

BASIC CHERN VANISHING AND BEAUVILLE–BOGOMOLOV STRUCTURE IN VAISMAN GEOMETRY

chatGPT 6 Astra

ABSTRACT. For a compact non-Kähler Vaisman manifold, vanishing of the first real basic Chern class is equivalent to vanishing of the first Bott–Chern class of the complex manifold. We explain this equivalence without assuming a leaf space, and apply Istrati’s existing structure theorem. The resulting Beauville–Bogomolov decomposition belongs to the transverse geometry and to a finite orbifold cover of the leaf space. The total space remains a definite elliptic orbi-bundle. We compute its first and virtual first Betti numbers, describe its fundamental group and Albanese map, and give explicit examples with small first Betti number. Further elementary consequences concern bundle reconstruction, product obstructions, and a vanishing second basic Chern class. This is an expository working note; no new decomposition theorem or verified claim of originality is asserted.

This note was generated by ChatGPT 6. Iwai has NOT verified any of its mathematical content. It may therefore contain mathematical errors and should be read with caution. A Japanese version is provided below.

CONTENTS

1. The precise answer and the status of the results	2
2. Definitions and transverse Hodge theory	3
3. The bridge to Bott–Chern vanishing	4
4. Applying the known structure theorem	6
5. Betti numbers, finite covers, and the Albanese map	7
6. Characteristic classes and the limits of product decomposition	8
7. The fundamental group	10
8. Explicit examples and boundary cases	11
9. Further consequences proved in this note	13
Appendix A. Dependencies, checks, and what is not claimed	14
References	15

Date: 8 September 2026, working note, version 0.1.

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 53C55; Secondary 32Q25, 32M25, 57R18.

Key words and phrases. Vaisman manifold, basic Chern class, Bott–Chern cohomology, transverse Calabi–Yau geometry, elliptic orbi-bundle, virtual first Betti number.

1. THE PRECISE ANSWER AND THE STATUS OF THE RESULTS

Throughout, M is connected and compact, $\dim_{\mathbb{C}} M = n \geq 2$, and (J, g, ω, θ) is Vaisman with $\theta \neq 0$. Put $m = n - 1$. The hypothesis in this note is exactly

$$(1.1) \quad c_1^B(Q^{1,0}) = 0 \quad \text{in } H_B^2(M, \mathbb{R}).$$

It imposes no condition on c_2^B . The complex structure J is fixed.

Theorem 1.1 (Answer to the main question). *Under (1.1), the original canonical foliation is quasi-regular. There is a connected finite holomorphic étale cover $M' \rightarrow M$ and a holomorphic principal elliptic orbi-bundle*

$$(1.2) \quad E \longrightarrow M' \xrightarrow{\pi} B, \quad B = A \times \prod_i Y_i \times \prod_j Z_j = A \times \mathcal{Q}.$$

Here A is an abelian variety of dimension a , and the other factors are projective pure Kähler orbifolds, simply connected in the orbifold sense, with Ricci-flat metrics and irreducible holonomy respectively $\mathrm{SU}(d_i)$ and $\mathrm{Sp}(e_j)$. Their complex dimensions are d_i and $2e_j$. In particular,

$$(1.3) \quad a + \sum_i d_i + \sum_j 2e_j = m.$$

The product decomposition is holomorphic and isometric on the base for the induced Ricci-flat metric. The total space is generally twisted; indeed no finite étale cover of M is a product of two positive-dimensional compact complex manifolds. Furthermore,

$$(1.4) \quad b_1(M') = b_1^{\mathrm{virt}}(M) = 2a + 1, \quad b_1(M) \leq 2a + 1 \leq 2n - 1.$$

After choosing origins, $\mathrm{Alb}(M') = A$ and its Albanese map is $\mathrm{pr}_A \circ \pi$. Its fibers have dimension $n - a$, and are the canonical leaves precisely when $\mathcal{Q}$ is a point.

The equivalence of Chern conditions and the structure assertion are [KNOWN]: see Istrati [Ist25, Definition 4.1, Lemma 4.4, Corollary 5.2, Theorem 5.3]. We supply the bridge and the applications in detail. The virtual Betti formula and bundle computations are [DERIVED] here, which is not a claim of novelty. The integral fundamental-group descriptions below refine the explanation of [Ist25, Corollary 5.10]. The bound and maximal case already appear in [Ist25, Corollary 5.11].

Remark 1.2 (Version and notation policy). All numbered references to Istrati mean arXiv:2304.02582v1 (5 April 2023). The publisher confirms JEMS online first, 11 March 2025, DOI 10.4171/JEMS/1633. Its subscription full text was not accessible in this run; a correspondence with published numbering is therefore not asserted. Gomes means arXiv:2604.04134v2 (21 May 2026), including its revised title. His real dimension $2r + 2$ corresponds to our $r = m = n - 1$; his maximal value $2r + 1$ is our $2n - 1$. His Theorems 1.1 and 6.6 give a classification with left-invariant complex structure and identify the leaf fibration with the Albanese map. His proof uses a deformation of J , with a separate return argument in Theorem 4.3. We do not transfer a statement from a deformed complex structure: our route uses Istrati directly on (M, J) .

2. DEFINITIONS AND TRANSVERSE HODGE THEORY

We use $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$ and set $J\alpha = -\alpha \circ J$ for a real one-form. Multiplying g by the positive constant $|\theta|_g^2$ makes $|\theta| = 1$, without changing J , θ , or its Levi-Civita parallelness. With

$$(2.1) \quad U = \theta^\sharp, \quad V = JU, \quad \eta = J\theta, \quad \omega_T = -d\eta, \quad \omega = \omega_T + \theta \wedge \eta,$$

the form ω_T is closed, semipositive, of complex rank m , and its kernel is $T\mathcal{F} = \langle U, V \rangle_{\mathbb{R}}$. This is the transverse Kähler structure. These standard Vaisman identities are recalled in [Ist25, Section 2.1], [IO23, Theorem 2.2].

Definition 2.1. A differential form α is basic if $\iota_X \alpha = \mathcal{L}_X \alpha = 0$ for every vector field X tangent to $\mathcal{F}$. Equivalently it is horizontal and invariant for U, V . The complex $(\Omega_B^\bullet, d_B)$ has cohomology $H_B^\bullet(M, \mathbb{R})$. Its complexification decomposes by transverse type and $d_B = \partial_B + \bar{\partial}_B$. We set

$$(2.2) \quad H_B^{p,q} = \frac{\ker(\bar{\partial}_B : \Omega_B^{p,q} \rightarrow \Omega_B^{p,q+1})}{\bar{\partial}_B \Omega_B^{p,q-1}},$$

$$H_{BC,B}^{1,1}(M, \mathbb{R}) = \frac{\{\alpha \in \Omega_B^{1,1} : d\alpha = 0, \bar{\alpha} = \alpha\}}{\{i\partial_B \bar{\partial}_B f : f \in C^\infty(M, \mathbb{R})\}}.$$

Replacing basic forms and functions by ordinary ones defines $H_{BC}^{1,1}(M, \mathbb{R})$.

The holomorphic normal bundle is $Q^{1,0} = (TM/T\mathcal{F})^{1,0}$ of rank m . In a transverse holomorphic chart, its Hermitian metric h_T has Chern connection matrix $h_T^{-1} \partial_B h_T$ and curvature F_T . The invariant local matrices glue as a basic connection, equivalently a connection extending the leafwise Bott partial connection. Define

$$(2.3) \quad c^B(Q^{1,0}) = \left[\det \left(I + \frac{i}{2\pi} F_T \right) \right]_B, \quad \rho_T = i \operatorname{tr} F_T = -i \partial_B \bar{\partial}_B \log \det h_T.$$

Changes of basic Hermitian metric change the Chern forms by basic exact forms. For TM , the same convention gives $\rho_C = -i \partial \bar{\partial} \log \det g$ and $c_1^{BC}(M) = [\rho_C / (2\pi)]_{BC}$. Thus we use Chern classes of *tangent* bundles; the canonical bundle has their negative first class. Our template macro $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial}$ includes $1/(2\pi)$, whereas $i \partial \bar{\partial}$ does not.

Lemma 2.2 (The basic potential lemma). *The canonical foliation is a transversely oriented Riemannian Kähler foliation with minimal leaves. The basic $\partial \bar{\partial}$ lemma applies. In particular, a real, basic, d_B -exact $(1, 1)$ -form α can be written $\alpha = i \partial_B \bar{\partial}_B f$ with f real and basic.*

Proof. The fields U, V commute and are real holomorphic Killing fields of unit length. Since U is parallel, $\nabla_U U = \nabla_V U = 0$; commutation gives $\nabla_U V = 0$, and the constant length Killing identity gives $\nabla_V V = -\frac{1}{2} \operatorname{grad} |V|^2 = 0$. The leaves are totally geodesic, so their mean curvature vanishes. The metric is bundle-like, and ω_T^m orients the normal bundle. Basic Hodge theory and the Kähler identities therefore apply: [EKA90, Sections 3.3–3.4, Proposition 3.5.1], [IO23, Section 2.2]. These hypotheses are satisfied before there is any global quotient orbifold.

For clarity, the required degree-two consequence has the following Hodge-theoretic proof. Write $\chi = \theta \wedge \eta$; then $d\chi = \theta \wedge \omega_T$. Integrating a basic exact form against

$\omega_T^{m-1} \wedge \chi$ gives zero by Stokes: the extra term contains a transverse form of degree $2m+1$, so vanishes. In particular, the trace $\Lambda_T \alpha$ has mean zero. The basic scalar Laplacian, equivalently $f \mapsto \Lambda_T(i\partial_B \bar{\partial}_B f)$ up to a fixed nonzero scalar, is self-adjoint and has kernel the constants. Compact basic Hodge theory solves

$$\Lambda_T(i\partial_B \bar{\partial}_B f) = \Lambda_T \alpha.$$

The difference β is closed and primitive. For $m \geq 2$ its transverse Hodge star is $*_T \beta = -\beta \wedge \omega_T^{m-2}/(m-2)!$, so it is also basic coclosed. Since it is basic exact, its squared norm is zero. For $m = 1$, a trace-free $(1,1)$ -form is already zero. This proves the assertion. The same basic Hodge theory gives $H_B^{2m}(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$; this is the homological orientability required in El Kacimi-Alaoui's formulation. $\square$

Definition 2.3. The canonical foliation is *quasi-regular* when its leaves are compact, or equivalently its effective Lee group is a compact complex one-dimensional group. It is *regular* when this group acts freely. For a quasi-regular foliation the quotient $\mathcal{B}$ is a complex orbifold. A holomorphic principal E -orbi-bundle is locally of the form $(\widetilde{W} \times E)/\Gamma \rightarrow \widetilde{W}/\Gamma$, with holomorphic transition functions acting by translations of E ; the isotropy acts on the fiber by translations. The diagonal action is free when the total space is a manifold. An ordinary principal bundle has a smooth base and no orbifold isotropy.

A pure orbifold has no divisorial isotropy; it can still have quotient singularities in codimension at least two. We write $H_{\text{orb}}^k(\mathcal{B}, \Lambda) = H^k(B\mathcal{B}, \Lambda)$ and $\pi_k^{\text{orb}}(\mathcal{B}) = \pi_k(B\mathcal{B})$ for its classifying space. Real orbifold cohomology agrees with orbifold de Rham cohomology and the real cohomology of the underlying space. Integral cohomology need not. An orbifold covering is locally a change from a finite chart group to a subgroup. It need not be an étale cover of the underlying singular spaces. By a finite étale cover of manifolds we mean a finite unramified holomorphic covering of the total spaces.

The LCK rank is the rank of the period group of θ (equivalently the smallest rational subspace containing $[\theta]$). Rank one is not the definition of either regularity or quasi-regularity. No rank-one assumption is used in our structure theorem.

3. THE BRIDGE TO BOTT–CHERN VANISHING

Lemma 3.1 (Ricci comparison; Istrati's Lemma 4.4). *For a normalized Vaisman metric, as ordinary forms on M ,*

$$(3.1) \quad \rho_C = \rho_T.$$

Proof. Take a transverse holomorphic submersion $p : W \rightarrow T$ and a local holomorphic frame σ_T of K_T . The form $\theta^{1,0} = (\theta + i\eta)/2$ is generally *not* holomorphic. Nevertheless

$$\sigma = \theta^{1,0} \wedge p^* \sigma_T$$

is a nonvanishing holomorphic frame of $K_M|_W$: $\bar{\partial} \theta^{1,0} = -i\omega_T/2$, whose wedge with the horizontal top form is zero. Its squared norm is $|\sigma|_g^2 = \frac{1}{2} p^* |\sigma_T|_{h_T}^2$. For a holomorphic canonical frame the tangent Ricci form is $i\partial\bar{\partial} \log |\sigma|^2$. The constant $1/2$ disappears upon differentiation, proving (3.1). This also checks the sign and the absence of an additional multiple of ω_T . $\square$

Proposition 3.2 (Comparison of the three conditions). *For every compact non-Kähler Vaisman manifold,*

$$(3.2) \quad c_1^B(Q^{1,0}) = 0 \iff c_1^{BC}(M) = 0 \implies c_1(M) = 0 \text{ in } H^2(M, \mathbb{R}).$$

The last implication cannot be reversed.

Proof. There is a commuting square of natural maps

$$\begin{array}{ccc} H_{BC,B}^{1,1}(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{j} & H_{BC}^{1,1}(M, \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_B^2(M, \mathbb{R}) & \longrightarrow & H^2(M, \mathbb{R}) \end{array}$$

The left map is injective by Lemma 2.2, and its image is the real transverse $(1, 1)$ -part. If $c_1^B = 0$, that lemma applied to ρ_T gives $\rho_T = i\partial_B\bar{\partial}_B f$. A basic function is an ordinary global smooth function, and the restricted operators agree with $\partial, \bar{\partial}$ on it. Lemma 3.1 therefore proves Bott–Chern vanishing.

The reverse direction also holds before quasi-regularity is known. Let K be the closure of the flows of U, V inside the compact isometry group. It consists of holomorphic isometries. If a basic real $(1, 1)$ -form $\alpha = i\partial\bar{\partial}f$, average f over K with Haar probability measure. Since α is invariant, the average satisfies $i\partial\bar{\partial}\bar{f} = \alpha$ and is invariant under U, V , hence basic. This proves injectivity of j , and applied to $\rho_T = \rho_C$ proves the converse in (3.2). The last map is simply forgetting Bott–Chern information. $\square$

Here is an explicit description of the information that is forgotten.

Lemma 3.3. *For any compact non-Kähler Vaisman manifold,*

$$(3.3) \quad \begin{aligned} H^1(M, \mathbb{R}) &= H_B^1(M, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}[\theta], \\ \ker(H_B^2(M, \mathbb{R}) \rightarrow H^2(M, \mathbb{R})) &= \mathbb{R}[\omega_T]_B. \end{aligned}$$

In particular $[\omega_T]_B \neq 0$, although $\omega_T = -d\eta$ on M .

Proof. Averaging over K does not change ordinary de Rham classes because its elements are isotopic to the identity. An invariant one-form uniquely has the shape $\beta + u\theta + v\eta$, with β basic and u, v basic functions. Its derivative is $d_B\beta + du \wedge \theta + dv \wedge \eta - v\omega_T$. If this is basic, contraction with U, V gives $du = dv = 0$. The class $[\omega_T]_B$ is nonzero: a hypothetical basic primitive would, by Stokes as in Lemma 2.2, force $\int_M \omega_T^m \wedge \chi = 0$, whereas the integrand is positive. Thus closed invariant one-forms have $v = 0$, proving the first formula. The sum is direct because contraction of an invariant exact one-form df with U is zero after averaging f . Applying the same argument to a primitive of any ordinary exact basic two-form proves the second formula. This is also consistent with [IO23, Sections 3–5]. $\square$

For the scalar Hopf manifold $(\mathbb{C}^n \setminus \{0\})/\langle q \rangle$, $0 < q < 1$, the leaf space is $\mathbb{P}^{n-1}$ and $c_1^B = nH \neq 0$, while $H^2(M, \mathbb{R}) = 0$. Thus it is a counterexample to the reverse of the last implication only; it is *not* an example satisfying our main hypothesis. Equivalently, $c_1(M) = 0$ permits a nonzero multiple of $[\omega_T]_B$ in place of zero.

4. APPLYING THE KNOWN STRUCTURE THEOREM

Proof of the structural part of Theorem 1.1. Proposition 3.2 supplies exactly the hypothesis in Istrati's Definition 4.1. Compactness, the Vaisman condition, and nonzero Lee form are already part of the setting. Istrati's Corollary 5.2 gives a Chern–Ricci-flat Vaisman metric on the same complex manifold, in a prescribed admissible Lee class, unique up to scale. By Lemma 3.1 its transverse metric is Ricci-flat.

Theorem 5.3 of that paper proves, without a preliminary quotient assumption, that $\text{Aut}_0(M)$ is a compact complex one-dimensional group and equals the Lee group. Its universal complex Lie group is $\mathbb{C}$ and its kernel is a cocompact rank-two lattice; hence it is an elliptic curve $E = \mathbb{C}/\Lambda$. The locally free action gives the original foliation its compact leaves. Its quotient is now available. This is the step that proves quasi-regularity and avoids a circular use of a Kähler orbifold quotient.

For orientation, the mechanism in that theorem is that the uniqueness of the canonical metric makes every element of $\text{Aut}_0(M)$ an isometry: it preserves the Lee class and total volume. The compact automorphism-group result then identifies it with the Lee group. The rest of Istrati's theorem applies an orbifold splitting theorem and proves purity after a finite cover using the definite Seifert bundle. For pure orbifolds, the decomposition used is [Cam04, Theorem 6.4 and Definition 6.5]. Its hypotheses are compactness, Kähler geometry and vanishing orbifold first Chern class. Here the last follows by identifying basic forms with quotient orbifold forms and using (1.1). We use Istrati's purity argument as part of the known theorem, rather than postulating purity initially.

The quotient has an integral positive class coming from the definite bundle; hence it is projective. Every factor of its finite product cover is projective by restriction of an ample class. Thus the flat complex torus is an abelian variety, not just an arbitrary complex torus. The meaning of simple connectivity is $\pi_1^{\text{orb}}(Y_i) = \pi_1^{\text{orb}}(Z_j) = 0$. Holonomy is that of the Ricci-flat metric on the smooth locus of the pure orbifold, as in Campana's definition. We label the SU factors by Y_i , reversing the letters used for the two types in Istrati's Theorem 5.3. The overlap $\text{SU}(2) = \text{Sp}(1)$ may be assigned to the symplectic type once; it is not counted twice.

Finally, form the orbifold fiber product with this finite covering of the quotient. Locally it is induced from $(\widetilde{W} \times E)/\Gamma' \rightarrow (\widetilde{W} \times E)/\Gamma$, where $\Gamma' \subset \Gamma$. Since the diagonal action on the original total space is free, this is a genuine unramified covering of manifolds. The complex structures and Vaisman metrics pull back. Taking a connected component if necessary yields M' . This proves (1.2) and (1.3). Neither regularity nor smoothness of the factors has been asserted. Istrati's Corollary 5.4 also gives that K_M is holomorphically torsion. $\square$

The transverse Calabi–Yau input can equivalently be expressed as follows: for a compact homologically orientable transversely Kähler foliation, each real basic $(1, 1)$ representative of $2\pi c_1^{\text{B}}$ is the Ricci form of a unique transverse Kähler metric in a fixed basic Kähler class [EKA90, Section 3.5.5]. In transverse dimension one the statement reduces to the scalar elliptic equation. The fixed- J Vaisman implementation is [OV24, Theorem 4.1, Lemma 4.2] and Istrati's Corollary 5.2. We do not

assume that an arbitrary conformal change to a Chern–Ricci-flat Hermitian metric is still Vaisman.

5. BETTI NUMBERS, FINITE COVERS, AND THE ALBANESE MAP

Proposition 5.1 (Transgression calculation). *For the cover in (1.2),*

$$(5.1) \quad b_1(M') = 2a + 1.$$

Proof. A connection on the principal E -orbi-bundle gives its characteristic class $c \in H_{\text{orb}}^2(B, \Lambda)$. The Vaisman connection has curvature proportional to ω_T in a single nonzero direction of $\Lambda \otimes \mathbb{R}$. One way to see this is to use θ, η on the two-dimensional vertical tangent space: $d\theta = 0$ and $d\eta = -\omega_T$. Choosing a period basis only applies an invertible real linear change to these two curvature components. Hence their span in $H_{\text{orb}}^2(B, \mathbb{R})$ has rank one, not zero. Positivity and compactness give $[\omega_T]^m \neq 0$ on the base.

The real Leray–Serre sequence of classifying spaces has its degree-one exact part

$$(5.2) \quad 0 \longrightarrow H_{\text{orb}}^1(B, \mathbb{R}) \longrightarrow H^1(M', \mathbb{R}) \longrightarrow H^1(E, \mathbb{R}) \xrightarrow{d_2} H_{\text{orb}}^2(B, \mathbb{R}).$$

There is no local coefficient monodromy on $H^1(E)$ because transition functions are translations. If u, v are the dual period basis, $d_2(u), d_2(v)$ are the two characteristic classes, up to the common choice of sign for transgression. Thus $\text{rank } d_2 = 1$ and $\dim \ker d_2 = 1$. Orbifold simple connectivity gives $H_{\text{orb}}^1(\mathcal{Q}, \mathbb{R}) = 0$, so $b_1^{\text{orb}}(B) = 2a$. Taking dimensions in (5.2) proves the formula. $\square$

Proposition 5.2 (Virtual first Betti number). *Define $b_1^{\text{virt}}(M)$ as the supremum of $b_1(N)$ over connected finite holomorphic étale covers $N \rightarrow M$. Then the supremum is achieved and equals $2a + 1$. In particular,*

$$(5.3) \quad b_1^{\text{virt}}(M) \in \{1, 3, \dots, 2n - 5\} \cup \{2n - 1\},$$

where the first set is empty for $n = 2$. The value $2n - 3$ is excluded for the virtual invariant, but need not be excluded for $b_1(M)$.

Proof. On any finite cover, the pulled-back transverse Ricci-flat metric has the same restricted transverse holonomy. The basic Bochner identity, valid here because mean curvature is zero, gives for a basic harmonic one-form α

$$0 = \|\nabla^T \alpha\|_{L^2}^2 + \int \text{Ric}^T(\alpha^\sharp, \alpha^\sharp) dv = \|\nabla^T \alpha\|_{L^2}^2.$$

Thus basic harmonic one-forms are parallel. The nonflat irreducible SU and Sp factors have no invariant covectors. The space of parallel transverse covectors on any finite cover of M' therefore has dimension at most $2a$. Lemma 3.3 bounds its ordinary first Betti number by $2a + 1$. For a finite cover of M , take a connected component of its fiber product with M' ; transfer makes pullback in real cohomology injective. The same bound follows. It is attained by M' by Proposition 5.1.

Every nonflat factor has complex dimension at least two. A one-dimensional Ricci-flat Kähler orbifold factor would be flat and belong to A ; it cannot be a positive-dimensional simply connected factor of this decomposition. Hence either $a = m$ or $a \leq m - 2$, proving (5.3). The Bochner step is also the mechanism behind [Gom26, Proposition 6.4], with its foliation hypotheses supplied here. $\square$

Proposition 5.3 (Albanese description). *One has $\dim \text{Alb}(M) = (b_1(M) - 1)/2$ and $\text{Alb}(M') \cong A$, with Albanese map $\text{pr}_A \pi$ up to translation. The Albanese map of M is a surjective submersion. In general it is not the quotient by the canonical foliation.*

Proof. For a compact Vaisman manifold, holomorphic one-forms are closed and basic, and are exactly the basic harmonic forms of type $(1, 0)$; the period quotient is a genuine complex torus [Gom26, Sections 2–3, Theorem 3.3], [IO23, Section 3]. Basic Hodge symmetry and Lemma 3.3 give the dimension. On M' , these forms are exactly pullbacks of holomorphic one-forms of A : the simply connected factors have none, by Ricci-flat Bochner theory. The map $\pi_1(M') \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(B) \rightarrow \pi_1(A)$ is surjective because the fiber and $\mathcal{Q}$ are connected. Consequently the period lattices, not only their rational spans, agree. The universal property of the Albanese map now identifies it with $\text{pr}_A \pi$. Its fibers are the connected elliptic orbi-bundles over $\mathcal{Q}$.

For M itself, using its Chern–Ricci-flat Vaisman metric, a basis of holomorphic one-forms consists of transverse parallel forms. Their pointwise independence follows from parallelness and independence at one point. Thus the Albanese map has full target rank everywhere. Its image is open by submersivity and closed by compactness, hence is the whole connected Albanese torus. $\square$

If $\widehat{M} \rightarrow M$ is a Galois cover with group F , then $H^1(M, \mathbb{R}) = H^1(\widehat{M}, \mathbb{R})^F$. This is the precise second source of a small b_1 : the finite group can remove transverse parallel forms. It must be distinguished from the reduction in a caused by $\mathcal{Q}$. The statement $b_1(M) = 2n - 1$ if and only if M is a Kodaira manifold is [Ist25, Corollary 5.11]; the regular Albanese fibration and left-invariant complex description are [Gom26, Theorems 1.1, 6.6]. Without (1.1) there is no dimension-only bound $2n - 1$: the circle-bundle construction of Section 8 over a genus- g curve gives Vaisman surfaces with $b_1 = 2g + 1$ for all $g \geq 2$.

6. CHARACTERISTIC CLASSES AND THE LIMITS OF PRODUCT DECOMPOSITION

For $E = \mathbb{C}/\Lambda$, principal holomorphic elliptic orbi-bundles are classified by $H_{\text{orb}}^1(B, \mathcal{O}_B(E))$. The sequence

$$(6.1) \quad 0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \mathcal{O}_B \longrightarrow \mathcal{O}_B(E) \longrightarrow 0$$

defines $c(M') \in H_{\text{orb}}^2(B, \Lambda)$. Thus this characteristic class is only part of the data: the fiber over a fixed class is a torsor under the image of $H^1(B, \mathcal{O}_B)$, namely the quotient by the image of $H_{\text{orb}}^1(B, \Lambda)$. One must retain the lattice of E and the holomorphic torsor class.

Proposition 6.1 (The line-bundle model and reconstruction). *For the product cover B in (1.2), choose an orientation of a primitive lattice element e and a complementary element f . Then*

$$(6.2) \quad c(M') = \kappa \otimes e, \quad \kappa \in H_{\text{orb}}^2(B, \mathbb{Z}), \quad \kappa \text{ a Kähler class.}$$

There is an ample holomorphic line orbi-bundle L with $c_1(L) = \kappa$ and $q \in \mathbb{C}^$, $|q| < 1$, such that*

$$(6.3) \quad M' \cong L^\times / \langle q \rangle.$$

One can write $L \cong \text{pr}_A^* L_A \otimes \bigotimes_i \text{pr}_{Y_i}^* L_i \otimes \bigotimes_j \text{pr}_{Z_j}^* L'_j$. The elliptic torsor is the Baer sum of the pullbacks of the corresponding factor torsors, using the same E and q .

Proof. The real curvature calculation in Proposition 5.1 has one-dimensional image. Evaluating its integral class on integral two-cycles shows that this direction contains a nonzero lattice vector; its line is therefore rational. Taking a primitive vector and its sign gives a positive class κ modulo torsion. On the product cover, $H_1^{\text{orb}}(B, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2a}$, so the universal coefficient theorem makes $H_{\text{orb}}^2(B, \mathbb{Z})$ torsion-free. Consequently no torsion term remains and (6.2) holds integrally.

The orbifold exponential sequence and the Kähler $(1, 1)$ theorem give a line orbibundle L_0 with this first Chern class. Identify $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, $\text{Im } \tau > 0$, sending e to 1. Then $E = \mathbb{C}^*/\langle q \rangle$, $q = e^{2\pi i \tau}$, and the torsor $L_0^\times/\langle q \rangle$ has the prescribed characteristic class. By (6.1) its difference from M' lies in the image of $H^1(B, \mathcal{O}_B)$. The ordinary exponential sequence for line orbibundles maps that same $H^1(B, \mathcal{O}_B)$ to $\text{Pic}_{\text{orb}}^0(B)$. Tensoring L_0 by its image absorbs the difference. This proves (6.3) without assuming that a topological class alone determines a holomorphic bundle. Positivity is unaffected by a Pic^0 twist. This is the setting of [Ist25, Theorem 2.4].

For the factorization, integral Künneth in degree two has no cross terms involving a simply connected factor. Thus $c_1(L)$ is the sum of the pullbacks of its restrictions to the factors. The quotient of L by the tensor product of those restrictions has zero first class. Also $H^1(B, \mathcal{O}_B) = H^1(A, \mathcal{O}_A)$, by Kähler Hodge theory and $H_{\text{orb}}^1(\mathcal{Q}, \mathbb{C}) = 0$. Its remaining Pic^0 term therefore comes from A and can be absorbed into L_A .

Explicitly, write $P_k \rightarrow B$ for the pulled-back factor torsors. On their fiber product quotient by

$$\ker(E^r \xrightarrow{\text{sum}} E)$$

acting by translations. Locally the fiber is $E^r / \ker(\text{sum}) = E$. The resulting transition functions are the sums of the factor transition functions, which in multiplicative $\mathbb{C}^*$ coordinates are the products of the line-bundle transition functions. They are precisely those of (6.3). This proves the reconstruction assertion. $\square$

Before this cover a definite bundle can have integral torsion in addition to its positive rank-one real class. Here torsion disappears because the specific product cover has torsion-free H_1 , not because every torsion class on every orbifold can always be removed by an arbitrary finite cover. The positive class never disappears under a finite base cover: the real transfer identity $p_* p^* = (\deg p) \text{id}$ makes pullback injective. Fiber isogenies likewise do not annihilate it over $\mathbb{R}$.

Proposition 6.2 (A stronger obstruction to holomorphic products). *A compact non-Kähler Vaisman manifold cannot be biholomorphic to $X_1 \times X_2$ with both X_i compact and positive-dimensional. The assertion persists under finite étale covers.*

Proof. Restrict the exact semipositive form ω_T to either compact slice X_i , of dimension r_i . Stokes gives $\int_{X_i} \omega_T^{r_i} = 0$. Semipositivity then implies that the restriction has deficient rank at every point. For a semipositive Hermitian form, a vector of zero norm is in its full kernel. Hence $TX_i \cap \ker \omega_T \neq 0$ for both factors at every point of the product. Since $\ker \omega_T$ is a complex line, it would have to lie in both complementary tangent factors, a contradiction. A finite étale cover is again Vaisman, so

the argument repeats. This recovers the product obstruction mentioned in [Ist25, Introduction]. $\square$

In the line model, choose any Hermitian norm. Writing a nonzero vector as its unit vector times its positive radius identifies $L^\times$ smoothly with $S(L) \times \mathbb{R}$. If q has argument φ , the quotient is a mapping torus of circle rotation by φ on $S(L)$. That rotation is isotopic to the identity, so

$$(6.4) \quad M' \simeq_{\text{diff}} S(L) \times S^1.$$

The unit-circle total space is smooth in our situation because the isotropy acts freely on the nonzero line. For a suitable norm this is the Sasaki construction. Formula (6.4) is a real smooth product and does not assert any holomorphic product. In particular $E \times B$ would have first Betti number $2a + 2$, different from (5.1). *The BB analogy is a product theorem for the base and transverse metric, and a bundle/extension theorem for the total space.*

7. THE FUNDAMENTAL GROUP

The homotopy exact sequence, interpreted on classifying spaces, is

$$(7.1) \quad \pi_2^{\text{orb}}(B) \xrightarrow{\langle c, \cdot \rangle} \Lambda \longrightarrow \pi_1(M') \longrightarrow \mathbb{Z}^{2a} \longrightarrow 1.$$

The first arrow must not be omitted. In particular, an elliptic fiber does not necessarily inject its fundamental group into the total space.

Proposition 7.1. *If $\mathcal{Q}$ is a point, $\pi_1(M')$ is the product of $\mathbb{Z}$ with a lattice in the real $(2a+1)$ -dimensional Heisenberg group. It is not virtually abelian. If $\dim \mathcal{Q} > 0$, $\pi_1(M)$ is virtually $\mathbb{Z}^{2a+1}$. These are the two cases in [Ist25, Corollary 5.10].*

Proof. When $B = A$, $\pi_2(B) = 0$. A polarization basis puts κ in elementary-divisor form $(d_1, \dots, d_a)$, all $d_i > 0$. With a choice of orientation of the central circle, a presentation is

$$(7.2) \quad \langle x_i, y_i, z, t \mid z, t \text{ central}, [x_i, y_j] = z^{d_i \delta_{ij}}, [x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 1 \rangle.$$

The radial circle gives t . This presentation follows by lifting the fundamental parallelograms of A : their circle winding numbers are the evaluations of $c_1(L)$. The alternating commutator pairing is nondegenerate over $\mathbb{Q}$, so no subgroup of finite index is abelian.

When $\mathcal{Q}$ has positive dimension, orbifold Hurewicz gives $\pi_2^{\text{orb}}(\mathcal{Q}) \cong H_2^{\text{orb}}(\mathcal{Q}, \mathbb{Z})$. The restriction of the Kähler class κ is nonzero, so the image of the first arrow in (7.1) is $d\mathbb{Z}e$ for some $d > 0$. The kernel of the last arrow is therefore $\mathbb{Z}/d \oplus \mathbb{Z}$. In the line model the $\mathbb{Z}$ factor splits off smoothly by (6.4). The circle-bundle group is a central extension of $\mathbb{Z}^{2a}$ by $\mathbb{Z}/d$, because the structure group consists of circle translations. Its commutators are finite. The inverse image of $d\mathbb{Z}^{2a}$ is abelian: commutators of lifts of multiples by d are d^2 -powers of commutators. It is finitely generated abelian, so contains a torsion-free finite-index subgroup of rank $2a$. Restoring the radial $\mathbb{Z}$ gives $\mathbb{Z}^{2a+1}$ up to finite index. Passing from M' to M does not change this virtual conclusion. $\square$

8. EXPLICIT EXAMPLES AND BOUNDARY CASES

Example 8.1 (The construction used in the examples). Let B be smooth projective, H ample, $\kappa = c_1(H)$, and put $L = H^{-1}$. Take a Hermitian metric h on L with $i\partial\bar{\partial}\log h = 2\pi\kappa_h > 0$ and let $F(v) = |v|_h^2$ on $L^\times$. Then

$$(8.1) \quad \Omega_K = i\partial\bar{\partial}F > 0, \quad \Omega_V = F^{-1}\Omega_K, \quad \theta = -d\log F.$$

Indeed, the horizontal term is $2\pi F\kappa_h$ and the vertical term is $iF\partial\log F \wedge \bar{\partial}\log F$, both positive in their respective directions. Thus $d\Omega_V = \theta \wedge \Omega_V$. In the logarithmic radial coordinate its metric is a constant multiple of a product $dt^2 + g_{S(L)}$, so θ is parallel. Multiplication by q , $0 < q < 1$, preserves Ω_V and θ ; the quotient $M(H, q) = L^\times / \langle q \rangle$ is compact Vaisman. The canonical leaves are its $E = \mathbb{C}^* / \langle q \rangle$ fibers, and the quotient is B . In the counterclockwise fiber orientation,

$$(8.2) \quad c(M(H, q)) = (-\kappa, 0), \quad c_j^B(M(H, q)) = c_j(TB).$$

Replacing the first period generator by its negative gives the positive convention of (6.2). The inversion $v \mapsto v^{-1}$ identifies the punctured bundles of H and H^{-1} with reversed $\mathbb{C}^*$ action, so this sign choice agrees with the ample-line model. The same local construction applies to a positive line orbi-bundle whose nonzero total space is smooth.

Example 8.2 (Maximal b_1 : Kodaira manifolds). Let $B = A$ be a polarized abelian variety of dimension m , and use Example 8.1. The resulting manifold has dimension $n = m + 1$, is regular, has $c_j^B = 0$ for every $j > 0$, and $b_1 = 2m + 1 = 2n - 1$. Its fundamental group is (7.2), with the sign of z changed if necessary. Its Albanese map is the elliptic bundle projection. These are exactly the models in [Ist25, Example 7.2, Corollary 5.11], compatible with [Gom26, Theorem 6.6]. The standard model metric has LCK rank one; this is not an assertion about every Vaisman metric on this complex manifold. For $m = 1$ it is a primary Kodaira surface.

Example 8.3 (A K3 base and $b_1 = 1$). Let $S \subset \mathbb{P}^3$ be a smooth quartic K3 surface and $H = \mathcal{O}_S(1)$. Adjunction gives $K_S \cong \mathcal{O}_S$, and S is simply connected by the Lefschetz hyperplane theorem. Its hyperplane class h is primitive: $h^2 = 4$, and a possible divisibility $h = 2u$ would give $u^2 = 1$, contradicting the even intersection form of a K3 surface. No larger divisibility is numerically possible. The intersection pairing is unimodular by Poincaré duality, so evaluation of h on $H_2(S, \mathbb{Z})$ is onto $\mathbb{Z}$. For the K3 cohomology and lattice facts used here, see [Huy16, Chapters 1 and 14].

For $M = M(H, q)$, $n = 3$, the canonical foliation is regular with base S , and

$$(8.3) \quad c_1^B = 0, \quad \int_S c_2^B = 24, \quad b_1(M) = b_1^{\text{virt}}(M) = 1, \quad \pi_1(M) = \mathbb{Z}.$$

The c_2 calculation follows directly from $c(TS) = (1 + h)^4 / (1 + 4h)$: its degree-two term is $6h^2$, whose integral is 24. The circle-bundle sequence $\pi_2(S) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S(L)) \rightarrow 0$, together with primitivity, gives $\pi_1(S(L)) = 0$. The radial circle supplies the displayed fundamental group. The characteristic pair is $(-h, 0)$. The Albanese is a point, although the leaf space is a K3 surface. Smoothly $M = S(L) \times S^1$; holomorphically it admits no nontrivial compact product decomposition.

Example 8.4 (Small b_1 caused by a finite group). Take an elliptic curve C , the symmetric negative line bundle $L = \mathcal{O}_C(-[0])$, and the involution $\iota : x \mapsto -x$. It has a line-bundle lift β with $\beta^2 = 1$ (rescale any lift by a constant square root). Choose a β -invariant negative Hermitian metric and $0 < q < 1$. Set

$$(8.4) \quad P = L^\times / \langle q^2 \rangle, \quad X = L^\times / \langle q\beta \rangle.$$

The induced involution on P is free. A fixed point would require $q\beta(v) = q^{2k}v$ for some $k \in \mathbb{Z}$; taking norms gives $q = q^{2k}$, which is impossible. The invariant metric descends, so $P \rightarrow X$ is an étale double cover of Vaisman surfaces. On $H^1(P, \mathbb{R}) = H^1(C, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}[\theta]$, the involution acts as -1 and $+1$ respectively. Therefore

$$(8.5) \quad b_1(X) = 1, \quad b_1(P) = b_1^{\text{virt}}(X) = 3.$$

The leaf space of X is the flat orbifold $C/\{\pm 1\} = \mathbb{P}^1(2, 2, 2, 2)$, so $c_1^{\text{B}}(X) = 0$. It is quasi-regular and not regular. Its characteristic class pulls back to $(-[0], 0)$ on C , and has nonzero rank-one real part; the local order-two stabilizers act on the fiber by translation by $q\beta|_{L_x}$ in $\mathbb{C}^*/\langle q^2 \rangle$. This specifies the isotropy data in addition to the pulled-back characteristic class.

For a compatible standard square-torus model, the group is

$$\pi_1(X) = \langle x, y, z, s \mid z \text{ central}, [x, y] = z, sxs^{-1} = x^{-1}, sys^{-1} = y^{-1}, szs^{-1} = z \rangle.$$

Equivalently it is $H_{\mathbb{Z}} \rtimes \mathbb{Z}$, with generator s acting by horizontal inversion. The subgroup generated by x, y, z, s^2 is $H_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$ of index two. One sees this model directly on the real Heisenberg group with multiplication $(x, y, z)(x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + xy')$: horizontal inversion $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$ preserves its integral lattice and its standard Sasaki structure. Translation by half the radial period makes the quotient action free. This realizes the holomorphic construction for the induced degree-one polarization. These are secondary Kodaira examples, as in [Ist25, Example 7.3].

Example 8.5 (An orbifold factor that cannot be made smooth). The weighted degree-five polynomial

$$f = z_0^2 z_1 + z_1^5 + z_2^5 + z_3^5, \quad (w_0, w_1, w_2, w_3) = (2, 1, 1, 1)$$

defines a smooth punctured hypersurface $W = \{f = 0\} \setminus \{0\}$. Indeed its four partial derivatives have common zero only at the origin. Quotient by the weighted $\mathbb{C}^*$ action gives a projective K3 orbifold $B \subset \mathbb{P}(2, 1, 1, 1)$, with an A_1 orbifold point at $[1, 0, 0, 0]$ and no divisorial isotropy. Adjunction gives trivial orbifold canonical bundle since $5 = 2 + 1 + 1 + 1$. The quotient $W/\langle q \rangle$ by weighted multiplication is a smooth compact Vaisman threefold with $c_1^{\text{B}} = 0$.

These are the explicit data of [Ist25, Example 7.4]. The link of this isolated hypersurface singularity of complex dimension three is simply connected by the hypersurface-link connectivity theorem [Mil68, Chapter 5]. The sequence of its circle orbi-bundle therefore gives $\pi_1^{\text{orb}}(B) = 0$. Hence B has no nontrivial connected orbifold covering at all, and in particular no finite smooth orbifold cover. The total space has $\pi_1 = \mathbb{Z}$ and $b_1 = 1$ from the simply connected punctured cone and its infinite cyclic deck group. Its characteristic pair is that of the tautological negative line orbi-bundle $\mathcal{O}_B(-1)$, namely $(-c_1^{\text{orb}}(\mathcal{O}_B(1)), 0)$. The local $\mathbb{Z}/2$ acts faithfully on

the punctured tautological line. This is an actual obstruction to replacing “orbifold” by “manifold” in the structure theorem, not merely an absence of such a proof.

The three principal examples can be compared without conflating a manifold and its cover:

Example	n	base	b_1	b_1^{virt}
Kodaira manifold	$m + 1$	A^m	$2m + 1$	$2m + 1$
K3 construction	3	S	1	1
Secondary Kodaira	2	$C/\{\pm 1\}$	1	3

9. FURTHER CONSEQUENCES PROVED IN THIS NOTE

Corollary 9.1 (Attainable values). *For each fixed $n \geq 2$, every value in (5.3) occurs as a virtual first Betti number. The ordinary first Betti numbers occurring under (1.1) are exactly $1, 3, \dots, 2n - 1$.*

Proof. The virtual maximum is Example 8.2. For $0 \leq a \leq m - 2$, put $k = m - a \geq 2$ and let Q_k be a smooth degree- $k + 2$ hypersurface of $\mathbb{P}^{k+1}$. Adjunction gives $K_{Q_k} \cong \mathcal{O}$ and Lefschetz gives simple connectivity. Its Ricci-flat metric has no flat factor, since any such factor would give nonzero H^1 . Apply Example 8.1 to $A^a \times Q_k$ with an exterior tensor-product polarization. Propositions 5.1 and 5.2 give $b_1 = b_1^{\text{virt}} = 2a + 1$.

For the ordinary invariant choose a product $A = C^m$ of elliptic curves and its product symmetric polarization. Let β cover the involution that is the identity on ℓ factors and -1 on the remaining factors, $0 \leq \ell < m$. The construction (8.4) works verbatim: radial contraction ensures freeness even over fixed points. Its invariant transverse one-forms have dimension 2ℓ , giving $b_1 = 2\ell + 1$ and virtual invariant $2m + 1$. The case $\ell = m$ is the torus-base model itself. Oddness follows in all cases from basic Hodge symmetry and Lemma 3.3, and the upper bound was proved above. $\square$

Corollary 9.2 (Adding the second basic Chern class). *Under (1.1), the following are equivalent:*

- (1) $c_2^{\text{B}}(Q^{1,0}) = 0$ in real basic cohomology;
- (2) there is a transverse flat Kähler metric for the fixed canonical foliation and transverse complex structure;
- (3) $b_1^{\text{virt}}(M) = 2n - 1$;
- (4) M has a finite étale cover which is a Kodaira manifold.

For $n = 2$, the first condition is automatic and all four hold.

Proof. Work on the quotient with its Ricci-flat metric, or on its finite product cover. For $m \geq 2$ its unitary Chern curvature F has $\text{tr } F = 0$ and $\Lambda F = 0$. With the norm induced by $-\text{tr}$ on skew-Hermitian matrices, the primitive-form Hodge identity gives

$$(9.1) \quad \int_B c_2(TB) \wedge \frac{\omega_B^{m-2}}{(m-2)!} = \frac{1}{8\pi^2} \int_B |F|^2 \frac{\omega_B^m}{m!}.$$

Indeed $c_2 = (8\pi^2)^{-1} \text{tr}(F \wedge F)$ when $\text{tr } F = 0$, and $*F = -F \wedge \omega_B^{m-2}/(m-2)!$. Both formulas apply in orbifold charts with the usual division by stabilizer order in the integral. Vanishing of the basic class therefore forces $F = 0$. In transverse

dimension one, Ricci-flatness itself is flatness. A compact flat Kähler orbifold has a finite torus orbifold cover (the flat case of the splitting theorem used above); pulling it back gives a Kodaira cover. Equivalently the nonflat factors in (1.2) are absent. Proposition 5.2 then gives the third assertion. Conversely a Kodaira cover has zero basic Chern classes, and real transfer for the lifted foliation is injective, so the second basic class downstairs vanishes. The same decomposition also proves directly that (3) implies (4). $\square$

These consequences are proved here from existing structure and Hodge theorems. The searches made for this note did not establish that they are new in the literature; no originality claim is made.

APPENDIX A. DEPENDENCIES, CHECKS, AND WHAT IS NOT CLAIMED

The logical route is: minimal transverse Kähler foliation; basic potential lemma and Ricci comparison; equivalence (3.2); Istrati’s fixed- J existence and quasi-regularity; its finite orbifold BB decomposition; characteristic-class calculation; Betti, Albanese, and fundamental-group consequences.

Compactness is used for Hodge theory, averaging, positivity integrals, the automorphism group argument, and the Albanese image. The Vaisman condition supplies minimal leaves, holomorphic Killing fields and (2.1). The first basic Chern condition enters precisely at (3.2) and transverse Ricci-flatness. Quasi-regularity is only used after the known theorem proves it. Finite covers remove transverse finite holonomy and the specified integral torsion; they do not erase positive curvature classes. Orbifold structures are retained in all homotopy, integral cohomology and covering arguments. Projectivity comes from positivity and is used to choose the explicit algebraic examples and factor polarizations.

The central question is answered by known results. No unresolved step is deliberately used as a proved theorem here. We have not classified all finite group actions on the factor torsors, or all isomorphisms between their unmarked total spaces. These are further classification problems, not missing hypotheses in Theorem 1.1. No assertion that every orbifold is finitely smoothable is used. No claim about arbitrary LCK manifolds follows from our proof.

The audit distinguishes [KNOWN], [DERIVED], [CANDIDATE], [REFUTED], and [GAP]. Here the false implications “de Rham vanishing implies basic vanishing”, “small b_1 forces a non-torus factor”, and “a finite cover makes every base smooth” are [REFUTED] by explicit examples. No [CANDIDATE] is presented as a theorem. The inaccessible published Istrati numbering and the lack of an exhaustive novelty search are bibliographic limitations, recorded in `research_audit_ja.md`. Theorem numbers of the three requested arXiv papers were checked in their actual bodies. The precise numbering of the general hypersurface-link connectivity theorem in Milnor’s book was not checked; only its standard chapter-level attribution is used. All references to deep inputs state the hypotheses needed here. The separate README records compilation and visual verification.

REFERENCES

- [Cam04] Frédéric Campana. Orbifolides à première classe de Chern nulle. In *The Fano Conference*, pages 339–351. Università di Torino, 2004. Theorem 6.4 and Definition 6.5 checked in arXiv:math/0402243v1.
- [EKA90] Aziz El Kacimi-Alaoui. Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications. *Compositio Mathematica*, 73(1):57–106, 1990.
- [Gom26] Lucas H. S. Gomes. On the classification of Vaisman manifolds with vanishing first basic Chern class and large first Betti number, 2026. arXiv:2604.04134v2, 21 May 2026.
- [Huy16] Daniel Huybrechts. *Lectures on K3 Surfaces*. Cambridge University Press, 2016. Author’s online manuscript, Chapters 1 and 14 consulted.
- [IO23] Nicolina Istrati and Alexandra Otiman. Bott–Chern cohomology of compact Vaisman manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 376(6):3919–3936, 2023. Numbered citations refer to the final preprint arXiv:2206.07312v2, 26 September 2022.
- [Ist25] Nicolina Istrati. Vaisman manifolds with vanishing first Chern class. *Journal of the European Mathematical Society*, 2025. Published online first, 11 March 2025. Numbered citations in this note refer to arXiv:2304.02582v1, 5 April 2023.
- [Mil68] John Milnor. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, volume 61 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, 1968. Chapter 5; precise theorem number for link connectivity not verified in this run.
- [OV24] Liviu Ornea and Misha Verbitsky. A Calabi–Yau theorem for Vaisman manifolds. *Communications in Analysis and Geometry*, 32(10):2889–2900, 2024. Numbered citations refer to arXiv:2206.08808v2, 24 August 2022.

VAISMAN 幾何における第一 BASIC CHERN 類の消滅と BEAUVILLE–BOGOMOLOV 型構造

chatGPT 6 Astra

ABSTRACT. コンパクト非 Kähler Vaisman 多様体について, 第一実 basic Chern 類の消滅は, 複素多様体自身の第一 Bott–Chern 類の消滅と同値である. 本稿では, 葉空間の存在を仮定せずにこの同値を説明し, Istrati の既存の構造定理を適用する. 得られる Beauville–Bogomolov 分解は横断幾何と葉空間の有限 orbifold 被覆に関するものであり, 全空間は definite な楕円曲線 orbi-bundle として残る. 第一 Betti 数と virtual 第一 Betti 数を計算し, 基本群と Albanese 写像を記述するとともに, 第一 Betti 数が小さい具体例を与える. さらに, 束の再構成, 積分の障害, 第二 basic Chern 類の消滅に関する初等的な帰結を示す. 本稿は解説的な作業ノートであり, 新しい分解定理や確認済みの新規性を主張しない.

このノートは chatGPT 6 が生成したものであり, 岩井は数学的な検証を全く行っていません. そのため数学的な間違いがあるかもしれません. そのため注意深く読んでください.

CONTENTS

1. 中心問題への正確な回答と結果の位置づけ	16
2. 定義と横断 Hodge 理論	17
3. Bott–Chern 消滅への橋渡し	19
4. 既知の構造定理の適用	20
5. Betti 数, 有限被覆, Albanese 写像	21
6. 特性類と積分の限界	23
7. 基本群	24
8. 具体例と境界例	25
9. 本稿で証明する追加の帰結	27
Appendix A. 依存関係, 確認事項, 主張しないこと	28
References	29

1. 中心問題への正確な回答と結果の位置づけ

以下, M はコンパクト連結, $\dim_{\mathbb{C}} M = n \geq 2$ とし, (J, g, ω, θ) は $\theta \neq 0$ を満たす Vaisman 構造とする. $m = n - 1$ とおく. 本稿の仮定は正確に

$$(1.1) \quad c_1^B(Q^{1,0}) = 0 \quad \text{in } H_B^2(M, \mathbb{R})$$

である. c_2^B には何も仮定しない. 複素構造 J は固定する.

Date: 8 September 2026, working note, version 0.1.

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 53C55; Secondary 32Q25, 32M25, 57R18.

Key words and phrases. Vaisman manifold, basic Chern class, Bott–Chern cohomology, transverse Calabi–Yau geometry, elliptic orbi-bundle, virtual first Betti number.

Theorem 1.1 (中心問題への回答). (1.1) のもとで, 元の *canonical foliation* は *quasi-regular* である. 連結な有限正則 étale 被覆 $M' \rightarrow M$ と, 正則 *principal elliptic orbifold*

$$(1.2) \quad E \longrightarrow M' \xrightarrow{\pi} B, \quad B = A \times \prod_i Y_i \times \prod_j Z_j = A \times \mathcal{Q}$$

が存在する. ここで A は次元 a の *abelian variety* であり, 残りの因子は orbifold の意味で単連結な射影的 *pure Kähler orbifold* である. これらには *Ricci-flat* 計量があり, 既約 *holonomy* はそれぞれ $SU(d_i)$ と $Sp(e_j)$, 複素次元は d_i と $2e_j$ である. 特に

$$(1.3) \quad a + \sum_i d_i + \sum_j 2e_j = m$$

が成り立つ. 底の分解は, 誘導される *Ricci-flat* 計量に関して, 正則かつ等長的である. 全空間には束のねじれが残る. 実際, M のどの有限 étale 被覆も, 正の次元をもつ二つのコンパクト複素多様体の積にはならない. さらに

$$(1.4) \quad b_1(M') = b_1^{\text{virt}}(M) = 2a + 1, \quad b_1(M) \leq 2a + 1 \leq 2n - 1$$

が成り立つ. 原点を選ぶと $\text{Alb}(M') = A$ で, *Albanese* 写像は $\text{pr}_A \circ \pi$ である. そのファイバーの次元は $n - a$ であり, *canonical foliation* の葉と一致するのは $\mathcal{Q}$ が一点の場合に限る.

Chern 条件の同値と構造に関する主張は [KNOWN] である. Istrati [Ist25, Definition 4.1, Lemma 4.4, Corollary 5.2, Theorem 5.3] を参照されたい. 本稿では条件の橋渡しと適用を詳しく説明する. virtual Betti 数の式と束の計算は本稿で [DERIVED] と分類するが, これは新規性の主張ではない. 後述の整係数での基本群の記述は [Ist25, Corollary 5.10] の説明を具体化する. 上界と最大値の場合は [Ist25, Corollary 5.11] ですでに得られている.

Remark 1.2 (版と記号の規約). Istrati の定理番号はすべて arXiv:2304.02582v1, 2023 年 4 月 5 日のものを用いる. 出版社の情報から, JEMS online first, 2025 年 3 月 11 日公開, DOI 10.4171/JEMS/1633 であることを確認した. 今回, 購読が必要な出版本文にはアクセスできなかったため, 出版版との番号対応は断定しない. Gomes は改題後の arXiv:2604.04134v2, 2026 年 5 月 21 日を指す. 同論文の実次元 $2r + 2$ における r は, 本稿の $m = n - 1$ であり, 最大値 $2r + 1$ は本稿の $2n - 1$ である. Theorems 1.1, 6.6 は左不変複素構造による分類を与え, 葉のファイブレーションを *Albanese* 写像と同定している. その証明は J の変形を用い, Theorem 4.3 で元に戻すための独立した議論を行う. 本稿では, 変形した複素構造の結論を元の構造に移すのではなく, (M, J) に Istrati の定理を直接適用する.

2. 定義と横断 HODGE 理論

$\omega(X, Y) = g(JX, Y)$ とし, 実 1 形式に対して $J\alpha = -\alpha \circ J$ と定める. g を正の定数 $|\theta|_g^2$ 倍すると $|\theta| = 1$ となり, J, θ , および Levi-Civita 接続についての平行性は変わらない.

$$(2.1) \quad U = \theta^\sharp, \quad V = JU, \quad \eta = J\theta, \quad \omega_T = -d\eta, \quad \omega = \omega_T + \theta \wedge \eta$$

とおく. ω_T は閉かつ半正定値で, 複素 rank は m , 核は $T\mathcal{F} = \langle U, V \rangle_{\mathbb{R}}$ である. これが横断 Kähler 構造を定める. これらの標準的な Vaisman 恒等式は [Ist25, Section 2.1], [IO23, Theorem 2.2] にも記載されている.

Definition 2.1. 微分形式 α が basic であるとは、 $\mathcal{F}$ に接するすべてのベクトル場 X について $\iota_X \alpha = \mathcal{L}_X \alpha = 0$ となることをいう。これは U, V について水平かつ不変であることと同値である。複体 $(\Omega_B^\bullet, d_B)$ の cohomology を $H_B^\bullet(M, \mathbb{R})$ と書く。複素化は横断的な型に分解され、 $d_B = \partial_B + \bar{\partial}_B$ となる。

$$(2.2) \quad H_B^{p,q} = \frac{\ker(\bar{\partial}_B : \Omega_B^{p,q} \rightarrow \Omega_B^{p,q+1})}{\bar{\partial}_B \Omega_B^{p,q-1}},$$

$$H_{BC,B}^{1,1}(M, \mathbb{R}) = \frac{\{\alpha \in \Omega_B^{1,1} : d\alpha = 0, \bar{\alpha} = \alpha\}}{\{i\partial_B \bar{\partial}_B f : f \in C_B^\infty(M, \mathbb{R})\}}$$

と定義する。basic 形式と basic 関数を通常の形式と関数に置き換えると、 $H_{BC}^{1,1}(M, \mathbb{R})$ が得られる。

横断正則接束は $Q^{1,0} = (TM/T\mathcal{F})^{1,0}$ で、rank は m である。横断正則座標における Hermitian 計量 h_T の Chern 接続行列は $h_T^{-1} \partial_B h_T$ であり、その曲率を F_T とする。不変な局所行列は basic 接続として貼り合わさる。これは葉方向の Bott 部分接続を延長する接続である。

$$(2.3) \quad c^B(Q^{1,0}) = \left[\det \left(I + \frac{i}{2\pi} F_T \right) \right]_B, \quad \rho_T = i \operatorname{tr} F_T = -i\partial_B \bar{\partial}_B \log \det h_T$$

と定める。basic Hermitian 計量の変更による Chern 形式の差は basic exact である。 TM について同じ規約を用いると、 $\rho_C = -i\partial \bar{\partial} \log \det g$, $c_1^{BC}(M) = [\rho_C/(2\pi)]_{BC}$ となる。したがって本稿で扱うのは **接束** の Chern 類であり、標準束の第一 Chern 類はその符号を反転したものである。テンプレートのマクロ $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial}$ には $1/(2\pi)$ が含まれるが、 $i\partial \bar{\partial}$ には含まれない。

Lemma 2.2 (basic ポテンシャル補題). *canonical foliation* は横断的に向きづけられた *Riemannian Kähler foliation* であり、葉は極小である。basic $\partial \bar{\partial}$ 補題が適用できる。特に、実 basic d_B -exact な $(1,1)$ 形式 α は、実 basic 関数 f を用いて $\alpha = i\partial_B \bar{\partial}_B f$ と書ける。

Proof. U, V は可換な実正則 Killing 場で、長さは 1 である。 U の平行性から $\nabla_U U = \nabla_V U = 0$, 可換性から $\nabla_U V = 0$ となる。また定長 Killing 場の恒等式から $\nabla_V V = -\frac{1}{2} \operatorname{grad} |V|^2 = 0$ である。したがって葉は全測地的で、平均曲率は消える。計量は bundle-like であり、 ω_T^m が法束を向きづける。よって basic Hodge 理論と Kähler 恒等式が使える。[EKA90, Sections 3.3–3.4, Proposition 3.5.1], [IO23, Section 2.2] を参照。これらの仮定は、大域的な商 orbifold が存在する前から成立している。

必要な次数 2 の帰結については、次の Hodge 理論的な証明を書ける。 $\chi = \theta \wedge \eta$ とおくと $d\chi = \theta \wedge \omega_T$ である。basic exact 形式を $\omega_T^{m-1} \wedge \chi$ に掛けて積分すると、Stokes より 0 となる。余分な項は横断次数 $2m+1$ の形式を含むため消える。したがって $\Lambda_T \alpha$ の平均は 0 である。basic な関数の Laplacian, すなわち非零の定数倍を除いて $f \mapsto \Lambda_T(i\partial_B \bar{\partial}_B f)$ は、自己共役で、核は定数関数からなる。コンパクトな basic Hodge 理論により

$$\Lambda_T(i\partial_B \bar{\partial}_B f) = \Lambda_T \alpha$$

を解ける。差 β は閉かつ primitive である。 $m \geq 2$ のとき、横断 Hodge star は $*_T \beta = -\beta \wedge \omega_T^{m-2}/(m-2)!$ なので、 β は basic coclosed でもある。basic exact でもあることから、そのノルムの二乗は 0 となる。 $m=1$ では trace-free な $(1,1)$ 形式自体が 0 である。これで主張が示された。同じ basic Hodge 理論から $H_B^{2m}(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ も従う。これは El Kacimi-Alaoui の定式化で必要な homological orientability である。□

Definition 2.3. canonical foliation が *quasi-regular* であるとは葉がコンパクトであることをいい、有効 Lee 群がコンパクトな複素 1 次元群であることと同値である。その作用が自由なとき *regular* という。quasi-regular の場合、商 $\mathcal{B}$ は複素 orbifold である。正則 principal E -orbi-bundle とは、局所的に $(\widetilde{W} \times E)/\Gamma \rightarrow \widetilde{W}/\Gamma$ と書け、遷移関数が E の平行移動として作用する正則束をいう。isotropy もファイバーに平行移動として作用する。全空間が多様体である場合、対角作用は自由である。通常の principal bundle は、底が滑らかで orbifold isotropy のない場合にあたる。

pure orbifold とは因子的な isotropy を持たない orbifold をいう。余次元 2 以上には商特異点が残る。分類空間 $B\mathcal{B}$ を用いて $H_{\text{orb}}^k(\mathcal{B}, \Lambda) = H^k(B\mathcal{B}, \Lambda)$, $\pi_k^{\text{orb}}(\mathcal{B}) = \pi_k(B\mathcal{B})$ と書く。実 orbifold cohomology は orbifold de Rham cohomology および台空間の実 cohomology と一致するが、整係数では一致するとは限らない。orbifold 被覆とは、局所的に有限な座標群をその部分群に変更する被覆をいう。台となる特異空間の étale 被覆とは限らない。多様体の有限 étale 被覆とは、全空間の有限不分岐正則被覆を意味する。

LCK rank は θ の周期群の rank であり、同値に $[\theta]$ を含む最小の有理部分空間の次元である。rank 1 は regularity と同値 quasi-regularity と同値定義が異なる。構造定理に rank 1 の仮定は用いない。

3. BOTT–CHERN 消滅への橋渡し

Lemma 3.1 (Ricci 形式の比較：Istrati の Lemma 4.4). 正規化した *Vaisman* 計量について、 M 上の通常の微分形式として

$$(3.1) \quad \rho_C = \rho_T$$

が成り立つ。

Proof. 横断正則 submersion $p : W \rightarrow T$ と、 K_T の局所正則 frame σ_T を取る。 $\theta^{1,0} = (\theta + i\eta)/2$ は一般に正則ではない。しかし

$$\sigma = \theta^{1,0} \wedge p^* \sigma_T$$

は $K_M|_W$ の零点のない正則 frame である。実際、 $\bar{\partial}\theta^{1,0} = -i\omega_T/2$ と水平な最高次形式との外積は 0 になる。そのノルムの二乗は $|\sigma|_g^2 = \frac{1}{2}p^*|\sigma_T|_{h_T}^2$ である。正則な標準束の frame について、接束の Ricci 形式は $i\partial\bar{\partial}\log|\sigma|^2$ と書ける。定数 $1/2$ は微分すると消えるので (3.1) を得る。これにより符号と、余分な ω_T の倍数が出ないことも確認できる。□

Proposition 3.2 (三つの条件の比較). 任意のコンパクト非 *Kähler Vaisman* 多様体について

$$(3.2) \quad c_1^{\text{B}}(Q^{1,0}) = 0 \iff c_1^{\text{BC}}(M) = 0 \implies c_1(M) = 0 \text{ in } H^2(M, \mathbb{R})$$

が成り立つ。最後の含意は逆にできない。

Proof. 自然な比較写像による可換図式

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{BC}, \text{B}}^{1,1}(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{j} & H_{\text{BC}}^{1,1}(M, \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{\text{B}}^2(M, \mathbb{R}) & \longrightarrow & H^2(M, \mathbb{R}) \end{array}$$

がある。左の写像は補題 2.2 により単射で、像は実横断 $(1, 1)$ 部分である。 $c_1^{\text{B}} = 0$ なら、この補題を ρ_T に適用して $\rho_T = i\partial_{\text{B}}\bar{\partial}_{\text{B}}f$ を得る。basic 関数は M 上の通常の大

域的滑らかな関数であり、それに作用する制限された微分作用素は $\partial, \bar{\partial}$ と一致する。補題 3.1 から Bott–Chern 消滅が従う。

逆向きも, quasi-regularity が分かる前に示せる。コンパクトな等長変換群の中で U, V の flow の閉包を K とする。これは正則等長変換からなる。実 basic $(1, 1)$ 形式が $\alpha = i\partial\bar{\partial}f$ と書けるととき, Haar 確率測度で f を K について平均する。 α の不変性から, 平均 $\bar{f}$ は $i\partial\bar{\partial}\bar{f} = \alpha$ を満たし, U, V で不変なので basic である。これは j の単射性を示す。 $\rho_T = \rho_C$ に適用すると (3.2) の逆向きが従う。最後の写像は Bott–Chern の情報を忘れる写像である。 $\square$

忘れられる情報は次のように明示できる。

Lemma 3.3. 任意のコンパクト非 Kähler Vaisman 多様体について

$$(3.3) \quad \begin{aligned} H^1(M, \mathbb{R}) &= H_B^1(M, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}[\theta], \\ \ker(H_B^2(M, \mathbb{R}) \rightarrow H^2(M, \mathbb{R})) &= \mathbb{R}[\omega_T]_B \end{aligned}$$

が成り立つ。特に, M 上では $\omega_T = -d\eta$ であるにもかかわらず, $[\omega_T]_B \neq 0$ である。

Proof. K の各元は恒等写像と isotopic なので, K による平均は通常の de Rham 類を変えない。不変な 1 形式は, β を basic 形式, u, v を basic 関数として, $\beta + u\theta + v\eta$ と一意に書ける。その外微分は $d_B\beta + du \wedge \theta + dv \wedge \eta - v\omega_T$ である。これが basic なら, U, V との縮約から $du = dv = 0$ が従う。 $[\omega_T]_B$ は 0 ではない。 basic な primitive が存在すると, 補題 2.2 と同じ Stokes の計算により $\int_M \omega_T^m \wedge \chi = 0$ となり, 被積分形式の正值性に矛盾する。したがって閉じた不変 1 形式は $v = 0$ を満たし, 第一式を得る。和が直和であることは, 不変な exact 1 形式 df について f も平均すれば, U との縮約が 0 になることから分かる。通常の意味で exact な basic 2 形式の primitive に同じ議論を行うと第二式が従う。これは [IO23, Sections 3–5] と整合する。 $\square$

scalar Hopf 多様体 $(\mathbb{C}^n \setminus \{0\})/\langle q \rangle$, $0 < q < 1$ の葉空間は $\mathbb{P}^{n-1}$ であり, $c_1^B = nH \neq 0$ である一方, $H^2(M, \mathbb{R}) = 0$ である。したがって, これは最後の含意の逆に対する反例であって, 本稿の主仮定を満たす例ではない。別の言い方をすれば, $c_1(M) = 0$ は basic 類が 0 である代わりに $[\omega_T]_B$ の非零倍である可能性を許してしまう。

4. 既知の構造定理の適用

定理 1.1 の構造に関する部分の証明。命題 3.2 により, Istrati の Definition 4.1 の条件が正確に満たされる。コンパクト性, Vaisman 条件, Lee 形式が非零であることはすでに仮定されている。同論文の Corollary 5.2 は, 同じ複素多様体上で, 指定された許容 Lee 類をもつ Chern–Ricci-flat Vaisman 計量を与え, これは定数倍を除いて一意である。補題 3.1 により, その横断計量は Ricci-flat である。

同論文の Theorem 5.3 は, あらかじめ商を仮定することなく, $\text{Aut}_0(M)$ がコンパクトな複素 1 次元群であり, Lee 群に一致することを示す。その普遍複素 Lie 群は $\mathbb{C}$ で, 核は余コンパクトな rank 2 の格子である。したがって $E = \mathbb{C}/\Lambda$ は楕円曲線である。局所自由な作用の軌道が, 元の foliation のコンパクトな葉となり, ここで初めて商を取ることができる。この段階が quasi-regularity を証明し, Kähler orbifold 商を循環的に仮定することを避ける。

同定理の仕組みを説明すると, canonical 計量の一意性によって $\text{Aut}_0(M)$ の各元が等長変換になる。各元が Lee 類と全体積を保つからである。次にコンパクト自己同型群に関する結果によって, それを Lee 群と同定する。残りの部分では orbifold 分解定理を適用し, definite な Seifert 束を用いて, 有限被覆後の purity を証明する。

pure orbifold に対して用いる分解は [Cam04, Theorem 6.4, Definition 6.5] である．必要な仮定はコンパクト性, Kähler 性, orbifold 第一 Chern 類の消滅である．最後の仮定は, basic 形式を商の orbifold 形式と同定し, (1.1) を用いて得られる．本稿では Istrati の purity の議論を既知定理の一部として用い, 最初から purity を置かない．

商には definite な束に由来する整な正值類があるため, 射影的である．その有限積被覆の各因子も, ample 類を制限すれば射影的になる．したがって平坦な複素トーラスは, 単なる複素トーラスではなく abelian variety である．単連結性の意味は $\pi_1^{\text{orb}}(Y_i) = \pi_1^{\text{orb}}(Z_j) = 0$ である．holonomy は Campana の定義と同様, pure orbifold の滑らかな部分の Ricci-flat 計量の holonomy を意味する．本稿は SU 型因子を Y_i と書くので, Istrati の Theorem 5.3 とは二種類の因子の文字の割当てを入れ替えている．SU(2) = Sp(1) の重複は, 一度だけ symplectic 型に分類してよく, 二重に数えない．

最後に, 商のこの有限被覆に関して orbifold fiber product を取る．局所的には $(\widetilde{W} \times E)/\Gamma' \rightarrow (\widetilde{W} \times E)/\Gamma$, $\Gamma' \subset \Gamma$ から誘導される．元の全空間での対角作用が自由なので, これは多様体の真の不分岐被覆になる．複素構造と Vaisman 計量は引き戻される．必要なら連結成分を選んで M' を得る．これで (1.2), (1.3) が示された．regularity や因子の滑らかさは主張していない．また Istrati の Corollary 5.4 により K_M は正則に torsion である． $\square$

横断 Calabi–Yau 定理の入力は, 次のようにも表せる．コンパクトで homologically orientable な横断 Kähler foliation について, $2\pi c_1^B$ の任意の実 basic $(1, 1)$ 代表元は, 固定した basic Kähler 類に属する一意な横断 Kähler 計量の Ricci 形式になる [EKA90, Section 3.5.5]．横断複素次元 1 では, これは関数の楕円型方程式に帰着する． J を固定した Vaisman 構造としての実現には [OV24, Theorem 4.1, Lemma 4.2] と Istrati の Corollary 5.2 を用いる．任意の共形変換で得られた Chern–Ricci-flat Hermitian 計量が, なお Vaisman であるとは仮定していない．

5. BETTI 数, 有限被覆, ALBANESE 写像

Proposition 5.1 (transgression の計算)．(1.2) の被覆について

$$(5.1) \quad b_1(M') = 2a + 1$$

が成り立つ．

Proof. principal E -orbi-bundle の接続は, 特性類 $c \in H_{\text{orb}}^2(B, \Lambda)$ を与える．Vaisman 接続の曲率は, $\Lambda \otimes \mathbb{R}$ の一つの非零方向における ω_T の倍数である．実際, 2次元の垂直接空間で θ, η を用いると, $d\theta = 0$, $d\eta = -\omega_T$ である．周期の基底を選ぶ操作は, この二つの曲率成分に可逆な実線形変換を施すだけである．したがって二成分が $H_{\text{orb}}^2(B, \mathbb{R})$ 内で張る空間の rank は 1 であって, 0 ではない．正值性とコンパクト性により, 底上で $[\omega_T]^m \neq 0$ だからである．

分類空間に対する実 Leray–Serre 列の次数 1 の完全列は

$$(5.2) \quad 0 \longrightarrow H_{\text{orb}}^1(B, \mathbb{R}) \longrightarrow H^1(M', \mathbb{R}) \longrightarrow H^1(E, \mathbb{R}) \xrightarrow{d_2} H_{\text{orb}}^2(B, \mathbb{R})$$

である．遷移関数が平行移動なので, $H^1(E)$ の局所係数の monodromy は自明である． u, v を周期基底の双対とすると, $d_2(u), d_2(v)$ は, transgression の共通の符号規約を除いて二つの特性類に等しい．よって $\text{rank } d_2 = 1$, $\dim \ker d_2 = 1$ である．orbifold 単連結性から $H_{\text{orb}}^1(Q, \mathbb{R}) = 0$ となるので, $b_1^{\text{orb}}(B) = 2a$ である．(5.2) の次元を数えて結論を得る． $\square$

Proposition 5.2 (virtual 第一 Betti 数). $b_1^{\text{virt}}(M)$ を, 連結な有限正則 *étale* 被覆 $N \rightarrow M$ にわたる $b_1(N)$ の上限とする. この上限は達成され, $2a + 1$ に等しい. 特に

$$(5.3) \quad b_1^{\text{virt}}(M) \in \{1, 3, \dots, 2n - 5\} \cup \{2n - 1\}$$

である. $n = 2$ では最初の集合を空集合と解釈する. $2n - 3$ は *virtual* 不変量の値として除外されるが, $b_1(M)$ の値として除外されるとは限らない.

Proof. 任意の有限被覆上で, 引き戻した横断 Ricci-flat 計量の制限 holonomy は変わらない. 平均曲率が 0 なので, basic 調和 1 形式 α に対する basic Bochner 恒等式から

$$0 = \|\nabla^T \alpha\|_{L^2}^2 + \int \text{Ric}^T(\alpha^\sharp, \alpha^\sharp) dv = \|\nabla^T \alpha\|_{L^2}^2$$

を得る. したがって basic 調和 1 形式は平行である. 非平坦な既約 SU 型, Sp 型の因子には不変な余ベクトルが存在しない. よって M' の任意の有限被覆上の平行な横断余ベクトルの空間は次元 $2a$ 以下である. 補題 3.3 から, 通常の第一 Betti 数は $2a + 1$ 以下となる. M の有限被覆については, M' との fiber product の連結成分を取る. transfer により実 cohomology の引き戻しは単射なので, 同じ上界が従う. 命題 5.1 により, この値は M' で達成される.

非平坦な因子の複素次元は少なくとも 2 である. 複素 1 次元の Ricci-flat Kähler orbifold 因子は平坦であり, A に含まれるべきものである. この分解における正次元の単連結因子にはなれない. したがって $a = m$ または $a \leq m - 2$ であり, (5.3) を得る. Bochner 法の部分は [Gom26, Proposition 6.4] の仕組みでもある. 本稿では, そこで必要となる foliation の仮定を明示して満たしている. $\square$

Proposition 5.3 (Albanese 写像の記述). $\dim \text{Alb}(M) = (b_1(M) - 1)/2$, $\text{Alb}(M') \cong A$ であり, M' の Albanese 写像は平行移動を除いて $\text{pr}_A \pi$ である. M の Albanese 写像は全射 *submersion* である. 一般には *canonical foliation* による商写像とは一致しない.

Proof. コンパクト Vaisman 多様体の正則 1 形式は閉かつ basic であり, $(1, 0)$ 型の basic 調和形式に正確に一致する. その周期による商は真の複素トーラスである. [Gom26, Sections 2–3, Theorem 3.3], [IO23, Section 3] を参照されたい. basic Hodge 対称性と補題 3.3 から次元の式が従う. M' 上では, これらの形式は A の正則 1 形式の引き戻しに正確に一致する. 単連結因子には, Ricci-flat Bochner 理論により正則 1 形式が存在しないからである. ファイバーと $\mathcal{Q}$ が連結なので, $\pi_1(M') \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(B) \rightarrow \pi_1(A)$ は全射である. したがって周期格子は, 単にその有理的な広がりだけでなく, 整格子として一致する. Albanese 写像の普遍性から, それは $\text{pr}_A \pi$ に一致する. ファイバーは $\mathcal{Q}$ 上の連結な楕円曲線 orbi-bundle である.

M 自身については, Chern–Ricci-flat Vaisman 計量を用いると, 正則 1 形式の基底は横断的に平行な形式からなる. 一点での独立性と平行性から, 各点で独立になる. よって Albanese 写像は各点で標的の次元に等しい rank をもつ. 像は *submersion* により開, コンパクト性により閉であり, 連結な Albanese トーラス全体に等しい. $\square$

$\widehat{M} \rightarrow M$ が群 F の Galois 被覆なら, $H^1(M, \mathbb{R}) = H^1(\widehat{M}, \mathbb{R})^F$ である. 有限群が横断的な平行形式を取り除くことが, 小さい b_1 を生じさせる第二の機構である. これは $\mathcal{Q}$ があるために a が小さくなる機構と区別しなければならない. $b_1(M) = 2n - 1$ であることと M が Kodaira 多様体であることの同値は [Ist25, Corollary 5.11] にある. regular な Albanese fibration と左不変複素構造の記述は [Gom26, Theorems 1.1, 6.6] による. (1.1) がなければ, 次元だけによる上界 $2n - 1$ は成り立たない. 第 8 節

の円周束の構成を種数 g の曲線に適用すると, 任意の $g \geq 2$ に対して $b_1 = 2g + 1$ をもつ Vaisman 曲面が得られる.

6. 特性類と積分分解の限界

$E = \mathbb{C}/\Lambda$ に対して, 正則 principal elliptic orbi-bundle は $H_{\text{orb}}^1(B, \mathcal{O}_B(E))$ で分類される. 完全列

$$(6.1) \quad 0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \mathcal{O}_B \longrightarrow \mathcal{O}_B(E) \longrightarrow 0$$

が $c(M') \in H_{\text{orb}}^2(B, \Lambda)$ を定める. したがって特性類はデータの一部にすぎない. 一つの特性類を固定したとき, その上のファイバーは $H^1(B, \mathcal{O}_B)$ の像, すなわち $H_{\text{orb}}^1(B, \Lambda)$ の像による商の下で torsor となる. E の格子と正則 torsor の類も保持しなければならない.

Proposition 6.1 (線束モデルと再構成). (1.2) の積被覆 B 上で, *primitive* な格子元 e の向きと, 補完する格子元 f を選ぶと

$$(6.2) \quad c(M') = \kappa \otimes e, \quad \kappa \in H_{\text{orb}}^2(B, \mathbb{Z}), \quad \kappa \text{ は Kähler 類}$$

と書ける. $c_1(L) = \kappa$ を満たす ample な正則 line orbi-bundle L と, $q \in \mathbb{C}^*$, $|q| < 1$ が存在して

$$(6.3) \quad M' \cong L^\times / \langle q \rangle$$

となる. さらに $L \cong \text{pr}_A^* L_A \otimes \bigotimes_i \text{pr}_{Y_i}^* L_i \otimes \bigotimes_j \text{pr}_{Z_j}^* L'_j$ と書ける. 楕円曲線 torsor は, 同じ E, q を用いた各因子の torsor の引き戻しの Baer 和である.

Proof. 命題 5.1 の実曲率の計算では像は 1 次元である. その整特性類を整 2-cycle に評価すると, この方向に非零の格子ベクトルが含まれることが分かる. したがって, この直線は有理的である. primitive なベクトルとその符号を選ぶと, torsion を除いて正の類 κ が得られる. 積被覆では $H_{\text{orb}}^1(B, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2a}$ なので, 普遍係数定理から $H_{\text{orb}}^2(B, \mathbb{Z})$ は torsion-free である. よって torsion 項は残らず, (6.2) が整係数で成り立つ.

orbifold 指数完全列と Kähler (1, 1) 定理により, この第一 Chern 類をもつ line orbi-bundle L_0 が得られる. e を 1 に送って $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, $\text{Im } \tau > 0$ と同定する. すると $E = \mathbb{C}^* / \langle q \rangle$, $q = e^{2\pi i \tau}$ であり, $L_0^\times / \langle q \rangle$ の特性類は指定したものに等しい. (6.1) により, これと M' との差は $H^1(B, \mathcal{O}_B)$ の像に入る. line orbi-bundle の指数完全列は, 同じ $H^1(B, \mathcal{O}_B)$ を $\text{Pic}_{\text{orb}}^0(B)$ に送る. L_0 にその像を tensor することで差を吸収できる. これで, 位相的な類だけが正則束を決めるとは仮定せずに (6.3) を示した. Pic^0 によるねじれは正值性を変えない. これは [Ist25, Theorem 2.4] で扱われる設定である.

因子分解について, 整 Künneth 公式の次数 2 では, 単連結因子を含む交差項が存在しない. したがって $c_1(L)$ は, 各因子への制限の引き戻しの和となる. L をそれらの制限の tensor 積で割ったものの第一 Chern 類は 0 である. また Kähler Hodge 理論と $H_{\text{orb}}^1(Q, \mathbb{C}) = 0$ から $H^1(B, \mathcal{O}_B) = H^1(A, \mathcal{O}_A)$ を得る. 残る Pic^0 項は A から来るので, L_A に吸収できる.

具体的には, 因子の torsor を B に引き戻したものを $P_k \rightarrow B$ と書き, その fiber product を, 平行移動で作用する

$$\ker(E^r \xrightarrow{\text{sum}} E)$$

で割る．局所的なファイバーは $E^r / \ker(\text{sum}) = E$ である．得られる遷移関数は各因子の遷移関数の和であり，乗法的な $\mathbb{C}^*$ 座標では線束の遷移関数の積となる．これは (6.3) の遷移関数に正確に一致する．よって再構成の主張が示された． $\square$

この被覆を取る前には，definite な束は正の rank 1 の実特性類に加えて整 torsion をもち得る．ここで torsion が消える理由は，特定の積被覆の H_1 が torsion-free だからであって，任意の orbifold 上の torsion 類を任意の有限被覆でいつでも消せるからではない．正の類は有限な底の被覆では消えない．実 transfer 公式 $p_*p^* = (\deg p) \text{id}$ が引き戻しの単射性を与えるからである．ファイバーの isogeny でも，実係数でこの類を消すことはできない．

Proposition 6.2 (双正則な積に対する，より強い障害)．コンパクト非 *Kähler Vaisman* 多様体は，両因子が正次元のコンパクト複素多様体である積 $X_1 \times X_2$ と双正則にはならない．この主張は有限 étale 被覆後も成り立つ．

Proof. exact かつ半正定値な形式 ω_T を，次元 r_i のコンパクト slice X_i に制限する．Stokes により $\int_{X_i} \omega_T^{r_i} = 0$ である．半正定値性から，制限の rank は各点で落ちている．半正定値 Hermitian 形式では，ノルムが 0 のベクトルは形式全体の核に入る．したがって，積の各点で両方の因子について $TX_i \cap \ker \omega_T \neq 0$ となる． $\ker \omega_T$ は複素直線なので，これは相補的な二つの接空間の両方に含まれる必要があり，矛盾する．有限 étale 被覆も Vaisman なので，同じ議論が使える．これは [Ist25, Introduction] で言及される積分分解の障害を再現する． $\square$

線束モデルで Hermitian ノルムを選ぶ．零でないベクトルを単位ベクトルと正の長さに分けると， $L^\times$ は滑らかに $S(L) \times \mathbb{R}$ と同定される． q の偏角が φ なら，商は $S(L)$ 上の角度 φ の円周回転の mapping torus である．この回転は恒等写像と isotopic なので

$$(6.4) \quad M' \simeq_{\text{diff}} S(L) \times S^1$$

となる．本稿の状況では，isotropy が非零の線上に自由に作用するので，単位円周束の全空間は滑らかである．適切なノルムを取ると Sasaki 幾何の構成になる．(6.4) は実多様体の微分同相としての積であり，双正則な積を主張しない．特に $E \times B$ の第一 Betti 数は $2a + 2$ で，(5.1) とは異なる．*BB 型の類似は底と横断計量については積分分解として，全空間については束と群の拡大による記述として成立する．*

7. 基本群

分類空間の意味での homotopy 完全列は

$$(7.1) \quad \pi_2^{\text{orb}}(B) \xrightarrow{\langle c, \cdot \rangle} \Lambda \longrightarrow \pi_1(M') \longrightarrow \mathbb{Z}^{2a} \longrightarrow 1$$

である．最初の矢印を省いてはいけない．特に，楕円曲線ファイバーの基本群は全空間の基本群に単射で入るとは限らない．

Proposition 7.1. $\mathcal{Q}$ が一点なら， $\pi_1(M')$ は $\mathbb{Z}$ と実 $(2a + 1)$ 次元 Heisenberg 群の格子の積であり，*virtually abelian* ではない． $\dim \mathcal{Q} > 0$ なら， $\pi_1(M)$ は *virtually* $\mathbb{Z}^{2a+1}$ である．これらは [Ist25, Corollary 5.10] の二つの場合に対応する．

Proof. $B = A$ なら $\pi_2(B) = 0$ である．偏極の基底を選び， κ をすべての $d_i > 0$ となる単因子形 $(d_1, \dots, d_a)$ にする．中心の円周の向きを選ぶと，表示は

$$(7.2) \quad \langle x_i, y_i, z, t \mid z, t \text{ は中心的, } [x_i, y_j] = z^{d_i \delta_{ij}}, [x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 1 \rangle$$

となる．動径方向の円周が t を与える．この表示は A の基本平行四辺形を持ち上げることで得られる．円周方向の巻き数は $c_1(L)$ の評価に等しい．代数的な交換子 pairing は $\mathbb{Q}$ 上で非退化なので，どの有限指数部分群も可換ではない．

$\mathcal{Q}$ が正次元なら，orbifold Hurewicz により $\pi_2^{\text{orb}}(\mathcal{Q}) \cong H_2^{\text{orb}}(\mathcal{Q}, \mathbb{Z})$ である．Kähler 類 κ の制限は非零なので，(7.1) の最初の写像の像は，ある $d > 0$ について $d\mathbb{Z}e$ である．したがって最後の写像の核は $\mathbb{Z}/d \oplus \mathbb{Z}$ となる．線束モデルでは，(6.4) により $\mathbb{Z}$ 因子が滑らかに分離する．円周束の基本群は $\mathbb{Z}^{2a}$ の $\mathbb{Z}/d$ による中心拡大である．構造群が円周の平行移動からなるためである．その交換子は有限である． $d\mathbb{Z}^{2a}$ の逆像は可換となる． d 倍の元の持ち上げ同士の交換子は，元の交換子の d^2 乗だからである．この逆像は有限生成可換群なので，rank $2a$ の torsion-free な有限指数部分群を含む．動径方向の $\mathbb{Z}$ を戻すと，有限指数を除いて $\mathbb{Z}^{2a+1}$ が得られる． M' から M に移っても，この virtual な結論は変わらない． $\square$

8. 具体例と境界例

Example 8.1 (具体例に用いる構成). B を滑らかな射影多様体， H を ample 線束とし， $\kappa = c_1(H)$ ， $L = H^{-1}$ とおく． $i\partial\bar{\partial}\log h = 2\pi\kappa_h > 0$ を満たす L の Hermitian 計量 h を選び， $L^\times$ 上で $F(v) = |v|_h^2$ とおく．このとき

$$(8.1) \quad \Omega_K = i\partial\bar{\partial}F > 0, \quad \Omega_V = F^{-1}\Omega_K, \quad \theta = -d\log F$$

である．実際，水平部分は $2\pi F\kappa_h$ ，垂直部分は $iF\partial\log F \wedge \bar{\partial}\log F$ となり，各々の方向に正である．よって $d\Omega_V = \theta \wedge \Omega_V$ となる．対数動径座標において，計量は積 $dt^2 + g_{S(L)}$ の定数倍なので， θ は平行である． $0 < q < 1$ による乗法は Ω_V, θ を保つため，商 $M(H, q) = L^\times / \langle q \rangle$ はコンパクト Vaisman 多様体となる．canonical な葉は $E = \mathbb{C}^* / \langle q \rangle$ ファイバーで，商は B である．ファイバーを反時計回りに向きづけると

$$(8.2) \quad c(M(H, q)) = (-\kappa, 0), \quad c_j^B(M(H, q)) = c_j(TB)$$

となる．最初の周期生成元の符号を変えると，(6.2) の正の規約になる．反転 $v \mapsto v^{-1}$ は， $\mathbb{C}^*$ 作用の向きを逆にして H と H^{-1} の零切断を除いた束を同定するので，この符号の選択は ample 線束のモデルと整合する．非零全空間が滑らかである正の line orbi-bundle にも，同じ局所的構成を適用できる．

Example 8.2 (b_1 が最大：Kodaira 多様体). $B = A$ を次元 m の偏極 abelian variety とし，例 8.1 を適用する．得られる多様体の次元は $n = m + 1$ で，regular であり，すべての $j > 0$ について $c_j^B = 0$ ，また $b_1 = 2m + 1 = 2n - 1$ となる．基本群は，必要なら z の符号を変えて (7.2) で与えられる．Albanese 写像は楕円曲線束の射影である．これらは [Ist25, Example 7.2, Corollary 5.11] のモデルに正確に一致し，[Gom26, Theorem 6.6] と整合する．標準モデル計量は LCK rank 1 をもつが，これは同じ複素多様体上のすべての Vaisman 計量についての主張ではない． $m = 1$ なら primary Kodaira 曲面である．

Example 8.3 (K3 を底とし $b_1 = 1$ となる例). $S \subset \mathbb{P}^3$ を滑らかな四次 K3 曲面とし， $H = \mathcal{O}_S(1)$ とおく．随伴公式から $K_S \cong \mathcal{O}_S$ であり，Lefschetz 超平面定理により S は単連結である．超平面類 h は primitive である．実際， $h^2 = 4$ であり， $h = 2u$ と書けたとすると $u^2 = 1$ となって K3 曲面の交点形式が偶であることに反する．それより大きな可除性は数値的に不可能である．Poincaré 双対性から交点 pairing は unimodular なので， h を $H_2(S, \mathbb{Z})$ に評価する写像は $\mathbb{Z}$ へ全射である．ここで用いた K3 の cohomology と格子の事実については [Huy16, Chapters 1 and 14] を参照されたい．

$M = M(H, q)$ に対し, $n = 3$ で, canonical foliation は底 S をもつ regular な foliation であり,

$$(8.3) \quad c_1^B = 0, \quad \int_S c_2^B = 24, \quad b_1(M) = b_1^{\text{virt}}(M) = 1, \quad \pi_1(M) = \mathbb{Z}$$

が成り立つ. c_2 は $c(TS) = (1+h)^4/(1+4h)$ から直接計算でき, 次数 2 の項は $6h^2$, その積分は 24 である. 円周束の完全列 $\pi_2(S) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S(L)) \rightarrow 0$ と primitivity から $\pi_1(S(L)) = 0$ が従う. 動径方向の円周が, 表示した基本群を与える. 特性類の組は $(-h, 0)$ である. 葉空間は K3 曲面だが Albanese は一点である. 滑らかな多様体としては $M = S(L) \times S^1$ であり, 双正則な意味では非自明なコンパクト積分分解をもたない.

Example 8.4 (有限群によって b_1 が小さくなる例). 楕円曲線 C , 対称な負の線束 $L = \mathcal{O}_C(-[0])$, 対合 $\iota: x \mapsto -x$ を取る. これは $\beta^2 = 1$ となる線束の持ち上げ β をもつ. 任意の持ち上げを定数の平方根で rescale すればよい. β 不変な負の Hermitian 計量と $0 < q < 1$ を選び,

$$(8.4) \quad P = L^\times / \langle q^2 \rangle, \quad X = L^\times / \langle q\beta \rangle$$

とおく. P に誘導される対合は自由である. 固定点があれば, ある $k \in \mathbb{Z}$ について $q\beta(v) = q^{2k}v$ となるが, ノルムを取ると $q = q^{2k}$ となって矛盾する. 不変計量が降下するので, $P \rightarrow X$ は Vaisman 曲面の étale 二重被覆である. $H^1(P, \mathbb{R}) = H^1(C, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}[\theta]$ において, 対合はそれぞれ -1 と $+1$ で作用する. したがって

$$(8.5) \quad b_1(X) = 1, \quad b_1(P) = b_1^{\text{virt}}(X) = 3$$

である. X の葉空間は平坦 orbifold $C/\{\pm 1\} = \mathbb{P}^1(2, 2, 2, 2)$ なので, $c_1^B(X) = 0$ である. これは quasi-regular だが regular ではない. 特性類を C に引き戻すと $(-[0], 0)$ となり, 実係数部分は非零の rank 1 をもつ. 局所的な位数 2 の固定部分群は, $\mathbb{C}^*/\langle q^2 \rangle$ の元 $q\beta|_{L_x}$ による平行移動としてファイバーに作用する. これは, 引き戻した特性類に加えて isotropy のデータを指定している.

対応する標準的な正方トラスのモデルでは, 基本群は

$\pi_1(X) = \langle x, y, z, s \mid z \text{ は中心的}, [x, y] = z, sxs^{-1} = x^{-1}, sys^{-1} = y^{-1}, szs^{-1} = z \rangle$ である. 同値に, 生成元 s が水平方向の反転として作用する $H_{\mathbb{Z}} \rtimes \mathbb{Z}$ である. x, y, z, s^2 で生成される部分群は $H_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$ で, 指数は 2 である. このモデルは, 群演算 $(x, y, z)(x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + xy')$ をもつ実 Heisenberg 群で直接見られる. 水平反転 $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$ は整格子と標準 Sasaki 構造を保つ. 動径周期の半分だけ平行移動することで商の作用が自由になる. これにより, 誘導される次数 1 の偏極に対して上記の正則構成が実現される. これらは [Ist25, Example 7.3] と同じ secondary Kodaira 型の例である.

Example 8.5 (有限被覆で滑らかにできない orbifold 因子). 重み付き次数 5 の多項式

$$f = z_0^2 z_1 + z_1^5 + z_2^5 + z_3^5, \quad (w_0, w_1, w_2, w_3) = (2, 1, 1, 1)$$

を考える. $W = \{f = 0\} \setminus \{0\}$ は滑らかである. 四つの偏微分の共通零点が原点だけだからである. 重み付き $\mathbb{C}^*$ 作用の商は射影 K3 orbifold $B \subset \mathbb{P}(2, 1, 1, 1)$ となり, $[1, 0, 0, 0]$ に A_1 orbifold 点をもつが, 因子的な isotropy はない. $5 = 2 + 1 + 1 + 1$ なので, 随伴公式から orbifold 標準束は自明である. 重み付き乗法による商 $W/\langle q \rangle$ は, $c_1^B = 0$ を満たす滑らかなコンパクト Vaisman 三次元多様体である.

これは [Ist25, Example 7.4] にある明示的なデータである. 複素次元 3 のこの孤立超曲面特異点の link は, 超曲面 link の連結性定理 [Mil68, Chapter 5] によって単連

結である．その円周 orbi-bundle の完全列から $\pi_1^{\text{orb}}(B) = 0$ が従う．したがって B には非自明な連結 orbifold 被覆が一つもなく，特に有限な滑らかな orbifold 被覆は存在しない．全空間は，単連結な原点を除いた錐を無限巡回群で割ったものなので， $\pi_1 = \mathbb{Z}$ ， $b_1 = 1$ となる．特性類の組は tautological な負の line orbi-bundle $\mathcal{O}_B(-1)$ に対応する $(-c_1^{\text{orb}}(\mathcal{O}_B(1)), 0)$ である．局所群 $\mathbb{Z}/2$ は，零切断を除いた tautological な線に忠実に作用する．これは構造定理の「orbifold」を「多様体」に置き換えることへの実際の障害であり，単にその証明を得られていないということではない．

多様体とその被覆を区別して主要な三例を比較すると，次のようになる．

例	n	底	b_1	b_1^{virt}
Kodaira 多様体	$m + 1$	A^m	$2m + 1$	$2m + 1$
K3 上の構成	3	S	1	1
secondary Kodaira	2	$C/\{\pm 1\}$	1	3

9. 本稿で証明する追加の帰結

Corollary 9.1 (実現する値). 各 $n \geq 2$ について，(5.3) の各値は *virtual* 第一 Betti 数として実現する．(1.1) のもとで現れる通常の第一 Betti 数は，正確に $1, 3, \dots, 2n - 1$ である．

Proof. virtual な最大値は例 8.2 で実現する． $0 \leq a \leq m - 2$ に対して $k = m - a \geq 2$ とおき， Q_k を $\mathbb{P}^{k+1}$ の滑らかな次数 $k + 2$ の超曲面とする．随伴公式から $K_{Q_k} \cong \mathcal{O}$ ，Lefschetz から単連結性が従う．その Ricci-flat 計量は平坦因子をもたない．そのような因子があれば H^1 が非零になるからである． $A^a \times Q_k$ に外部 tensor 積の偏極を入れ，例 8.1 を適用する．命題 5.1，5.2 から $b_1 = b_1^{\text{virt}} = 2a + 1$ を得る．

通常の不変量については，楕円曲線の積 $A = C^m$ と積の対称な偏極を取る． $0 \leq \ell < m$ として， ℓ 個の因子で恒等，残りの因子で -1 となる対合を持ち上げたものを β とする．(8.4) の構成をそのまま適用できる．動径方向の縮小が，底の固定点の上でも作用の自由性を保証する．不変な横断 1 形式の次元は 2ℓ であり， $b_1 = 2\ell + 1$ ，virtual な値は $2m + 1$ となる． $\ell = m$ はトーラスを底とするモデル自身である．すべての場合の奇数性は basic Hodge 対称性と補題 3.3 から従い，上界はすでに証明した． $\square$

Corollary 9.2 (第二 basic Chern 類を追加した場合). (1.1) のもとで，次は同値である．

- (1) 実 *basic cohomology* において $c_2^B(Q^{1,0}) = 0$ である．
- (2) 固定した *canonical foliation* と横断複素構造に対し，横断的に平坦な Kähler 計量が存在する．
- (3) $b_1^{\text{virt}}(M) = 2n - 1$ である．
- (4) Kodaira 多様体となる M の有限 étale 被覆が存在する．

$n = 2$ では最初の条件は自動的に，四条件はすべて成り立つ．

Proof. 商，またはその有限積被覆に Ricci-flat 計量を入れて考える． $m \geq 2$ では unitary Chern 曲率 F は $\text{tr } F = 0$ ， $\Lambda F = 0$ を満たす．skew-Hermitian 行列上の $-\text{tr}$ が定めるノルムを用いると，primitive 形式の Hodge 恒等式から

$$(9.1) \quad \int_B c_2(TB) \wedge \frac{\omega_B^{m-2}}{(m-2)!} = \frac{1}{8\pi^2} \int_B |F|^2 \frac{\omega_B^m}{m!}$$

を得る. 実際, $\text{tr } F = 0$ なら $c_2 = (8\pi^2)^{-1} \text{tr}(F \wedge F)$ であり, $*F = -F \wedge \omega_B^{m-2} / (m-2)!$ である. 両式は orbifold 座標で適用でき, 積分には通常どおり固定部分群の位数の逆数を掛ける. したがって basic 類が消えると $F = 0$ となる. 横断複素次元 1 では Ricci-flat 性自体が平坦性を意味する. コンパクト平坦 Kähler orbifold は, 有限なトーラス orbifold 被覆をもつ. これは先に用いた分解定理の平坦な場合である. その引き戻しが Kodaira 被覆を与える. 同値に, (1.2) に非平坦因子が存在しない. 命題 5.2 から第三の条件を得る. 逆に Kodaira 被覆上では basic Chern 類は 0 である. 持ち上げた foliation の実 transfer により引き戻しは単射なので, 下の第二 basic 類も消える. 同じ分解から, (3) が (4) を導くことも直接分かる. $\square$

これらの帰結は既存の構造定理と Hodge 理論から本稿で証明したものである. 今回の検索では, 文献上新しい結果であることは確認できなかった. 新規性は主張しない.

APPENDIX A. 依存関係, 確認事項, 主張しないこと

論理の流れは, 極小な横断 Kähler foliation, basic ポテンシャル補題と Ricci 比較, 同値 (3.2), Istrati による固定 J での計量の存在と quasi-regularity, その有限 orbifold BB 分解, 特性類の計算, Betti 数・Albanese・基本群の帰結, の順である.

コンパクト性は Hodge 理論, 平均, 正值性の積分, 自己同型群の議論, Albanese の像に用いた. Vaisman 条件は極小な葉, 正則 Killing 場, (2.1) を与える. 第一 basic Chern 条件は (3.2) と横断 Ricci-flat 性に入る. quasi-regularity は既知定理で証明した後のみ用いた. 有限被覆は横断的な有限 holonomy と指定された整 torsion を除くが, 正の曲率類は消さない. homotopy, 整 cohomology, 被覆の議論では orbifold 構造を維持した. 射影性は正值性から得られ, 代数的な具体例と因子の偏極の選択に用いた.

中心問題は既知の結果によって解決される. 本稿では未解決の段階を意図的に証明済みの定理として用いてはいない. 各因子の torsor 上のすべての有限群作用や, 標識を忘れた全空間同士のすべての同型は分類していない. これらは今後の分類問題であって, 定理 1.1 の欠けた仮定ではない. すべての orbifold が有限被覆で滑らかになるという主張は用いない. 一般の LCK 多様体に関する主張も, 本稿の証明からは導かない.

監査では [KNOWN], [DERIVED], [CANDIDATE], [REFUTED], [GAP] を区別する. 「de Rham 消滅なら basic 消滅」, 「小さい b_1 なら非トーラス因子が存在」, 「有限被覆ですべての底が滑らかになる」という偽の含意は, 具体例で [REFUTED] となった. [CANDIDATE] を定理として提示してはいない. Istrati の出版版の番号を確認できなかったこと, 網羅的な新規性調査ではないことは, 書誌上の限界として research_audit_ja.md に記録した. 指定された三つの arXiv 論文の定理番号は実際の本文で確認した. Milnor の本における一般の超曲面 link の連結性定理の正確な番号は未確認であり, 標準的な章単位の参照のみを用いた. 深い入力については, ここで必要な仮定をすべて明示した. コンパイルと描画による検証の結果は別の README に記録する.

REFERENCES

- [Cam04] Frédéric Campana. Orbifolds à première classe de Chern nulle. In *The Fano Conference*, pages 339–351. Università di Torino, 2004. Theorem 6.4 and Definition 6.5 checked in arXiv:math/0402243v1.
- [EKA90] Aziz El Kacimi-Alaoui. Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications. *Compositio Mathematica*, 73(1):57–106, 1990.
- [Gom26] Lucas H. S. Gomes. On the classification of Vaisman manifolds with vanishing first basic Chern class and large first Betti number, 2026. arXiv:2604.04134v2, 21 May 2026.
- [Huy16] Daniel Huybrechts. *Lectures on K3 Surfaces*. Cambridge University Press, 2016. Author’s online manuscript, Chapters 1 and 14 consulted.
- [IO23] Nicolina Istrati and Alexandra Otiman. Bott–Chern cohomology of compact Vaisman manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 376(6):3919–3936, 2023. Numbered citations refer to the final preprint arXiv:2206.07312v2, 26 September 2022.
- [Ist25] Nicolina Istrati. Vaisman manifolds with vanishing first Chern class. *Journal of the European Mathematical Society*, 2025. Published online first, 11 March 2025. Numbered citations in this note refer to arXiv:2304.02582v1, 5 April 2023.
- [Mil68] John Milnor. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, volume 61 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, 1968. Chapter 5; precise theorem number for link connectivity not verified in this run.
- [OV24] Liviu Ornea and Misha Verbitsky. A Calabi–Yau theorem for Vaisman manifolds. *Communications in Analysis and Geometry*, 32(10):2889–2900, 2024. Numbered citations refer to arXiv:2206.08808v2, 24 August 2022.