

# SPECTRAL CLUSTER MULTIPLICITIES FROM ALMOST GAUSSIAN EIGENFUNCTIONS ON RCD SPACES

chatGPT 6 Astra

ABSTRACT. Let  $X$  be a compact  $\text{RCD}^*(1, N)$  probability space,  $1 < N < \infty$ . We prove that  $k$  orthonormal eigenfunctions with eigenvalues in  $[1, 1 + \varepsilon]$  force at least  $\binom{k+n-1}{n}$  eigenvalues, counted with multiplicity, in  $[n - C\varepsilon^{1/2-\eta}, n + C\varepsilon^{1/2-\eta}]$ , for each prescribed finite range of degrees and  $0 < \eta < 1/2$ . The constants are independent of  $N$ . The proof controls the Gram matrix of multivariate Hermite polynomials and the residual on their entire span. We also prove that uniformity in  $k$  is impossible and that the first cluster cannot bound the multiplicity of the second cluster from above. Singular spherical quotients provide examples. This is a quantitative refinement of known Gaussian spectral stability arguments; priority for the multiplicity formulation requires further bibliographic verification.

This note was generated by ChatGPT 6. Iwai has NOT verified any of its mathematical content. It may therefore contain mathematical errors and should be read with caution. A Japanese version is provided below.

## 1. INTRODUCTION

Let  $(M, g, e^{-V} \text{vol}_g)$  be a complete connected smooth probability manifold without boundary. If  $\text{Ric}_g + \text{Hess } V \geq g$ , its weighted Laplacian is  $L = \Delta_g - \langle \nabla V, \nabla \cdot \rangle$ . An eigenfunction satisfying  $-Lf = f$  saturates the integrated Bochner inequality:  $\text{Hess } f = 0$  in  $L^2$ . Gaussian splitting is the associated rigidity phenomenon. Its nonsmooth form, including  $k$  Gaussian directions, is already established by Gigli–Ketterer–Kuwada–Ohta [GKKO20, Theorem 1.1]. On a Gaussian  $k$ -space, degree  $n$  Hermite polynomials form an eigenspace of dimension  $\binom{k+n-1}{n}$ . The question here is whether this spectral consequence survives a small defect, without first constructing an approximate metric splitting.

Bertrand–Fathi prove the existence of a spectral value near each integer from one almost extremal eigenfunction [BF21, Theorem 1.2]. They also explicitly discuss multivariate Gaussian approximation. Their Hermite construction is the starting point of this note. Fathi–Gentil–Serres subsequently improve the one-variable Gaussian  $W_1$  rate to  $\varepsilon \log(2/\varepsilon)$  [FGS24, Theorem 4.3]. We do not claim an improvement of that distributional rate. The additional conclusion sought here is a lower bound for the *rank of each spectral projection*. Separately constructed quasimodes can be linearly dependent, so scalar spectral proximity alone does not give this conclusion. In particular, applying the one-variable statement  $k$  times does not produce the binomial multiplicity.

---

*Date:* September 8, 2026.

*Key words and phrases.* Synthetic Ricci curvature, spectral multiplicity, Hermite polynomials, quantitative rigidity.

We work in the compact finite-dimensional RCD class. This ensures that eigenfunctions are bounded test functions and the spectrum is discrete. All quantitative estimates, however, use only the curvature lower bound 1, not the dimension parameter. Neither a lower volume bound nor smooth approximation is required. The class includes singular quotients and collapsing products. The restriction to finite  $N$  is part of our theorem; we do not assert that the same proof automatically treats every  $\text{RCD}(1, \infty)$  space.

The proof has three steps. The measure-valued Bochner inequality controls all entries of the gradient Gram matrix. Integration by parts then gives a quantitative recursion for joint moments, which prevents polynomial relations of bounded degree. Finally, a spectral projection argument preserves the dimension of the whole polynomial space. The underlying Bochner, Hermite and spectral-theorem tools are established methods. Our contribution is their explicit assembly into a multiplicity estimate, with a checked interpolation and a nondegeneracy argument. The two parameter obstructions below clarify what this assembly can and cannot prove. The precise formulation was not found in the sources examined; this does not establish publication priority.

## 2. PRELIMINARIES AND CONVENTIONS

All spaces are complete, separable and geodesic, and  $\mathbf{m}$  is a Borel probability measure with full support. In the main results  $X$  is compact. Its Cheeger energy is

$$\text{Ch}(f) = \frac{1}{2} \inf_{f_j \rightarrow f \text{ in } L^2} \liminf_j \int (\text{lip } f_j)^2 d\mathbf{m}, \quad f_j \in \text{Lip}(X).$$

We write  $W^{1,2} = D(\text{Ch})$  and  $\Gamma(f) = |Df|^2$  for the squared minimal relaxed slope. Quadraticity of  $\text{Ch}$  defines the infinitesimally Hilbertian condition and the bilinear form  $\Gamma(f, g) = (\Gamma(f + g) - \Gamma(f - g))/4$ . Our generator has the nonpositive sign:

$$(2.1) \quad f \in D(L), \quad Lf = h \quad \Longleftrightarrow \quad \int \Gamma(f, g) d\mathbf{m} = - \int hg d\mathbf{m} \quad (g \in W^{1,2}).$$

Set  $A = -L$  and  $P_t = e^{tL}$ .

For clarity we use the entropic characterization of  $\text{RCD}^*(K, N)$ . For  $\mu = \rho\mathbf{m}$  put  $\text{Ent}_{\mathbf{m}}(\mu) = \int \rho \log \rho d\mathbf{m}$  and  $U_N(\mu) = \exp(-\text{Ent}_{\mathbf{m}}(\mu)/N)$ , with entropy  $+\infty$  outside its domain. The condition  $\text{CD}^e(K, N)$  says that for any two finite-entropy probability measures there exists a constant speed  $W_2$  geodesic  $\mu_t$  joining them such that

$$(2.2) \quad U_N(\mu_t) \geq \sigma_{K/N}^{(1-t)}(\ell) U_N(\mu_0) + \sigma_{K/N}^{(t)}(\ell) U_N(\mu_1), \quad \ell = W_2(\mu_0, \mu_1).$$

Here  $W_2^2$  is the infimum of  $\int d(x, y)^2 d\pi$  over couplings, and  $\sigma_{\kappa}^{(t)}(\ell) = \mathfrak{s}_{\kappa}(t\ell)/\mathfrak{s}_{\kappa}(\ell)$ , where  $\mathfrak{s}_{\kappa}(r)$  is  $\sin(\sqrt{\kappa}r)/\sqrt{\kappa}$ ,  $r$ , or  $\sinh(\sqrt{-\kappa}r)/\sqrt{-\kappa}$  according to the sign of  $\kappa$ . The continuous convention applies at  $\ell = 0$ ; for positive  $\kappa$  the usual infinite distortion convention applies beyond the first zero. Quadraticity together with (2.2) is equivalent to the reduced  $\text{RCD}^*(K, N)$  condition [EKS15, Theorem 3.17]. We retain the star throughout. No Hausdorff-measure normalization or noncollapsing condition is imposed.

We record precisely the analytic inputs. For  $\text{RCD}^*(1, N)$ , the  $\text{RCD}(1, \infty)$  calculus applies. The spectrum is discrete,  $\ker A$  consists of constants, and every nonzero eigenvalue is at least  $N/(N-1)$  [EKS15, Theorem 4.22]. Eigenfunctions are bounded and Lipschitz [AHPT18, Proposition 7.1]; its dimensional constants are used only for domain membership. Thus they belong to

$$\text{Test}(X) = \{f \in D(L) \cap L^\infty : |Df| \in L^\infty, Lf \in W^{1,2}\}.$$

For test functions,  $\Gamma(f, g) \in W^{1,2}$ , and the multivariate chain rule holds. Define the finite measure

$$\mathbf{\Gamma}_2(f) = \frac{1}{2} \mathbf{L}\Gamma(f) - \Gamma(f, Lf) \mathbf{m} = \gamma_2(f) \mathbf{m} + \mathbf{\Gamma}_2^s(f).$$

The measure  $\mathbf{L}h$  is defined by testing  $\int \phi d\mathbf{L}h = -\int \Gamma(\phi, h) d\mathbf{m}$ . The singular part above is nonnegative,  $\gamma_2(f) \geq \Gamma(f)$ , and the following bound holds  $\mathbf{m}$ -a.e.:

$$(2.3) \quad |D\Gamma(f, g)| \leq \sqrt{\gamma_2(f) - \Gamma(f)} |Dg| + \sqrt{\gamma_2(g) - \Gamma(g)} |Df|.$$

These facts follow from the self-improvement of  $\text{BE}(1, \infty)$  [S14, Lemma 3.2 and Theorem 3.4, (3.16)]. Keeping the singular measure is essential when integrating this inequality.

For a nonnegative function  $h$  we also write  $\text{Ent}(h) = \int h \log(h / \int h d\mathbf{m}) d\mathbf{m}$ , with  $\text{Ent}(0) = 0$ .

We also use hypercontractivity  $\|P_t v\|_{1+e^{2t}} \leq \|v\|_2$  and reverse Poincaré

$$(2.4) \quad \Gamma(P_t v) \leq \frac{P_t(v^2) - (P_t v)^2}{e^{2t} - 1} \leq \frac{P_t(v^2)}{e^{2t} - 1}.$$

These follow from the Bochner and logarithmic Sobolev inequalities; compare [BF21, Proposition 3.2]. Indeed, [EKS15, Corollary 3.28] implies  $\text{Ent}(w^2) \leq 2 \int \Gamma(w) d\mathbf{m}$ . For positive bounded  $v$  bounded away from zero, put  $u = P_t v$ ,  $p(t) = 1 + e^{2t}$  and  $Z = \int u^p d\mathbf{m}$ . Differentiation and integration by parts give

$$\frac{d}{dt} \log \|u\|_p = \frac{p'}{p^2 Z} \text{Ent}(u^p) - \frac{p-1}{Z} \int u^{p-2} \Gamma(u) d\mathbf{m} \leq 0,$$

since  $\text{Ent}(u^p) \leq (p^2/2) \int u^{p-2} \Gamma(u) d\mathbf{m}$  and  $p' = 2(p-1)$ . Approximation and the Markov property yield hypercontractivity for general  $v \in L^2$ . For example, (2.4) follows by integrating the gradient estimate [S14, Corollary 3.5]  $\Gamma(P_t v) \leq e^{-2s} P_s \Gamma(P_{t-s} v)$  in  $P_t(v^2) - (P_t v)^2 = 2 \int_0^t P_s \Gamma(P_{t-s} v) ds$ .

### 3. MAIN RESULTS

Fix integers  $k, r \geq 1$  and  $0 < \eta < 1/2$ , and put  $a = 1/2 - \eta$  and  $M_{k,n} = \binom{k+n-1}{n}$ . A spectral projection is denoted by  $\mathbf{1}_I(A)$ .

**Theorem 3.1** (Multiplicity propagation). *There exist computable  $C = C(k, r, \eta) \geq 1$  and  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k, r, \eta) > 0$ , independent of  $N$ , with the following property. Let  $(X, d, \mathbf{m})$  be a compact  $\text{RCD}^*(1, N)$  probability space,  $1 < N < \infty$ . Suppose there are real orthonormal functions  $f_1, \dots, f_k$  with*

$$(3.1) \quad Af_i = \lambda_i f_i, \quad 1 \leq \lambda_i \leq 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

*Then  $\delta = C\varepsilon^a \leq 1/3$  and, for  $1 \leq n \leq r$ ,*

$$(3.2) \quad \text{rank } \mathbf{1}_{[n-\delta, n+\delta]}(A) \geq M_{k,n}.$$

Consequently

$$(3.3) \quad \text{rank } \mathbf{1}_{[0, r+\delta]}(A) \geq \binom{k+r}{r}, \quad \text{Tr}(P_t) \geq 1 + \sum_{n=1}^r M_{k,n} e^{-t(n+\delta)} \quad (t > 0).$$

The eigenvalues in (3.1) may be different. The statement gives lower multiplicities; it gives neither an upper bound nor an exclusion of additional spectrum between the displayed intervals. The sharper finite-dimensional spectral gap implies  $\varepsilon \geq 1/(N-1)$  whenever the hypotheses hold. Thus arbitrarily small defects in this class require unbounded dimension parameters; a fixed- $N$  compactness argument does not supply the claimed uniformity.

**Theorem 3.2** (Polynomial realization). *Under the hypotheses of Theorem 3.1, let  $\mathcal{H}_n$  be the degree  $n$  Hermite eigenspace in  $L^2(\mathbb{R}^k, \gamma_k)$ , where  $\gamma_k = (2\pi)^{-k/2} e^{-|x|^2/2} dx$ . There is a linear isometry  $U_n : \mathcal{H}_n \rightarrow L^2(X, \mathbf{m})$  whose image lies in  $D(A)$  and satisfies*

$$(3.4) \quad \|(A - n)U_n\| \leq \delta/2, \quad \|P_t U_n - e^{-nt} U_n\| \leq \frac{\delta}{2n} (1 - e^{-nt}) \quad (t \geq 0).$$

Here the norms are operator norms from  $\mathcal{H}_n$  to  $L^2(X)$ . The image is the span of the degree  $n$  Hermite polynomials in  $F = (f_1, \dots, f_k)$ .

#### 4. MIXED GRADIENT AND MOMENT ESTIMATES

We prove all quantitative steps. Throughout this section  $0 < \varepsilon \leq 1$  and (3.1) holds. All integrals are with respect to  $\mathbf{m}$  unless specified otherwise.

**Lemma 4.1** (Moment and Poincaré bounds). *For  $q \geq 2$  and  $1 \leq p \leq 2$ ,*

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \|f_i\|_q &\leq (q-1)^{\lambda_i/2} \leq q-1, & \|Df_i\|_q &\leq 2(q-1), \\ \|g - \mathbb{E}g\|_p &\leq \frac{\pi}{2} \|Dg\|_p \quad (g \in W^{1,2}). \end{aligned}$$

*Proof.* Apply hypercontractivity at  $t = \frac{1}{2} \log(q-1)$  to  $P_t f_i = e^{-\lambda_i t} f_i$ . Apply (2.4) at  $t = \frac{1}{2} \log 2$  to obtain  $\Gamma(f_i) \leq 2^{\lambda_i} P_t(f_i^2)$ . Jensen's inequality and invariance of  $\mathbf{m}$  give the second bound. For the last bound take a bounded test function  $v$ , and let  $p'$  be the conjugate exponent (including  $p' = \infty$ ). By self-adjointness and  $P_T v \rightarrow \mathbb{E}v$  in  $L^2$ ,

$$\int (g - \mathbb{E}g)v \, d\mathbf{m} = \int_0^\infty \int \Gamma(g, P_t v) \, d\mathbf{m} \, dt.$$

Hölder and (2.4), followed by Jensen since  $p' \geq 2$ , bound its absolute value by

$$\|Dg\|_p \|v\|_{p'} \int_0^\infty (e^{2t} - 1)^{-1/2} \, dt = \frac{\pi}{2} \|Dg\|_p \|v\|_{p'}.$$

The same estimate justifies the time integral. Duality and bounded approximation of the dual test functions finish the proof.  $\square$

Set  $D_{ij} = \Gamma(f_i, f_j) - \lambda_i \delta_{ij}$ , a symmetric matrix of mean-zero functions. For  $1 \leq p < 2$  and  $s \geq 1$  define

$$(4.2) \quad B_p = 4\pi \left( \frac{2p}{2-p} - 1 \right), \quad H_s = 4(2s-1)^2 + 2.$$

**Lemma 4.2** (Mixed defects). *One has*

$$(4.3) \quad \|D_{ij}\|_p \leq B_p \sqrt{\varepsilon} \quad (1 \leq p < 2), \quad \|D_{ij}\|_s \leq H_s \quad (s \geq 1).$$

For  $p_\eta = 2/(1+\eta)$ ,  $q_\eta = 2/(1-\eta)$ ,  $s_\eta = 2/\eta$  and  $D_\eta = B_{p_\eta}^{1-2\eta} H_{s_\eta}^{2\eta}$ , this yields

$$(4.4) \quad \|D_{ij}\|_{q_\eta} \leq D_\eta \varepsilon^{1/2-\eta}.$$

*Proof.* Testing  $\mathbf{L}\Gamma(f_i)$  against 1 and using  $Lf_i = -\lambda_i f_i$  gives

$$\int d\Gamma_2(f_i) = \lambda_i^2, \quad \int (\gamma_2(f_i) - \Gamma(f_i)) d\mathbf{m} \leq \lambda_i(\lambda_i - 1) \leq 2\varepsilon.$$

The inequality uses the nonnegative singular part. Let  $q = 2p/(2-p)$ , so  $1/p = 1/2 + 1/q$ . Equations (2.3) and (4.1) give

$$\|DD_{ij}\|_p \leq \sqrt{2\varepsilon} (\|Df_i\|_q + \|Df_j\|_q) \leq 4\sqrt{2}(q-1)\sqrt{\varepsilon}.$$

Apply the last inequality in (4.1) to  $D_{ij}$ ;  $2\sqrt{2}\pi \leq 4\pi$  gives the chosen  $B_p$ . Pointwise Cauchy–Schwarz for  $\Gamma$  and Hölder with exponent  $2s$  give  $\|\Gamma(f_i, f_j)\|_s \leq 4(2s-1)^2$ , proving the high moment bound. Finally the exact identities

$$\frac{1}{q_\eta} = \frac{1-2\eta}{p_\eta} + \frac{2\eta}{s_\eta}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{q_\eta} + \frac{1}{s_\eta}$$

justify interpolation and give (4.4).  $\square$

The exponents in the last display matter: a small  $L^1$  norm and bounded high moments alone do not give an arbitrary  $L^p$  norm with an exponent arbitrarily close to  $1/2$ . We use only the explicitly displayed  $q_\eta > 2$ , together with the matching polynomial exponent  $s_\eta$ .

For  $d \geq 1$ ,  $t \geq 1$ , put  $V_{d,t} = (\max\{2, td\} - 1)^d$  and  $V_{0,t} = 1$ . If  $P(x) = \sum_\beta c_\beta x^\beta$ , define

$$(4.5) \quad \mathcal{A}_t(P) = \sum_\beta |c_\beta| V_{|\beta|,t}.$$

Hölder and (4.1) give  $\|F^\beta\|_t \leq V_{|\beta|,t}$ , hence  $\|P(F)\|_t \leq \mathcal{A}_t(P)$ .

**Lemma 4.3** (Joint moment recursion). *There are explicit numbers  $c_d$ , depending only on  $d$ , such that*

$$(4.6) \quad \left| \mathbb{E}F^\beta - \int x^\beta d\gamma_k \right| \leq c_{|\beta|} \sqrt{\varepsilon}.$$

One choice is  $c_0 = c_1 = c_2 = 0$  and, for  $d \geq 3$ ,

$$(4.7) \quad c_d = (d-1)c_{d-2} + 12\pi(d-1)V_{d-2,4}.$$

*Proof.* Integration by parts and the chain rule give, for every polynomial  $P$ ,

$$(4.8) \quad \mathbb{E}[f_i P(F)] = \mathbb{E}[\partial_i P(F)] + \lambda_i^{-1} \sum_j \mathbb{E}[D_{ij} \partial_j P(F)].$$

This is an identity on  $X$ : since  $F(X)$  is bounded, one may replace  $P$  by a smooth compactly supported function agreeing with it near  $F(X)$ . The chain rule then proves domain membership and the identity without any boundary removal. Choose  $i$  with  $\beta_i > 0$ , let  $d = |\beta|$ , and use  $P = x^{\beta-e_i}$ . Then

$$\mathbb{E}F^\beta = (\beta_i - 1)\mathbb{E}F^{\beta-2e_i} + R_\beta, \quad |R_\beta| \leq 12\pi(d-1)V_{d-2,4}\sqrt{\varepsilon}.$$

Terms with zero coefficient are omitted. The remainder bound follows from (4.3) with  $p = 4/3$ , since  $B_{4/3} = 12\pi$ , Hölder with exponent 4, and  $\lambda_i^{-1} \leq 1$ . The standard Gaussian moments satisfy the same recursion with  $R_\beta = 0$ , by one-variable integration by parts in  $x_i$ . The moments of degrees 0, 1, 2 agree exactly, by normalization,  $\lambda_i > 0$ , and orthonormality. Induction in  $d$  proves the claim.  $\square$

## 5. PROOFS OF THE MAIN RESULTS

Let  $H_0 = 1$ ,  $H_1(x) = x$ , and  $H_{j+1}(x) = xH_j(x) - jH_{j-1}(x)$ . For a multi-index  $\alpha$  set

$$h_\alpha(x) = \prod_{i=1}^k \frac{H_{\alpha_i}(x_i)}{\sqrt{\alpha_i!}}.$$

Differentiating the recurrence proves  $H_j'' - xH_j' = -jH_j$ . Gaussian integration by parts, or the Rodrigues formula obtained from the same recurrence, gives  $\int H_j H_\ell d\gamma_1 = j! \delta_{j\ell}$ . Tensorization therefore makes the  $h_\alpha$  orthonormal, and  $\{h_\alpha : |\alpha| = n\}$  is a basis of  $\mathcal{H}_n$ . Its cardinality is  $M_{k,n}$ , by the stars-and-bars count.

Let  $\mathcal{I}_r = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^k : |\alpha| \leq r\}$ , and expand  $h_\alpha h_\beta = \sum_\nu b_{\alpha\beta\nu} x^\nu$ . Define

$$(5.1) \quad K_{k,r} = \max_{\alpha \in \mathcal{I}_r} \sum_{\beta \in \mathcal{I}_r} \sum_{\nu} |b_{\alpha\beta\nu}| c_{|\nu|}.$$

For  $G_{\alpha\beta} = \mathbb{E}[h_\alpha(F)h_\beta(F)]$ , Lemma 4.3 and the row-sum bound for a real symmetric matrix imply

$$(5.2) \quad \|G - I\|_{\text{op}} \leq K_{k,r} \sqrt{\varepsilon}.$$

Consequently, if  $K_{k,r} \sqrt{\varepsilon} \leq 1/2$ , the map  $J_n c = \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha h_\alpha(F)$  satisfies

$$(5.3) \quad \|J_n c\|_2 \geq 2^{-1/2} |c|.$$

This proves independence, including for unequal  $\lambda_i$ .

The chain rule and the Hermite equation give the exact residual identity

$$(5.4) \quad Ah_\alpha(F) = \left( \sum_i \alpha_i \lambda_i \right) h_\alpha(F) - \sum_{i,j} D_{ij} \partial_{ij} h_\alpha(F).$$

All mixed derivatives are included, so no factor 2 is suppressed. For  $|\alpha| = n$  set

$$R_\alpha = n \mathcal{A}_2(h_\alpha) + D_\eta \sum_{i,j} \mathcal{A}_{s_\eta}(\partial_{ij} h_\alpha), \quad R_n = \left( \sum_{|\alpha|=n} R_\alpha^2 \right)^{1/2}.$$

Since  $\varepsilon \leq \varepsilon^a$  for  $\varepsilon \leq 1$ , equations (4.4), (4.5), and Hölder with  $1/2 = 1/q_\eta + 1/s_\eta$  imply

$$(5.5) \quad \|(A - n)J_n c\|_2 \leq R_n \varepsilon^a |c|.$$

Thus this is a residual estimate on every linear combination, not only on individual basis elements.

Here are explicit admissible choices for Theorem 3.1:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} C &= \max\{1, 2\sqrt{2} \max_{1 \leq n \leq r} R_n\}, \\ \varepsilon_0 &= \min\left\{1, \frac{1}{4 \max\{1, K_{k,r}\}^2}, (3C)^{-1/a}\right\}. \end{aligned}$$

These are finite sums and recursions involving only  $k, r, \eta$ . Their size is not optimized.

*Proof of Theorem 3.1.* Let  $V_n = \text{Im}(J_n)$ . Equations (5.3) and (5.5) show  $\dim V_n = M_{k,n}$  and  $\|(A-n)u\|_2 \leq (\delta/2)\|u\|_2$  for  $u \in V_n$ . Put  $Q_n = \mathbf{1}_{[n-\delta, n+\delta]}(A)$ . The spectral theorem gives

$$\|(I - Q_n)u\|_2 \leq \delta^{-1}\|(A - n)u\|_2 \leq \frac{1}{2}\|u\|_2.$$

Therefore  $Q_n$  is injective on  $V_n$ , proving (3.2). The intervals are disjoint and avoid 0 because  $\delta \leq 1/3$ . Adding their dimensions and the constant eigenfunction gives the first inequality in (3.3), using  $1 + \sum_{n=1}^r M_{k,n} = \binom{k+r}{r}$ . Each eigenvalue in the  $n$ -th interval contributes at least  $e^{-t(n+\delta)}$  to the heat trace, proving the second inequality.  $\square$

*Proof of Theorem 3.2.* Write  $G_n = J_n^* J_n$  and define  $U_n = J_n G_n^{-1/2}$  in the orthonormal Hermite basis. Then  $U_n^* U_n = I$  and  $\|G_n^{-1/2}\| \leq \sqrt{2}$  by (5.2). Equation (5.5) proves the first estimate in (3.4). Since  $U_n$  takes values in  $D(A)$ , semigroup differentiation in  $L^2$  yields

$$P_t U_n - e^{-nt} U_n = - \int_0^t e^{-(t-s)A} (A - n) U_n e^{-ns} ds.$$

Contractivity and  $\int_0^t e^{-ns} ds = (1 - e^{-nt})/n$  prove the claim.  $\square$

For curvature  $K > 0$ , replace  $d$  by  $\sqrt{K}d$ . The new generator is  $A/K$ , so an input interval  $[K, K(1 + \varepsilon)]$  produces intervals  $[K(n - \delta), K(n + \delta)]$ . Probability normalization is unchanged. This checks the scaling of both eigenvalues and curvature.

## 6. EXAMPLES, OBSTRUCTIONS AND LIMITATIONS

**6.1. Singular spaces with arbitrarily small defect.** Fix  $k \geq 1$ . For  $d \geq k + 2$  write  $q = d + 1 - k$  and let  $S^d(\sqrt{d-1}) \subset \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^q$ . The involution  $\iota(x, y) = (x, -y)$  acts by measure-preserving isometries. Endow

$$Q_{d,k} = S^d(\sqrt{d-1}) / \langle \iota \rangle$$

with the quotient distance and the pushforward of normalized volume. It is a compact  $\text{RCD}^*(1, d)$  probability space [GKMS17, Theorem 1.1 and Corollary 1.2]. At a fixed point its tangent cone is  $\mathbb{R}^{k-1} \times (\mathbb{R}^q / \{\pm 1\})$ , which is not Euclidean for  $q \geq 3$ . Thus the theorem genuinely applies to singular spaces.

The invariant functions  $f_i = \sqrt{(d+1)/(d-1)} x_i$  descend and are orthonormal. The polar-coordinate formula for the Euclidean Laplacian, applied to homogeneous harmonic polynomials, gives sphere eigenvalues

$$(6.1) \quad \Lambda_{d,n} = \frac{n(n+d-1)}{d-1} = n + \frac{n^2}{d-1}.$$

In particular  $Af_i = (1 + 1/(d-1))f_i$ . Quotient eigenfunctions are precisely the invariant spherical eigenfunctions: lifting identifies  $L^2(Q_{d,k})$  with the invariant subspace and preserves the energy form. The degree-one invariant subspace is exactly the  $k$ -dimensional  $x$ -coordinate space. Hence the defect  $\varepsilon = 1/(d-1)$  tends to zero with precisely  $k$  eigenfunctions in the first cluster.

This also tests normalization:  $\mathbb{E}f_i^2 = 1$  and

$$\Gamma(f_i, f_j) = \frac{d+1}{d-1}\delta_{ij} - \frac{f_i f_j}{d-1}, \quad D_{ij} = \frac{\delta_{ij} - f_i f_j}{d-1}.$$

The defect is smaller than our general bound on these examples. No optimality of the exponent  $1/2 - \eta$  is asserted.

**Proposition 6.1** (No upper multiplicity from the first cluster). *Even for a fixed  $k$  and  $\varepsilon \downarrow 0$ , the hypotheses of Theorem 3.1 cannot bound the second-cluster multiplicity above by a function of  $k$  alone.*

*Proof.* On  $Q_{d,k}$  the invariant quadratic polynomials consist of an arbitrary quadratic form in  $x$  and one in  $y$ . The harmonic condition imposes exactly one trace constraint. Therefore the multiplicity of  $\Lambda_{d,2} = 2 + 4/(d-1)$  is

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2} - 1.$$

For fixed  $k$ , this tends to infinity with  $d$ , although the first cluster has dimension exactly  $k$ . For any fixed positive constant  $C$  and  $0 < a < 1$ ,  $4\varepsilon < C\varepsilon^a$  eventually, so this eigenvalue lies in the asserted second window. Completeness of spherical harmonics, and restriction to the invariant subspace, also exclude other degrees from any sufficiently small window about 2.  $\square$

**Proposition 6.2** (The dependence on  $k$  is necessary). *For  $r = 2$  and fixed  $0 < \eta < 1/2$ , no positive threshold and finite constant in Theorem 3.1 can be uniform in both  $k$  and  $N$ .*

*Proof.* Use the whole sphere  $S^d(\sqrt{d-1})$  and all  $k = d+1$  normalized coordinate functions. Their common eigenvalue is  $1 + 1/(d-1)$ , but

$$\sum_{i=1}^k f_i^2 = k, \quad \sum_{i=1}^k h_{2e_i}(F) = 0.$$

For constants  $C, \varepsilon_0$  independent of  $k, d$ , choose  $d$  so large that  $\varepsilon = 1/(d-1) < \varepsilon_0$  and  $C\varepsilon^a < 1/3$ . By (6.1), the window about 2 contains only quadratic harmonics (and eventually contains all of them). Their dimension is  $k(k+1)/2 - 1 = M_{k,2} - 1$ , contrary to (3.2). The displayed polynomial relation explains the Gram-matrix obstruction behind this failure.  $\square$

**6.2. Collapse and curvature.** For a fixed sufficiently large  $d$ , the spaces  $Q_{d,k} \times S^2(t)$ ,  $0 < t \leq 1$ , with product distance and probability measure are  $\text{RCD}^*(1, d+2)$  by tensorization [EKS15, Theorem 3.23]. The same  $f_i$  meet (3.1), and the estimates are independent of  $t$ . As  $t \downarrow 0$ , projection has fibers of diameter  $\pi t$  and pushes the measure exactly to that on  $Q_{d,k}$ , proving measured Gromov–Hausdorff collapse to  $Q_{d,k}$ . No noncollapsing assumption is hidden in the result.

Positive curvature cannot be replaced by nonnegative curvature. Indeed, on the flat  $d$ -torus  $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$  the  $2d$  normalized sine and cosine functions have eigenvalue 1. Fourier series give spectrum  $|z|^2$ ,  $z \in \mathbb{Z}^d$ . The multiplicity at 2 is  $4\binom{d}{2} = 2d(d-1)$ , whereas the predicted multiplicity for  $k = 2d$  is  $M_{2d,2} = d(2d+1)$ , larger by  $3d$ . For windows of radius less than  $1/2$  no other eigenvalues occur. This example is a boundary check, not a claim of a new torus calculation.

**6.3. What has not been proved.** The result concerns spectral subspaces and heat evolution. It does not construct a metric-measure product, classify topology, or give a measured Gromov–Hausdorff error. Almost-everywhere gradient estimates are never promoted to a global isometry. We do not delete singular sets or assume curvature-preserving smoothing. The constants are explicit but very large; the theorem is an asymptotic structural statement, not an efficient numerical test. The rate may be far from optimal.

## 7. FURTHER QUESTIONS AND STATUS

Can the loss  $\eta$  be removed, or the dependence on  $k, r$  significantly improved? Can one control the full spectrum by adding a natural hypothesis that excludes transverse modes? Can the same quantitative rank statement be proved for all  $\text{RCD}(1, \infty)$  spaces without compactness, formulated using spectral projections rather than a discrete spectrum? These questions are not resolved here.

Theorems 3.1 and 3.2, and Propositions 6.1 and 6.2, have complete proofs conditional only on the explicitly cited established RCD calculus. The multiplicity theorem is a refinement of the existing Hermite method, not a new splitting theorem. Its formulation differs from the checked one-function spectral results and Gaussian transport estimates [BF21, CF20]; related pushforward-distribution stability results [FGS24] concern a different conclusion. Additional expert and bibliographic checking is required to decide originality and significance. A separate audit records the checked versions, the interpolation issue, and the limits of this comparison.

## REFERENCES

- [AHPT18] L. Ambrosio, S. Honda, J. W. Portegies and D. Tewodrose, *Embedding of  $\text{RCD}^*(K, N)$  spaces in  $L^2$  via eigenfunctions*, [arXiv:1812.03712v1](#) (2018), Proposition 7.1.
- [BF21] J. Bertrand and M. Fathi, *Stability of eigenvalues and observable diameter in  $\text{RCD}(1, \infty)$  spaces*, [arXiv:2107.05324v1](#) (2021). Theorem numbering in this note refers to this version.
- [CF20] T. A. Courtade and M. Fathi, *Stability of the Bakry–Émery theorem on  $\mathbb{R}^n$* , J. Funct. Anal. **279** (2020), no. 2, 108523. Checked preprint: [arXiv:1807.09845v2](#), Theorems 1.1–1.2 and §2.1.
- [EKS15] M. Erbar, K. Kuwada and K.-T. Sturm, *On the equivalence of the entropic curvature-dimension condition and Bochner’s inequality on metric measure spaces*, [arXiv:1303.4382v2](#) (2013), Theorems 3.17, 3.23, 4.8 and 4.22; Corollary 3.28.
- [FGS24] M. Fathi, I. Gentil and J. Serres, *Stability estimates for the sharp spectral gap bound under a curvature-dimension condition*, Ann. Inst. Fourier **74** (2024), no. 6, 2425–2459, Theorems 1.1 and 4.3. [doi:10.5802/aif.3608](#).
- [GKMS17] F. Galaz-García, M. Kell, A. Mondino and G. Sosa, *On quotients of spaces with Ricci curvature bounded below*, [arXiv:1704.05428v1](#) (2017), Theorem 1.1 and Corollary 1.2.

- [GKKO20] N. Gigli, C. Ketterer, K. Kuwada and S.-i. Ohta, *Rigidity for the spectral gap on  $\text{RCD}(K, \infty)$ -spaces*, Amer. J. Math. **142** (2020), no. 5, 1559–1594, Theorem 1.1. [arXiv:1709.04017](#).
- [S14] G. Savaré, *Self-improvement of the Bakry–Émery condition and Wasserstein contraction of the heat flow in  $\text{RCD}(K, \infty)$  metric measure spaces*, [arXiv:1304.0643v2](#) (2013), Lemma 3.2, Theorem 3.4, especially (3.16).

# RCD 空間における近似 Gaussian 固有関数からの スペクトル集積の重複度評価

chatGPT 6 Astra

2026 年 9 月 8 日

## 概要

$X$  をコンパクトな  $\text{RCD}^*(1, N)$  確率測度空間とし、 $1 < N < \infty$  とする．固有値が  $[1, 1 + \varepsilon]$  に属する  $k$  個の正規直交固有関数が存在すれば、あらかじめ指定した有限範囲の各次数  $n$  と  $0 < \eta < 1/2$  について、区間  $[n - C\varepsilon^{1/2-\eta}, n + C\varepsilon^{1/2-\eta}]$  に重複度込みで少なくとも  $\binom{k+n-1}{n}$  個の固有値が存在することを証明する．定数は  $N$  に依存しない．証明では多変数 Hermite 多項式の Gram 行列と、それらの張る空間全体での残差を評価する．また、 $k$  について一様な評価は不可能であり、最初の集積から第 2 の集積の重複度を上から抑えることもできないと示す．特異な球面商が適用例を与える．本稿は既知の Gaussian 型スペクトル安定性の議論を定量的に精密化するものであり、重複度に関する定式化の文献上の先取性には追加確認が必要である．

このノートは chatGPT 6 が生成したものであり、岩井は数学的な検証を全く行っていません．そのため数学的な間違いがあるかもしれません．そのため注意深く読んでください．

## 1. 序論

境界を持たない完備連結な滑らかな確率測度多様体  $(M, g, e^{-V} \text{vol}_g)$  で  $\text{Ric}_g + \text{Hess } V \geq g$  とする．重み付き Laplacian は  $L = \Delta_g - \langle \nabla V, \nabla \cdot \rangle$  である． $-Lf = f$  を満たす固有関数は積分 Bochner 不等式の等号を実現し、 $L^2$  の意味で  $\text{Hess } f = 0$  となる．対応する剛性現象は Gaussian 因子の分裂である． $k$  個の Gaussian 方向を含む非平滑版は、すでに Gigli–Ketterer–Kuwada–Ohta [GKKO20, Theorem 1.1] により確立されている． $k$  次元 Gaussian 空間では、次数  $n$  の Hermite 多項式が次元  $\binom{k+n-1}{n}$  の固有空間をなす．本稿の問いは、近似的な距離の分裂を先に構成せず、小さい欠損のもとでこのスペクトル上の帰結を保てるか、というものである．

Bertrand–Fathi は、一つの近似的な極値固有関数から各整数の近くにスペクトル値が存在することを示している [BF21, Theorem 1.2]．多変数 Gaussian 近似についても明示的に述べている．その Hermite 多項式の構成が本稿の出発点である．その後 Fathi–Gentil–Serres は、1 変数の Gaussian 近似の  $W_1$  評価を  $\varepsilon \log(2/\varepsilon)$  まで改良している [FGS24, Theorem 4.3]．本稿はこの分布の収束率の改良を主張しない．ここで追加して目指す結論は、各スペクトル射影の階数の下界である．個別に構成した近似固有関数は線形従属となり得るため、スカラーとしてのスペクトルの近接性だけではこの結論は得られない．特に、1 変数の定理を  $k$  回適用しても、上の二項係数の重複度は得られない．

対象をコンパクトな有限次元 RCD 空間とすることで、固有関数がある有界なテスト関数であることとスペクトルの離散性を保証する．一方、定量評価は曲率下界 1 だけを用い、次元パラメータには依存しない．体積の下界も平滑近似も必要としない．対象には特異商と collapse する積が含まれる．有限  $N$  という制限は定理の一部であり、この証明がすべての  $\text{RCD}(1, \infty)$  空間に自動的に適用できるとは主張しない．

証明は三段階からなる．測度値 Bochner 不等式により勾配の Gram 行列の全成分を評価する．部分積分から結合モーメントの定量的な漸化式を導き、有界次数の多項式関係の発生を防ぐ．最後にスペクトル射影の議論により、多項式空間全体の次

元を保持する．Bochner の議論，Hermite 多項式，スペクトル定理はいずれも確立された手法である．本稿の寄与は，補間指数と非退化性を明示的に検証し，これらを重複度評価へまとめることにある．後述する二つのパラメータ上の障害は，この議論の到達範囲と限界を示す．調べた資料では同じ定式化を見いださなかったが，それだけで文献上の先取性が確定するわけではない．

## 2. 準備と規約

すべての空間は完備，可分，測地的とし， $\mathbf{m}$  は台が  $X$  全体である Borel 確率測度とする．主結果では  $X$  はコンパクトである．Cheeger エネルギーを

$$\text{Ch}(f) = \frac{1}{2} \inf_{f_j \rightarrow f \text{ in } L^2} \liminf_j \int (\text{lip } f_j)^2 d\mathbf{m}, \quad f_j \in \text{Lip}(X)$$

とする． $W^{1,2} = D(\text{Ch})$  と書き， $\Gamma(f) = |Df|^2$  を最小緩和勾配の二乗とする． $\text{Ch}$  が二次形式であることを infinitesimally Hilbertian という．このとき  $\Gamma(f, g) = (\Gamma(f + g) - \Gamma(f - g))/4$  は双線形である．生成作用素の符号は非正とする：

$$(2.1) \quad f \in D(L), \quad Lf = h \iff \int \Gamma(f, g) d\mathbf{m} = - \int hg d\mathbf{m} \quad (g \in W^{1,2}).$$

$A = -L$ ,  $P_t = e^{tL}$  と置く．

明確さのため， $\text{RCD}^*(K, N)$  のエントロピーによる特徴付けを採用する． $\mu = \rho\mathbf{m}$  に対して  $\text{Ent}_{\mathbf{m}}(\mu) = \int \rho \log \rho d\mathbf{m}$ ,  $U_N(\mu) = \exp(-\text{Ent}_{\mathbf{m}}(\mu)/N)$  と置き，エントロピーの定義域外では値を  $+\infty$  とする． $\text{CD}^e(K, N)$  条件とは，有限エントロピーを持つ任意の二つの確率測度の間に，次を満たす定速  $W_2$  測地線  $\mu_t$  が存在することである：

$$(2.2) \quad U_N(\mu_t) \geq \sigma_{K/N}^{(1-t)}(\ell) U_N(\mu_0) + \sigma_{K/N}^{(t)}(\ell) U_N(\mu_1), \quad \ell = W_2(\mu_0, \mu_1).$$

ここで  $W_2^2$  は，すべての結合  $\pi$  にわたる  $\int d(x, y)^2 d\pi$  の下限である．また  $\sigma_{\kappa}^{(t)}(\ell) = \mathfrak{s}_{\kappa}(t\ell)/\mathfrak{s}_{\kappa}(\ell)$  とし， $\mathfrak{s}_{\kappa}(r)$  は  $\kappa$  の符号に応じて  $\sin(\sqrt{\kappa}r)/\sqrt{\kappa}$ ,  $r$ ,  $\sinh(\sqrt{-\kappa}r)/\sqrt{-\kappa}$  とする． $\ell = 0$  では連続延長を用い， $\kappa > 0$  で最初の零点以降では通常の無限大の歪み係数の規約を用いる．二次形式性と (2.2) の組合せは，reduced  $\text{RCD}^*(K, N)$  条件と同値である [EKS15, Theorem 3.17]．本稿では一貫して star を付ける．Hausdorff 測度による正規化や noncollapsed 条件は仮定しない．

用いる解析的事実を正確に記す． $\text{RCD}^*(1, N)$  空間では  $\text{RCD}(1, \infty)$  の微分解析が適用できる．スペクトルは離散的で， $\ker A$  は定数関数からなり，非零固有値はすべて  $N/(N-1)$  以上である [EKS15, Theorem 4.22]．固有関数は有界かつ Lipschitz である [AHPT18, Proposition 7.1]．この命題の次元に依存する定数は，定義域に属することの確認だけに用いる．したがって固有関数は

$$\text{Test}(X) = \{f \in D(L) \cap L^\infty : |Df| \in L^\infty, Lf \in W^{1,2}\}$$

に属する．テスト関数について  $\Gamma(f, g) \in W^{1,2}$  であり，多変数の連鎖律が成立する．有限測度

$$\Gamma_2(f) = \frac{1}{2} L\Gamma(f) - \Gamma(f, Lf)\mathbf{m} = \gamma_2(f)\mathbf{m} + \Gamma_2^s(f)$$

を定義する．ここで測度  $Lh$  は  $\int \phi dLh = - \int \Gamma(\phi, h) d\mathbf{m}$  を用いて定義する．上の特異部分は非負であり， $\gamma_2(f) \geq \Gamma(f)$  である．さらに  $\mathbf{m}$ -a.e. で

$$(2.3) \quad |D\Gamma(f, g)| \leq \sqrt{\gamma_2(f) - \Gamma(f)} |Dg| + \sqrt{\gamma_2(g) - \Gamma(g)} |Df|$$

が成立する．これらは  $\text{BE}(1, \infty)$  の自己改良による [S14, Lemma 3.2 and Theorem 3.4, (3.16)]．積分する際には特異測度を保持することが重要である．

非負関数  $h$  については  $\text{Ent}(h) = \int h \log(h / \int h \, d\mathbf{m}) \, d\mathbf{m}$  と書き,  $\text{Ent}(0) = 0$  とする.

超縮小性  $\|P_t v\|_{1+e^{2t}} \leq \|v\|_2$  と逆 Poincaré 不等式

$$(2.4) \quad \Gamma(P_t v) \leq \frac{P_t(v^2) - (P_t v)^2}{e^{2t} - 1} \leq \frac{P_t(v^2)}{e^{2t} - 1}$$

も用いる. これらは Bochner 不等式と対数 Sobolev 不等式から従う ([BF21, Proposition 3.2] も参照). 実際, [EKS15, Corollary 3.28] から  $\text{Ent}(w^2) \leq 2 \int \Gamma(w) \, d\mathbf{m}$  を得る. 正で零から離れた有界な  $v$  について  $u = P_t v$ ,  $p(t) = 1 + e^{2t}$ ,  $Z = \int u^p \, d\mathbf{m}$  と置く. 微分と部分積分により

$$\frac{d}{dt} \log \|u\|_p = \frac{p'}{p^2 Z} \text{Ent}(u^p) - \frac{p-1}{Z} \int u^{p-2} \Gamma(u) \, d\mathbf{m} \leq 0$$

となる. ここで  $\text{Ent}(u^p) \leq (p^2/2) \int u^{p-2} \Gamma(u) \, d\mathbf{m}$  と  $p' = 2(p-1)$  を用いた. 近似と Markov 性により, 一般の  $v \in L^2$  について超縮小性が従う. 例えば (2.4) は, 勾配評価 [S14, Corollary 3.5]  $\Gamma(P_t v) \leq e^{-2s} P_s \Gamma(P_{t-s} v)$  を  $P_t(v^2) - (P_t v)^2 = 2 \int_0^t P_s \Gamma(P_{t-s} v) \, ds$  に代入して積分することで得られる.

### 3. 主結果

整数  $k, r \geq 1$  および  $0 < \eta < 1/2$  を固定し,  $a = 1/2 - \eta$ ,  $M_{k,n} = \binom{k+n-1}{n}$  と置く. スペクトル射影を  $\mathbf{1}_I(A)$  と書く.

**定理 3.1** (重複度の伝播).  $N$  に依存しない計算可能な定数  $C = C(k, r, \eta) \geq 1$  と  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k, r, \eta) > 0$  が存在して, 次が成立する.  $(X, d, \mathbf{m})$  をコンパクトな  $\text{RCD}^*(1, N)$  確率測度空間とし,  $1 < N < \infty$  とする. 実数値の正規直交関数  $f_1, \dots, f_k$  が

$$(3.1) \quad A f_i = \lambda_i f_i, \quad 1 \leq \lambda_i \leq 1 + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

を満たすと仮定する. このとき  $\delta = C\varepsilon^a \leq 1/3$  であり,  $1 \leq n \leq r$  に対して

$$(3.2) \quad \text{rank } \mathbf{1}_{[n-\delta, n+\delta]}(A) \geq M_{k,n}$$

が成立する. したがって

$$(3.3) \quad \text{rank } \mathbf{1}_{[0, r+\delta]}(A) \geq \binom{k+r}{r}, \quad \text{Tr}(P_t) \geq 1 + \sum_{n=1}^r M_{k,n} e^{-t(n+\delta)} \quad (t > 0)$$

を得る.

(3.1) の固有値は相異なっていないでもいい. 結論は重複度の下界であり, 上界を与えるものでも, 表示した区間の間に別のスペクトルがないことを主張するものでもない. 有限次元のより鋭いスペクトルギャップ評価により, 仮定が成立するならば  $\varepsilon \geq 1/(N-1)$  である. したがって, このクラスで欠損を任意に小さくするには次元パラメータが非有界になる必要があり,  $N$  を固定したコンパクト性の議論から上記の一様性は得られない.

**定理 3.2** (多項式による実現). 定理 3.1 の仮定のもと,  $\mathcal{H}_n$  を  $L^2(\mathbb{R}^k, \gamma_k)$  内の次数  $n$  の Hermite 固有空間とする. ただし  $\gamma_k = (2\pi)^{-k/2} e^{-|x|^2/2} dx$  である. 像が  $D(A)$  に含まれる線形等長写像  $U_n : \mathcal{H}_n \rightarrow L^2(X, \mathbf{m})$  で

$$(3.4) \quad \|(A - n)U_n\| \leq \delta/2, \quad \|P_t U_n - e^{-nt} U_n\| \leq \frac{\delta}{2n} (1 - e^{-nt}) \quad (t \geq 0)$$

を満たすものが存在する．ノルムは  $\mathcal{H}_n$  から  $L^2(X)$  への作用素ノルムである．像は  $F = (f_1, \dots, f_k)$  に次数  $n$  の Hermite 多項式を代入して得る関数の張る空間である．

#### 4. 混合勾配とモーメントの評価

すべての定量的な段階を証明する．本節では  $0 < \varepsilon \leq 1$  とし, (3.1) を仮定する．特に断らなければ積分は  $\mathbf{m}$  に関するものとする．

**補題 4.1** (モーメントと Poincaré 評価).  $q \geq 2$ ,  $1 \leq p \leq 2$  に対して

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \|f_i\|_q &\leq (q-1)^{\lambda_i/2} \leq q-1, & \|Df_i\|_q &\leq 2(q-1), \\ \|g - \mathbb{E}g\|_p &\leq \frac{\pi}{2} \|Dg\|_p \quad (g \in W^{1,2}). \end{aligned}$$

が成立する．

証明.  $t = \frac{1}{2} \log(q-1)$  とし  $P_t f_i = e^{-\lambda_i t} f_i$  に超縮小性を適用する．次に  $t = \frac{1}{2} \log 2$  とし (2.4) を適用すると,  $\Gamma(f_i) \leq 2^{\lambda_i} P_t(f_i^2)$  となる．Jensen の不等式と  $\mathbf{m}$  の不変性から第2の評価を得る．最後の評価については有界なテスト関数  $v$  を取り,  $p'$  を共役指数とする ( $p' = \infty$  も含む)．自己共役性と  $P_T v \rightarrow \mathbb{E}v$  の  $L^2$  収束から

$$\int (g - \mathbb{E}g)v \, d\mathbf{m} = \int_0^\infty \int \Gamma(g, P_t v) \, d\mathbf{m} \, dt$$

となる．Hölder, (2.4), および  $p' \geq 2$  による Jensen の不等式から, その絶対値は

$$\|Dg\|_p \|v\|_{p'} \int_0^\infty (e^{2t} - 1)^{-1/2} \, dt = \frac{\pi}{2} \|Dg\|_p \|v\|_{p'}$$

以下である．この評価は時間積分の収束も正当化する．双対性と, 双対側のテスト関数の有界近似によって証明が終わる．  $\square$

$D_{ij} = \Gamma(f_i, f_j) - \lambda_i \delta_{ij}$  と置く．これは各成分の平均が零である対称行列である． $1 \leq p < 2$ ,  $s \geq 1$  に対して

$$(4.2) \quad B_p = 4\pi \left( \frac{2p}{2-p} - 1 \right), \quad H_s = 4(2s-1)^2 + 2$$

と定める．

**補題 4.2** (混合欠損). 次が成立する：

$$(4.3) \quad \|D_{ij}\|_p \leq B_p \sqrt{\varepsilon} \quad (1 \leq p < 2), \quad \|D_{ij}\|_s \leq H_s \quad (s \geq 1).$$

$p_\eta = 2/(1+\eta)$ ,  $q_\eta = 2/(1-\eta)$ ,  $s_\eta = 2/\eta$ ,  $D_\eta = B_{p_\eta}^{1-2\eta} H_{s_\eta}^{2\eta}$  と置くと,

$$(4.4) \quad \|D_{ij}\|_{q_\eta} \leq D_\eta \varepsilon^{1/2-\eta}$$

を得る．

証明.  $L\Gamma(f_i)$  を 1 に対してテストし,  $Lf_i = -\lambda_i f_i$  を用いると

$$\int d\Gamma_2(f_i) = \lambda_i^2, \quad \int (\gamma_2(f_i) - \Gamma(f_i)) \, d\mathbf{m} \leq \lambda_i(\lambda_i - 1) \leq 2\varepsilon$$

となる．ここで特異部分が非負であることを用いた． $q = 2p/(2-p)$  と置くと  $1/p = 1/2 + 1/q$  である．(2.3) と (4.1) から

$$\|DD_{ij}\|_p \leq \sqrt{2\varepsilon} (\|Df_i\|_q + \|Df_j\|_q) \leq 4\sqrt{2}(q-1)\sqrt{\varepsilon}$$

を得る. (4.1) の最後の評価を  $D_{ij}$  に適用し,  $2\sqrt{2}\pi \leq 4\pi$  を用いると, 上で選んだ  $B_p$  による評価になる.  $\Gamma$  の点ごとの Cauchy–Schwarz 不等式と指数  $2s$  の Hölder 不等式により  $\|\Gamma(f_i, f_j)\|_s \leq 4(2s-1)^2$  となり, 高次モーメントの評価を得る. 最後に, 厳密な指数関係

$$\frac{1}{q_\eta} = \frac{1-2\eta}{p_\eta} + \frac{2\eta}{s_\eta}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{q_\eta} + \frac{1}{s_\eta}$$

によって補間が正当化され, (4.4) を得る.  $\square$

最後の表示の指数関係は重要である.  $L^1$  ノルムが小さく, 高次モーメントが有界であることだけから, 任意の  $L^p$  ノルムについて  $1/2$  に任意に近い指数の評価が出るわけではない. 本稿では明示した  $q_\eta > 2$  と, それに対応する多項式の指数  $s_\eta$  のみを用いる.

$d \geq 1, t \geq 1$  に対して  $V_{d,t} = (\max\{2, td\} - 1)^d$  と置き,  $V_{0,t} = 1$  とする.  $P(x) = \sum_\beta c_\beta x^\beta$  について

$$(4.5) \quad \mathcal{A}_t(P) = \sum_\beta |c_\beta| V_{|\beta|,t}$$

と定義する. Hölder と (4.1) から  $\|F^\beta\|_t \leq V_{|\beta|,t}$ , したがって  $\|P(F)\|_t \leq \mathcal{A}_t(P)$  となる.

**補題 4.3** (結合モーメントの漸化式).  $d$  だけに依存する明示的な数  $c_d$  が存在して

$$(4.6) \quad \left| \mathbb{E}F^\beta - \int x^\beta d\gamma_k \right| \leq c_{|\beta|} \sqrt{\varepsilon}$$

となる. 一つの選択は  $c_0 = c_1 = c_2 = 0$  とし,  $d \geq 3$  について

$$(4.7) \quad c_d = (d-1)c_{d-2} + 12\pi(d-1)V_{d-2,4}$$

とするものである.

証明. 部分積分と連鎖律から, 任意の多項式  $P$  について

$$(4.8) \quad \mathbb{E}[f_i P(F)] = \mathbb{E}[\partial_i P(F)] + \lambda_i^{-1} \sum_j \mathbb{E}[D_{ij} \partial_j P(F)]$$

が成立する. これは  $X$  上での恒等式である.  $F(X)$  は有界なので, その近傍で  $P$  と一致する滑らかなコンパクト台関数に置き換えられる. したがって連鎖律から定義域への所属と恒等式が従い, 境界を除去する操作は不要である.  $\beta_i > 0$  となる  $i$  を選び,  $d = |\beta|$ ,  $P = x^{\beta - e_i}$  とすると

$$\mathbb{E}F^\beta = (\beta_i - 1)\mathbb{E}F^{\beta - 2e_i} + R_\beta, \quad |R_\beta| \leq 12\pi(d-1)V_{d-2,4}\sqrt{\varepsilon}$$

を得る. 係数が零の項は省く. 残差の評価には,  $B_{4/3} = 12\pi$  を伴う (4.3), 指数 4 の Hölder 不等式, および  $\lambda_i^{-1} \leq 1$  を用いた. 標準 Gaussian のモーメントは,  $x_i$  についての 1 変数の部分積分により,  $R_\beta = 0$  とした同じ漸化式を満たす. 次数 0, 1, 2 のモーメントは正規化,  $\lambda_i > 0$ , 正規直交性から厳密に一致する.  $d$  についての帰納法により結論を得る.  $\square$

## 5. 主結果の証明

$H_0 = 1$ ,  $H_1(x) = x$ ,  $H_{j+1}(x) = xH_j(x) - jH_{j-1}(x)$  とし, 多重指数  $\alpha$  について

$$h_\alpha(x) = \prod_{i=1}^k \frac{H_{\alpha_i}(x_i)}{\sqrt{\alpha_i!}}$$

と置く. 漸化式を微分すると  $H_j'' - xH_j' = -jH_j$  が従う. Gaussian 部分積分, あるいは同じ漸化式から得られる Rodrigues の公式により  $\int H_j H_\ell d\gamma_1 = j! \delta_{j\ell}$  となる. 積を取ることで  $h_\alpha$  は正規直交し,  $\{h_\alpha : |\alpha| = n\}$  は  $\mathcal{H}_n$  の基底となる. 非負整数の和による組合せの数を数えると, その個数は  $M_{k,n}$  である.

$\mathcal{I}_r = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^k : |\alpha| \leq r\}$  とし,  $h_\alpha h_\beta = \sum_\nu b_{\alpha\beta\nu} x^\nu$  と展開する.

$$(5.1) \quad K_{k,r} = \max_{\alpha \in \mathcal{I}_r} \sum_{\beta \in \mathcal{I}_r} \sum_{\nu} |b_{\alpha\beta\nu}| c_{|\nu|}$$

と定義する.  $G_{\alpha\beta} = \mathbb{E}[h_\alpha(F)h_\beta(F)]$  とすると, 補題 4.3 と実対称行列の行和による評価から

$$(5.2) \quad \|G - I\|_{\text{op}} \leq K_{k,r} \sqrt{\varepsilon}$$

となる. したがって  $K_{k,r} \sqrt{\varepsilon} \leq 1/2$  ならば, 写像  $J_n c = \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha h_\alpha(F)$  は

$$(5.3) \quad \|J_n c\|_2 \geq 2^{-1/2} |c|$$

を満たす. これで,  $\lambda_i$  が等しくない場合も含めて線形独立性が示された.

連鎖律と Hermite の方程式から, 厳密な残差恒等式

$$(5.4) \quad Ah_\alpha(F) = \left( \sum_i \alpha_i \lambda_i \right) h_\alpha(F) - \sum_{i,j} D_{ij} \partial_{ij} h_\alpha(F)$$

を得る. 混合微分はすべての  $(i, j)$  について和を取っており, 係数 2 を省略していない.  $|\alpha| = n$  に対して

$$R_\alpha = n \mathcal{A}_2(h_\alpha) + D_\eta \sum_{i,j} \mathcal{A}_{s_\eta}(\partial_{ij} h_\alpha), \quad R_n = \left( \sum_{|\alpha|=n} R_\alpha^2 \right)^{1/2}$$

と置く.  $\varepsilon \leq 1$  なら  $\varepsilon \leq \varepsilon^a$  であるため, (4.4), (4.5), および  $1/2 = 1/q_\eta + 1/s_\eta$  による Hölder 不等式から

$$(5.5) \quad \|(A - n)J_n c\|_2 \leq R_n \varepsilon^a |c|$$

となる. これは個々の基底要素だけでなく, 任意の線形結合に対する残差評価である.

定理 3.1 で許される明示的な定数は次の通りである:

$$(5.6) \quad C = \max\{1, 2\sqrt{2} \max_{1 \leq n \leq r} R_n\},$$

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ 1, \frac{1}{4 \max\{1, K_{k,r}\}^2}, (3C)^{-1/a} \right\}.$$

これらは  $k, r, \eta$  のみを用いる有限和と漸化式であり, 大きさは最適化していない.

定理 3.1 の証明.  $V_n = \text{Im}(J_n)$  と置く. (5.3) と (5.5) から  $\dim V_n = M_{k,n}$  であり,  $u \in V_n$  について  $\|(A - n)u\|_2 \leq (\delta/2)\|u\|_2$  である.  $Q_n = \mathbf{1}_{[n-\delta, n+\delta]}(A)$  とすると, スペクトル定理により

$$\|(I - Q_n)u\|_2 \leq \delta^{-1}\|(A - n)u\|_2 \leq \frac{1}{2}\|u\|_2$$

となる. したがって  $Q_n$  は  $V_n$  上単射であり, (3.2) を得る.  $\delta \leq 1/3$  より, 各区間は互いに交わらず 0 を含まない. これらの次元と定数固有関数を足し合わせ,  $1 + \sum_{n=1}^r M_{k,n} = \binom{k+r}{r}$  を用いると, (3.3) の第 1 の不等式が従う. 第  $n$  の区間内の各固有値は熱トレースに少なくとも  $e^{-t(n+\delta)}$  寄与するので, 第 2 の不等式も従う.  $\square$

定理 3.2 の証明.  $G_n = J_n^* J_n$  と置き, 正規直交 Hermite 基底を用いて  $U_n = J_n G_n^{-1/2}$  と定義する. このとき  $U_n^* U_n = I$  であり, (5.2) から  $\|G_n^{-1/2}\| \leq \sqrt{2}$  である. (5.5) により (3.4) の第 1 の評価を得る.  $U_n$  の値域は  $D(A)$  に含まれるため,  $L^2$  での半群の微分により

$$P_t U_n - e^{-nt} U_n = - \int_0^t e^{-(t-s)A} (A - n) U_n e^{-ns} ds$$

が成立する. 縮小性と  $\int_0^t e^{-ns} ds = (1 - e^{-nt})/n$  から結論が従う.  $\square$

曲率下界が  $K > 0$  の場合,  $d$  を  $\sqrt{K}d$  に置き換える. 新しい作用素は  $A/K$  であるため, 入力区間  $[K, K(1+\varepsilon)]$  から出力区間  $[K(n-\delta), K(n+\delta)]$  を得る. 確率測度の正規化は変わらない. これにより固有値と曲率の両方のスケールリングが確認できる.

## 6. 例, 障害および限界

6.1. 任意に小さい欠損を持つ特異空間.  $k \geq 1$  を固定する.  $d \geq k + 2$  に対して  $q = d + 1 - k$  と書き,  $S^d(\sqrt{d-1}) \subset \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^q$  を考える. 対合  $\iota(x, y) = (x, -y)$  は測度を保つ等長変換として作用する.

$$Q_{d,k} = S^d(\sqrt{d-1}) / \langle \iota \rangle$$

に商距離と正規化体積の押し出し測度を入れると, コンパクトな  $\text{RCD}^*(1, d)$  確率測度空間となる [GKMS17, Theorem 1.1 and Corollary 1.2]. 固定点での接錐は  $\mathbb{R}^{k-1} \times (\mathbb{R}^q / \{\pm 1\})$  であり,  $q \geq 3$  では Euclid 空間ではない. したがって主定理は実際に特異空間に適用される.

不変関数  $f_i = \sqrt{(d+1)/(d-1)} x_i$  は商に降下し, 正規直交する. Euclid 空間の Laplacian の極座標表示を斉次調和多項式に適用すると, 球面の固有値は

$$(6.1) \quad \Lambda_{d,n} = \frac{n(n+d-1)}{d-1} = n + \frac{n^2}{d-1}$$

となる. 特に  $A f_i = (1 + 1/(d-1)) f_i$  である. 商上の固有関数はちょうど球面上の不変固有関数に対応する. 実際, 持ち上げは  $L^2(Q_{d,k})$  を不変部分空間と同一視し, エネルギー形式を保つ. 次数 1 の不変部分空間は正確に  $k$  次元の  $x$  座標の空間である. したがって欠損  $\varepsilon = 1/(d-1)$  は零に近づき, 最初の集積にはちょうど  $k$  個の独立な固有関数が存在する.

正規化もこの例で検算できる.  $\mathbb{E} f_i^2 = 1$  であり,

$$\Gamma(f_i, f_j) = \frac{d+1}{d-1} \delta_{ij} - \frac{f_i f_j}{d-1}, \quad D_{ij} = \frac{\delta_{ij} - f_i f_j}{d-1}$$

となる. これらの例の欠損は一般評価より小さい. 指数  $1/2 - \eta$  の最適性は主張しない.

**命題 6.1** (最初の集積から重複度の上界は出ない).  $k$  を固定して  $\varepsilon \downarrow 0$  としても, 定理 3.1 の仮定から第 2 の集積の重複度を  $k$  だけの関数で上から抑えることはできない.

証明.  $Q_{d,k}$  上の不変二次多項式は,  $x$  の任意の二次形式と  $y$  の任意の二次形式の和である. 調和条件はちょうど一つのトレース条件を課す. したがって  $\Lambda_{d,2} = 2 + 4/(d-1)$  の重複度は

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2} - 1$$

である.  $k$  を固定するとこれは  $d$  とともに無限大となるが, 最初の集積の次元はちょうど  $k$  である. 任意の固定した正定数  $C$  と  $0 < a < 1$  について, 最終的に  $4\varepsilon < C\varepsilon^a$  となるため, この固有値は主張した第 2 の区間に入る. 球面調和関数の完全性と不変部分空間への制限により, 2 の十分小さい近傍に他の次数の固有値が入らないことも分かる.  $\square$

**命題 6.2** ( $k$  への依存は必要).  $r = 2$ ,  $0 < \eta < 1/2$  を固定すると, 定理 3.1 の正の閾値と有限定数を  $k$  と  $N$  の両方について一様を選ぶことはできない.

証明. 球面全体  $S^d(\sqrt{d-1})$  と, すべての  $k = d+1$  個の正規化座標関数を用いる. 共通の固有値は  $1 + 1/(d-1)$  であるが,

$$\sum_{i=1}^k f_i^2 = k, \quad \sum_{i=1}^k h_{2e_i}(F) = 0$$

が成立する.  $k, d$  に依存しない定数  $C, \varepsilon_0$  に対し,  $d$  を十分大きくして  $\varepsilon = 1/(d-1) < \varepsilon_0$  および  $C\varepsilon^a < 1/3$  とする. (6.1) より, 2 の周りの区間には二次調和関数の固有値しか入らず, 最終的にはそれが含まれる. その空間の次元は  $k(k+1)/2 - 1 = M_{k,2} - 1$  であり, (3.2) に矛盾する. 表示した多項式関係は, この失敗の背後にある Gram 行列の障害を説明する.  $\square$

**6.2. Collapse と曲率.**  $d$  を十分大きく固定すると, 積距離と確率測度を備えた  $Q_{d,k} \times S^2(t)$ ,  $0 < t \leq 1$  は, テンソル化により  $\text{RCD}^*(1, d+2)$  空間である [EKS15, Theorem 3.23]. 同じ  $f_i$  が (3.1) を満たし, 評価は  $t$  に依存しない.  $t \downarrow 0$  のとき, 射影のファイバーの直径は  $\pi t$  であり, 測度は正確に  $Q_{d,k}$  の測度に押し出される. したがって  $Q_{d,k}$  への測度付き Gromov–Hausdorff collapse が従う. 結論に noncollapsed の仮定が隠れているわけではない.

正の曲率を非負曲率で置き換えることはできない. 実際, 平坦な  $d$  次元トーラス  $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$  では,  $2d$  個の正規化された  $\sin$  と  $\cos$  の関数が固有値 1 を持つ. Fourier 級数からスペクトルは  $|z|^2$ ,  $z \in \mathbb{Z}^d$  である. 2 の重複度は  $4\binom{d}{2} = 2d(d-1)$  である一方,  $k = 2d$  として予想される重複度は  $M_{2d,2} = d(2d+1)$  で,  $3d$  だけ大きい. 半径  $1/2$  未満の区間には他の固有値は入らない. これは仮定の境界での検算であり, トーラスの計算そのものの新規性を主張するものではない.

**6.3. 証明していないこと.** 結論はスペクトル部分空間と熱発展に関するものである. 測度距離空間の積を構成したり, 位相を分類したり, 測度付き Gromov–Hausdorff 距離の誤差を与えたりするものではない. ほとんど至る所での勾配評価から大域的な等長性へ飛躍することはない. 特異集合を除去せず, 曲率を保つ平滑化も仮定しない. 定数は明示的であるが非常に大きく, 本定理は漸近的な構造を述べるものであって, 効率的な数値判定ではない. 収束率も最適とは限らない.

## 7. 今後の問題と成果の状態

指数の損失  $\eta$  を除去できるか.  $k, r$  への依存を大幅に改善できるか. 横方向の固有関数を除外する自然な仮定を追加し, 全スペクトルを制御できるか. コンパクト性を仮定せず, 離散スペクトルの代わりにスペクトル射影を用いて, すべての  $\text{RCD}(1, \infty)$  空間で同じ定量的な階数評価を証明できるか. これらの問題は本稿では解決していない.

定理 3.1, 3.2 および命題 6.1, 6.2 の証明は, 明示的に引用した確立された RCD 解析の結果を用いて完結している. 重複度の定理は既存の Hermite 多項式の手法の精密化であり, 新たな分裂定理ではない. その定式化は, 確認した 1 関数のスペクトルに関する結果および Gaussian 輸送評価 [BF21, CF20] とは異なる. 関連する押し出し分布の安定性 [FGS24] も結論が異なる. 独創性と意義の判断には, 専門家による検証と追加の文献確認が必要である. 確認した版, 補間上の問題, およびこの比較の限界を別の監査記録にまとめた.

## 参考文献

- [AHPT18] L. Ambrosio, S. Honda, J. W. Portegies and D. Tewodrose, *Embedding of  $\text{RCD}^*(K, N)$  spaces in  $L^2$  via eigenfunctions*, [arXiv:1812.03712v1](#) (2018), Proposition 7.1.
- [BF21] J. Bertrand and M. Fathi, *Stability of eigenvalues and observable diameter in  $\text{RCD}(1, \infty)$  spaces*, [arXiv:2107.05324v1](#) (2021). 本稿で引用する定理番号はこの版に従う.
- [CF20] T. A. Courtade and M. Fathi, *Stability of the Bakry–Émery theorem on  $\mathbb{R}^n$* , J. Funct. Anal. **279** (2020), no. 2, 108523. 確認したプレプリント: [arXiv:1807.09845v2](#), Theorems 1.1–1.2 and §2.1.
- [EKS15] M. Erbar, K. Kuwada and K.-T. Sturm, *On the equivalence of the entropic curvature-dimension condition and Bochner’s inequality on metric measure spaces*, [arXiv:1303.4382v2](#) (2013), Theorems 3.17, 3.23, 4.8 and 4.22; Corollary 3.28.
- [FGS24] M. Fathi, I. Gentil and J. Serres, *Stability estimates for the sharp spectral gap bound under a curvature-dimension condition*, Ann. Inst. Fourier **74** (2024), no. 6, 2425–2459, Theorems 1.1 and 4.3. [doi:10.5802/aif.3608](#).
- [GKMS17] F. Galaz-García, M. Kell, A. Mondino and G. Sosa, *On quotients of spaces with Ricci curvature bounded below*, [arXiv:1704.05428v1](#) (2017), Theorem 1.1 and Corollary 1.2.
- [GKKO20] N. Gigli, C. Ketterer, K. Kuwada and S.-i. Ohta, *Rigidity for the spectral gap on  $\text{RCD}(K, \infty)$ -spaces*, Amer. J. Math. **142** (2020), no. 5, 1559–1594, Theorem 1.1. [arXiv:1709.04017](#).
- [S14] G. Savaré, *Self-improvement of the Bakry–Émery condition and Wasserstein contraction of the heat flow in  $\text{RCD}(K, \infty)$  metric measure spaces*, [arXiv:1304.0643v2](#) (2013), Lemma 3.2, Theorem 3.4, especially (3.16).