 + t + \cdots + t^{m-1}$.

Theorem 1.2 (An explicit infinite family). *There are explicitly specified long virtual knots K_m, L_m , with intersection graph $K_{2m, 2m}$, such that*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(K_m) &= \mathcal{F}(L_m), & \widehat{K_m} &\simeq \widehat{L_m}, \\ (v_{2,1}, v_{2,2})(K_m) &= (v_{2,1}, v_{2,2})(L_m) = (-m^2, -m^2), \\ V_1(K_m; t) &= V_2(K_m; t) = -t^{m+1}S_m(t)^2, \\ V_1(L_m; t) &= V_2(L_m; t) = -t^{-(m+1)}S_m(t^{-1})^2. \end{aligned}$$

Both knots and their common closure have crossing number $4m$ and supporting genus two, where the genus for a long knot is sg_1 . Their closure writhe/affine-index polynomials and odd writhes vanish; their normalized Jones–Kauffman polynomials are one. Every invariant of the oriented closure, including the generalized Alexander polynomial, agrees between the two knots.

All twelve formulas appear in Theorem 6.1. The difference is

$$(1.2) \quad V_i(K_m; t) - V_i(L_m; t) = -t^{m+1}S_m(t)^2 + t^{-(m+1)}S_m(t^{-1})^2 \neq 0.$$

The positive and negative supports in this expression are disjoint. The knots are pairwise distinct as m varies, by their GPV values.

The underlying flat strings are Turaev’s previously known lattice strings $\alpha_{2m, 2m}$ [12, §3.3(1)]. We do not claim a new flat-string construction. The proposed new assertions are the sharp joint thresholds and the simultaneous separation after fixing the twelve polynomials, the GPV values, and the entire closure. The argument

is not a consequence of realizability of arbitrary V -pairs, which imposes no such simultaneous constraints. Our search identified a four-chord cycle example; replacing its two nested pairs by two nested packets gives the family above. A second construction of bounded treewidth is recorded in §7.3.

To the best of our knowledge these joint separation statements have not appeared previously. This is a literature-based assessment, not a claim that every publication has been exhaustively indexed. Precise comparisons and limitations are given in §8.

2. PRELIMINARIES

2.1. Diagrams, surfaces, and signs. A long virtual diagram is an oriented generic immersed line, standard outside a compact disk, whose double points are marked real with over/under data or virtual. Equivalence is generated by classical Reidemeister moves and virtual detour moves [1, §§2–3]. Its Gauss diagram has a line oriented to the right and signed arrows from the overpassing preimage to the underpassing preimage. Every such signed arrow diagram is realizable by a long virtual diagram: choose a local crossing disk for each arrow and connect consecutive visits by generic arcs, declaring their additional intersections virtual. The detour move makes the choice of connecting arcs irrelevant.

We encode a chord by $(\ell_i, r_i, a_i, \varepsilon_i)$, with $\ell_i < r_i$, $a_i \in \{0, 1\}$ and $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$. Type zero means an arrow $\ell_i \rightarrow r_i$, type one an arrow $r_i \rightarrow \ell_i$. In mathematical displays endpoints start at one; the code subtracts one. Labels are assigned by increasing left endpoint. The initial endpoint of an arrow has weight $-\varepsilon_i$, and the terminal endpoint weight ε_i . In particular

$$(2.1) \quad s_i = (2a_i - 1)\varepsilon_i$$

is the weight at ℓ_i , and $-s_i$ is the weight at r_i .

A surface realization is a based diagram on an oriented closed surface, with equivalence allowing Reidemeister moves and stabilization away from the diagram. The correspondence with virtual diagrams is supported by [3, Theorem 3.3 and Proposition 3.4]; the closed-link irreducibility theorem is [4, Theorem 1]. Smoothing crossing i gives α_i , the loop missing the basepoint, and β_i , the loop containing it. If γ is the whole curve, then $\alpha_i + \beta_i = \gamma$. Write

$$A_{ij} = \alpha_i \cdot \alpha_j, \quad d_i = \alpha_i \cdot \gamma.$$

We use the endpoint-sign intersection convention of [6, §3, Lemmas 3.1–3.2], equivalently the convention used in [9, §3]. Consequently

$$(2.2) \quad \alpha_i \cdot \beta_j = d_i - A_{ij}, \quad \beta_i \cdot \beta_j = A_{ij} - d_i + d_j.$$

These identities follow by bilinearity and skew-symmetry, so they also fix all signs in the implementation.

2.2. An exact endpoint formula. Set $u_i(x) = 1$ for $\ell_i < x < r_i$, and zero otherwise. For $i < j$ define $\lambda_{ij} = 1$ if $\ell_i < \ell_j < r_i < r_j$, and zero otherwise.

Lemma 2.1 (Intersection formula). *For all diagrams,*

$$(2.3) \quad d_i = \sum_k s_k (u_i(\ell_k) - u_i(r_k)),$$

$$(2.4) \quad A_{ij} = \sum_{k \neq i, j} s_k (u_i(\ell_k)u_j(r_k) - u_i(r_k)u_j(\ell_k)) + \lambda_{ij} \frac{s_i + s_j}{2} \quad (i < j),$$

with $A_{ii} = 0$ and $A_{ji} = -A_{ij}$.

Proof. For d_i , a crossing contributes only when exactly one visit lies inside (ℓ_i, r_i) ; its contribution is the weight of that visit. For two loops, an endpoint inside the first interval whose partner is inside the second contributes its weight. The two possible visits of chord k give the determinant in (2.4). If both visits belong to both intervals their contributions cancel. For unlinked chords there is no endpoint correction. For linked chords the two smoothing neighborhoods contribute $1, 0, -1$ according as (s_i, s_j) is $(1, 1)$, mixed, or $(-1, -1)$. This is exactly the local push-off calculation of [6, Lemma 3.2], also stated for the required linked pairs in [9, §3, following Remark 3.3]. It equals $(s_i + s_j)/2$. This proves the formula and its integrality. $\square$

For an alternative implementation, put $h_i = 1$ on the open interval, $h_i = 1/2$ at its two ends, and zero outside. Then

$$(2.5) \quad A_{ij} = \sum_k s_k (h_i(\ell_k)h_j(r_k) - h_i(r_k)h_j(\ell_k)).$$

For $k = i, j$, the two contributions are $s_i/2, s_j/2$ in the linked case and zero in the unlinked cases. All other terms equal those in (2.4). The code uses $2h_i \in \{0, 1, 2\}$ and divides the final sum by four, checking divisibility.

2.3. The full twelve-polynomial package. Let $I_a = \{i : a_i = a\}$, $\omega_a = \sum_{i \in I_a} \varepsilon_i$, and

$$W_a(t) = \sum_{i \in I_a} \varepsilon_i (t^{d_i} - 1).$$

The precise normalization in [7, Theorem 2.3] is

$$(2.6) \quad F_{ab}(t) = \sum_{i \in I_a, j \in I_b} \varepsilon_i \varepsilon_j (t^{A_{ij}} - 1),$$

$$(2.7) \quad G_{ab}(t) = \sum_{i \in I_a, j \in I_b} \varepsilon_i \varepsilon_j (t^{d_i - A_{ij}} - 1) - \omega_b W_a(t),$$

$$(2.8) \quad H_{ab}(t) = \sum_{i \in I_a, j \in I_b} \varepsilon_i \varepsilon_j (t^{A_{ij} - d_i + d_j} - 1) - \omega_a W_b(t) - \omega_b W_a(t^{-1}).$$

Here $(a, b) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ in each of the three lines, so (1.1) explicitly lists all twelve invariants. Diagonal pairs are included. The raw sums defining G, H without their corrections are not the invariants under consideration. Expanding the corrections gives the implementation identities

$$(2.9) \quad G_{ab} = \sum_{i \in I_a, j \in I_b} \varepsilon_i \varepsilon_j (t^{d_i - A_{ij}} - t^{d_i}),$$

$$(2.10) \quad H_{ab} = \sum_{i \in I_a, j \in I_b} \varepsilon_i \varepsilon_j (t^{A_{ij} - d_i + d_j} - t^{d_j} - t^{-d_i} + 1).$$

2.4. The pair-counting and older invariants. For $i < j$ with $\ell_i < \ell_j < r_i < r_j$, the pair is inward when $(a_i, a_j) = (0, 1)$ and outward when $(a_i, a_j) = (1, 0)$. Denote these ordered sets by $J_{\text{in}}, J_{\text{out}}$. The definitions are

$$(2.11) \quad V_1 = \sum_{(i,j) \in J_{\text{in}}} \varepsilon_i \varepsilon_j t^{A_{ij}}, \quad V_2 = \sum_{(i,j) \in J_{\text{out}}} \varepsilon_i \varepsilon_j t^{A_{ij}}.$$

Their invariance is [9, Theorem 3.1]; evaluation at one gives the GPV invariants [2, §3.2]. These facts are inputs, not new results.

For a chord put $\text{Ind}(i) = (1 - 2a_i)d_i$, corresponding to the over-to-under smoothing. We use the normalized closure polynomial

$$(2.12) \quad P(t) = \sum_i \varepsilon_i (t^{\text{Ind}(i)} - 1) = W_0(t) + W_1(t^{-1}).$$

This is the writhe/affine-index convention used here; reversing the global intersection convention replaces t by t^{-1} . See [5, §2.2], [10, §3], and [7, Proposition 10.1]. The odd writhe is $J = \sum_{d_i \text{ odd}} \varepsilon_i$. Indeed $d_i \bmod 2$ is the number of chords linked with i modulo two.

The Jones–Kauffman normalization is $f_D(A) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$, with $\langle \bigcirc \rangle = 1$ and each additional state circle contributing $-A^2 - A^{-2}$ [1, §5]. The usual Jones variable satisfies $q = A^{-4}$. By generalized Alexander polynomial we mean the *closure* Alexander-biquandle determinant over $\mathbb{Z}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$, up to multiplication by $\pm s^u t^v$ [11, §3]. It is zero on the unknot. An endpoint-sensitive Alexander invariant of a long knot is a different invariant and is not included in this convention.

3. EXACT COMPUTATIONAL FRAMEWORK

3.1. Enumeration and completeness. The program uses integer endpoints $0, \dots, 2n - 1$. It pairs the least unused endpoint with each possible remaining endpoint and recurses on the rest. Chords are then labeled by increasing left endpoint; their four (a, ε) choices are assigned independently.

Lemma 3.1 (Exhaustiveness). *The enumeration visits every signed, directed matching exactly once, and visits $(2n - 1)!!4^n$ diagrams for $n \geq 1$ and one diagram for $n = 0$.*

Proof. In any matching the least unused endpoint has a unique partner. Removing that pair leaves a matching of the remaining endpoints, so induction gives existence and uniqueness of a branch producing the matching. There are $2n - 1$ first choices, then $2n - 3$, and so on. Each chord has two independent choices of direction and sign, giving the factor 4^n . Increasing-left-endpoint labels remove only redundant chord names; they do not identify geometrically different diagrams. $\square$

No reversal, mirror, cyclic-shift, or Reidemeister pruning is used in the search. In particular, a cyclic shift would be unsafe for a long-knot search. We merely record how many inputs have an immediate RI or RII reduction. A line-RI chord has adjacent endpoints. A line-RII pair has opposite crossing signs, adjacent arrow tails, and adjacent arrow heads. Those diagnostics do not influence the search.

This approach overcounts knot types but cannot miss a knot admitting an n -crossing diagram. Consequently absence of a pattern through $n < N$ would be

sufficient for a nonexistence proof, without any classification under RI/II. Our two sharp lower bounds will in fact be proved by hand.

3.2. Arithmetic and independent checks. A Laurent polynomial is a sorted tuple of pairs (integer exponent, nonzero integer coefficient). Equal exponents are combined and zero coefficients removed before comparison. No floating-point arithmetic is used in invariants, rank calculations, or tests; elapsed time is metadata.

Implementation A uses (2.5) with doubled indicators. Implementation B uses three distinct endpoint-region cases in (2.4): disjoint, nested, and alternating. In the alternating case its three positive regions are

$$(\ell_i, \ell_j) \times (\ell_j, r_i), \quad (\ell_j, r_i) \times (r_i, r_j), \quad (\ell_i, \ell_j) \times (r_i, r_j).$$

For nested intervals the positive region is the left outer part times the inner interval, and the negative region is the inner interval times the right outer part. For disjoint intervals only the first interval times the second contributes. This partitions every possible endpoint pair.

The two implementations agree on A, d for all 27,893 diagrams through four crossings. A separate accumulation using raw formulas (2.6)–(2.8) agrees with (2.9)–(2.10) for all these diagrams, as do the two V accumulations. This checks both intersection calculations and the normalization corrections. The family formulas, primitive-matrix tests, and cyclic closure identification were checked exactly for $1 \leq m \leq 16$. A separate ribbon-face permutation gives two faces of length eight and $4m - 4$ faces of length four. The resulting genus is two, independently of the matrix-rank calculation. These checks supplement the proofs below. The verification also recovers SW Example 3.4 and the normalized bracket of a trefoil, checks the auxiliary forest formulas through eight blocks, and checks all 27,892 immediate RI deletions and 5,960 immediate RII deletions available among diagrams through four crossings.

4. SMALL-CROSSING SEARCH AND SHARP MINIMALITY

4.1. Exhaustive tables. In Table 1, “RI” and “RI/II” mean absence of an immediate reduction of the indicated kind; the unpruned inputs are used throughout.

TABLE 1. Generated and diagnostic counts.

n	Generated	After symmetry	RI	RI/II
0	1	1	1	1
1	4	4	0	0
2	48	48	16	12
3	960	960	320	244
4	26880	26880	9216	7100

Let an $\mathcal{F}$ -collision class mean a package attained by at least two *diagrams with exactly n chords*. A split class has at least two V -pairs. In the last column of Table 2, classes are formed with the enlarged key $(\mathcal{F}, v_{2,1}, v_{2,2}, P, J)$; the column counts keys split by V , not pairs of knots. The code also compares cumulative keys

TABLE 2. Exact invariant collisions; no knot-type identification.

n	$\mathcal{F}$ keys	Collision keys	Split keys	Enlarged split keys
0	1	0	0	0
1	1	1	0	0
2	6	6	3	0
3	90	90	72	12
4	2478	2470	2099	329

across different crossing counts. No crossing-minimal knot-type counts are inferred from these tables.

4.2. Two crossings. Let U have chords $(1, 3, 0, +1)$, $(2, 4, 1, +1)$, and let U' have $(1, 3, 1, +1)$, $(2, 4, 0, +1)$. For U one has $A = 0$ and $d = (1, 1)$; for U' one has $A = 0$ and $d = (-1, -1)$. If $p = t + t^{-1} - 2$, substitution gives

$$(4.1) \quad \begin{aligned} F_{ab} = G_{ab} = 0, \quad H_{ab} = -p \quad \text{for all } a, b, \\ (V_1, V_2)(U) = (1, 0), \quad (V_1, V_2)(U') = (0, 1). \end{aligned}$$

Their circular Gauss diagrams agree after shifting by two endpoints. For at most one chord there is no linked pair, so both V -polynomials vanish. This proves the first assertion of Theorem 1.1, including the exact crossing numbers $c(U) = c(U') = 2$.

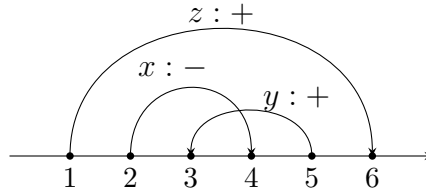
4.3. Three crossings with trivial closures. Let D consist of

$$(4.2) \quad z = (1, 6, 0, +1), \quad x = (2, 4, 0, -1), \quad y = (3, 5, 1, +1),$$

and write D^* for the result of negating all three signs while retaining the directions. Denote the represented knots by E, E^* . The nonzero intersection entries and the indices are

$$(4.3) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad d = (0, 1, -1).$$

For example α_z is the whole core up to a local smoothing outside the other visits; hence $A_{zx} = -d_x = -1$ and $A_{zy} = -d_y = 1$. The linked pair (x, y) has no third-chord contribution and has $s_x = s_y = 1$, giving $A_{xy} = 1$.

FIGURE 1. The three-crossing seed E . Negate signs to obtain E^* .

The complete calculation is particularly short:

$$(4.4) \quad F_{00} = -p, \quad G_{01} = p, \quad H_{11} = -p, \quad \text{all other nine components are zero.}$$

Indeed $\omega_0 = 0, \omega_1 = 1, W_0 = 1 - t, W_1 = t^{-1} - 1$. The two contributions to F_{01} cancel. The two to G_{01} are $t^{-1} - 1$ and $t - 1$. For H_{11} the raw self-intersection sum vanishes and its correction is $-(W_1(t) + W_1(t^{-1})) = -p$. All remaining entries follow from (4.3); these values also supply hand checks of the implementation.

Negating signs sends A, d to $-A, -d$ and leaves each product $\varepsilon_i \varepsilon_j$ unchanged. Thus the new package is obtained by $t \mapsto t^{-1}$, which fixes (4.4). Only (x, y) is inwardly linked, and no pair is outwardly linked. Hence

$$(V_1, V_2)(E) = (-t, 0), \quad (V_1, V_2)(E^*) = (-t^{-1}, 0), \quad (v_{2,1}, v_{2,2}) = (-1, 0).$$

On the circle the two visits of z are adjacent, so a circular RI removes z . The remaining tails of x, y are adjacent across the cut, their heads are adjacent, and their signs are opposite. A circular RII removes both. This is a move certificate for $\widehat{E} = \widehat{E}^* = \bigcirc$; it is not an allowable reduction of the based long diagrams. In particular $P = J = 0, f(A) = 1$, and the closure generalized Alexander polynomial is zero.

For the sharp lower bound, take any diagram with at most two chords. Without a mixed-type linked pair, both V 's are zero. Otherwise there is exactly one such pair. The two GPV values determine whether it is inward or outward and determine $\varepsilon_1 \varepsilon_2$. Equal signs give $A_{12} = 0$ and the relevant V is 1. Opposite signs give $A_{12} = \pm 1$ and the relevant V is $-t^{A_{12}}$. In this last case F_{01} (inward) or F_{10} (outward) is exactly $-(t^{A_{12}} - 1)$, which determines the exponent. Therefore $(\mathcal{F}, v_{2,1}, v_{2,2})$ determines (V_1, V_2) through two crossings. This proves the second threshold, even before imposing closure equality. Also $c(E) = c(E^*) = 3$: a hypothetical smaller presentation would give the two-crossing F pattern just classified, inconsistent with (4.4).

5. THE INFINITE FAMILY

5.1. An explicit endpoint specification. Fix $m \geq 1$ and put $q = 2m$. Use $8m = 4q$ endpoints. Introduce q chords A_i and q chords B_j by

$$(5.1) \quad A_i = (i, 3q + 1 - i), \quad B_j = (q + j, 4q + 1 - j), \quad 1 \leq i, j \leq q.$$

In both packets assign type zero and sign -1 to indices $1, \dots, m$, and type one and sign $+1$ to indices $m + 1, \dots, 2m$. Equivalently the unsigned word is

$$(5.2) \quad A_1 \cdots A_q B_1 \cdots B_q A_q \cdots A_1 B_q \cdots B_1.$$

Let K_m be this long knot and $L_m = K_m^*$ the sign-negated diagram. The four blocks in (5.2) occupy disjoint consecutive intervals; therefore (5.1) pairs every endpoint exactly once and defines a valid diagram for every m .

Within a packet the chords are nested and unlinked. Every A_i is linked with every B_j , so the intersection graph is $K_{q,q}$. For $m = 1$ it is the four-cycle. This graph is connected, but its treewidth grows with m ; we make no bounded-treewidth assertion for this particular family.

5.2. Every intersection number. All left endpoint weights are $+1$. Formula (2.3) gives

$$(5.3) \quad d_{A_i} = q, \quad d_{B_j} = -q.$$

There are exactly q single visits from the opposite packet inside each interval; for A_i they are left visits and for B_j right visits. For chords in the same packet the determinants in (2.4) cancel or vanish, and there is no linked correction. For a cross-packet pair, exactly $q - i$ other A chords and $q - j$ other B chords occupy its contributing regions. Its smoothing correction is one. Thus

$$(5.4) \quad A_{A_i A_h} = A_{B_j B_k} = 0, \quad A_{A_i B_j} = 2q + 1 - i - j,$$

and reverse entries are their negatives. This classifies all pairs.

5.3. Identical closures. Move the cut of (5.2) past its first $2q$ endpoints. The new word starts $A_q \cdots A_1 B_q \cdots B_1$. Relabel $A'_i = A_{q+1-i}$ and $B'_j = B_{q+1-j}$. The endpoint matching again has form (5.1). Every arrow has had its two visits interchanged, so its new type is $1 - a_{q+1-i}$. The chosen type sequence satisfies $a_{q+1-i} = 1 - a_i$; hence the new type is a_i . Its sign is $\varepsilon_{q+1-i} = -\varepsilon_i$. We have therefore obtained exactly the diagram of L_m . This is an orientation-preserving isomorphism of circular signed arrow diagrams, proving identical closures, without invoking Reidemeister moves or any test of knot equivalence.

6. CLOSED FORMULAS AND PROOF OF SEPARATION

Put $R_m(t) = S_m(t)^2$, and for $a, b \in \{0, 1\}$ set

$$\mathsf{T}_{ab}(t) = t^{(2-a-b)m+1} R_m(t), \quad \sigma_{ab} = (-1)^{a+b}.$$

Write $f^\vee(t) = f(t^{-1})$.

Theorem 6.1 (All twelve formulas). *For K_m the twelve components are, for each of the four pairs (a, b) ,*

$$(6.1) \quad F_{ab} = \sigma_{ab} (\mathsf{T}_{ab} + \mathsf{T}_{ab}^\vee - 2m^2),$$

$$(6.2) \quad G_{ab} = \sigma_{ab} (t^{2m} \mathsf{T}_{ab}^\vee + t^{-2m} \mathsf{T}_{ab} - m^2(t^{2m} + t^{-2m})),$$

$$(6.3) \quad H_{ab} = \sigma_{ab} (t^{-4m} \mathsf{T}_{ab} + t^{4m} \mathsf{T}_{ab}^\vee + 6m^2 - 4m^2(t^{2m} + t^{-2m})).$$

Every displayed polynomial is reciprocal. In addition

$$(6.4) \quad W_0 = -m(t^{2m} + t^{-2m} - 2), \quad W_1 = m(t^{2m} + t^{-2m} - 2), \quad P = J = 0.$$

Proof. Let $Q_0 = \{1, \dots, m\}$ and $Q_1 = \{m+1, \dots, 2m\}$. The sign in each type is constant, and the product of two signs is σ_{ab} . From (5.4),

$$\sum_{i \in Q_a, j \in Q_b} t^{4m+1-i-j} = \mathsf{T}_{ab}(t).$$

This follows by writing $i = am + 1 + u$, $j = bm + 1 + v$ for $0 \leq u, v \leq m-1$, and reversing the order of the two geometric sums. There are m^2 terms.

For F , same-packet terms vanish and the two cross-packet orders give T_{ab} and $\mathsf{T}_{ab}^\vee$, with $2m^2$ subtracted constants. For G use (2.9): same-packet terms vanish again. The A -to- B contribution is $t^{2m} \mathsf{T}_{ab}^\vee - m^2 t^{2m}$, and the B -to- A contribution is $t^{-2m} \mathsf{T}_{ab} - m^2 t^{-2m}$. This proves (6.2).

For H the two same-packet contributions in (2.10) sum to $2m^2(2 - t^{2m} - t^{-2m})$. The cross-packet contributions are

$$t^{-4m} \mathsf{T}_{ab} - 2m^2 t^{-2m} + m^2, \quad t^{4m} \mathsf{T}_{ab}^\vee - 2m^2 t^{2m} + m^2.$$

Adding these three expressions and multiplying by σ_{ab} gives (6.3). This also explains the coefficients six and four in that formula. Each expression is fixed by $t \mapsto t^{-1}$. The W_a formulas follow by the m indices of each type in each packet. Equation (2.12) gives $P = 0$, and every d_i is even, giving $J = 0$. $\square$

Only cross-packet pairs can contribute to V . Inward pairs have $i \in Q_0, j \in Q_1$ and outward pairs have $i \in Q_1, j \in Q_0$. Their sign products are all -1 . Thus both V 's are $-\mathbf{T}_{01} = -t^{m+1}S_m(t)^2$. Negating signs reverses all intersection numbers, proving the L_m formulas. It likewise replaces each of (6.1)–(6.3) by its reciprocal, which is the same polynomial. This proves the separation and GPV parts of Theorem 1.2.

7. FURTHER CONSEQUENCES

7.1. Crossing number and supporting genus. We apply the general based-matrix theory of [12, Lemmas 6.1.1, 6.2.1 and §6.3]. A based matrix is a finite skew-symmetric matrix b with a distinguished element s . An element different from s is annihilating if its row is zero and is core if its row equals the s row. Two nondistinguished elements are complementary if the sum of their rows is the s row. A matrix is primitive if none of these deletions is available. For a flat string, $\{s\} \sqcup \{\text{arrows}\}$ indexes its intersection matrix; s is the entire core and the arrow loops use the orientation determined by the surface. For our all-positive left endpoint weights, these arrow loops are the α intervals used above.

The cited results assert that the primitive based matrix is a homotopy invariant. If it has r nondistinguished elements and rank $2g$, every homotopic flat-string diagram has at least r arrows and every realizing surface has genus at least g . These hypotheses concern flat homotopy; forgetting over/under data in a virtual-knot equivalence gives such a homotopy, so the resulting lower bounds also apply to virtual knots.

For the current family the matrix consists of (5.3)–(5.4), with $b(A_i, s) = q$, $b(B_j, s) = -q$. These nonzero entries exclude annihilating and core elements. A complementary pair would have to be A_i, B_j . Evaluating its row-sum condition on A_h requires

$$-(2q + 1 - h - j) = -q \quad \text{for every } 1 \leq h \leq q.$$

This cannot hold for both $h = 1$ and $h = 2$, since $q = 2m \geq 2$. The matrix is primitive, and its $2q = 4m$ arrows give the crossing lower bound $4m$, attained by the specified diagram. The same bound applies to the closure and to L_m because their circular diagrams agree.

For completeness we calculate the rank directly. In a four-dimensional symplectic space with $e_r \cdot f_s = \delta_{rs}$, represent

$$A_i = e_1 + ie_2, \quad B_j = (2q + 1 - j)f_1 - f_2, \quad s = q(f_1 - e_2).$$

Their pairings are exactly the displayed matrix. Hence its rank is at most four. The submatrix of cross-pairings at indices $i, j \in \{1, 2\}$ is

$$\begin{pmatrix} 2q - 1 & 2q - 2 \\ 2q - 2 & 2q - 3 \end{pmatrix}, \quad \det = -1.$$

The associated four-by-four skew matrix has nonzero determinant, proving rank four. The loops consisting of the core and one smoothing for each chord form a basis of the first homology of the canonical ribbon surface [12, §4.2]; changing a

smoothing to its complementary loop is an integral basis change. Thus the rank equals twice the genus of that surface. Capping its boundary yields a genus-two realization. The lower bound proves $\text{sg}(\widehat{K_m}) = \text{sg}_1(K_m) = \text{sg}_1(L_m) = 2$.

For the second supporting genus of [8, Definition 3.5] we obtain only

$$1 \leq \text{sg}_2(K_m) = \text{sg}_2(L_m) \leq 2.$$

The upper bound and invariance under sign-negation follow geometrically; the lower bound follows from nonzero F_{00} and [8, Lemma 3.6(ii)]. We do not claim to decide between one and two. For the three-crossing seed the full core/smoothing matrix has rank two, so $\text{sg}_1(E) \leq 1$; nonzero F_{00} and the same lemma give $\text{sg}_2(E) = \text{sg}_1(E) = 1$, also for E^* .

7.2. The Jones polynomial and the scope of older invariants. The oriented state sum for $f_D(A)$ depends only on the endpoint pairing and the crossing signs. Its oriented smoothing joins the segment entering one visit to the segment leaving the other; its weight is A^{ε_i} . The other smoothing joins the two entering segments and the two leaving segments and has weight $A^{-\varepsilon_i}$. In particular, changing arrow directions while keeping signs fixed leaves this state sum unchanged.

In either packet of (5.2), the innermost adjacent indices $m, m+1$ have opposite signs and have adjacent left visits and adjacent right visits. For the purpose of evaluating the bracket, give them the same arrow direction. They can then be removed by an RII move. Repeat with $m-1, m+2$, and continue until the packet is empty, and then do the same for the other packet. Each RII deletion cancels two opposite signs, so it also respects normalization. Hence $f_{K_m}(A) = 1$. The identical closure proves $f_{L_m}(A) = 1$ as well. This argument is solely an invariant calculation; the arrow-direction changes are not asserted to be virtual isotopies. Indeed the genus-two and crossing-number lower bounds show that the closures are nontrivial.

The common closure implies equality of every closure invariant, including any fixed normalization of the generalized Alexander polynomial. This conclusion is stronger than comparing a finite list of computed values; no determinant reconstruction is needed for the equality. The source code also implements the exact bracket state sum and checks it for the seed and for $m = 1, 2, 3$.

There is an important boundary to this result. The endpoint-sensitive normalized Alexander polynomial of a long welded knot is not a function of the closure. For our family,

$$V'_1(K_m; 1) = -2m^3, \quad V'_1(L_m; 1) = 2m^3.$$

By [9, Theorem 7.4], their corresponding $\alpha_2 + \alpha_3$ values differ. We therefore do not claim that these examples evade all older invariants of long knots. Neither the degree-three derivative identity nor its finite-type property is claimed as a new result.

7.3. A bounded-treewidth family. There is also a family on a forest, although we do not assert identical closures for this auxiliary construction. Let E be the seed (4.2), and $E^\#$ the diagram obtained by negating signs and reversing arrows. Form $B = E \circ E^\#$ and $C_r = B^{\circ r}$ for $r \geq 1$, and compare C_r with C_r^* . This is an explicit endpoint definition: use the three seed chords in each first block of six endpoints, the sign-negated and direction-reversed seed in each second block, and

translate the j th six-chord block by $12j$ endpoints for $0 \leq j < r$. The intersection graph is $2r(K_2 \sqcup K_1)$, of treewidth one.

Put $p = t + t^{-1} - 2$. Direct substitution for one block, followed by the product formulas [7, Theorem 6.2], gives

$$\begin{aligned} F_{00} &= F_{11} = -rp, & F_{01} &= F_{10} = 0, \\ G_{01} &= G_{10} = rp, & G_{00} &= G_{11} = 0, \\ H_{00} &= H_{11} = r^2p^2 + rp, \\ H_{01} &= H_{10} = 2rp - r(r-1)p^2, \\ W_0 &= -rp, & W_1 &= rp, & P &= J = 0, & V_1 &= V_2 = -rt. \end{aligned}$$

To verify the only nonadditive step, the product law is $H_{ab}(X \circ Y) = H_{ab}(X) + H_{ab}(Y) + W_a(X)^\vee W_b(Y) + W_a(Y)^\vee W_b(X)$. For B , the diagonal H is $p^2 + p$ and the mixed H is $2p$, while $(W_0, W_1) = (-p, p)$. Summing the r block contributions and the $r(r-1)$ ordered cross-block contributions gives exactly the two displayed H formulas. There are no linked pairs between blocks, giving the V formulas directly. All twelve components are reciprocal, so they agree for C_r, C_r^* ; $V_i(C_r^*) = -rt^{-1}$ and both GPV pairs are $(-r, -r)$. This is a further application of the joint cancellation, not a new concatenation law. We assert only $c(C_r), c(C_r^*) \leq 6r$.

8. NOVELTY AUDIT

8.1. Comparison of theorem statements.

Present result	Closest previous result	Precise difference
Threshold two for the full package	GPV §1.6; SW Remark 3.3 and Lemma 4.1	The old closure distinction is acknowledged; the twelve-package computation and its sharp comparison threshold are the present assertion.
Threshold three after fixing GPV and closure	GPV §3.2; SW Theorem 4.3	Realizability does not fix the intersection package or closure. Our seed fixes both, including trivial closure, and the lower bound excludes every two-crossing pair.
Joint infinite-family separation	NNSW1 Theorems 2.3, 5.2, 6.2; SW Theorem 4.3	All twelve components are simultaneously fixed, as are both GPV values and the oriented closure; the nonconstant V values have explicit growing support.

Present result	Closest previous result	Precise difference
Lattice flat strings and crossing lower bound	Turaev §§3.3(1), 6.3–6.4	The flat strings and the primitive-matrix method are old. Our contribution is the signed, based comparison and its closed polynomial formulas.
Simultaneous constraints on twelve values	NNSW2 Theorems 7.1, 7.2, 7.4	Those theorems characterize one component at a time. They do not prescribe this joint package together with GPV and closure.
Failure of reconstruction from the package	Cheng Theorem 1.1	Cheng’s equivalence concerns directed signed intersection graphs modulo specified moves and the closure writhe polynomial. It does not imply reconstruction of the long pair counts.
Genus-two, unit-Jones examples	Kauffman §5; Turaev based matrices	Neither the existence of unit-Jones virtual knots nor the genus obstruction is claimed new. They strengthen the stated simultaneous separation.

8.2. Search record and source limitations. The audit was carried out on September 10, 2026 using primary PDFs and arXiv HTML. It included the phrases “ V_1 -polynomial long virtual knot”, “ V_2 -polynomial long virtual knot”, “intersection polynomial separation virtual knot”, “Gauss diagram path long virtual knot”, “minimal crossing $V_1 V_2$ ”, “virtual knot invariant collision”, and variants with “complete bipartite”, “mirror”, and “Turaev virtual strings”. The main Satoh–Wada result returned by these searches was arXiv:2601.15634. This search outcome alone is not the novelty argument: the relevant statements were compared individually in the preceding table. No direct authenticated Google Scholar search or claim of exhaustive bibliographic coverage is made.

All eight specifically requested foundational/recent papers were read at least at the relevant definitions or theorem statements. Additional inputs are [6, 10, 11, 12]. We use the verified numbering of the actual arXiv PDFs. In particular the twelve-invariant theorem is Theorem 2.3 in arXiv:2512.05366v1, although SW cites a different number. The condition in NNSW2 Theorem 7.1 is $f(1) = 0$; the contrary $f(1) = 1$ in its introductory example is not used.

A further numerical source discrepancy deserves explicit documentation. The displayed lattice matrix in [12, §4.3(1)], arXiv v5, is followed by a rank-six assertion for $\min(p, q) \geq 3$. For the matrix entries relevant here, the four-dimensional

factorization in §7.1 and the independent ribbon calculation both give rank four. Our genus assertion relies on that explicit calculation and the general based-matrix theorem, not on the printed numerical assertion. We make no novelty claim for this discrepancy or its correction.

The main results have complete proofs, but their research status should be understood as *candidate new separation theorems with the above primary-source novelty audit*. In the requested status terminology: *Candidate new theorem; novelty not fully verified*. A claim of priority beyond the examined literature is not justified. No new finite-type theorem, general symmetry law, realizability theorem, or concordance classification is asserted.

APPENDIX A. COMPUTER-ASSISTED VERIFICATION

The delivered file `virtual_separation.py` is the executable source. It requires Python 3 and its standard library only. Run

```
python virtual_separation.py --max-n 4 --output search_results.json
python virtual_separation.py --verify-claims
python virtual_separation.py --verify-local-moves
```

The first command writes counts, collisions, concrete witnesses, and one SHA-256 digest per crossing number. The digest input is the UTF-8 Python representation of $(D, \mathcal{F}, V, W, P, J)$ in enumeration order, with a newline after each record. The Python version is stored in the JSON. The second command writes `verification_results.json` and checks all 27,893 diagrams against the raw normalization, the seed closure move certificate, and the general-family formulas for $1 \leq m \leq 16$. The supplied `SHA256SUMS.txt` also records hashes of the delivered source and result files. The third command writes `local_move_verification.json`; its counts refer to individual available deletions, including multiple deletions from the same input diagram.

The mathematical core of the algorithm is the following pseudocode; the full executable additionally implements the independent region formula, state sum, ribbon faces, and matrix checks.

```
matchings(S):
    if S is empty: yield empty matching
    else:
        x = least element of S
        for y in S minus {x}:
            for M in matchings(S minus {x,y}):
                yield [(x,y)] + M
for n = 0, ..., N:
    for M in matchings({0, ..., 2*n-1}):
        for (type,sign) in {0,1} x {-1,1}, independently per chord:
            D = matching M with these labels
            calculate d,A by both endpoint formulas
            assert agreement
            calculate F,G,H,V with exact integer dictionaries
            group by the full twelve-polynomial tuple
            record whether the V-pair varies within a group
```

Because the main lower bounds were proved explicitly for zero, one, and two chords, the final sharp thresholds are not contingent solely on a computer-assisted nonexistence claim. The large table documents the actual search rather than replacing the general proof.

日本語版：12 個の交叉多項式からの SHARP な分離

要旨. Satoh–Wada の多項式によって 12 個すべての交叉多項式の組から分離できる最小交点数上限は 2 であることを示す。二つの次数 2 の GPV 不変量と有向 closure 自体も一致させる場合、その最小上限は 3 となる。既知の flat string $\alpha_{2m,2m}$ 上に符号と基点を指定して、closure と交叉多項式の組が一致する明示的な無限族を構成する。一方の二つの V 多項式は $-t^{m+1}(1+t+\cdots+t^{m-1})^2$ であり、他方はその $t \mapsto t^{-1}$ 置換である。全 12 成分の閉公式、交点数 $4m$ 、supporting genus 2、Jones 多項式が 1 であることを証明する。4 交点までの枝刈りなしの全列挙と二つの exact 実装で結果を検証した。新規性の主張はこれらの同時分離命題に関するものであり、不変量や flat string 自体を新しく導入したという主張ではない。

このノートは chatGPT 6 が生成したものであり、岩井は数学的な検証を全く行っていません。そのため数学的な間違いがあるかもしれません。そのため注意深く読んでください。

1. 序論

long virtual knot は closure で失われる無限遠点を保持する。この差は有限型不変量にとって本質的であり、GPV の二つの不変量 $v_{2,1}, v_{2,2}$ もこの追加情報に依存する [2, §§1.6, 3.2]。本稿では Nakamura–Nakanishi–Satoh–Wada の 12 個の交叉多項式 [7, 8] と、Satoh–Wada が最近導入した chord の対を数える多項式 V_1, V_2 [9] を比較する。

以下、表示した順序で

$$(1.1) \quad \mathcal{F}(K) = (F_{00}, F_{01}, F_{10}, F_{11}, G_{00}, G_{01}, G_{10}, G_{11}, H_{00}, H_{01}, H_{10}, H_{11})(K; t)$$

と書く。組の等号は $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ における各成分の等号を意味する。 $c(K)$ は K のすべての long virtual diagram のうち実交点 (classical crossing) の数の最小値であり、virtual crossing は数えない。 $\widehat{K}$ は有向 virtual knot としての closure である。

定理 1.1 (最小上限の決定). $\mathcal{F}(K) = \mathcal{F}(L)$ かつ $(V_1, V_2)(K) \neq (V_1, V_2)(L)$ を満たす対についての $\max\{c(K), c(L)\}$ の最小値は 2 である。さらに

$$(v_{2,1}, v_{2,2})(K) = (v_{2,1}, v_{2,2})(L), \quad \widehat{K} \simeq \widehat{L}$$

を要求した場合、最小値は 3 である。後者は両 closure が自明であり、 $(V_1, V_2) = (-t, 0)$ と $(-t^{-1}, 0)$ となる対によって達成される。

従って、closure の有限個の不変量の代わりに closure 自体を追加しても、交叉多項式の組と二つの GPV 値から V_1, V_2 を復元することはできない。

$m \geq 1$ に対して $S_m(t) = 1 + t + \cdots + t^{m-1}$ とおく。

定理 1.2 (明示的な無限族). 交叉グラフが $K_{2m,2m}$ となる明示的な long virtual knots K_m, L_m が存在し、次を満たす。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(K_m) &= \mathcal{F}(L_m), & \widehat{K_m} &\simeq \widehat{L_m}, \\ (v_{2,1}, v_{2,2})(K_m) &= (v_{2,1}, v_{2,2})(L_m) = (-m^2, -m^2), \\ V_1(K_m; t) &= V_2(K_m; t) = -t^{m+1}S_m(t)^2, \\ V_1(L_m; t) &= V_2(L_m; t) = -t^{-(m+1)}S_m(t^{-1})^2. \end{aligned}$$

両 long knot と共通の closure の交点数は $4m$ 、supporting genus は 2 である。ここで long knot の genus は sg_1 を意味する。closure の writhe/affine-index polynomial

と odd writhe は 0 であり、正規化された Jones–Kauffman polynomial は 1 である。generalized Alexander polynomial を含め、有向 closure の任意の不変量は両者で一致する。

全 12 成分の公式は定理 6.1 で与える。差は

$$(1.2) \quad V_i(K_m; t) - V_i(L_m; t) = -t^{m+1}S_m(t)^2 + t^{-(m+1)}S_m(t^{-1})^2 \neq 0$$

である。この式の正の指数の台と負の指数の台は交わらない。また、 m が異なれば GPV 値が異なるので、族の結び目も互いに異なる。

背後にある flat string は Turaev の既知の lattice string $\alpha_{2m, 2m}$ である [12, §3.3(1)]。新しい flat string を構成したとは主張しない。今回の新しい候補結果は、sharp な同時分離の上限と、12 個の多項式、GPV 値、有向 closure を固定したままでの分離である。任意の V の組の realizability はこれらの同時制約を課さないため、その定理だけから今回の結果は従わない。探索で見つかった 4 本の chord からなる cycle の例について、二つの入れ子の対を二つの入れ子の束に拡張したものが上の族である。§7.3 では treewidth が有界な別の構成も与える。

調べた範囲では、この同時分離命題と同一の結果は確認できなかった。これは文献に基づく判断であり、全出版物を網羅したとの主張ではない。正確な比較と限界を §8 に記載する。

2. 準備

2.1. **図式、曲面、符号.** long virtual diagram は、コンパクトな円板の外で標準的な直線と一致する有向の generic な immersed line であり、各二重点を over/under 情報を持つ実交点または virtual crossing として指定したものである。同値関係は通常の Reidemeister moves と virtual detour moves で生成される [1, §§2–3]。Gauss diagram は右向きの直線と、overpassing preimage から underpassing preimage に向かう符号付きの矢印からなる。任意のこのような図式を実現するには、各矢印に対して局所的な交点円板を用意し、訪問順に generic な弧で結び、途中の追加交点を virtual と宣言すればよい。結び方の違いは detour move で吸収される。

chord を $(\ell_i, r_i, a_i, \varepsilon_i)$ と符号化する。 $\ell_i < r_i$ 、 $a_i \in \{0, 1\}$ 、 $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ であり、type 0 は $\ell_i \rightarrow r_i$ 、type 1 は $r_i \rightarrow \ell_i$ の矢印を意味する。数式では端点を 1 から番号付けし、コードではこれから 1 を引く。chord の番号は左端点の増加順に付ける。矢印の始点の重みを $-\varepsilon_i$ 、終点の重みを ε_i とする。従って

$$(2.1) \quad s_i = (2a_i - 1)\varepsilon_i$$

が左端点の重みであり、右端点の重みは $-s_i$ である。

surface realization は、有向閉曲面上の基点付き結び目図式である。図式から離れた安定化と Reidemeister moves を許す。virtual diagram との対応には [3, Theorem 3.3, Proposition 3.4] を参照する。閉リンクの既約実現の一意性は [4, Theorem 1] である。交点 i を smoothing して得られる二つのループのうち、基点を含まないものを α_i 、含むものを β_i と書く。全体の曲線のホモロジー類を γ とすると $\alpha_i + \beta_i = \gamma$ である。以下

$$A_{ij} = \alpha_i \cdot \alpha_j, \quad d_i = \alpha_i \cdot \gamma$$

とおく。交叉数は [6, §3, Lemmas 3.1–3.2] の端点符号の規約、従って [9, §3] と同じ規約を採用する。双線形性と反対称性から

$$(2.2) \quad \alpha_i \cdot \beta_j = d_i - A_{ij}, \quad \beta_i \cdot \beta_j = A_{ij} - d_i + d_j$$

を得る。この恒等式によって実装に現れる符号も固定される。

2.2. 端点による exact な交叉公式. $u_i(x)$ を $\ell_i < x < r_i$ で 1、それ以外で 0 とする。 $i < j$ に対し $\ell_i < \ell_j < r_j < r_i$ なら $\lambda_{ij} = 1$ 、それ以外なら 0 とおく。

補題 2.1 (交叉公式). 任意の図式について

$$(2.3) \quad d_i = \sum_k s_k (u_i(\ell_k) - u_i(r_k)),$$

$$(2.4) \quad A_{ij} = \sum_{k \neq i, j} s_k (u_i(\ell_k) u_j(r_k) - u_i(r_k) u_j(\ell_k)) + \lambda_{ij} \frac{s_i + s_j}{2} \quad (i < j)$$

が成り立つ。 $A_{ii} = 0$ 、 $A_{ji} = -A_{ij}$ とする。

証明. d_i に寄与するのは、その一方の訪問だけが (ℓ_i, r_i) に入る交点であり、寄与はその訪問端点の重みである。二つのループについては、第 1 区間内の端点の相手が第 2 区間内にあるとき、その端点の重みを加える。chord k の二つの端点からの寄与が (2.4) の行列式になる。両端点が両区間に属する場合は相殺する。unlinked な chord には端点補正がない。linked な場合には、二つの smoothing の近傍における補正が $(s_i, s_j) = (1, 1)$ 、異符号、 $(-1, -1)$ に応じて $1, 0, -1$ となる。これは [6, Lemma 3.2] の局所的な push-off 計算そのものであり、必要な linked pair については [9, §3, Remark 3.3 の後] にも書かれている。補正は $(s_i + s_j)/2$ に等しい。これで公式と整数性が示された。 $\square$

別実装のため、 h_i を开区間上で 1、両端点で $1/2$ 、外で 0 とおくと

$$(2.5) \quad A_{ij} = \sum_k s_k (h_i(\ell_k) h_j(r_k) - h_i(r_k) h_j(\ell_k))$$

とも書ける。 $k = i, j$ の項は linked のとき $s_i/2, s_j/2$ 、unlinked のとき 0 である。他の項は (2.4) と同じである。コードでは $2h_i \in \{0, 1, 2\}$ を用い、最終和を 4 で割る際に割り切れることを確認する。

2.3. 12 個すべての交叉多項式. $I_a = \{i : a_i = a\}$ 、 $\omega_a = \sum_{i \in I_a} \varepsilon_i$ 、

$$W_a(t) = \sum_{i \in I_a} \varepsilon_i (t^{d_i} - 1)$$

とおく。 [7, Theorem 2.3] の正確な正規化は

$$(2.6) \quad F_{ab}(t) = \sum_{i \in I_a, j \in I_b} \varepsilon_i \varepsilon_j (t^{A_{ij}} - 1),$$

$$(2.7) \quad G_{ab}(t) = \sum_{i \in I_a, j \in I_b} \varepsilon_i \varepsilon_j (t^{d_i - A_{ij}} - 1) - \omega_b W_a(t),$$

$$(2.8) \quad H_{ab}(t) = \sum_{i \in I_a, j \in I_b} \varepsilon_i \varepsilon_j (t^{A_{ij} - d_i + d_j} - 1) - \omega_a W_b(t) - \omega_b W_a(t^{-1})$$

である。各式に $(a, b) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ を代入するので、(1.1) は全 12 個を明示的に列挙している。和には $i = j$ も含める。 G, H の補正を省いた raw sum を不変量として扱ってはいけない。補正を展開すると、実装に用いる次の恒等式を得る。

$$(2.9) \quad G_{ab} = \sum_{i \in I_a, j \in I_b} \varepsilon_i \varepsilon_j (t^{d_i - A_{ij}} - t^{d_i}),$$

$$(2.10) \quad H_{ab} = \sum_{i \in I_a, j \in I_b} \varepsilon_i \varepsilon_j (t^{A_{ij} - d_i + d_j} - t^{d_j} - t^{-d_i} + 1).$$

2.4. **対を数える多項式と比較対象の不変量.** $i < j$ かつ $\ell_i < \ell_j < r_i < r_j$ に対し、 $(a_i, a_j) = (0, 1)$ なら inward、 $(1, 0)$ なら outward と呼ぶ。これらの順序付き対の集合を $J_{\text{in}}, J_{\text{out}}$ と書く。定義は

$$(2.11) \quad V_1 = \sum_{(i,j) \in J_{\text{in}}} \varepsilon_i \varepsilon_j t^{A_{ij}}, \quad V_2 = \sum_{(i,j) \in J_{\text{out}}} \varepsilon_i \varepsilon_j t^{A_{ij}}$$

である。不変性は [9, Theorem 3.1]、 $t = 1$ での値は GPV 不変量 [2, §3.2] である。これらは使用する既知結果であり、今回の新結果ではない。

chord の index を $\text{Ind}(i) = (1 - 2a_i)d_i$ とする。これは over から under への smoothing に対応する。closure の多項式は

$$(2.12) \quad P(t) = \sum_i \varepsilon_i (t^{\text{Ind}(i)} - 1) = W_0(t) + W_1(t^{-1})$$

と正規化する。本稿の writhe/affine-index polynomial の規約はこの式であり、交叉数の規約を全体として反転すると t が t^{-1} に変わる。[5, §2.2]、[10, §3]、[7, Proposition 10.1] を参照されたい。odd writhe は $J = \sum_{d_i \text{ が奇数}} \varepsilon_i$ である。実際、 $d_i \bmod 2$ は i と linked な chord の数の偶奇に等しい。

Jones–Kauffman の正規化は $f_D(A) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle, \langle \bigcirc \rangle = 1$ とし、追加の state circle ごとに $-A^2 - A^{-2}$ を掛ける [1, §5]。通常の Jones 変数との関係は $q = A^{-4}$ である。generalized Alexander polynomial は closure の Alexander biquandle の行列式を $\mathbb{Z}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ 上で取り、単元 $\pm s^u t^v$ 倍を同一視したもの [11, §3] を意味する。自明な結び目での値は 0 である。long knot の端点情報を保持する Alexander 不変量は別物であり、この規約には含めない。

3. EXACT な計算の枠組み

3.1. **全列举と完全性.** コードは整数端点 $0, \dots, 2n - 1$ を使う。未使用の最小端点を残りの各端点と結び、残った集合に対して再帰する。その後左端点順にラベルを付け、各 chord の四つの (a, ε) を独立に指定する。

補題 3.1 (列举の完全性). この列举は、すべての符号付き有向 matching をちょうど一度ずつ生成する。生成数は $n \geq 1$ で $(2n - 1)!!4^n$ 、 $n = 0$ で 1 である。

証明. 任意の matching において、未使用の最小端点の相手は一意に決まる。この対を除けば残りの集合の matching となるため、帰納法で対応する再帰分岐の存在と一意性が分かる。最初の選択枝は $2n - 1$ 個、その次は $2n - 3$ 個、以下同様である。各 chord の方向と符号の独立な二択が 4^n を与える。左端点の順序によるラベル付けで除いているのは冗長な chord 名だけであり、異なる幾何的図式を同一視していない。□

探索には reversal、mirror、cyclic shift、Reidemeister move による枝刈りを用いない。特に long knot では cyclic shift による削減は不適切である。直ちに RI または RII で削減できる入力数は診断値としてのみ記録した。直線上の RI は端点が隣接する chord、RII は符号が反対で、矢印の始点同士と終点同士がそれぞれ隣接する対である。この診断は探索集合に影響しない。

この方法は結び目型を重複して数えるが、 n 交点の表示を持つ結び目を取り逃がさない。従って、 $n < N$ の全入力に目標パターンがなければ、RIII による完全分類なしでも不存在を証明できる。なお、本稿の二つの sharp な下界は以下で手計算でも証明する。

3.2. **演算と独立検証.** Laurent polynomial は、整数指数と 0 でない整数係数の対を並べた tuple として保持する。同じ指数の係数を加え、0 の係数を除いてから比較する。不変量、階数、検証には浮動小数点数を使わず、経過時間だけをメタデータとして記録する。

実装 A は (2.5) の指示関数を 2 倍して用いる。実装 B は (2.4) を disjoint、nested、alternating の三つの端点領域に分ける。alternating の三つの正の領域は

$$(\ell_i, \ell_j) \times (\ell_j, r_i), \quad (\ell_j, r_i) \times (r_i, r_j), \quad (\ell_i, \ell_j) \times (r_i, r_j)$$

である。nested の場合、正の領域は「左側の外側部分」×「内側区間」、負の領域は「内側区間」×「右側の外側部分」である。disjoint なら第 1 区間 × 第 2 区間だけが寄与する。これで端点对の全配置を分類している。

4 交点までの 27,893 個の全図式について両実装の A, d が一致した。さらに raw な正規化 (2.6)–(2.8) を直接加算する別実装が、(2.9)–(2.10) と全図式で一致し、 V の二方式の加算も一致した。この検査は交叉数と補正項の双方を検証する。無限族の閉公式、primitive matrix の判定、closure の cyclic な同一視は $1 \leq m \leq 16$ で exact に検証した。別の ribbon-face permutation の計算では、長さ 8 の face が二つ、長さ 4 の face が $4m - 4$ 個となった。Euler 標数から得られる genus は 2 であり、行列の階数計算からも独立している。これらは以下の一般の証明を補強する検算である。

4. 小交点数での探索と SHARP MINIMALITY

4.1. **全列挙表.** 表 4 の RI、RI/II は、それぞれ指定した種類の直ちに行える削減が存在しないことを意味する。実際の探索では削減前のすべての入力を用いる。

TABLE 4. 生成数と削減可能性の診断値。

n	生成数	対称性処理後	RI	RI/II
0	1	1	1	1
1	4	4	0	0
2	48	48	16	12
3	960	960	320	244
4	26880	26880	9216	7100

$\mathcal{F}$ の collision class は、ちょうど n 本の chord を持つ二つ以上の図式で実現される同じ組を意味する。その中で V の組が二種類以上になる class を split class とする。表 5 の最後の列は $(\mathcal{F}, v_{2,1}, v_{2,2}, P, J)$ を key として分類し、 V でさらに分かれる key の数である。結び目の対の数ではない。コードは異なる交点数の間でも累積し

TABLE 5. 不変量の exact な衝突数。結び目型は同一視していない。

n	$\mathcal{F}$ の key	衝突 key	分離 key	拡大組の分離 key
0	1	0	0	0
1	1	1	0	0
2	6	6	3	0
3	90	90	72	12
4	2478	2470	2099	329

た key を比較する。この表を交点数最小の結び目型の個数と解釈してはいけない。

4.2. **2 交点の対.** U の chord を $(1, 3, 0, +1)$ と $(2, 4, 1, +1)$ 、 U' の chord を $(1, 3, 1, +1)$ と $(2, 4, 0, +1)$ とする。 U では $A = 0, d = (1, 1)$ 、 U' では $A = 0, d = (-1, -1)$ である。 $p = t + t^{-1} - 2$ とおくと、代入により

$$(4.1) \quad \begin{aligned} F_{ab} &= G_{ab} = 0, & H_{ab} &= -p \quad (\text{全 } a, b), \\ (V_1, V_2)(U) &= (1, 0), & (V_1, V_2)(U') &= (0, 1) \end{aligned}$$

を得る。円周上の Gauss diagram は端点二つ分の shift で一致する。chord が高々 1 本なら linked pair がなく、両 V は 0 である。これで定理 1.1 の第 1 の主張と、 $c(U) = c(U') = 2$ が示された。

4.3. **closure が自明な 3 交点の対.** 図式 D を

$$(4.2) \quad z = (1, 6, 0, +1), \quad x = (2, 4, 0, -1), \quad y = (3, 5, 1, +1)$$

で指定する。方向はそのまま三つの符号をすべて反転した図式を D^* とし、表される結び目を E, E^* と書く。交叉行列と index は

$$(4.3) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad d = (0, 1, -1)$$

である。例えば α_z は、他の訪問点の外側での局所 smoothing を除けば全体の core なので、 $A_{zx} = -d_x = -1$ 、 $A_{zy} = -d_y = 1$ となる。linked pair (x, y) には第 3 の chord からの寄与がなく、 $s_x = s_y = 1$ なので $A_{xy} = 1$ である。

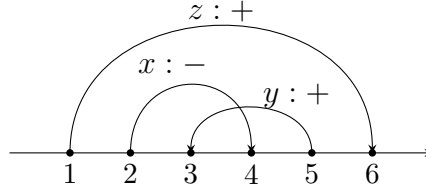


FIGURE 2. 3 交点の seed E 。符号をすべて反転すると E^* になる。

全 12 個の計算結果は次の通りである。

$$(4.4) \quad F_{00} = -p, \quad G_{01} = p, \quad H_{11} = -p, \quad \text{他の 9 成分はすべて 0.}$$

実際、 $\omega_0 = 0, \omega_1 = 1, W_0 = 1 - t, W_1 = t^{-1} - 1$ である。 F_{01} の二つの寄与は相殺する。 G_{01} の二つの寄与は $t^{-1} - 1$ と $t - 1$ である。 H_{11} の raw な自己交叉の和は 0 で、補正項は $-(W_1(t) + W_1(t^{-1})) = -p$ となる。残りの成分も (4.3) から従う。これらはプログラムに対する手計算による検算にもなる。

符号をすべて反転すると、 A, d は $-A, -d$ となり、積 $\varepsilon_i \varepsilon_j$ は変わらない。従って組は $t \mapsto t^{-1}$ で変換されるが、(4.4) はこの変換で不変である。inward pair は (x, y) のみで、outward pair はないから

$$(V_1, V_2)(E) = (-t, 0), \quad (V_1, V_2)(E^*) = (-t^{-1}, 0), \quad (v_{2,1}, v_{2,2}) = (-1, 0)$$

を得る。円周上では z の二つの訪問点が隣接しており、RI で z を消せる。残った x, y は矢印の始点同士が切断点を挟んで隣接し、終点同士も隣接し、符号が反対である。従って円周上の RII で両方を消せる。これで $\widehat{E} = \widehat{E^*} = \bigcirc$ の move certificate が得られる。この削減は、基点を固定した long diagram には許されない。特に $P = J = 0, f(A) = 1$ 、closure の generalized Alexander polynomial は 0 である。

sharp な下界のため、高々 2 本の chord の図式を考える。異なる type の linked pair がなければ両 V は 0 である。それがあれば対は一つだけであり、GPV の二つの値が inward/outward の区別と $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ を決める。同符号なら $A_{12} = 0$ で、対応する V は 1 である。異符号なら $A_{12} = \pm 1$ で、対応する V は $-t^{A_{12}}$ である。この場合、inward なら F_{01} 、outward なら F_{10} が $-(t^{A_{12}} - 1)$ そのものであり、指数が決まる。従って 2 交点までは $(\mathcal{F}, v_{2,1}, v_{2,2})$ が (V_1, V_2) を決定する。これは closure の一致を要求する前から成り立つので、第 2 の最小上限が 3 であることを示す。また $c(E) = c(E^*) = 3$ である。より小さい表示があれば、今分類した 2 交点の場合の F の形となるはずだが、(4.4) と両立しない。

5. 無限族

5.1. **端点による明示的定義.** $m \geq 1$ を固定し $q = 2m$ とする。 $8m = 4q$ 個の端点を用い、 q 本ずつの chord A_i, B_j を

$$(5.1) \quad A_i = (i, 3q + 1 - i), \quad B_j = (q + j, 4q + 1 - j), \quad 1 \leq i, j \leq q$$

で定める。両方の束で、番号 $1, \dots, m$ を type 0、符号 -1 、番号 $m + 1, \dots, 2m$ を type 1、符号 $+1$ とする。符号を除いた word は

$$(5.2) \quad A_1 \cdots A_q B_1 \cdots B_q A_q \cdots A_1 B_q \cdots B_1$$

である。この long knot を K_m とし、符号だけをすべて反転したものを $L_m = K_m^*$ とする。word の四つの部分は互いに交わらない連続区間を占めるので、(5.1) は各端点をちょうど一度だけ対にしており、任意の m で well-defined である。

同じ束の chord は入れ子で unlinked である。すべての A_i はすべての B_j と linked なので、交叉グラフは $K_{q,q}$ である。 $m = 1$ では 4-cycle となる。このグラフは連結だが、treewidth は m とともに増大する。この族について treewidth が有界であるとは主張しない。

5.2. **全交叉数の計算.** 左端点の重みはすべて $+1$ である。(2.3) から

$$(5.3) \quad d_{A_i} = q, \quad d_{B_j} = -q$$

を得る。各区間には反対側の束の訪問点がちょうど q 個単独で入り、 A_i の場合は左端点、 B_j の場合は右端点である。同じ束の chord については (2.4) の行列式は消えるか相殺し、linked の補正もない。異なる束の対では、他の A chord のうち $q - i$ 本、他の B chord のうち $q - j$ 本が寄与する領域に入り、smoothing 補正が 1 である。従って

$$(5.4) \quad A_{A_i A_h} = A_{B_j B_k} = 0, \quad A_{A_i B_j} = 2q + 1 - i - j$$

となる。逆順の交叉数はこれらの負号を取る。これですべての対を分類した。

5.3. **closure の一致.** (5.2) の最初の $2q$ 個の端点を越えるように切断点を移す。新しい word は $A_q \cdots A_1 B_q \cdots B_1$ から始まる。 $A'_i = A_{q+1-i}$ 、 $B'_j = B_{q+1-j}$ と付け直すと、matching は再び (5.1) の形になる。各矢印の二つの訪問点の順番が逆になるので、新しい type は $1 - a_{q+1-i}$ である。指定した type 列は $a_{q+1-i} = 1 - a_i$ を満たすから、新しい type は a_i となる。一方、符号は $\varepsilon_{q+1-i} = -\varepsilon_i$ である。従って得られた図式は L_m の図式そのものである。これは有向円周上の符号付き矢印図式の同型であり、Reidemeister moves や結び目同値性判定を用いずに closure の一致を証明している。

6. 閉公式と分離の証明

$R_m(t) = S_m(t)^2$ とおき、 $a, b \in \{0, 1\}$ に対して

$$T_{ab}(t) = t^{(2-a-b)m+1} R_m(t), \quad \sigma_{ab} = (-1)^{a+b}$$

と定める。 $f^\vee(t) = f(t^{-1})$ と書く。

定理 6.1 (全 12 個の閉公式). K_m の 12 成分は、四つの (a, b) それぞれについて次で与えられる。

$$(6.1) \quad F_{ab} = \sigma_{ab}(T_{ab} + T_{ab}^\vee - 2m^2),$$

$$(6.2) \quad G_{ab} = \sigma_{ab}(t^{2m} T_{ab}^\vee + t^{-2m} T_{ab} - m^2(t^{2m} + t^{-2m})),$$

$$(6.3) \quad H_{ab} = \sigma_{ab}(t^{-4m} T_{ab} + t^{4m} T_{ab}^\vee + 6m^2 - 4m^2(t^{2m} + t^{-2m})).$$

これらはすべて reciprocal である。さらに

$$(6.4) \quad W_0 = -m(t^{2m} + t^{-2m} - 2), \quad W_1 = m(t^{2m} + t^{-2m} - 2), \quad P = J = 0$$

が成り立つ。

証明. $Q_0 = \{1, \dots, m\}$, $Q_1 = \{m+1, \dots, 2m\}$ とする。type ごとに符号は一定で、二つの符号の積は σ_{ab} である。(5.4) から

$$\sum_{i \in Q_a, j \in Q_b} t^{4m+1-i-j} = T_{ab}(t)$$

を得る。実際、 $i = am + 1 + u$, $j = bm + 1 + v$, $0 \leq u, v \leq m-1$ と書き、二つの等比級数を逆順に並べればよい。項の数は m^2 である。

F では同じ束の項は消え、異なる束の二つの順序から T_{ab} と $T_{ab}^\vee$ が現れ、 $2m^2$ 個の定数項を引く。 G には (2.9) を使う。同じ束の項は再び消え、 A から B の寄与は $t^{2m} T_{ab}^\vee - m^2 t^{2m}$ 、逆方向の寄与は $t^{-2m} T_{ab} - m^2 t^{-2m}$ となる。これで (6.2) が示された。

H では (2.10) の二つの同じ束の寄与の和は $2m^2(2 - t^{2m} - t^{-2m})$ となる。異なる束の寄与は

$$t^{-4m} T_{ab} - 2m^2 t^{-2m} + m^2, \quad t^{4m} T_{ab}^\vee - 2m^2 t^{2m} + m^2$$

である。この三つを加えて σ_{ab} を掛けると (6.3) になる。これで係数 6 と 4 の由来も確認できる。各表示式は $t \mapsto t^{-1}$ で不変である。 W_a は各束に各 type の index が m 個ずつあることから従う。(2.12) により $P = 0$ となり、すべての d_i が偶数なので $J = 0$ である。□

V に寄与できるのは異なる束の対だけである。inward は $i \in Q_0, j \in Q_1$ 、outward は $i \in Q_1, j \in Q_0$ であり、符号積はすべて -1 となる。従って両 V は $-T_{01} = -t^{m+1} S_m(t)^2$ である。符号をすべて反転すると交叉数が反転するので、 L_m の公式が従う。同じ操作で (6.1)–(6.3) の各式は reciprocal に置き換わるが、もとの多項式と等しい。これで定理 1.2 の分離と GPV 値に関する部分が示された。

7. 追加の帰結

7.1. 交点数と supporting genus. [12, Lemmas 6.1.1, 6.2.1, §6.3] の一般的な based matrix 理論を用いる。based matrix は、特別な元 s を指定した有限反対称行列 b である。 s 以外の元について、その行が 0 なら annihilating、 s の行に等しければ core と呼ぶ。二つの s 以外の元の行の和が s の行に等しければ complementary と呼ぶ。こ

これらの削除が一つもできない行列を primitive と呼ぶ。flat string では $\{s\} \sqcup \{\text{arrows}\}$ によって交叉行列を付番し、 s は全体の core、arrow loop の向きは曲面で決まるものを用いる。今回の左端点の重みがすべて正である族では、この arrow loop は上で使った α 区間である。

引用した定理によれば、primitive based matrix は homotopy 不変量である。 s 以外の元が r 個、行列の階数が $2g$ なら、同じ flat homotopy 類の任意の図式には少なくとも r 本の矢印が必要で、任意の実現曲面の genus は少なくとも g である。ここでの仮定は flat homotopy に関するものだが、virtual knot の同値変形で over/under 情報を忘れるとそのような homotopy を得る。従ってこれらの下界は virtual knot にも適用できる。

今回の行列は (5.3)–(5.4) に $b(A_i, s) = q$ 、 $b(B_j, s) = -q$ を加えたものである。この非零の値により annihilating と core の元はない。complementary pair があるとすれば A_i, B_j でなければならない。行の和の条件を A_h で評価すると

$$-(2q + 1 - h - j) = -q \quad (\text{すべての } 1 \leq h \leq q)$$

が必要になる。しかし $q = 2m \geq 2$ なので、 $h = 1, 2$ の両方では成立しない。従って行列は primitive であり、 $2q = 4m$ 本の矢印から交点数の下界 $4m$ を得る。指定した図式がこの下界を達成する。円周上の図式が一致するため、同じ下界は closure と L_m にも適用できる。

階数を独立に計算する。 $e_r \cdot f_s = \delta_{rs}$ を満たす 4 次元の symplectic space において

$$A_i = e_1 + ie_2, \quad B_j = (2q + 1 - j)f_1 - f_2, \quad s = q(f_1 - e_2)$$

と表すと、その交叉数は上の行列に正確に一致する。従って階数は高々 4 である。 $i, j \in \{1, 2\}$ の cross-pairing の部分行列は

$$\begin{pmatrix} 2q - 1 & 2q - 2 \\ 2q - 2 & 2q - 3 \end{pmatrix}, \quad \det = -1$$

であり、対応する 4 次の反対称部分行列の行列式は非零だから、階数は 4 である。core と各 chord の一方の smoothing loop は canonical ribbon surface の第 1 ホモロジーの基底を与える [12, §4.2]。smoothing を補ループに替える操作は整数係数の基底変換である。従って行列の階数はその曲面の genus の 2 倍に等しい。境界を円板で塞ぐと genus 2 の実現を得る。下界と合わせて $\text{sg}(\widehat{K_m}) = \text{sg}_1(K_m) = \text{sg}_1(L_m) = 2$ が示された。

[8, Definition 3.5] の第 2 supporting genus については

$$1 \leq \text{sg}_2(K_m) = \text{sg}_2(L_m) \leq 2$$

までを得る。上界と符号反転に対する不変性は幾何的に従い、下界は $F_{00} \neq 0$ と [8, Lemma 3.6(ii)] から従う。1 か 2 かの決定は主張しない。3 交点の seed では core と smoothing の全行列の階数は 2 であるため $\text{sg}_1(E) \leq 1$ となり、 $F_{00} \neq 0$ と同じ補題から $\text{sg}_2(E) = \text{sg}_1(E) = 1$ が分かる。 E^* についても同じである。

7.2. Jones 多項式と旧不変量の一致の範囲. $f_D(A)$ の有向 state sum は端点の pairing と交点符号のみに依存する。有向 smoothing は一方の訪問に入る segment と他方から出る segment を結び、重みは A^{ε_i} である。もう一方の smoothing は入る segment 同士と出る segment 同士を結び、重みは $A^{-\varepsilon_i}$ である。従って符号を保持した矢印の方向変更は state sum を変えない。

(5.2) の各束で、最も内側にある番号 $m, m + 1$ の対は符号が反対で、左の訪問点同士と右の訪問点同士がそれぞれ隣接する。bracket の計算のためだけに、この二つ

の矢印を同じ方向にする。すると RII で消せる。続いて $m-1, m+2$ の対について繰り返し、束をすべて消す。その後もう一方の束にも同じ操作を行う。RII のたびに異符号の二交点を消すので正規化も保持され、 $f_{K_m}(A) = 1$ が従う。closure の一致から $f_{L_m}(A) = 1$ も成り立つ。この議論は不変量の計算であって、矢印の方向変更が virtual isotopy であるとは主張しない。実際、genus 2 と交点数の下界によって closure は非自明である。

共通の closure を持つことから、generalized Alexander polynomial の任意の固定した正規化を含む、すべての closure 不変量が一致する。これは有限個の計算値を比較するより強い結論であり、その等号のために行列式を再構成する必要はない。コードには exact な bracket state sum も実装し、seed と $m = 1, 2, 3$ で検証した。

一方、結論の範囲には重要な限界がある。long welded knot の端点情報を保持する正規化 Alexander polynomial は closure の関数ではない。今回の族では

$$V'_1(K_m; 1) = -2m^3, \quad V'_1(L_m; 1) = 2m^3$$

である。[9, Theorem 7.4] により、対応する $\alpha_2 + \alpha_3$ の値も異なる。従って今回の例がすべての既存の long knot 不変量をすり抜けるとは主張しない。また、この次数 3 の導関数の恒等式や有限型性を新結果として扱わない。

7.3. Treewidth が有界な族. 補助的な構成として、forest 上の族も得られる。ただし、この補助族の closure の一致は主張しない。 E を (4.2) の seed とし、符号と矢印方向をともに反転したものを $E^\#$ とする。 $B = E \circ E^\#$ 、 $C_r = B^{\circ r}$ ($r \geq 1$) とおき、 C_r と C_r^* を比較する。これは次の明示的な端点定義を持つ。最初の 6 端点に seed の 3 本を置き、次の 6 端点には符号と矢印方向を反転した seed を置く。この 6-chord のブロックを、 $0 \leq j < r$ に対して端点 $12j$ 個分ずつ平行移動して並べる。交叉グラフは $2r(K_2 \sqcup K_1)$ で、treewidth は 1 である。

$p = t + t^{-1} - 2$ とおく。一つのブロックへの直接代入と [7, Theorem 6.2] の積公式から

$$\begin{aligned} F_{00} &= F_{11} = -rp, & F_{01} &= F_{10} = 0, \\ G_{01} &= G_{10} = rp, & G_{00} &= G_{11} = 0, \\ H_{00} &= H_{11} = r^2p^2 + rp, \\ H_{01} &= H_{10} = 2rp - r(r-1)p^2, \\ W_0 &= -rp, & W_1 &= rp, & P &= J = 0, & V_1 &= V_2 = -rt \end{aligned}$$

を得る。加法的でない唯一の部分を確認すると、積公式は $H_{ab}(X \circ Y) = H_{ab}(X) + H_{ab}(Y) + W_a(X)^\vee W_b(Y) + W_a(Y)^\vee W_b(X)$ である。 B の対角の H は $p^2 + p$ 、異なる type の H は $2p$ 、 $(W_0, W_1) = (-p, p)$ となる。 r 個のブロックの寄与と $r(r-1)$ 個の順序付きの異なるブロックの寄与を加えれば、表示した二つの H の式を得る。ブロック間には linked pair がないので V の式も直接従う。全 12 成分は reciprocal であり、 C_r, C_r^* で一致する。 $V_i(C_r^*) = -rt^{-1}$ 、両方の GPV 値は $(-r, -r)$ である。これは同時相殺の追加の応用であり、新しい concatenation law ではない。交点数について主張するのは $c(C_r), c(C_r^*) \leq 6r$ のみである。

8. NOVELTY AUDIT

8.1. 定理の statement の比較.

Present result	Closest previous result	Precise difference
全 12 個の組に対する 上限 2	GPV §1.6、SW Remark 3.3、Lemma 4.1	closure に関する古い区別は既知として認める。今回の主張は全 12 成分の計算と、その組に関する sharp な比較上限である。
GPV と closure も固 定した上限 3	GPV §3.2、SW Theorem 4.3	realizability は交叉多項式の組や closure を固定しない。今回の seed は自明な closure を含め双方を固定し、すべての 2 交点の対を下界の証明で除外する。
無限族の同時分離	NNSW1 Theorems 2.3, 5.2, 6.2、SW Theorem 4.3	全 12 成分、二つの GPV 値、有向 closure を同時に固定し、台が増大する非定数の V の閉公式を与える。
lattice flat string と交 点数下界	Turaev §§3.3(1), 6.3–6.4	flat string と primitive matrix の方法は既知。今回の寄与は符号・基点を指定した比較と多項式の閉公式である。
12 個の値への同時制 約	NNSW2 Theorems 7.1, 7.2, 7.4	既知の定理は成分ごとの realizability を特徴付ける。GPV と closure を含めた今回の同時指定は扱っていない。
組からの復元の不可 能性	Cheng Theorem 1.1	Cheng は特定の moves を許した有向符号付き交叉グラフの同値性と closure の writhe polynomial を比較する。long な対の数え上げの復元は結論していない。
genus 2、Jones が 1 の 例	Kauffman §5、Turaev の based matrix	Jones が 1 の virtual knot の存在や genus obstruction 自体は新結果ではない。今回の同時分離を強める性質として用いる。

8.2. 検索記録と出典の限界. 2026 年 9 月 10 日に、原論文の PDF と arXiv HTML を用いて監査した。検索には “ V_1 -polynomial long virtual knot”、“ V_2 -polynomial long virtual knot”、“intersection polynomial separation virtual knot”、“Gauss diagram path long virtual knot”、“minimal crossing $V_1 V_2$ ”、“virtual knot invariant collision” と、“complete bipartite”、“mirror”、“Turaev virtual strings” を組み合わせた語句を用いた。これらで得られた中心的な Satoh–Wada の論文は arXiv:2601.15634 であった。ただし、この検索結果だけで新規性を判定したのではなく、前の表で関連

する statement を個別に比較した。認証付き Google Scholar を直接検索したとは主張せず、文献の網羅性も主張しない。

指定された基礎・最新の8論文は、少なくとも関連する定義または定理の statement を実際に確認した。追加で [6, 10, 11, 12] を用いた。定理番号は実際に確認した arXiv PDF の版に合わせた。特に、12 不変量の定理は arXiv:2512.05366v1 の Theorem 2.3 であり、SW 中の引用番号とは異なる。また NSW2 Theorem 7.1 の条件は $f(1) = 0$ であり、その序論の例にある $f(1) = 1$ は用いていない。

さらに数値に関する出典の不一致を明記する。[12, §4.3(1)] の arXiv v5 では、lattice matrix の成分の表示に続いて $\min(p, q) \geq 3$ のとき rank が6であるという記述がある。しかし今回用いる表示成分については、§7.1 の4次元空間への具体的な分解と独立な ribbon の計算の両方が rank 4 を与える。本稿の genus の結論は、この具体計算と一般の based matrix の定理によるものであり、その印刷された数値的主張には依存しない。この不一致やその修正自体について新規性を主張しない。

主結果には完全な証明を与えたが、研究上の位置付けは**上記の一次文献による新規性監査を伴う、新しい分離定理の候補**と理解すべきである。確認した文献の範囲を越える優先権の断定はできない。依頼された状態表記では、*Candidate new theorem; novelty not fully verified.* である。新しい有限型定理、一般的な対称性の法則、realizability theorem、concordance の分類は主張しない。

付録 A. COMPUTER-ASSISTED VERIFICATION

同梱の `virtual_separation.py` が実行可能なソースコードである。Python 3 と標準ライブラリのみを使用する。実行方法は

```
python virtual_separation.py --max-n 4 --output search_results.json
python virtual_separation.py --verify-claims
python virtual_separation.py --verify-local-moves
```

である。第1のコマンドは個数、衝突、具体的な witness、各交点数の SHA-256 digest を保存する。digest の入力は列挙順の $(D, \mathcal{F}, V, W, P, J)$ の Python 表現を UTF-8 にしたもので、各記録の後に改行を入れる。Python のバージョンも JSON に保存する。第2のコマンドは `verification_results.json` を作成し、全 27,893 図式について raw な正規化との一致を検証するとともに、seed の closure の move certificate と $1 \leq m \leq 16$ の一般族の公式を検査する。SHA256SUMS.txt には同梱のコードと結果ファイルのハッシュも記録する。第3のコマンドは `local_move_verification.json` を作成する。4 交点までの図式で可能な RI 削除 27,892 件、RII 削除 5,960 件をすべて検査する。これは個々の削除の件数であり、同じ図式からの複数の削除も数える。また第2のコマンドでは SW Example 3.4、三葉結び目の正規化 bracket、8 ブロックまでの補助的な forest の閉公式も照合する。

数学的な核は次の擬似コードであり、完全な実行コードには独立な領域公式、state sum、ribbon face、行列の検査も含めた。

```

matchings(S):
    if S is empty: yield empty matching
    else:
        x = least element of S
        for y in S minus {x}:
            for M in matchings(S minus {x,y}):
                yield [(x,y)] + M
for n = 0, ..., N:
    for M in matchings({0, ..., 2*n-1}):
        for (type,sign) in {0,1} x {-1,1}, independently per chord:
            D = matching M with these labels
            calculate d,A by both endpoint formulas
            assert agreement
            calculate F,G,H,V with exact integer dictionaries
            group by the full twelve-polynomial tuple
            record whether the V-pair varies within a group

```

主定理の下界は 0、1、2 本の chord について明示的に証明したため、最終的な sharp threshold は計算機による不存在判定のみに依存しない。全列挙表は実際に行った探索を記録するものであり、一般の証明に代わるものではない。

REFERENCES

- [1] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*, European J. Combin. **20** (1999), 663–690. [arXiv:math/9811028](#), verified v2, §§2–3,5.
- [2] M. Goussarov, M. Polyak, and O. Viro, *Finite-type invariants of classical and virtual knots*, Topology **39** (2000), 1045–1068. [arXiv:math/9810073](#), verified v2, §§1.6,3.2.
- [3] J. S. Carter, S. Kamada, and M. Saito, *Stable equivalence of knots on surfaces and virtual knot cobordisms*, J. Knot Theory Ramifications **11** (2002), 311–322. [arXiv:math/0008118](#), verified v1, Theorem 3.3 and Proposition 3.4.
- [4] G. Kuperberg, *What is a virtual link?*, Algebr. Geom. Topol. **3** (2003), 587–591. [arXiv:math/0208039](#), Theorem 1.
- [5] Z. Cheng, *Intersection graph and writhe polynomial*, [arXiv:2308.01811v1](#) (2023), Theorem 1.1 and §2.2.
- [6] R. Higa, T. Nakamura, Y. Nakanishi, and S. Satoh, *The intersection polynomials of a virtual knot I: Definitions and calculations*, Indiana Univ. Math. J. **72** (2023), 2369–2401. [arXiv:2102.12067v1](#), §3, Lemmas 3.1–3.2.
- [7] T. Nakamura, Y. Nakanishi, S. Satoh, and K. Wada, *The intersection polynomials of a long virtual knot I: Definitions and properties*, [arXiv:2512.05366v1](#) (2025), Theorems 2.3, 5.2, 6.2, and Proposition 10.1.
- [8] T. Nakamura, Y. Nakanishi, S. Satoh, and K. Wada, *The intersection polynomials of a long virtual knot II: Two supporting genera and characterizations*, [arXiv:2512.05369v1](#) (2025), §3 and Theorems 7.1, 7.2, 7.4.
- [9] S. Satoh and K. Wada, *The V_1 - and V_2 -polynomials of a long virtual knot*, [arXiv:2601.15634v1](#) (2026), §§2–4, Theorems 3.1, 4.3, 5.1, 6.2, 7.4.
- [10] L. H. Kauffman, *An affine index polynomial invariant of virtual knots*, J. Knot Theory Ramifications **22** (2013), 1340007. [arXiv:1211.1601](#), §3.
- [11] L. H. Kauffman and D. E. Radford, *Bi-oriented quantum algebras, and a generalized Alexander polynomial for virtual links*, [arXiv:math/0112280v2](#) (2001), §3.
- [12] V. Turaev, *Virtual strings and their cobordisms*, [arXiv:math/0311185v5](#) (2004), §§3.3(1),4.2,4.3(1),6.1–6.4; Lemmas 4.2.1,6.1.1,6.2.1.