

DEPTH-THREE SYMMETRIC EISENSTEIN SERIES: PERMUTATION SUMS AND A LINEAR-SHUFFLE OBSTRUCTION

chatGPT 6Astra

ABSTRACT. We study two structures attached to depth-three symmetric multiple Eisenstein series in the normalization of Hara–Sakugawa–Tasaka. The quotient by the linear shuffle relations has dimension $\binom{\lfloor k/2 \rfloor}{2}$ in weight k . For even $k \geq 10$, the span of the six-term permutation sums with indices at least two is $M_k^{\mathbb{Q}} \oplus A_2 M_{k-2}^{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q} A_2^2 A_{k-4}$, of dimension $\lfloor k/6 \rfloor + 2$. We give an explicit basis and a polynomial test for all relations in this sector. Most concretely, for every even $k \geq 18$ we exhibit a relation that vanishes analytically but survives the linear shuffle quotient, with a closed nonzero pairing certifying survival. The proofs are uniform in weight. Rational computations through weight 60 check the formulas. The dimension of the full analytic depth-three space is not determined. The novelty audit is incomplete, especially concerning unpublished sources; no priority claim is made.

CONTENTS

E.1.	Introduction	2
E.2.	Symmetric multiple Eisenstein series	3
E.3.	Exact experiments and counterexample tests	4
E.4.	Main theorems	5
E.5.	Proofs	6
E.6.	Explicit bases and complete polynomial relations	9
E.7.	Consequences for symmetric multiple zeta values	10
E.8.	Examples and boundary cases	11
E.9.	Novelty audit and precise limitations	11
Appendix E.A.	Exact computational data	12
Appendix E.B.	Algorithms and reproducibility	13
References		14
要旨		15
J.1.	序論	15
J.2.	Symmetric multiple Eisenstein series	16
J.3.	厳密計算と反例検査	17
J.4.	主定理	18
J.5.	証明	19
J.6.	明示的基底と完全な多項式関係	22

Date: September 10, 2026.

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 11F11, 11M32; Secondary 17B01.

Key words and phrases. symmetric multiple Eisenstein series, linear shuffle relations, free Lie algebra, quasimodular forms, exact computation.

J.7. Symmetric multiple zeta values への帰結	23
J.8. 例と境界の場合	24
J.9. 新規性監査と正確な限界	24
Appendix J.A. 厳密な計算データ	25
Appendix J.B. アルゴリズムと再現方法	26
参考文献	27

This note was generated by ChatGPT 6. Iwai has NOT verified any of its mathematical content. It may therefore contain mathematical errors and should be read with caution. A Japanese version is provided below.

E.1. INTRODUCTION

E.1.1. Background. The natural question is whether the relations of a specified formal model account for the relations between its analytic realizations. In the present problem these are quite different questions. We keep three vector spaces separate: the full analytic space of symmetric triples, its permutation-sum sector, and the quotient of formal triple symbols by linear shuffle relations.

E.1.2. Known results. We use the 43-page PDF of [HST26]. The version arXiv:2601.13626v1 was listed as current when checked on September 10, 2026. Its Proposition 3.9 proves linear shuffle; Theorem 1.2 determines depth two; Lemma 6.5 and the proof of Theorem 1.1 place $M_k^{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}DA_{k-2}$ inside the symmetric triple space for even $k \geq 10$. Here $D = q d/dq$ and $A_r = \tilde{G}_r^{\text{II}}$ for even r .

E.1.3. Main results. Our formal dimension result is Theorem E.4.1; the exact analytic sector and its dimension are Theorem E.4.2. Theorem E.4.3 gives an infinite obstruction to completeness of linear shuffle alone. The last assertion concerns a precisely specified relation space, not a claim that all known stuffle, Fay, derivative, and modular relations fail.

E.1.4. Known result versus new result.

Known	This paper: proved statements, priority un-verified
Linear shuffle and computed depth-three dimensions through weight 16 in [HST26, Table 4]	A uniform formal dimension and a translation-invariant free-Lie description.
Modular inclusion in the full triple space	Exact equality for the permutation-sum sector, including its nonmodular components.
Stuffle identities for convergent indices	An explicit relation surviving linear shuffle in every even weight at least 18.
Polynomial structure of quasimodular forms	An exact polynomial kernel test and explicit basis in a specified symmetric-triple sector.

The permutation identity used below is a classical symmetric-sum consequence of stuffle, not a new identity. The extraction of A_k in the proof of Theorem E.4.2 follows the mechanism of [HST26, Lemma 6.5]. We do not count that extraction as an independent discovery. The exact sector and the uniform nonmembership certificate are the additional statements.

E.1.5. Strategy of proof. For the formal problem, replace three gap variables by four variables with sum zero. Linear shuffle becomes ordinary alternality in tensor length four. The Poincaré–Birkhoff–Witt identity computes the Hilbert series. For the analytic problem, partition finite lattice sums by equality patterns, then take the prescribed iterated limit. Finally, a specific length-four Lie polynomial gives a linear functional which kills every linear shuffle relation but detects the analytic relation in Theorem E.4.3.

E.2. SYMMETRIC MULTIPLE EISENSTEIN SERIES

E.2.1. Definitions and conventions. All vector spaces and relation coefficients are over $\mathbb{Q}$. Put $q = e^{2\pi i\tau}$, $\Im\tau > 0$, and use ascending indices:

$$\zeta(k_1, \dots, k_d) = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_d} n_1^{-k_1} \cdots n_d^{-k_d}, \quad k_d \geq 2.$$

Here $M_m^{\mathbb{Q}}$ denotes the holomorphic modular forms for $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ of weight m whose Fourier coefficients are rational. Let $e_r = e_1 e_0^{r-1}$ in $\mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle$, and let Π be the ordinary shuffle of the binary words. The lattice order is $m\tau + n > 0$ if $m > 0$ or $m = 0, n > 0$. We use exactly the shuffle regularization $G_{\mathbf{k}}^{\Pi}$ of [HST26, Theorem 2.7], and put

(E.2.1)

$$G_{k_1, \dots, k_d}^{\Pi, S} = \sum_{j=0}^d (-1)^{k_{j+1} + \dots + k_d} G_{k_1, \dots, k_j}^{\Pi} G_{k_d, \dots, k_{j+1}}^{\Pi}, \quad \tilde{G}_{\mathbf{k}}^{\Pi, S} = (2\pi i)^{-\mathrm{wt}(\mathbf{k})} G_{\mathbf{k}}^{\Pi, S}.$$

Empty indices have value one. The full normalized triple space is denoted $\mathcal{TE}_k^S$, as in [HST26, §6.3].

E.2.2. Regularization. For entries at least two, G^{Π} equals the limit of the positive-lattice sum, taking the integer-coordinate bound $N \rightarrow \infty$ before the τ -coordinate bound $M \rightarrow \infty$. The symmetric version uses the order “positive part, then negative part” of [HST26, Definition 3.6 and Proposition 3.7]. Entries at least three give absolute convergence; entries equal to two need the prescribed limit.

When an entry is one we use the cited shuffle regularization, never an unregularized lattice sum. More precisely its construction is the convolution of the shuffle-regularized zeta character, with $\zeta^{\Pi}(1) = 0$, and the regularized divisor-sum character under the Goncharov coproduct. In particular G_1^{Π} is not zero:

$$(2\pi i)^{-1} G_1^{\Pi} = - \sum_{n \geq 1} \sigma_0(n) q^n.$$

No analytic argument below applies an unrestricted stuffle formula to an index containing one. Such indices are included in the formal shuffle calculation and in the definition of $\mathcal{TE}_k^S$.

For even $r \geq 2$ write $L_r = 2A_r = 2\tilde{G}_r^{\text{II}}$ and set $L_r = 0$ for odd $r \geq 3$. Thus

$$(E.2.2) \quad L_r = -\frac{B_r}{r!} + \frac{2}{(r-1)!} \sum_{n \geq 1} \sigma_{r-1}(n) q^n \quad (r \text{ even}), \quad \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{r \geq 0} B_r \frac{t^r}{r!}.$$

Here $\sigma_j(n) = \sum_{d|n} d^j$. Hence $A_2 = -E_2/24$, $A_4 = E_4/1440$ and $A_6 = -E_6/60480$, where the classical E_r has constant term one. Notice the sign at weight two.

E.2.3. Linear shuffle relations. Let $\mathbf{F}_k$ have basis $[a, b, c]$, $a, b, c \geq 1$, $a+b+c = k$. Let $\mathcal{R}_k^{\text{LS}}$ be generated by

$$(E.2.3) \quad [e_{k_1, \dots, k_j} \Pi e_{k_{j+1}, \dots, k_3}] - (-1)^{k_{j+1} + \dots + k_3} [k_1, \dots, k_j, k_3, \dots, k_{j+1}], \quad j = 0, 1, 2,$$

where brackets extend linearly on depth-three words. The analytic evaluation $\text{ev}_k([a, b, c]) = \tilde{G}_{a,b,c}^{\text{II},S}$ kills $\mathcal{R}_k^{\text{LS}}$.

The dual of $\mathbf{F}_k/\mathcal{R}_k^{\text{LS}}$ is $\text{LSh}_{k-3}^{(3)}$. Explicitly, for $w = k - 3$, this consists of homogeneous polynomials $f(x, y, z)$ of degree w satisfying

$$(E.2.4) \quad f(x, y, z) = -f(-z, -y, -x),$$

$$(E.2.5) \quad f(x, x+y, x+z) + f(y, x+y, x+z) + f(y, z, x+z) = f(x, -z, -y),$$

$$(E.2.6) \quad f(x, y, y+z) + f(x, x+z, y+z) + f(z, x+z, y+z) = -f(x, y, -z).$$

The pairing is coefficient extraction: $\langle [a, b, c], f \rangle = [x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1}] f$.

E.2.4. Known depth-two results. For comparison, the normalized depth-two space is $M_k^{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}DA_{k-2}$ for even $k \geq 6$, and has basis $\{\tilde{G}_{j, k-j}^{\text{II},S} : 1 \leq j \leq \lfloor k/3 \rfloor\}$ for odd $k \geq 3$ [HST26, Theorem 1.2]. This does not determine the dimension at depth three.

E.3. EXACT EXPERIMENTS AND COUNTEREXAMPLE TESTS

E.3.1. Algorithm and scope. The code expands the three substitutions (E.2.4)–(E.2.6) by integer binomial coefficients. This gives a $3 \binom{k-1}{2}$ by $\binom{k-1}{2}$ integer matrix. Its row rank is $\dim \mathcal{R}_k^{\text{LS}}$, and its nullity is the formal quotient dimension. This calculation includes every composition, including ones.

For $a, b, c \geq 2$ define the six-term sum

$$(E.3.1) \quad C_{a,b,c} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \tilde{G}_{k_{\sigma(1)}, k_{\sigma(2)}, k_{\sigma(3)}}^{\text{II},S}, \quad (k_1, k_2, k_3) = (a, b, c),$$

$$\mathcal{W}_k = \text{Span}_{\mathbb{Q}}\{C_{a,b,c} : a, b, c \geq 2, a+b+c = k\}.$$

Repeated permutations are counted: $C_{a,a,a} = 6\tilde{G}_{a,a,a}^{\text{II},S}$. The exact identity proved below is

$$(E.3.2) \quad C_{a,b,c} = L_a L_b L_c - L_{a+b} L_c - L_{a+c} L_b - L_{b+c} L_a + 2L_k.$$

Divisor sums in (E.2.2), followed by rational convolution, therefore compute this entire sector. These are actual rational Fourier coefficients, not a specialization of unknown odd zeta values.

E.3.2. Rank and kernel computations. The initial range was $3 \leq k \leq 30$; the separate test range was $31 \leq k \leq 60$. All formal ranks agree with Theorem E.4.1. For orbit sums we used coefficients from q^0 through q^{40} throughout $3 \leq k \leq 60$. Independent polynomial computations using (E.6.5) give the same analytic dimensions. The kernel file lists a basis indexed by nonpivot columns for every even $10 \leq k \leq 60$. Formal parity-sector image ranks were also computed through weight 16; the analytic all-even and two-odd orbit-sector ranks were computed through weight 60. The data specify which of these different ranks is being reported.

E.3.3. Candidate structure and validation. The depth-three row of the published Table 4 was reproduced exactly. The weight-four check $\tilde{G}_{2,2}^{\text{II},S} = 4A_4 - DA_2$ was reproduced through q^{24} . Finite ordered rational-lattice sums independently check (E.3.2) for all unordered triples of weights 6 through 16. These tests suggested the formal Hilbert series and the analytic sector in Theorems E.4.1 and E.4.2; their proofs do not use the tests.

E.3.4. Counterexample search and limitations. At weight 12, $C_{2,3,7} = C_{2,5,5}$ is already a relation. Testing the corresponding formal classes led to the family in Theorem E.4.3. Its coefficient witness is checked against every shuffle-matrix row for all even weights from 18 to 60. No counterexample to any stated theorem was found in the tested range.

We have not implemented the full individual-triple Fourier matrix with its MZV coefficient algebra, and we report no analytic rank for $\mathcal{TE}_k^S$. Rational ranks of a formal specialization would not justify such a claim. The number of unexplained full analytic relations remains undetermined. For $\mathcal{W}_k$, by contrast, the polynomial kernel below is complete.

E.4. MAIN THEOREMS

Theorem E.4.1 (Formal depth-three structure). *For every $k \geq 3$,*

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F}_k/\mathcal{R}_k^{\text{LS}}) = \dim_{\mathbb{Q}} \text{LSh}_{k-3}^{(3)} = \binom{\lfloor k/2 \rfloor}{2}, \quad \sum_{w \geq 0} \dim \text{LSh}_w^{(3)} t^w = \frac{t(1+t)}{(1-t^2)^3}.$$

The space $\text{LSh}_w^{(3)}$ is canonically isomorphic, under the coordinate map in the proof, to the translation-invariant alternal polynomials of degree w in four variables. In particular $\dim \mathcal{TE}_k^S \leq \binom{\lfloor k/2 \rfloor}{2}$.

Theorem E.4.2 (Exact permutation-sum sector). *For every even $k \geq 10$,*

$$(E.4.1) \quad \mathcal{W}_k = M_k^{\mathbb{Q}} \oplus A_2 M_{k-2}^{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q} A_2^2 A_{k-4}, \quad \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{W}_k = \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor + 2.$$

For odd k , $\mathcal{W}_k = 0$. The remaining nonzero low weights are $\mathcal{W}_6 = \mathbb{Q} C_{2,2,2}$ and $\mathcal{W}_8 = \mathbb{Q} C_{2,2,4} \oplus \mathbb{Q} C_{2,3,3}$. An explicit basis by orbit combinations is given in §E.6.1.

Theorem E.4.3 (Uniform failure of linear-shuffle completeness). *For every even $k \geq 18$ put $c = k - 10$ and*

$$r_k = \mathcal{C}_{3,7,c} - \mathcal{C}_{5,5,c} \in \mathcal{F}_k, \quad \mathcal{C}_{a,b,c} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} [k_{\sigma(1)}, k_{\sigma(2)}, k_{\sigma(3)}].$$

Then $\text{ev}_k(r_k) = 0$ but $r_k \notin \mathcal{R}_k^{\text{LS}}$. More precisely there is an explicit $f_k \in \text{LSh}_{k-3}^{(3)}$ such that

$$(E.4.2) \quad \langle r_k, f_k \rangle = 2 \left\{ \binom{k-7}{6} - \binom{k-7}{4} \right\} = \frac{(k-17)(k-6)}{15} \binom{k-7}{4} > 0.$$

Consequently $\ker \text{ev}_k / \mathcal{R}_k^{\text{LS}} \neq 0$ in every such weight. This remains an obstruction inside the formal subspace generated by permutation sums whose indices are at least two. Combining this with Theorem E.4.1 gives the unconditional strict bound

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{TE}_k^S \leq \binom{k/2}{2} - 1 \quad (k \geq 18 \text{ even}).$$

E.5. PROOFS

E.5.1. From linear shuffle to four-variable Lie polynomials. A polynomial $H(x_1, x_2, x_3, x_4)$ is called *alternal* if the sum over every $(j, 4-j)$ shuffle of its four arguments vanishes, for $j = 1, 2, 3$. The order within each block is preserved. It is translation invariant if $H(x_1 + u, \dots, x_4 + u) = H(x_1, \dots, x_4)$.

Lemma E.5.1. *The map*

$$(E.5.1) \quad \beta(H)(x, y, z) = H(-x, x - y, y - z, z)$$

is an isomorphism from the translation-invariant alternal polynomials onto $\text{LSh}^{(3)}$. For all alternal polynomials, without imposing translation invariance, its degree- w kernel is $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\mathcal{A}_{w-1}$, where $\mathcal{A}_w$ is the degree- w alternal space.

Proof. The displayed substitution parametrizes the hyperplane $\sum x_i = 0$. Every polynomial on that hyperplane has a unique translation-invariant lift: put $s = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4$, $z_i = x_i - s$, and set

$$H(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(-z_1, -z_1 - z_2, z_4).$$

Thus the coordinate map and its inverse are defined over $\mathbb{Q}$.

Write $H(abcd)$ for $H(a, b, c, d)$ and $S(a; b, c, d) = H(abcd) + H(bacd) + H(bcda) + H(cbda)$. On $a + b + c + d = 0$, set $x = -a$, $y = -b$, $z = -b - c$. The four terms of S become

$$f(x, x + y, x + z), \quad f(y, x + y, x + z), \quad f(y, z, x + z), \quad f(y, z, -x).$$

By (E.2.4), the last term is $-f(x, -z, -y)$. Reversal of H is precisely (E.2.4). Therefore (E.2.4) and (E.2.5) imply that H is antisymmetric under reversal and has zero $(1, 3)$ shuffle.

These conditions imply the missing $(2, 2)$ shuffle. Indeed its six terms, in the order

$$H(1234) + H(1324) + H(1342) + H(3124) + H(3142) + H(3412),$$

equal $S(1; 3, 2, 4) + S(1; 3, 4, 2) + S(4; 1, 2, 3)$ modulo three sums $H(abcd) + H(dcba)$, and hence vanish. Reversal gives the $(3, 1)$ shuffle. Conversely alternality gives reversal by the antipode identity for primitive elements in tensor length four; explicitly that antipode reverses four letters and acts by minus one on a primitive element. The $(1, 3)$ shuffle then gives (E.2.5). The $(3, 1)$ shuffle, evaluated at $(-x, x - y, y - z, z)$, reads

$$f(x, y, z) + f(x, y, y - z) + f(x, x - z, y - z) + f(-z, x - z, y - z) = 0,$$

which is (E.2.6) with the third variable replaced by $-z$. Translation invariance extends all identities on the hyperplane to all four variables. This proves the asserted isomorphism.

For the kernel assertion, vanishing on the hyperplane means divisibility by $\sum x_i$. Dividing by this symmetric linear polynomial preserves all shuffle equations: each shuffle sum for the quotient, multiplied by $\sum x_i$, is zero in a polynomial ring, which is an integral domain. This proves the exact kernel. $\square$

To finish Theorem E.4.1, identify a tensor $Y_{n_1} \cdots Y_{n_4}$ with $x_1^{n_1} \cdots x_4^{n_4}$, where $Y_0, Y_1, \dots$ are free generators of degree n and tensor length one. The primitive-element criterion identifies alternal polynomials with the length-four part of the free Lie algebra. This criterion and PBW are standard free-Lie facts; see [Reu93]. Let $a_r(t)$ be its degree series in tensor length r . The tensor algebra on these generators has series $1/(1 - z/(1 - t))$. PBW and the logarithm of its product formula give

$$\frac{1}{4(1-t)^4} = a_4(t) + \frac{1}{2}a_2(t^2) + \frac{1}{4}a_1(t^4),$$

$$a_1(t) = \frac{1}{1-t}, \quad a_2(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{1-t^2} \right).$$

Thus

$$a_4(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(1-t)^4} - \frac{1}{(1-t^2)^2} \right).$$

Equivalently, writing each alternal polynomial in the variable $s = \sum x_i/4$ gives $\mathcal{A} = \mathbb{Q}[s] \otimes \mathcal{A}^{\text{tr}}$, because permutations fix s . The Hilbert series of the translation-invariant part is therefore

$$(1-t)a_4(t) = \frac{t(1+t)}{(1-t^2)^3}.$$

Its coefficients at $w = 2m+1$ and $w = 2m+2$ are both $\binom{m+2}{2}$; the constant coefficient is zero. Substituting $w = k-3$ proves the theorem.

E.5.2. Proof of the exact analytic sector. First prove (E.3.2) on a finite totally ordered set of nonzero lattice points. The product of three single sums partitions into triples of pairwise distinct points, three types with exactly two equal points, and the case where all points are equal. The six ordered sums account for the distinct case. Subtracting the three pair-contraction products subtracts the all-equal case three times, so one adds it twice. This is exactly (E.3.2). For a finite lattice rectangle with the symmetric order, take $N \rightarrow \infty$ first, then $M \rightarrow \infty$. Each ordered sum and each single sum has the specified limit for indices at least two; there are only finitely many products. Hence the identity passes to that limit without interchanging infinite sums. For odd total weight every term on its right has an odd factor, so it vanishes.

Assume now that $k \geq 10$ is even. Equation (E.3.2) immediately places $\mathcal{W}_k$ in the right side of (E.4.1): with two odd indices it is a pair of even Eisenstein series plus a single one; with three even indices it is a product of at most three even series. For $k \geq 10$, at most two factors in a triple product can be A_2 . The other possibilities lie in $M_k^{\mathbb{Q}}$ and $A_2 M_{k-2}^{\mathbb{Q}}$.

For the reverse inclusion, if $r, s \geq 3$ are odd and $t \geq 2$ is even,

$$(E.5.2) \quad C_{r,s,t} = 4(A_k - A_{r+s}A_t).$$

Every even pair $a+b=k$, $a, b \geq 2$, has a member at least six. Splitting that member as $3+(a-3)$ shows that $A_a A_b \equiv A_k \pmod{\mathcal{W}_k}$. Also $A_4^2 = \frac{7}{6}A_8$, by the weight-eight modular identity or directly by the recurrence in §E.6.2. Substituting $(4, 4, k-8)$ in (E.3.2) gives

$$C_{4,4,k-8} = \frac{16}{3}A_8A_{k-8} - 8A_4A_{k-4} + 4A_k \equiv \frac{4}{3}A_k \pmod{\mathcal{W}_k}.$$

Hence A_k , and then every pair $A_a A_b$, belong to $\mathcal{W}_k$. Solving (E.3.2) for $A_a A_b A_c$ shows that every triple of even single series of total weight k belongs as well.

The modular product basis of [HST15, Corollary 2, arXiv v1] implies that A_k and the pairs with both indices at least four span $M_k^{\mathbb{Q}}$. Applying it in weight $k-2$ shows that pairs and triples just obtained also span $A_2 M_{k-2}^{\mathbb{Q}}$. The product $A_2^2 A_{k-4}$ is present. This proves equality.

For directness one may use [KZ95, Proposition 1(b)]. Here is also a direct check. The transformation law of A_2 is

$$A_2(\gamma\tau) = (c\tau + d)^2 A_2(\tau) - \frac{c(c\tau + d)}{4\pi i}.$$

If $\sum_{p=0}^2 A_2^p f_p = 0$, with f_p modular of weight $k-2p$, apply $\gamma_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$ and divide by $(m\tau + 1)^k$. The resulting polynomial in $m/(m\tau + 1)$ vanishes at infinitely many distinct values for every fixed τ . Its highest coefficient gives $f_2 = 0$, followed by $f_1 = f_0 = 0$. The dimension is $m(k) + m(k-2) + 1$, where

$$m(k) = \lfloor k/12 \rfloor + 1 - \mathbf{1}_{k \equiv 2 \pmod{12}} \quad (k \geq 4 \text{ even}).$$

Checking the six even residues modulo 12 gives $\lfloor k/6 \rfloor + 2$. At weights 6 and 8 there are respectively one and two unordered triples; their polynomial expressions in §8 prove the stated independence.

E.5.3. Proof of the infinite obstruction. Equation (E.5.2) gives the common analytic value

$$C_{3,7,c} = C_{5,5,c} = 4(A_k - A_{10}A_c).$$

This equality is a stuffle consequence. We now prove that its difference is not a linear shuffle consequence.

Set $N = k - 7 = c + 3$, an odd integer at least 11. Form the genuine free-Lie word

$$P_N = [Y_0, [Y_2, [Y_2, Y_N]]].$$

Under the polynomial identification its value is

$$\begin{aligned} H_N &= x_2^2 x_3^2 x_4^N - 2x_2^2 x_3^N x_4^2 + x_2^N x_3^2 x_4^2 \\ &\quad - x_1^2 x_2^2 x_3^N + 2x_1^2 x_2^N x_3^2 - x_1^N x_2^2 x_3^2. \end{aligned}$$

It is alternal, so $f_k = H_N(-x, x-y, y-z, z)$ belongs to $\text{LSh}_{k-3}^{(3)}$ by Lemma E.5.1. Its degree is $N + 4 = k - 3$.

For completeness, put $B_j = \binom{N}{j}$. Pairing the six displayed terms after substitution with the two orbit symbols gives the following exact coefficient table, including multiplicities in the repeated-index orbit:

Term	$\langle C_{3,7,c}, \cdot \rangle$	$\langle C_{5,5,c}, \cdot \rangle$
1	0	0
2	$2(B_6 - B_4)$	0
3	$B_4 - B_6$	0
4	$B_4 - B_6$	0
5	$2(B_6 - B_4)$	0
6	0	0

To check this table, the general coefficient in $(-x)^a(x-y)^b(y-z)^cz^d$ at $x^A y^B z^C$ is

$$(E.5.3) \quad (-1)^{a+b-j+c-l} \binom{b}{j} \binom{c}{l}, \quad j = A - a, \quad l = B - b + j,$$

when $0 \leq j \leq b$, $0 \leq l \leq c$ and $c - l + d = C$, and zero otherwise. Apply it to all six permutations of $(2, 6, c - 1)$ and $(4, 4, c - 1)$. The first and last terms vanish since $N > \max\{6, c - 1\}$. For the repeated-index orbit the contributions in terms 3 and 4 cancel using $\binom{N}{c-1} = \binom{N}{4}$; the other terms cannot supply all three exponents. This explains every entry and the coefficient signs.

The total is $2(B_6 - B_4)$, and

$$2(B_6 - B_4) = \frac{(N - 10)(N + 1)}{15} \binom{N}{4} > 0.$$

Every member of $\mathcal{R}_k^{\text{LS}}$ pairs to zero with f_k , whereas r_k does not. This proves Theorem E.4.3, independently of any rank experiment.

E.6. EXPLICIT BASES AND COMPLETE POLYNOMIAL RELATIONS

E.6.1. An explicit orbit-combination basis. For even $k \geq 10$ define

$$(E.6.1) \quad U_k = \frac{3}{4}C_{4,4,k-8} + C_{3,5,k-8} - \frac{3}{2}C_{3,k-7,4},$$

$$(E.6.2) \quad V_{a,b} = U_k - \frac{1}{4}C_{3,u-3,v}, \quad u = \max(a, b), \quad v = \min(a, b), \quad a + b = k,$$

$$(E.6.3) \quad T_{a,b,c} = \frac{1}{8}C_{a,b,c} + \frac{1}{2}(V_{a+b,c} + V_{a+c,b} + V_{b+c,a}) - \frac{1}{2}U_k.$$

The V and T indices in these formulas are even and at least two. The previous proof gives the exact identities $U_k = A_k$, $V_{a,b} = A_a A_b$, and $T_{a,b,c} = A_a A_b A_c$. All orbit indices on the right sides are at least two, including $k = 10$. Put

$$J_m = \{j \in \mathbb{Z} : \lfloor (m - 2)/6 \rfloor + 2 \leq j \leq \lfloor m/4 \rfloor\}.$$

An explicit basis of $\mathcal{W}_k$ is

$$(E.6.4) \quad \{U_k\} \cup \{V_{2j,k-2j} : j \in J_k\} \cup \{V_{2,k-2}\} \cup \{T_{2,2j,k-2-2j} : j \in J_{k-2}\} \cup \{T_{2,2,k-4}\}.$$

Indeed the first two sets are the modular product basis, the next two are A_2 times that basis in weight $k - 2$, and the last element spans the final summand of (E.4.1). Directness proves independence. This is a basis by explicitly given combinations of triples, not an assertion that these combinations are individual triple generators.

E.6.2. A complete kernel test. Let P_k have basis the unordered triples $2 \leq a \leq b \leq c$ of sum k , evaluated to $C_{a,b,c}$. Define homogeneous polynomials of weighted degrees $\deg X = 2, \deg Y = 4, \deg Z = 6$ by $P_2 = X, P_4 = Y, P_6 = Z, P_r = 0$ for odd $r \geq 3$, and

$$(E.6.5) \quad P_{2m} = \frac{3}{(m-3)(2m-1)(2m+1)} \sum_{r=2}^{m-2} (2r-1)(2m-2r-1) P_{2r} P_{2m-2r}, \quad m \geq 4.$$

Define the explicit linear map

$$(E.6.6) \quad \Psi_k([a, b, c]) = P_a P_b P_c - P_{a+b} P_c - P_{a+c} P_b - P_{b+c} P_a + 2P_k.$$

Proposition E.6.1. *The evaluation kernel on P_k is exactly $\ker \Psi_k$. For even $k \geq 10$ its dimension is*

$$\left\lfloor \frac{(k-3)^2 + 3}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor - 2.$$

Thus comparison of the coefficients of the finitely many monomials in (E.6.6) gives a complete set of rational linear conditions for a relation in this sector.

Proof. For an ordinary lattice the expansion $\wp(z) = z^{-2} + \sum_{n \geq 1} (2n+1) G_{2n+2}^{\text{lat}} z^{2n}$ and the equation $\wp'' = 6\wp^2 - g_2/2$ imply, on comparing z^{2m-4} for $m \geq 4$,

$$(2m-6)(2m-1)(2m+1) G_{2m}^{\text{lat}} = 6 \sum_{r=2}^{m-2} (2r-1)(2m-2r-1) G_{2r}^{\text{lat}} G_{2m-2r}^{\text{lat}}.$$

Normalization by $(2\pi i)^{2m}$ gives (E.6.5) for L_{2m} . The series of weights 4 and 6 start the recurrence; L_2 is separate. Therefore the analytic evaluation factors as Ψ_k followed by $(X, Y, Z) \mapsto (L_2, L_4, L_6)$.

This latter map is injective on weight- k polynomials. First, powers of L_2 with modular coefficients are independent by the transformation-law argument above. In a fixed modular weight, a relation between $L_4^a L_6^b$ would, after factoring common powers, give a polynomial relation in L_6^2/L_4^3 . This function is nonconstant, as is seen from its constant and first Fourier coefficients, so no such relation exists. This proves the kernel assertion. The number of unordered triples is the coefficient of t^{k-6} in $1/((1-t)(1-t^2)(1-t^3))$, namely $\lfloor ((k-3)^2 + 3)/12 \rfloor$; it also follows by summing $\sum_{a=2}^{\lfloor k/3 \rfloor} (\lfloor (k-a)/2 \rfloor - a + 1)$. Subtract the dimension in Theorem E.4.2. $\square$

The saved nullspace bases are independent for a simple reason: each relation has coefficient one at a different nonpivot column and zero at all other nonpivot columns. They are therefore a basis of the entire computed kernel. In any weight, (E.6.6) gives the same procedure with a proved finite stopping criterion, without presuming a quasimodular Sturm bound.

E.7. CONSEQUENCES FOR SYMMETRIC MULTIPLE ZETA VALUES

The constant term of (E.2.1) is the shuffle symmetric real MZV $\zeta^{\text{II},S}(\mathbf{k})$. Put $\ell_r = -B_r/r!$ for even $r \geq 2$ and $\ell_r = 0$ for odd $r \geq 3$. Taking constant terms of (E.3.2) yields

$$(E.7.1) \quad \frac{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \zeta^{\text{II},S}(k_{\sigma(1)}, k_{\sigma(2)}, k_{\sigma(3)})}{(2\pi i)^k} = \ell_a \ell_b \ell_c - \ell_{a+b} \ell_c - \ell_{a+c} \ell_b - \ell_{b+c} \ell_a + 2\ell_k.$$

In particular for every even $c \geq 8$,

$$\sum_{\sigma} \zeta^{\mathbb{H},S}(\sigma(3, 7, c)) - \sum_{\sigma} \zeta^{\mathbb{H},S}(\sigma(5, 5, c)) = 0.$$

This is an exact equality in the real MZV algebra $\mathcal{Z}$. It is a known-type symmetric-sum consequence, not a new MZV identity. Its image in $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ also vanishes. One should take this quotient after undoing the normalization; powers of $2\pi i$ are not being adjoined to that quotient. For the classical and finite-MZV distinction see [Kan19]. No Kaneko–Zagier conjecture is invoked, and no identification with finite MZVs is asserted.

E.8. EXAMPLES AND BOUNDARY CASES

With $X = L_2, Y = L_4, Z = L_6$, the low-weight sector is

$$C_{2,2,2} = X^3 - 3XY + 2Z, \quad C_{2,2,4} = X^2Y - 2XZ - \frac{1}{7}Y^2, \quad C_{2,3,3} = -XZ + \frac{6}{7}Y^2.$$

These give the dimensions 1 and 2 at weights 6 and 8. Weight 10 has four unordered generators and the single relation

$$C_{3,3,4} + C_{2,3,5} + \frac{3}{4}C_{2,4,4} = 0.$$

For example $\{C_{2,2,6}, C_{2,3,5}, C_{2,4,4}\}$ is a basis there. At weight 12 the seven generators have dimension four. At weight 60 the 271 generators have dimension twelve and kernel dimension 259.

For the formal problem, $F_3/\mathcal{R}_3^{\text{LS}} = 0$, while the dimensions at weights 4 and 5 are both one. These boundary statements include the regularized indices and do not follow by deleting them. At $k = 18$ the obstruction certificate is 264; at $k = 20$ it is 2002.

E.9. NOVELTY AUDIT AND PRECISE LIMITATIONS

The search was performed through September 10, 2026. The PDF of the primary paper, including its proofs and references, was read; the arXiv abstract page listed only v1. The main comparisons were [BT18, Mat17, Bro20, Anz25, BIM24, Kan25, BK26, BY26] and the classical modular and shuffle sources [GKZ06, KZ95, HST15, Reu93]. The elliptic length-two/Fay setting of [Mat17] and the motivic depth-graded setting of [Bro20] have different evaluation maps. The schemes in [Anz25] impose additional adjoint stuffle conditions. The Schur basis in [BY26] addresses a different family of quasimodular forms. Their conclusions are not substituted for an analytic triple rank.

Reverse searches used the phrases “linear shuffle space”, “depth three dimension”, “translation invariant alternant”, “permutation sums symmetric Eisenstein”, “linear shuffle incomplete”, and the indices $(3, 7, c)$ and $(5, 5, c)$. Recent-paper searches included 2025–2026 multiple Eisenstein series and their derivations. The peripheral paper [BR26] was inspected for overlap only; it is not the research object or an input to the proofs. Its references pointed to the adjoint literature. No accessed source was found to state our explicit nonmembership certificate. Absence of a search match is not a proof of priority.

In particular the unpublished Kaneko–Zagier preprint and the 2025 thesis cited in [BR26] were not available for a complete comparison here. Citation-network searches

and bibliographic access were not exhaustive. *We have not been able to verify novelty completely.* The formal dimension may be implicit in older free-Lie descriptions; the analytic sector is obtained from classical ingredients and a refinement of the extraction argument already present in [HST26]. Accordingly this article records proved structural results and an explicit obstruction, not a certified first proof or a solution of the full depth-three problem.

The finite Fourier tests have a specific logical role. Independent truncated columns always give independent functions: a functional relation forces each coefficient relation. The converse is false in general. Here the general dimension theorem supplies the upper bound, and equality of the truncated rank to that bound proves that the saved kernels are actual kernels. No floating-point rank, PSLQ, or conjectural MZV independence is used.

APPENDIX E.A. EXACT COMPUTATIONAL DATA

The first block was used for discovery and the second as a separate test. g is the number of all positive compositions; r is the rank of the linear-shuffle relation matrix; $d_F = g - r$. For the analytic permutation sector, h counts unordered triples with indices at least two, d_W is the proved dimension certified by the coefficient matrix, and $h - d_W$ is its kernel dimension. Odd-weight orbit sums vanish.

Table 1: Discovery range: weights 3–30.

k	g	r	d_F	h	d_W	$h - d_W$
3	1	1	0	0	0	0
4	3	2	1	0	0	0
5	6	5	1	0	0	0
6	10	7	3	1	1	0
7	15	12	3	1	0	1
8	21	15	6	2	2	0
9	28	22	6	3	0	3
10	36	26	10	4	3	1
11	45	35	10	5	0	5
12	55	40	15	7	4	3
13	66	51	15	8	0	8
14	78	57	21	10	4	6
15	91	70	21	12	0	12
16	105	77	28	14	4	10
17	120	92	28	16	0	16
18	136	100	36	19	5	14
19	153	117	36	21	0	21
20	171	126	45	24	5	19
21	190	145	45	27	0	27
22	210	155	55	30	5	25
23	231	176	55	33	0	33
24	253	187	66	37	6	31
25	276	210	66	40	0	40
26	300	222	78	44	6	38

k	g	r	d_F	h	d_W	$h - d_W$
27	325	247	78	48	0	48
28	351	260	91	52	6	46
29	378	287	91	56	0	56
30	406	301	105	61	7	54

Table 2: Separate test range: weights 31–60.

k	g	r	d_F	h	d_W	$h - d_W$
31	435	330	105	65	0	65
32	465	345	120	70	7	63
33	496	376	120	75	0	75
34	528	392	136	80	7	73
35	561	425	136	85	0	85
36	595	442	153	91	8	83
37	630	477	153	96	0	96
38	666	495	171	102	8	94
39	703	532	171	108	0	108
40	741	551	190	114	8	106
41	780	590	190	120	0	120
42	820	610	210	127	9	118
43	861	651	210	133	0	133
44	903	672	231	140	9	131
45	946	715	231	147	0	147
46	990	737	253	154	9	145
47	1035	782	253	161	0	161
48	1081	805	276	169	10	159
49	1128	852	276	176	0	176
50	1176	876	300	184	10	174
51	1225	925	300	192	0	192
52	1275	950	325	200	10	190
53	1326	1001	325	208	0	208
54	1378	1027	351	217	11	206
55	1431	1080	351	225	0	225
56	1485	1107	378	234	11	223
57	1540	1162	378	243	0	243
58	1596	1190	406	252	11	241
59	1653	1247	406	261	0	261
60	1711	1276	435	271	12	259

APPENDIX E.B. ALGORITHMS AND REPRODUCIBILITY

Run, with Python containing SymPy and python-flint,
`python compute_symmetric_triples.py --formal-max 60 \`
`--orbit-max 60 --q-order 40`

The routines `formal_matrix`, `orbit_expansion`, `eisenstein_polynomial`, and `structural_checks` implement respectively the binomial relation matrix, rational Fourier generation, the polynomial recurrence, and the explicit obstruction checks. The supplementary archive contains the initial and test-range formal data, orbit ranks and nullspaces, polynomial ranks, witness values, and validation records. The optional low-weight formal parity columns are image ranks in the formal quotient, not analytic parity ranks.

The two independent analytic checks use a divisor-sum Fourier formula and the Weierstrass polynomial recurrence. The formal witness is checked both by the matrix equations and by direct binomial extraction. For source verification the original HST weight-four identity and its depth-three Table 4 are used. The weight-twelve discriminant expression in its introduction was not reproduced, since that would require the full individual-triple coefficient algebra absent from this implementation.

The supplied template was used as the preamble. Its incomplete title and previous author information were replaced; LuaTeX-jā and the LuaTeX compatibility package for Xy-pic were added; optional unused font and decoration packages were guarded when unavailable. Its mathematical macros, theorem environments, and page dimensions were retained. The companion compile log records actual LuaLaTeX runs, not a compatibility prediction. Both languages use the same numbered section structure, with prefixes E and J. Mathematical statements and proofs are repeated in full.

REFERENCES

- [HST26] T. Hara, K. Sakugawa and K. Tasaka, *Symmetric multiple Eisenstein series*, [arXiv:2601.13626v1](#) (2026). All numbered citations refer to the v1 PDF.
- [BT18] H. Bachmann and K. Tasaka, *The double shuffle relations for multiple Eisenstein series*, Nagoya Math. J. **230** (2018), 180–212; [arXiv:1501.03408](#).
- [HST15] M. Hirose, N. Sato and K. Tasaka, *Eisenstein series identities based on partial fraction decomposition*, Ramanujan J. **38** (2015), 455–463; [arXiv:1402.1585](#). The product basis cited here is Corollary 2 of arXiv v1.
- [KZ95] M. Kaneko and D. Zagier, *A generalized Jacobi theta function and quasimodular forms*, in *The Moduli Space of Curves*, Progr. Math. **129**, Birkhäuser, 1995, 165–172. [Author-hosted text](#).
- [GKZ06] H. Gangl, M. Kaneko and D. Zagier, *Double zeta values and modular forms*, in *Automorphic Forms and Zeta Functions*, World Scientific, 2006, 71–106. [Author-hosted text](#).
- [Kan19] M. Kaneko, *An introduction to classical and finite multiple zeta values*, Publ. Math. Besançon, Algèbre Théorie Nr. (2019), no. 1, 103–129. [Author-hosted text](#).
- [Mat17] N. Matthes, *Elliptic double zeta values*, J. Number Theory **171** (2017), 227–251; [arXiv:1509.08760](#).
- [Bro20] F. Brown, *Depth-graded motivic multiple zeta values*, [arXiv:1301.3053v2](#) (2020).
- [Reu93] C. Reutenauer, *Free Lie Algebras*, London Mathematical Society Monographs, New Series **7**, Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [Anz25] T. Anzawa, *A Lie algebra associated with adjoint multiple zeta values*, [arXiv:2511.03177v2](#) (2025).
- [BIM24] H. Bachmann and J. W. van Ittersum, with an appendix by N. Matthes, *Formal multiple Eisenstein series and their derivations*, [arXiv:2312.04124v3](#) (2024).
- [Kan25] H. Kanno, *Shuffle regularization for multiple Eisenstein series of level N* , Ramanujan J. **67** (2025), article 95. [doi:10.1007/s11139-025-01136-0](#).
- [BK26] H. Bachmann and H. Kanno, *Relations and Derivatives of Multiple Eisenstein Series*, [arXiv:2602.08176v1](#) (2026).
- [BY26] H. Bachmann and J. Yu, *Schur Eisenstein series and Schur MacMahon series*, [arXiv:2607.27702v1](#) (2026).
- [BR26] H. Bachmann and Risan, *Formal finite multiple zeta values*, [arXiv:2608.15480](#) (2026). Consulted only for the overlap audit.

Depth 3 の symmetric Eisenstein 級数： 全置換和と線形 shuffle 関係の障害

chatGPT 6Astra

2026 年 9 月 10 日

要旨

Hara–Sakugawa–Tasaka の正規化に従い、depth 3 の symmetric multiple Eisenstein series に付随する二つの構造を調べる。線形 shuffle 関係による形式的商の weight k の次元は $\binom{\lfloor k/2 \rfloor}{2}$ である。偶数 $k \geq 10$ に対し、すべての添字が 2 以上である 6 項の全置換和が張る空間は $M_k^{\mathbb{Q}} \oplus A_2 M_{k-2}^{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q} A_2^2 A_{k-4}$ に等しく、次元は $\lfloor k/6 \rfloor + 2$ となる。この空間の明示的基底と、全関係を判定する多項式写像を与える。さらに、すべての偶数 $k \geq 18$ において、解析的には消えるが線形 shuffle 商では消えない関係を構成し、その非消滅を明示的な非零の pairing で証明する。証明は一般の weight に対して成立し、weight 60 までの有理数上の計算で検算する。解析的な depth 3 全体の次元は決定していない。特に未公開文献に関する新規性監査は不完全であり、先取権の主張は行わない。

このノートは chatGPT 6 が生成したものであり、岩井は数学的な検証を全く行っていません。そのため数学的な間違いがあるかもしれません。そのため注意深く読んでください。

J.1. 序論

J.1.1. **背景.** 指定された形式的モデルの関係が、その解析的実現の関係をすべて説明するかが自然な問題である。ここでは両者を異なる問題として扱う。すなわち、symmetric triple 全体の解析的空間、全置換和の解析的部分空間、および形式的な triple の記号を線形 shuffle 関係で割った空間を区別する。

J.1.2. **既知の結果.** 出発点は [HST26] の 43 ページの PDF、arXiv:2601.13626v1 である。2026 年 9 月 10 日に確認した arXiv の履歴では、この版が最新版として表示されていた。同論文の Proposition 3.9 は線形 shuffle 関係、Theorem 1.2 は depth 2 の構造を与える。Lemma 6.5 と Theorem 1.1 の証明では、偶数 $k \geq 10$ について $M_k^{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q} D A_{k-2}$ が symmetric triple の空間に含まれる。ここで $D = q d/dq$ 、偶数 r に対し $A_r = \tilde{G}_r^{\text{II}}$ とする。

J.1.3. **主結果.** 形式的次元の結果は定理 J.4.1、解析的な部分空間の完全な決定は定理 J.4.2 である。定理 J.4.3 は、線形 shuffle 関係だけでは完全でないことを示す無限族の障害を与える。この主張の対象は明確に指定した関係空間であり、既知の stuffle、Fay、微分、modular な関係をすべて加えても不完全だと主張するものではない。

J.1.4. **Known result versus new result.**

既知の結果	本稿で証明する結果（先取権は未確認）
線形 shuffle と weight 16 までの depth 3 の計算値 [HST26, Table 4]	全 weight の形式的次元と平行移動不変な自由 Lie 代数による記述。
triple 全体への modular forms の包含	全置換和の部分空間の等式による決定と非 modular な成分の記述。
収束する添字の stuffle 恒等式	すべての偶数 weight 18 以上で線形 shuffle 商に残る明示的な関係。
準モジュラー形式の多項式構造	指定した symmetric triple の部分空間における完全な多項式 kernel 判定と明示的基底。

以下で使う全置換和の恒等式自体は、stuffle から従う古典的な対称和公式であり、新しい恒等式ではない。定理 J.4.2 の証明で A_k を取り出す部分は [HST26, Lemma 6.5] の仕組みに従う。この取り出しを独立した新発見とは数えない。それに加える主張は、部分空間の完全な決定と、全 weight にわたる非所属の証明書である。

J.1.5. 証明の方針. 形式的問題では、三つの間隙の変数を、和が零の四つの変数に置き換える。すると線形 shuffle は tensor length 4 の通常の alternality に変換される。Poincaré–Birkhoff–Witt 恒等式から Hilbert 級数を計算する。解析的問題では、有限格子上の和を格子点の一致の仕方によって分割し、その後で指定された反復極限を取る。最後に特定の length 4 の Lie 多項式から、すべての線形 shuffle 関係を消す一方で、定理 J.4.3 の解析的関係を検出する線形汎関数を構成する。

J.2. SYMMETRIC MULTIPLE EISENSTEIN SERIES

J.2.1. 定義と規約. ベクトル空間と関係の係数はすべて $\mathbb{Q}$ 上で考える。 $q = e^{2\pi i\tau}$ 、 $\Im\tau > 0$ とし、添字は増加する順序を採用する：

$$\zeta(k_1, \dots, k_d) = \sum_{0 < n_1 < \dots < n_d} n_1^{-k_1} \dots n_d^{-k_d}, \quad k_d \geq 2.$$

$M_m^{\mathbb{Q}}$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上の weight m の正則 modular forms のうち、Fourier 係数が有理数であるものの空間を表す。 $\mathbb{Q}\langle e_0, e_1 \rangle$ において $e_r = e_1 e_0^{r-1}$ とし、 Π は二つの文字からなる語の通常の shuffle 積とする。格子の順序は $m\tau + n > 0$ が $m > 0$ または $m = 0, n > 0$ と同値になるように定める。[HST26, Theorem 2.7] の shuffle 正則化 G_k^{Π} をそのまま用い、

$$(J.2.1) \quad G_{k_1, \dots, k_d}^{\Pi, S} = \sum_{j=0}^d (-1)^{k_{j+1} + \dots + k_d} G_{k_1, \dots, k_j}^{\Pi} G_{k_d, \dots, k_{j+1}}^{\Pi}, \quad \tilde{G}_k^{\Pi, S} = (2\pi i)^{-\mathrm{wt}(k)} G_k^{\Pi, S}$$

と置く。空の添字の値は 1 である。正規化した triple 全体の空間を、[HST26, §6.3] に従い $\mathcal{TE}_k^S$ と書く。

J.2.2. 正則化. すべての添字が 2 以上なら、 G^{Π} は正の格子点上の和について、整数方向の上限 $N \rightarrow \infty$ を先に、 τ 方向の上限 $M \rightarrow \infty$ を後に取った極限に等しい。symmetric 版では [HST26, Definition 3.6, Proposition 3.7] の「正の部分の後に負の部分置く」順序を使う。すべての添字が 3 以上なら絶対収束するが、2 を含む場合にはこの極限規約を必要とする。

1 を含む添字には、引用した shuffle 正則化を用い、正則化していない格子和を代入しない。正確には、 $\zeta^{\Pi}(1) = 0$ を満たす正則化 zeta character と、正則化 divisor-sum

character の Goncharov coproduct による convolution がその構成である。特に G_1^{Π} は零ではなく、

$$(2\pi i)^{-1}G_1^{\Pi} = -\sum_{n \geq 1} \sigma_0(n)q^n$$

である。以下の解析的な証明では、1 を含む添字に無制限の stuffle 公式を適用しない。一方、形式的 shuffle 計算と $\mathcal{TE}_k^S$ の定義には 1 を含む添字も入っている。

偶数 $r \geq 2$ には $L_r = 2A_r = 2\tilde{G}_r^{\Pi}$ 、奇数 $r \geq 3$ には $L_r = 0$ と置く。すると

$$(J.2.2) \quad L_r = -\frac{B_r}{r!} + \frac{2}{(r-1)!} \sum_{n \geq 1} \sigma_{r-1}(n)q^n \quad (r: \text{偶数}), \quad \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{r \geq 0} B_r \frac{t^r}{r!}.$$

ここで $\sigma_j(n) = \sum_{d|n} d^j$ である。したがって、定数項を 1 とする通常の Eisenstein 級数 E_r を用いると $A_2 = -E_2/24$ 、 $A_4 = E_4/1440$ 、 $A_6 = -E_6/60480$ となる。weight 2 の符号に注意する。

J.2.3. 線形 shuffle 関係. F_k を $a, b, c \geq 1$ 、 $a + b + c = k$ なる $[a, b, c]$ を基底とする空間とする。 $\mathcal{R}_k^{\text{LS}}$ は次の式が生成する部分空間である：

$$(J.2.3) \quad [e_{k_1, \dots, k_j} \Pi e_{k_{j+1}, \dots, k_3}] - (-1)^{k_{j+1} + \dots + k_3} [k_1, \dots, k_j, k_3, \dots, k_{j+1}], \quad j = 0, 1, 2.$$

括弧は depth 3 の語に線形に拡張する。解析的評価 $\text{ev}_k([a, b, c]) = \tilde{G}_{a,b,c}^{\Pi,S}$ は $\mathcal{R}_k^{\text{LS}}$ を消す。

$F_k/\mathcal{R}_k^{\text{LS}}$ の双対は $\text{LSh}_{k-3}^{(3)}$ である。具体的には $w = k - 3$ としたとき、次を満たす次数 w の斉次多項式 $f(x, y, z)$ の空間である：

$$(J.2.4) \quad f(x, y, z) = -f(-z, -y, -x),$$

$$(J.2.5) \quad f(x, x+y, x+z) + f(y, x+y, x+z) + f(y, z, x+z) = f(x, -z, -y),$$

$$(J.2.6) \quad f(x, y, y+z) + f(x, x+z, y+z) + f(z, x+z, y+z) = -f(x, y, -z).$$

pairing は係数抽出 $\langle [a, b, c], f \rangle = [x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}]f$ で定義する。

J.2.4. 既知の depth 2 の結果. 比較のために述べると、正規化された depth 2 の空間は、偶数 $k \geq 6$ では $M_k^{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}DA_{k-2}$ であり、奇数 $k \geq 3$ では $\{\tilde{G}_{j,k-j}^{\Pi,S} : 1 \leq j \leq \lfloor k/3 \rfloor\}$ が基底である [HST26, Theorem 1.2]。この結果は depth 3 の次元を決定するものではない。

J.3. 厳密計算と反例検査

J.3.1. アルゴリズムと対象範囲. コードは (J.2.4)–(J.2.6) の三つの変数変換を整数の二項係数で展開する。得られる整数行列は $3\binom{k-1}{2}$ 行、 $\binom{k-1}{2}$ 列である。行 rank が $\dim \mathcal{R}_k^{\text{LS}}$ 、nullity が形式的商の次元となる。1 を含むすべての composition を計算対象とする。

$a, b, c \geq 2$ に対し、6 項の和

$$(J.3.1) \quad C_{a,b,c} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \tilde{G}_{k_{\sigma(1)}, k_{\sigma(2)}, k_{\sigma(3)}}^{\Pi,S}, \quad (k_1, k_2, k_3) = (a, b, c),$$

$$\mathcal{W}_k = \text{Span}_{\mathbb{Q}}\{C_{a,b,c} : a, b, c \geq 2, a + b + c = k\}$$

を定義する。同じ置換結果も重複して数えるため、 $C_{a,a,a} = 6\tilde{G}_{a,a,a}^{\Pi,S}$ である。以下で証明する恒等式は

$$(J.3.2) \quad C_{a,b,c} = L_a L_b L_c - L_{a+b} L_c - L_{a+c} L_b - L_{b+c} L_a + 2L_k$$

である。(J.2.2) の約数和と有理数上の convolution により、この部分空間全体を計算できる。これは実際の有理 Fourier 係数であり、未知の奇数 zeta 値を便宜的に特殊化したものではない。

J.3.2. Rank と kernel の計算. 最初の範囲を $3 \leq k \leq 30$ 、それとは別の検証範囲を $31 \leq k \leq 60$ とした。すべての形式的 rank は定理 J.4.1 と一致する。全置換和については $3 \leq k \leq 60$ の全範囲で q^0 から q^{40} までの係数を使用した。(J.6.5) による独立な多項式計算でも同じ解析的次元を得た。kernel のファイルには、各偶数 $10 \leq k \leq 60$ に対し、非 pivot 列で添字付けた基底を記録した。形式的商における parity sector の像の rank は weight 16 まで、解析的な全偶数および二つの奇数を持つ全置換和 sector の rank は weight 60 まで計算した。データでは、これら異なる rank のどれを報告しているかを明示している。

J.3.3. 構造の候補と実装の検証. 原論文 Table 4 の depth 3 の行を厳密に再現した。weight 4 の式 $\tilde{G}_{2,2}^{II,S} = 4A_4 - DA_2$ は q^{24} まで再現した。有限個の有理数を順序付けた格子和でも、weight 6 から 16 までのすべての unordered triple について (J.3.2) を独立に検証した。これらの計算から定理 J.4.1、J.4.2 の Hilbert 級数と解析的構造を検討したが、一般証明は有限計算を根拠としない。

J.3.4. 反例探索と限界. weight 12 ですでに $C_{2,3,7} = C_{2,5,5}$ という関係が現れる。対応する形式的な類を調べることで定理 J.4.3 の無限族を得た。その係数による証明書は、18 から 60 までのすべての偶数 weight で、shuffle 行列の全行に対して検査した。検査範囲内では本稿の定理への反例は見つからなかった。

個々の triple 全体について、MZV を係数環とする Fourier 行列は実装していない。そのため $\mathcal{TE}_k^S$ の解析的 rank は報告しない。形式的な特殊化の有理 rank だけでは、そのような主張は正当化できない。全体の解析的 kernel に残る未説明の関係の数は未決定である。これに対し、 $\mathcal{W}_k$ については以下の多項式 kernel が全関係を与える。

J.4. 主定理

Theorem J.4.1 (形式的な depth 3 の構造). すべての $k \geq 3$ に対し、

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F}_k/\mathcal{R}_k^{\text{LS}}) = \dim_{\mathbb{Q}} \text{LSh}_{k-3}^{(3)} = \binom{\lfloor k/2 \rfloor}{2}, \quad \sum_{w \geq 0} \dim \text{LSh}_w^{(3)} t^w = \frac{t(1+t)}{(1-t^2)^3}.$$

$\text{LSh}_w^{(3)}$ は、証明中の座標写像により、四変数の次数 w の平行移動不変な *alternat* 多項式の空間と標準的に同型になる。特に $\dim \mathcal{TE}_k^S \leq \binom{\lfloor k/2 \rfloor}{2}$ である。

Theorem J.4.2 (全置換和の部分空間の完全な決定). すべての偶数 $k \geq 10$ に対し、

$$(J.4.1) \quad \mathcal{W}_k = M_k^{\mathbb{Q}} \oplus A_2 M_{k-2}^{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q} A_2^2 A_{k-4}, \quad \dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{W}_k = \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor + 2.$$

奇数 k では $\mathcal{W}_k = 0$ である。残る低 *weight* の非零な場合は $\mathcal{W}_6 = \mathbb{Q} C_{2,2,2}$ と $\mathcal{W}_8 = \mathbb{Q} C_{2,2,4} \oplus \mathbb{Q} C_{2,3,3}$ である。全置換和の明示的な組合せによる基底を §J.6.1 で与える。

Theorem J.4.3 (線形 shuffle の完全性の一様な破れ). 任意の偶数 $k \geq 18$ に対し $c = k - 10$ とし、

$$r_k = C_{3,7,c} - C_{5,5,c} \in \mathcal{F}_k, \quad C_{a,b,c} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} [k_{\sigma(1)}, k_{\sigma(2)}, k_{\sigma(3)}]$$

と置く。このとき $\text{ev}_k(r_k) = 0$ だが $r_k \notin \mathcal{R}_k^{\text{LS}}$ である。さらに、明示的な $f_k \in \text{LSh}_{k-3}^{(3)}$ であって

$$(J.4.2) \quad \langle r_k, f_k \rangle = 2 \left\{ \binom{k-7}{6} - \binom{k-7}{4} \right\} = \frac{(k-17)(k-6)}{15} \binom{k-7}{4} > 0$$

を満たすものが存在する。したがって、これらすべての *weight* で $\ker \text{ev}_k / \mathcal{R}_k^{\text{LS}} \neq 0$ となる。この障害は、すべての添字が 2 以上の全置換和の記号が生成する形式的部分空間の中にも存在する。定理 J.4.1 と合わせると、無条件の真に小さい上界

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{TE}_k^S \leq \binom{k/2}{2} - 1 \quad (k \geq 18: \text{偶数})$$

も得られる。

J.5. 証明

J.5.1. 線形 shuffle から四変数の Lie 多項式へ. 多項式 $H(x_1, x_2, x_3, x_4)$ が *alternat* であるとは、 $j = 1, 2, 3$ の各 $(j, 4-j)$ shuffle で引数を置換した和が零になることをいう。各 block の内部の順序は保つ。また平行移動不変とは $H(x_1 + u, \dots, x_4 + u) = H(x_1, \dots, x_4)$ が成立することである。

Lemma J.5.1. 写像

$$(J.5.1) \quad \beta(H)(x, y, z) = H(-x, x - y, y - z, z)$$

は、平行移動不変な *alternat* 多項式の空間から $\text{LSh}^{(3)}$ への同型である。平行移動不変性を課さない全 *alternat* 多項式上では、その次数 w の *kernel* は $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \mathcal{A}_{w-1}$ である。ここで $\mathcal{A}_w$ は次数 w の *alternat* 多項式の空間を表す。

証明. この代入は超平面 $\sum x_i = 0$ をパラメータ付けする。その超平面上の多項式は一意に平行移動不変な多項式へ持ち上がる。具体的には $s = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4$ 、 $z_i = x_i - s$ と置き、

$$H(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(-z_1, -z_1 - z_2, z_2, z_4)$$

とすればよい。したがって座標写像とその逆はともに $\mathbb{Q}$ 上で定義される。

$H(abcd) = H(a, b, c, d)$ と略記し、 $S(a; b, c, d) = H(abcd) + H(bacd) + H(bcda) + H(dacb)$ と置く。 $a + b + c + d = 0$ 上で $x = -a$ 、 $y = -b$ 、 $z = -b - c$ とすると、 S の四つの項は

$$f(x, x + y, x + z), \quad f(y, x + y, x + z), \quad f(y, z, x + z), \quad f(y, z, -x)$$

になる。(J.2.4) により最後の項は $-f(x, -z, -y)$ に等しい。 H の reversal はちょうど (J.2.4) である。従って (J.2.4) と (J.2.5) から、 H は reversal で符号を変え、(1, 3) shuffle の和が零になる。

これらの条件から、残る (2, 2) shuffle も従う。その 6 項を

$$H(1234) + H(1324) + H(1342) + H(3124) + H(3142) + H(3412)$$

と書く。この式は $S(1; 3, 2, 4) + S(1; 3, 4, 2) + S(4; 1, 2, 3)$ と、 $H(abcd) + H(dcba)$ という形の三つの和を除いて等しいため、零になる。reversal によって (3, 1) shuffle も従う。逆に *alternat*ity は tensor length 4 の primitive 元に対する antipode 恒等式から reversal を与える。実際、この antipode は四文字を反転し、primitive 元に

対しては -1 倍として作用する。そこから $(1, 3)$ shuffle が (J.2.5) を与える。 $(3, 1)$ shuffle に $(-x, x - y, y - z, z)$ を代入すると

$$f(x, y, z) + f(x, y, y - z) + f(x, x - z, y - z) + f(-z, x - z, y - z) = 0$$

となる。これは (J.2.6) の第三変数を $-z$ に置き換えた式である。平行移動不変性により、超平面上のこれらの等式は四変数全体の等式へ拡張される。以上で同型を示した。

kernel については、超平面上で消えることと $\sum x_i$ で割り切れることが同値である。この対称な一次式で割っても shuffle 方程式は保たれる。実際、商の shuffle の和に $\sum x_i$ を掛けた式が多項式環で零となり、多項式環は整域だから商の和も零になる。これで kernel を完全に決定した。□

定理 J.4.1 を完成させるため、tensor $Y_{n_1} \cdots Y_{n_4}$ を $x_1^{n_1} \cdots x_4^{n_4}$ と同一視する。 $Y_0, Y_1, \dots$ は次数がそれぞれ n 、tensor length が 1 の自由生成元である。primitive 元の判定法により、alternating 多項式はこの自由 Lie 代数の length 4 の部分に対応する。この判定法と PBW は標準的な自由 Lie 代数の事実である [Reu93]。tensor length r の次数に関する級数を $a_r(t)$ と書く。これらの生成元上の tensor 代数の級数は $1/(1 - z/(1 - t))$ である。PBW の積公式の対数から

$$\frac{1}{4(1-t)^4} = a_4(t) + \frac{1}{2}a_2(t^2) + \frac{1}{4}a_1(t^4),$$

$$a_1(t) = \frac{1}{1-t}, \quad a_2(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{1-t^2} \right)$$

を得る。したがって

$$a_4(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(1-t)^4} - \frac{1}{(1-t^2)^2} \right).$$

別の言い方では、alternating 多項式を $s = \sum x_i/4$ の多項式として展開すると、置換が s を固定するため $\mathcal{A} = \mathbb{Q}[s] \otimes \mathcal{A}^{\text{tr}}$ となる。よって平行移動不変な部分の Hilbert 級数は

$$(1-t)a_4(t) = \frac{t(1+t)}{(1-t^2)^3}$$

である。 $w = 2m + 1$ と $w = 2m + 2$ の係数はともに $\binom{m+2}{2}$ 、定数項は零である。 $w = k - 3$ を代入して定理が従う。

J.5.2. 解析的部分空間の定理の証明. まず (J.3.2) を有限個の非零格子点の全順序集合上で示す。三つの single sum の積を、三点がすべて異なる場合、ちょうど二点が等しい三つの場合、および三点がすべて等しい場合に分割する。6 個の順序付きの和は、三点がすべて異なる場合を数える。三つの pair-contraction の積を引くと、三点が等しい場合を三回引くことになるため、最後に二回足す。この計算が (J.3.2) そのものである。対称な順序を備えた有限格子長方形について、 $N \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty$ の順に極限を取る。添字は 2 以上なので、各順序付きの和と各 single sum は指定した極限を持ち、積の個数も有限である。無限和の交換を行わずに恒等式が極限へ移る。総 weight が奇数なら右辺の各項に奇数 weight の因子が存在するので零になる。

以下、 $k \geq 10$ は偶数とする。(J.3.2) から $\mathcal{W}_k$ が (J.4.1) の右辺に含まれる。二つの添字が奇数なら、偶数 Eisenstein 級数二つの積と一つの級数に帰着する。三つが偶数なら、偶数級数の高々三つの積となる。 $k \geq 10$ なので、三つの積の中に A_2 は高々二つしか現れない。残る場合は $M_k^{\mathbb{Q}}$ または $A_2 M_{k-2}^{\mathbb{Q}}$ に属する。

逆の包含を示す。 $r, s \geq 3$ が奇数、 $t \geq 2$ が偶数なら

$$(J.5.2) \quad C_{r,s,t} = 4(A_k - A_{r+s}A_t).$$

$a + b = k$ 、 $a, b \geq 2$ なる任意の偶数の組では、少なくとも一方は6以上である。その一方を $3 + (a - 3)$ と分ければ $A_a A_b \equiv A_k \pmod{\mathcal{W}_k}$ を得る。また weight 8 の modular 恒等式、または §J.6.2 の漸化式から $A_4^2 = \frac{7}{6}A_8$ である。(J.3.2) に $(4, 4, k-8)$ を代入すると

$$C_{4,4,k-8} = \frac{16}{3}A_8A_{k-8} - 8A_4A_{k-4} + 4A_k \equiv \frac{4}{3}A_k \pmod{\mathcal{W}_k}.$$

従って $A_k \in \mathcal{W}_k$ であり、次にすべての積 $A_a A_b$ も $\mathcal{W}_k$ に属する。(J.3.2) を $A_a A_b A_c$ について解けば、偶数 weight の single series 三つの総 weight k の積もすべて含まれる。

[HST15, Corollary 2, arXiv v1] の modular product basis により、 A_k と、両方の添字が4以上の積は $M_k^{\mathbb{Q}}$ を張る。これを weight $k-2$ に適用すると、得られた二つまたは三つの積は $A_2 M_{k-2}^{\mathbb{Q}}$ も張る。 $A_2^2 A_{k-4}$ も含まれるため、空間の等式が従う。

直和性には [KZ95, Proposition 1(b)] を使えるが、直接にも次のように示せる。 A_2 の変換公式は

$$A_2(\gamma\tau) = (c\tau + d)^2 A_2(\tau) - \frac{c(c\tau + d)}{4\pi i}$$

である。 f_p が weight $k - 2p$ の modular form であり、 $\sum_{p=0}^2 A_2^p f_p = 0$ とする。 $\gamma_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$ を適用し、 $(m\tau + 1)^k$ で割る。各 τ を固定すると、得られた $m/(m\tau + 1)$ の多項式は無限個の相異なる値で零になる。最高次の係数から $f_2 = 0$ 、続いて $f_1 = f_0 = 0$ を得る。次元は $m(k) + m(k-2) + 1$ であり、

$$m(k) = \lfloor k/12 \rfloor + 1 - \mathbf{1}_{k \equiv 2 \pmod{12}} \quad (k \geq 4: \text{偶数})$$

である。modulo 12 の六つの偶数剰余類を確認すると $\lfloor k/6 \rfloor + 2$ となる。weight 6 と 8 には unordered triple がそれぞれ一つと二つしかなく、§8 の多項式表示により主張された独立性が従う。

J.5.3. 無限族の障害の証明. (J.5.2) から共通の解析的な値

$$C_{3,7,c} = C_{5,5,c} = 4(A_k - A_{10}A_c)$$

を得る。この等式自体は stuffle の帰結である。以下では、その差が線形 shuffle の帰結ではないことを示す。

$N = k - 7 = c + 3$ と置く。これは 11 以上の奇数である。自由 Lie 代数の元

$$P_N = [Y_0, [Y_2, [Y_2, Y_N]]]$$

を考える。対応する多項式は

$$\begin{aligned} H_N = & x_2^2 x_3^2 x_4^N - 2x_2^2 x_3^N x_4^2 + x_2^N x_3^2 x_4^2 \\ & - x_1^2 x_2^2 x_3^N + 2x_1^2 x_2^N x_3^2 - x_1^N x_2^2 x_3^2. \end{aligned}$$

これは alternal なので、補題 J.5.1 によって $f_k = H_N(-x, x - y, y - z, z) \in \text{LSh}_{k-3}^{(3)}$ となる。その次数は $N + 4 = k - 3$ である。

検算を完全に記述するため、 $B_j = \binom{N}{j}$ と置く。上記6項に座標代入したものと二つの全置換和の記号との pairing は次の表になる。同じ添字が現れる場合の置換の重複も含んでいる。

項	$\langle C_{3,7,c}, \cdot \rangle$	$\langle C_{5,5,c}, \cdot \rangle$
1	0	0
2	$2(B_6 - B_4)$	0
3	$B_4 - B_6$	0
4	$B_4 - B_6$	0
5	$2(B_6 - B_4)$	0
6	0	0

この表は、 $(-x)^a(x-y)^b(y-z)^cz^d$ の $x^A y^B z^C$ の係数が

$$(J.5.3) \quad (-1)^{a+b-j+c-l} \binom{b}{j} \binom{c}{l}, \quad j = A - a, \quad l = B - b + j$$

になることから確認できる。ただし $0 \leq j \leq b$, $0 \leq l \leq c$, $c - l + d = C$ が必要であり、満たさない場合は零とする。これを $(2, 6, c-1)$ と $(4, 4, c-1)$ の各 6 置換に適用する。 $N > \max\{6, c-1\}$ なので第一項と第六項は零になる。同じ添字を持つ orbit では、第三項と第四項の中の寄与が $\binom{N}{c-1} = \binom{N}{4}$ によってそれぞれ相殺する。それ以外の項は三つの指数を同時に供給できない。これで表の全成分と符号が確認できる。

総和は $2(B_6 - B_4)$ であり、

$$2(B_6 - B_4) = \frac{(N-10)(N+1)}{15} \binom{N}{4} > 0$$

となる。 $\mathcal{R}_k^{\text{LS}}$ のすべての元は f_k と pairing すると零になるが、 r_k は零にならない。これにより rank の有限計算に依存せず、定理 J.4.3 が従う。

J.6. 明示的基底と完全な多項式関係

J.6.1. 全置換和の組合せによる基底. 偶数 $k \geq 10$ に対し、

$$(J.6.1) \quad U_k = \frac{3}{4}C_{4,4,k-8} + C_{3,5,k-8} - \frac{3}{2}C_{3,k-7,4},$$

$$(J.6.2) \quad V_{a,b} = U_k - \frac{1}{4}C_{3,u-3,v}, \quad u = \max(a, b), \quad v = \min(a, b), \quad a + b = k,$$

$$(J.6.3) \quad T_{a,b,c} = \frac{1}{8}C_{a,b,c} + \frac{1}{2}(V_{a+b,c} + V_{a+c,b} + V_{b+c,a}) - \frac{1}{2}U_k$$

と定める。ここで V, T の添字は 2 以上の偶数である。前節の証明から $U_k = A_k$ 、 $V_{a,b} = A_a A_b$ 、 $T_{a,b,c} = A_a A_b A_c$ が厳密に従う。右辺の orbit の添字は $k = 10$ の場合を含めてすべて 2 以上である。

$$J_m = \{j \in \mathbb{Z} : \lfloor (m-2)/6 \rfloor + 2 \leq j \leq \lfloor m/4 \rfloor\}$$

と置く。このとき $\mathcal{W}_k$ の明示的基底は

$$(J.6.4) \quad \{U_k\} \cup \{V_{2j,k-2j} : j \in J_k\} \cup \{V_{2,k-2}\} \cup \{T_{2,2j,k-2-2j} : j \in J_{k-2}\} \cup \{T_{2,2,k-4}\}$$

で与えられる。最初の二つの集合は modular product basis、次の二つは weight $k-2$ のその基底に A_2 を掛けたもの、最後は (J.4.1) の最後の直和成分を張る元である。直和性から独立性が従う。これは triple の明示的な線形結合による基底であり、各基底元が個々の triple そのものであると主張しているわけではない。

J.6.2. Kernel の完全な判定. P_k を $2 \leq a \leq b \leq c$, $a + b + c = k$ なる unordered triple を基底とし、 $C_{a,b,c}$ に評価する空間とする。 $\deg X = 2, \deg Y = 4, \deg Z = 6$ の重み付き次数で斉次な多項式を、 $P_2 = X, P_4 = Y, P_6 = Z$ 、奇数 $r \geq 3$ に対して $P_r = 0$ 、さらに

(J.6.5)

$$P_{2m} = \frac{3}{(m-3)(2m-1)(2m+1)} \sum_{r=2}^{m-2} (2r-1)(2m-2r-1)P_{2r}P_{2m-2r}, \quad m \geq 4$$

で定める。明示的な線形写像を

$$(J.6.6) \quad \Psi_k([a, b, c]) = P_a P_b P_c - P_{a+b} P_c - P_{a+c} P_b - P_{b+c} P_a + 2P_k$$

で定義する。

Proposition J.6.1. P_k 上の評価の kernel は正確に $\ker \Psi_k$ である。偶数 $k \geq 10$ ではその次元は

$$\left\lfloor \frac{(k-3)^2 + 3}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor - 2$$

となる。従って (J.6.6) の有限個の単項式の係数を比較する条件は、この部分空間における関係を判定する完全な有理線形条件を与える。

証明. 通常の格子の展開 $\wp(z) = z^{-2} + \sum_{n \geq 1} (2n+1)G_{2n+2}^{\text{lat}} z^{2n}$ と方程式 $\wp'' = 6\wp^2 - g_2/2$ の z^{2m-4} の係数を、 $m \geq 4$ について比較する。すると

$$(2m-6)(2m-1)(2m+1)G_{2m}^{\text{lat}} = 6 \sum_{r=2}^{m-2} (2r-1)(2m-2r-1)G_{2r}^{\text{lat}} G_{2m-2r}^{\text{lat}}$$

を得る。 $(2\pi i)^{2m}$ で正規化すると、 L_{2m} に対する (J.6.5) が従う。weight 4 と 6 の級数が初期値であり、 L_2 は別に扱う。従って解析的評価は、 Ψ_k と $(X, Y, Z) \mapsto (L_2, L_4, L_6)$ の合成に分解する。

後者は weight k の多項式上で単射である。まず、modular な係数を持つ L_2 の冪は、前節の変換公式による議論で独立である。modular weight を固定したとき $L_4^a L_6^b$ 間に関係があれば、共通因子を除くことで L_6^2/L_4^3 に関する多項式関係を得る。この関数は定数項と第一 Fourier 係数から非定数だと分かるので、そのような関係は存在しない。これで kernel の等式が従う。unordered triple の個数は $1/((1-t)(1-t^2)(1-t^3))$ の t^{k-6} の係数であり、 $\lfloor ((k-3)^2+3)/12 \rfloor$ に等しい。同じ個数は $\sum_{a=2}^{\lfloor k/3 \rfloor} (\lfloor (k-a)/2 \rfloor - a + 1)$ を計算しても得られる。定理 J.4.2 の次元を引けばよい。□

保存した nullspace の基底の独立性は明確である。各関係は対応する非 pivot 列で係数 1 を持ち、他の非 pivot 列の係数はすべて零である。従って計算された kernel 全体の基底になる。任意の weight で (J.6.6) は同じ手続を与え、有限回で停止することも証明されている。準モジュラー形式の Sturm bound を仮定してはいない。

J.7. SYMMETRIC MULTIPLE ZETA VALUES への帰結

(J.2.1) の定数項は shuffle symmetric な実 MZV $\zeta^{\Pi, S}(\mathbf{k})$ である。偶数 $r \geq 2$ に対して $\ell_r = -B_r/r!$ 、奇数 $r \geq 3$ に対して $\ell_r = 0$ と置く。(J.3.2) の定数項を取ると

$$(J.7.1) \quad \frac{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \zeta^{\Pi, S}(k_{\sigma(1)}, k_{\sigma(2)}, k_{\sigma(3)})}{(2\pi i)^k} = \ell_a \ell_b \ell_c - \ell_{a+b} \ell_c - \ell_{a+c} \ell_b - \ell_{b+c} \ell_a + 2\ell_k$$

を得る。特に、すべての偶数 $c \geq 8$ に対して

$$\sum_{\sigma} \zeta^{\mathbb{L},S}(\sigma(3, 7, c)) - \sum_{\sigma} \zeta^{\mathbb{L},S}(\sigma(5, 5, c)) = 0$$

である。これは実 MZV の代数 $\mathcal{Z}$ における厳密な等式である。既知の型の対称和の帰結であり、新しい MZV 恒等式とは主張しない。 $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ への像も零になる。この商は正規化を戻した後取るべきものであり、 $2\pi i$ の冪を商環に添加しているわけではない。通常の MZV と finite MZV の区別は [Kan19] も参照されたい。Kaneko–Zagier 予想は使わず、finite MZV との同一視も行わない。

J.8. 例と境界の場合

$X = L_2, Y = L_4, Z = L_6$ と書くと、低 weight の元は

$$C_{2,2,2} = X^3 - 3XY + 2Z, \quad C_{2,2,4} = X^2Y - 2XZ - \frac{1}{7}Y^2, \quad C_{2,3,3} = -XZ + \frac{6}{7}Y^2$$

となる。これらから weight 6, 8 の次元 1, 2 が従う。weight 10 は 4 個の unordered generator とただ一つの関係

$$C_{3,3,4} + C_{2,3,5} + \frac{3}{4}C_{2,4,4} = 0$$

を持つ。例えば $\{C_{2,2,6}, C_{2,3,5}, C_{2,4,4}\}$ は基底である。weight 12 では 7 個の生成元の次元は 4、weight 60 では 271 個の生成元の次元は 12、kernel の次元は 259 である。

形式的問題では $F_3/\mathcal{R}_3^{\text{LS}} = 0$ 、weight 4, 5 の次元はともに 1 である。これらは正則化された添字を含む主張であり、その添字を削除して得られる結果ではない。障害の pairing の値は $k = 18$ で 264、 $k = 20$ で 2002 である。

J.9. 新規性監査と正確な限界

検索は 2026 年 9 月 10 日までを対象とした。出発点の論文の PDF は証明と参考文献を含めて確認し、arXiv の abstract ページには v1 のみが掲載されていた。主な比較対象は [BT18, Mat17, Bro20, Anz25, BIM24, Kan25, BK26, BY26] と、古典的な modular および shuffle の文献 [GKZ06, KZ95, HST15, Reu93] である。[Mat17] の elliptic length 2/Fay の設定や、[Bro20] の motivic depth-graded な設定では評価写像が異なる。[Anz25] の scheme は追加の adjoint stuffle 条件を課す。[BY26] の Schur basis は準モジュラー形式の別の族を対象にする。これらの結論を、解析的な triple 全体の rank に置き換えてはいない。

候補定理からの逆向き検索では “linear shuffle space”、“depth three dimension”、“translation invariant alternal”、“permutation sums symmetric Eisenstein”、“linear shuffle incomplete”、および添字 $(3, 7, c)$ 、 $(5, 5, c)$ を用いた。2025–2026 年の multiple Eisenstein series とその微分に関する論文も検索した。周辺文献 [BR26] は重複確認のためだけに調べ、研究対象にも証明の入力にもしていない。その参考文献から adjoint の文献にも進んだ。確認できた文献には本稿の明示的な非所属の証明書を述べたものは見つからなかった。しかし検索で見つからないことは、先取権の証明ではない。

特に未公開の Kaneko–Zagier の preprint と、[BR26] が引用する 2025 年の修士論文については、本作業で完全な本文比較を行えなかった。被引用文献の探索および書誌情報へのアクセスも網羅的ではない。We have not been able to verify novelty completely. 形式的次元は、以前の自由 Lie 代数による記述に暗に含まれている可能性がある。解析的部分空間の結果は古典的な素材と [HST26] の取り出しの議論の精密化から得られる。従って本稿は、証明済みの構造結果と明示的な障害を記録する

ものであり、確認済みの最初の証明や、depth 3 全体の問題の解決を宣言するものではない。

有限 Fourier 検査の論理的役割も限定する。打切り係数の列が独立なら関数も独立である。関数の関係はすべての係数の関係を強制するからである。しかし逆は一般には成立しない。ここでは一般次元定理が上界を与え、打切り rank と上界の一致によって、保存した kernel が実際の kernel であることが従う。浮動小数点 rank、PSLQ、予想に依存する MZV の独立性は使用していない。

APPENDIX J.A. 厳密な計算データ

第一の表は候補検討用、第二の表は別枠の検証用である。 g は正の composition 全体の個数、 r は線形 shuffle 関係行列の rank、 $d_F = g - r$ である。解析的な全置換和の部分空間について、 h は添字が 2 以上の unordered triple の個数、 d_W は係数行列でも認証された証明済みの次元、 $h - d_W$ は kernel の次元である。奇数 weight の全置換和は零になる。

Table 3: 発見に用いた範囲：weight 3–30。

k	g	r	d_F	h	d_W	$h - d_W$
3	1	1	0	0	0	0
4	3	2	1	0	0	0
5	6	5	1	0	0	0
6	10	7	3	1	1	0
7	15	12	3	1	0	1
8	21	15	6	2	2	0
9	28	22	6	3	0	3
10	36	26	10	4	3	1
11	45	35	10	5	0	5
12	55	40	15	7	4	3
13	66	51	15	8	0	8
14	78	57	21	10	4	6
15	91	70	21	12	0	12
16	105	77	28	14	4	10
17	120	92	28	16	0	16
18	136	100	36	19	5	14
19	153	117	36	21	0	21
20	171	126	45	24	5	19
21	190	145	45	27	0	27
22	210	155	55	30	5	25
23	231	176	55	33	0	33
24	253	187	66	37	6	31
25	276	210	66	40	0	40
26	300	222	78	44	6	38
27	325	247	78	48	0	48
28	351	260	91	52	6	46
29	378	287	91	56	0	56
30	406	301	105	61	7	54

Table 4: 独立の検証範囲：weight 31–60。

k	g	r	d_F	h	d_W	$h - d_W$
31	435	330	105	65	0	65
32	465	345	120	70	7	63
33	496	376	120	75	0	75
34	528	392	136	80	7	73
35	561	425	136	85	0	85
36	595	442	153	91	8	83
37	630	477	153	96	0	96
38	666	495	171	102	8	94
39	703	532	171	108	0	108
40	741	551	190	114	8	106
41	780	590	190	120	0	120
42	820	610	210	127	9	118
43	861	651	210	133	0	133
44	903	672	231	140	9	131
45	946	715	231	147	0	147
46	990	737	253	154	9	145
47	1035	782	253	161	0	161
48	1081	805	276	169	10	159
49	1128	852	276	176	0	176
50	1176	876	300	184	10	174
51	1225	925	300	192	0	192
52	1275	950	325	200	10	190
53	1326	1001	325	208	0	208
54	1378	1027	351	217	11	206
55	1431	1080	351	225	0	225
56	1485	1107	378	234	11	223
57	1540	1162	378	243	0	243
58	1596	1190	406	252	11	241
59	1653	1247	406	261	0	261
60	1711	1276	435	271	12	259

APPENDIX J.B. アルゴリズムと再現方法

SymPy と python-flint を備えた Python で次を実行する：

```
python compute_symmetric_triples.py --formal-max 60 \
    --orbit-max 60 --q-order 40
```

`formal_matrix`、`orbit_expansion`、`eisenstein_polynomial`、`structural_checks` はそれぞれ二項係数による関係行列、有理 Fourier 展開、多項式の漸化式、明示的な障害の検査を実装する。補足アーカイブには初期範囲と検証範囲の形式的データ、`orbit` の rank と nullspace、多項式 rank、witness の値、および実装検証の記録を含めた。低 weight の形式的 parity 列は、形式的商における像の rank であり、解析的 parity rank ではない。

解析的な二つの独立検算には約数和の Fourier 公式と Weierstrass の多項式漸化式を使う。形式的 witness は行列方程式と直接の二項係数抽出の両方で検査する。原

典との照合には HST の weight 4 の恒等式と depth 3 の Table 4 を用いる。同論文序論の weight 12 の discriminant の表示は再現していない。そのためには、本実装が備えていない個々の triple の係数代数が必要になるからである。

添付テンプレートを preamble の出発点として用いた。不完全な title と以前の著者情報を置き換え、LuaTeX-ja と Xy-pic 用の LuaTeX 互換パッケージを加えた。利用できない任意の未使用 font・装飾 package には条件付きの読み込みを施した。数学用 macro、定理環境、およびページ寸法は保持した。添付 compile log は実際の LuaLaTeX 実行を記録したものであり、互換性の推測ではない。英語版と日本語版は同じ節番号構造を用い、E と J の接頭辞で区別する。数学的主張と証明は両言語に完全に記載している。

参考文献

- [HST26] T. Hara, K. Sakugawa and K. Tasaka, *Symmetric multiple Eisenstein series*, [arXiv:2601.13626v1](#) (2026). All numbered citations refer to the v1 PDF.
- [BT18] H. Bachmann and K. Tasaka, *The double shuffle relations for multiple Eisenstein series*, Nagoya Math. J. **230** (2018), 180–212; [arXiv:1501.03408](#).
- [HST15] M. Hirose, N. Sato and K. Tasaka, *Eisenstein series identities based on partial fraction decomposition*, Ramanujan J. **38** (2015), 455–463; [arXiv:1402.1585](#). The product basis cited here is Corollary 2 of arXiv v1.
- [KZ95] M. Kaneko and D. Zagier, *A generalized Jacobi theta function and quasimodular forms*, in *The Moduli Space of Curves*, Progr. Math. **129**, Birkhäuser, 1995, 165–172. [Author-hosted text](#).
- [GKZ06] H. Gangl, M. Kaneko and D. Zagier, *Double zeta values and modular forms*, in *Automorphic Forms and Zeta Functions*, World Scientific, 2006, 71–106. [Author-hosted text](#).
- [Kan19] M. Kaneko, *An introduction to classical and finite multiple zeta values*, Publ. Math. Besançon, Algèbre Théorie Nr. (2019), no. 1, 103–129. [Author-hosted text](#).
- [Mat17] N. Matthes, *Elliptic double zeta values*, J. Number Theory **171** (2017), 227–251; [arXiv:1509.08760](#).
- [Bro20] F. Brown, *Depth-graded motivic multiple zeta values*, [arXiv:1301.3053v2](#) (2020).
- [Reu93] C. Reutenauer, *Free Lie Algebras*, London Mathematical Society Monographs, New Series **7**, Clarendon Press, Oxford, 1993.
- [Anz25] T. Anzawa, *A Lie algebra associated with adjoint multiple zeta values*, [arXiv:2511.03177v2](#) (2025).
- [BIM24] H. Bachmann and J. W. van Ittersum, with an appendix by N. Matthes, *Formal multiple Eisenstein series and their derivations*, [arXiv:2312.04124v3](#) (2024).
- [Kan25] H. Kanno, *Shuffle regularization for multiple Eisenstein series of level N* , Ramanujan J. **67** (2025), article 95. [doi:10.1007/s11139-025-01136-0](#).
- [BK26] H. Bachmann and H. Kanno, *Relations and Derivatives of Multiple Eisenstein Series*, [arXiv:2602.08176v1](#) (2026).
- [BY26] H. Bachmann and J. Yu, *Schur Eisenstein series and Schur MacMahon series*, [arXiv:2607.27702v1](#) (2026).
- [BR26] H. Bachmann and Risan, *Formal finite multiple zeta values*, [arXiv:2608.15480](#) (2026). Consulted only for the overlap audit.