

SHARP POLARIZED CHERN INEQUALITIES FOR RANK-FOUR MATROIDS: INCIDENCE CRITERIA, CHANGING SIGNS, AND EQUALITY

CHATGPT 6 ASTRA

ABSTRACT. For the ordinary tangent class on the maximal Chow ring of a loopless rank-four matroid, we prove that $9c_2 - 3c_1^2$ has strictly positive degree against every nonzero nonnegative combination of α and β . The universal coefficient 9 is optimal even among paving matroids realizable in any fixed positive characteristic. Explicit weighted incidence formulas determine the entire positivity interval for the usual coefficient 8; these intervals can shrink to zero. For rank-four sparse paving matroids the optimal coefficient is 3. Explicit examples on 469 and 26 points show, respectively, failure of the standard coefficient and the need for sparsity. The two optimal inequalities have no nonzero equality cases, while the usual discriminant can vanish at an interior polarization. Complete algebraic proofs, exact computations, and a bounded literature audit are included. The English and Japanese versions contain the same mathematical content.

CONTENTS

1. Introduction	2
2. Statement of the main theorems	3
3. Comparison with previous work	4
4. Matroid Chow rings and building sets	4
5. Tangent and Chern classes	5
6. Nef classes and polarizations	6
7. Rank-four intersection calculation	6
8. The polarized inequality and its optimal constant	7
9. Explicit counterexamples and shrinking intervals	8
10. Sparse paving matroids and the constant three	11
11. Equality and rigidity	12
12. Computational experiments and reproducibility	13
13. Mixed inequalities and the comparison of proof strategies	14
14. Realizable matroids and wonderful models	15
15. Novelty audit and open problems	16
日本語版	17
1. 序論	17
2. 主定理	17
3. 先行研究との比較	19

Date: 10 September 2026.

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 05B35, 14C17; Secondary 14M25, 52B40.

Key words and phrases. matroid Chow ring, tangent class, Miyaoka–Yau discriminant, nef polarization, sparse paving matroid.

4. マトロイド Chow 環と building set	19
5. 接類と Chern 類	20
6. Nef 類と偏極	21
7. 階数 4 の交叉計算	21
8. 偏極付き不等式と最適定数	22
9. 明示的反例と縮小する区間	23
10. Sparse paving マトロイドと係数 3	25
11. 等号と剛性	26
12. 計算機実験と再現性	27
13. Mixed 不等式と証明戦略の比較	28
14. 実現可能マトロイドと wonderful model	29
15. 新規性監査と未解決問題	29
References	31

This note was generated by ChatGPT 6. Iwai has NOT verified any of its mathematical content. It may therefore contain mathematical errors and should be read with caution. A Japanese version is provided below.

1. INTRODUCTION

Cheng constructs the tangent K -class of a matroid and proves a Miyaoka–Yau inequality against the hyperplane class α ; Cheng–Lin give a stronger α -inequality and explicitly warn that the usual inequality can fail against β [Che26a, CL26, Che26b]. The new point of this work is a sharp replacement on the entire cone generated by α and β in rank four, together with an incidence criterion for the usual coefficient, an explicit family with shrinking positivity intervals, and a stronger sharp result for sparse paving matroids.

Throughout the new theorems the building set is maximal. For rank $r = d + 1$ we use the ordinary tangent class, not the logarithmic tangent class, and set

$$\Delta_M = 2(d + 1)c_2(T_M) - dc_1(T_M)^2.$$

The substantive results have $r = 4$, $d = 3$. They are unconditional statements about all loopless matroids of this rank; realizability is unnecessary. Higher ranks are explored computationally, but no general mixed theorem in those ranks is asserted.

The distinction between validity and sharpness is essential. On our rank-four cone the coefficient 8 fails; the optimal universal replacement is 9. Equality for this optimal inequality never occurs for a nonzero polarization. Its sharpness is asymptotic, even among paving matroids realizable in any fixed positive characteristic. The coefficient drops to 3 for rank-four sparse paving matroids, again with strict inequality and asymptotic sharpness. A 26-point paving example shows that sparsity cannot be omitted. We also construct a 469-point standard-coefficient counterexample. For the original coefficient 8, equality can occur at an interior point of the segment joining α and β .

2. STATEMENT OF THE MAIN THEOREMS

Write $\overline{M} = \text{si}(M)$ for the simplification. All cardinalities below count points of $\overline{M}$. Put

$n = |\overline{M}|$, $\mathcal{L} = \{F : \text{rk } F = 2\}$, $\mathcal{H} = \{F : \text{rk } F = 3\}$, $f_i = \#\{F : \text{rk } F = i\}$, and, for $\ell \in \mathcal{L}$, put $h_\ell = \#\{H \in \mathcal{H} : \ell \subset H\}$. Define

$$(2.1) \quad W_2 = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} (|\ell| - 1), \quad W_3 = \sum_{H \in \mathcal{H}} (|H| - 1), \quad W_{23} = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} (|\ell| - 1)h_\ell.$$

These are weighted incidence counts, rather than the usual unweighted flag Whitney numbers. Let $\mathcal{C}_M = \mathbb{R}_{\geq 0}\alpha + \mathbb{R}_{\geq 0}\beta$.

Theorem 2.1 (Optimal universal coefficient on $\mathcal{C}_M$). *For every loopless rank-four matroid with maximal building set and every $a, b \geq 0$, $a + b > 0$,*

$$(2.2) \quad \deg((9c_2(T_M) - 3c_1(T_M)^2)(a\alpha + b\beta)) > 0.$$

The least real number λ for which $\deg((\lambda c_2 - 3c_1^2)L) \geq 0$ holds for every such M and $L \in \mathcal{C}_M$ is 9. For each fixed prime p , the least coefficient remains 9 if M is restricted to paving matroids realizable over $\mathbb{F}_p$. More precisely, with $I_{12} = \sum_\ell |\ell|$ and $I_{13} = \sum_H |H|$, the left-hand side of (2.2) equals

$$(2.3) \quad a(6 + 12f_2) + 6b\left[n - 1 + f_2 + \sum_H (|H| - 2) + (I_{13} - I_{12})\right],$$

and $I_{13} \geq I_{12}$. Thus the equality locus in the closed cone is exactly $L = 0$.

Theorem 2.2 (Exact positivity interval for the standard discriminant). *For every loopless rank-four matroid, put*

$$A = 11f_2 > 0, \quad B = 12W_3 - 3W_2 - W_{23}.$$

Then

$$(2.4) \quad P_M(t) = \deg((8c_2 - 3c_1^2)((1-t)\alpha + t\beta)) = A(1-t) + Bt.$$

If $B > 0$, the polynomial is positive throughout $[0, 1]$. If $B = 0$, it vanishes exactly at 1. If $B < 0$, its nonnegative locus in $[0, 1]$ is exactly

$$[0, t_M], \quad t_M = \frac{A}{A - B},$$

and equality occurs exactly at t_M . In particular the complete combinatorial equality criterion, for fixed $0 < t \leq 1$, is

$$(2.5) \quad W_{23} + 3W_2 = 12W_3 + 11f_2 \frac{1-t}{t}.$$

There is no universal $\varepsilon > 0$ for which the standard inequality holds for every rank-four matroid and every $t \in [0, \varepsilon]$.

Theorem 2.3 (Sparse paving improvement). *If the simplification of a loopless rank-four matroid is sparse paving, then*

$$\deg((3c_2 - 3c_1^2)(a\alpha + b\beta)) > 0 \quad (a, b \geq 0, a + b > 0).$$

The optimal universal coefficient λ on this class and cone is 3. Equality again occurs only at $L = 0$. For the standard coefficient 8, $P_M(t) > 0$ throughout $[0, 1]$.

3. COMPARISON WITH PREVIOUS WORK

The following comparison records the scope of the novelty claim. We do not claim the construction of T_M , the nefness of α, β , or the failure of coefficient 8 for arbitrary nef classes as new.

Reference	Previously known result	Difference from this work
Cheng [Che26a], Def. 3.1, Thms. 3.4, 4.1	Tangent K -class and Chern formulas.	We evaluate the degree-two classes against β and prove optimal bounds.
Cheng [Che26b], Cor. 4.23	Standard inequality against α , including arbitrary building sets.	Our new theorems concern a second polarization and its cone, for the maximal set.
Cheng–Lin [CL26], Cor. 4.15, Rem. 4.16	The stronger α coefficient $(d + 2)/2$; a warning about failure at β .	We determine rank-four constants 9 and 3, exact intervals, and explicit asymptotic obstructions.
AHK [AHK18]; ADH [ADH23]	Hodge theory and mixed Hodge theory.	Our Chern discriminant requires a separate incidence calculation.
Mannino [Man23], Thms. 1.2, 1.5	Logarithmic Chern numbers and a rank-three ratio bound.	Our ordinary tangent class, rank, and polarized intersections differ.
Aliabadi [Ali26], Lem. 2.3	Construction of paving matroids from large hyperplanes.	The construction is not new; our claim concerns sharp polarized Chern bounds.
de Borbon–Panov [BP26], Thm. 1.1	An inequality for a parabolic class of stable weighted complex arrangements.	Our class is the ordinary tangent class, and no stability or complex realization is assumed.

The restriction of (2.2) to the α ray is much weaker than Cheng–Lin’s result, and is not itself a new inequality. The contribution is the β estimate, its optimal universal constant, and its combination with the exact obstruction for coefficient 8.

4. MATROID CHOW RINGS AND BUILDING SETS

A matroid rank function $\text{rk} : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ is monotone, submodular, and satisfies $0 \leq \text{rk}(S) \leq |S|$. A flat is a subset F such that adding any element outside F increases rank. Looplessness means $\text{rk}\{e\} = 1$ for every e . Points are rank-one flats. Simplification retains one representative from each point. It preserves the ranked flat lattice.

For the maximal building set, the ring used here is

$$(4.1) \quad A^\bullet(M) = \frac{\mathbb{Z}[x_F : \emptyset \neq F \neq E \text{ a flat}]}{I + J},$$

where $\deg x_F = 1$, I is generated by $x_F x_G$ for incomparable flats, and J by

$$\sum_{F \ni i} x_F - \sum_{F \ni j} x_F \quad (i, j \in E).$$

It has top degree $d = r - 1$. The degree of a monomial belonging to a complete flag of nonempty proper flats is 1; this normalizes the degree map. We extend scalars to $\mathbb{Q}$ or $\mathbb{R}$ when needed [FY04, AHK18].

A building set $\mathcal{G}$ contains nonempty flats and here is required to contain E . For each flat F , its maximal $\mathcal{G}$ -members $G_i \subseteq F$ must induce an isomorphism $\prod_i [\emptyset, G_i] \simeq [\emptyset, F]$. A set is nested if the join of every incomparable subcollection of at least two members is outside $\mathcal{G}$. The Feichtner–Yuzvinsky presentation uses variables for all $G \in \mathcal{G}$, nonnested monomials, and relations $\sum_{G \supseteq p} x_G = 0$ for points p . Eliminating $x_E = -\alpha$ gives (4.1) when $\mathcal{G}$ is maximal [FY04, Definitions 1–3].

Remark 4.1. All weighted counts in this paper are taken after simplification. Using the sizes of parallel classes instead gives incorrect β formulas. The presentations, degree maps, cutting classes and tangent formulas are transported by the ranked lattice isomorphism, so all our statements extend from simple to loopless matroids. Coloops are permitted: they do not change $d = r - 1$ or remove the exceptional terms. Loops are excluded throughout.

5. TANGENT AND CHERN CLASSES

For the maximal building set, Cheng’s original definition is the restriction of $T_{X_E} - Q_M$ from the permutohedral variety, where Q_M is the tautological quotient K -class [Che26a, Definition 3.1]. For general $\mathcal{G}$, set

$$\theta_F = \alpha - \sum_{\substack{H \in \mathcal{G} \\ F \subseteq H \subsetneq E}} x_H.$$

The definition in [Che26b, Definition 3.3] is

$$\begin{aligned} T_{M, \mathcal{G}} &= r[\mathcal{O}(\alpha)] - [\mathcal{O}] \\ &\quad + \sum_{F \in \mathcal{G} \setminus \{E\}} ([\mathcal{O}(x_F)] - [\mathcal{O}]) \\ &\quad + \text{rk}(F)([\mathcal{O}(\theta_F)] - [\mathcal{O}(\theta_F + x_F)]). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Its rank is $r - 1 = d$: every summand in the sum has rank zero. The Chern convention is $c(\mathcal{O}(D)) = 1 + D$, extended multiplicatively to virtual differences. Thus

$$c(T_{M, \mathcal{G}}) = (1 + \alpha)^r \prod_{F \in \mathcal{G} \setminus \{E\}} (1 + x_F) \left(\frac{1 + \theta_F}{1 + \theta_F + x_F} \right)^{\text{rk } F}. \tag{5.2}$$

The reciprocal factors are finite power series in the nilpotent positive-degree ideal. For a point p , $\theta_p = 0$, and its entire factor is 1.

For a directly implementable expansion put $Q_2 = 2 \text{ch}_2(T_M)$. The degree-one and degree-two terms of (5.2) give

$$\begin{aligned} c_1 &= r\alpha - \sum_{\text{rk } F \geq 2} (\text{rk } F - 1)x_F, \\ Q_2 &= r\alpha^2 + \sum_{\text{rk } F \geq 2} ((1 - \text{rk } F)x_F^2 - 2 \text{rk}(F)\theta_F x_F), \\ c_2 &= \frac{1}{2}(c_1^2 - Q_2), \quad \Delta_M = c_1^2 - rQ_2. \end{aligned} \tag{5.3}$$

These identities check both the minus sign and the coefficient in the question: $2rc_2 - (r-1)c_1^2 = c_1^2 - rQ_2$. All intersections under consideration have degree $2 + (d-2) = d$.

In the realizable case (5.1) is the class of the ordinary tangent bundle of the corresponding wonderful model. Subtracting $\sum_F ([\mathcal{O}(x_F)] - [\mathcal{O}])$ gives the logarithmic tangent class [Che26b, Section 3.2]. These two Chern theories must not be interchanged.

6. NEF CLASSES AND POLARIZATIONS

We take the established classes

$$(6.1) \quad \alpha = \sum_{F \ni e} x_F, \quad \beta = \sum_{F \not\ni e} x_F.$$

They are independent of e , since $\alpha + \beta = \sum_F x_F$ and the linear relations identify the α representatives. They are nef in the convex piecewise-linear sense of [AHK18, Definition 5.7 and Lemma 9.7]. On the ambient permutohedral variety, Cremona inversion interchanges them. This does not assert a Cremona automorphism of the Bergman fan of an arbitrary matroid. Our proof requires only their nefness, not ampleness or the stronger operational positivity notions studied in [Che26a].

For a simple rank-four matroid, summing the n point relations yields

$$(6.2) \quad \beta = (n-1)\alpha - \sum_{\ell} (|\ell| - 1)x_{\ell} - \sum_H (|H| - 1)x_H.$$

Indeed $n\alpha = \sum_F |F|x_F$; subtract this from the equality $\alpha + \beta = \sum_F x_F$. Formula (6.2) is the link between polarization and incidence counts.

7. RANK-FOUR INTERSECTION CALCULATION

We give a ring proof valid also for nonrealizable matroids.

Lemma 7.1. *Let $\ell \subset H$ be a line and a hyperplane. The required top-degree values are*

<i>monomial</i>	α^3	αx_{ℓ}^2	x_H^3	$x_{\ell}^2 x_H$	$x_{\ell} x_H^2$	x_{ℓ}^3
deg	1	-1	1	-1	0	$2(h_{\ell} - 1)$

Also $\alpha x_H = 0$ and $\alpha^2 x_{\ell} = 0$ in the Chow ring. Products of incomparable flats vanish.

Proof. Choosing an element outside H in (6.1) proves $\alpha x_H = 0$. Choosing $e \notin \ell$ gives $\alpha x_{\ell} = x_{\ell} x_{\text{cl}(\ell \cup e)}$, so $\alpha^2 x_{\ell} = 0$. If $e \in H \setminus \ell$, multiplication of its α relation by $x_{\ell} x_H$ gives $x_{\ell} x_H^2 = 0$.

Choose a point $p \subset \ell$. The p relation, multiplied by $x_{\ell} x_H$, reads $0 = x_p x_{\ell} x_H + x_{\ell}^2 x_H + x_{\ell} x_H^2$. The first term has degree 1, hence $\deg(x_{\ell}^2 x_H) = -1$ and $\deg(\alpha x_{\ell}^2) = -1$. Choosing $e \in H \setminus p$ in the relation multiplied by $x_p x_H$ gives $0 = x_p x_{\text{cl}(p \cup e)} x_H + x_p x_H^2$, whence $\deg(x_p x_H^2) = -1$. The p relation multiplied by x_H^2 now proves $\deg x_H^3 = 1$.

Finally, $\deg(\alpha x_p x_{\ell}) = 1$, by choosing $e \notin \ell$. Choosing instead a point of ℓ different from p gives $1 = \deg(x_p x_{\ell}^2) + h_{\ell}$. The p relation multiplied by x_{ℓ}^2 is consequently $-1 = (1 - h_{\ell}) + \deg x_{\ell}^3 - h_{\ell}$. This proves the last formula. The normalization $\deg \alpha^3 = 1$ follows by successively using the same relation to extend a flag (equivalently [AHK18, Proposition 5.8]). $\square$

Proposition 7.2. *With $u = n - 1$, the endpoint Chern numbers are*

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \deg(c_2\alpha) &= 6 + f_2, & \deg(c_1^2\alpha) &= 16 - f_2, \\ C := \deg(c_2\beta) &= 6u - 3W_2 + W_{23}, \\ S := \deg(c_1^2\beta) &= 16u - 7W_2 + 3W_{23} - 4W_3. \end{aligned}$$

Consequently $\deg(\Delta_M\beta) = 12W_3 - 3W_2 - W_{23}$ and $\deg((9c_2 - 3c_1^2)\beta) = 6(u - W_2 + 2W_3)$.

Proof. From (5.3), in rank four,

$$\begin{aligned} c_1 &= 4\alpha - \sum_{\ell} x_{\ell} - 2 \sum_H x_H, \\ Q_2 &= 4\alpha^2 + \sum_{\ell} (3x_{\ell}^2 - 4\alpha x_{\ell}) + 4 \sum_{\ell \subset H} x_{\ell} x_H + \sum_H (4x_H^2 - 6\alpha x_H). \end{aligned}$$

Substitution of Lemma 7.1 gives the full intermediate table

	α	x_{ℓ}	x_H
c_1^2	$16 - f_2$	$6 - 2h_{\ell}$	$4 - f_2(M H)$
c_2	$6 + f_2$	$4 - 2h_{\ell}$	$f_2(M H)$
$8c_2 - 3c_1^2$	$11f_2$	$14 - 10h_{\ell}$	$11f_2(M H) - 12$.

Every entry means the degree after multiplying by the column divisor. For example, $\deg(c_1^2 x_{\ell}) = 2(h_{\ell} - 1) + 8 - 4h_{\ell} = 6 - 2h_{\ell}$. The other entries follow by inserting each of the six monomials in the two displayed expansions and using $2c_2 = c_1^2 - Q_2$.

The hyperplanes containing ℓ partition $E \setminus \ell$ after subtracting ℓ : every outside point determines the unique flat $\text{cl}(\ell \cup e)$. Therefore

$$(7.2) \quad \sum_{H \supset \ell} (|H| - |\ell|) = n - |\ell|,$$

and, on summing over ℓ ,

$$\sum_H (|H| - 1) f_2(M|H) = u f_2 - W_2 + W_{23}.$$

Multiplying (6.2) by c_2 now gives

$$C = u(6 + f_2) - 4W_2 + 2W_{23} - (u f_2 - W_2 + W_{23}) = 6u - 3W_2 + W_{23}.$$

Multiplication by c_1^2 gives

$$S = u(16 - f_2) - 6W_2 + 2W_{23} - 4W_3 + (u f_2 - W_2 + W_{23}),$$

which is the stated formula. The two discriminant formulas follow by subtraction. $\square$

8. THE POLARIZED INEQUALITY AND ITS OPTIMAL CONSTANT

Lemma 8.1 (An elementary incidence inequality). *For every simple rank-four matroid, $I_{13} \geq I_{12}$.*

Proof. First let N be a simple rank-three matroid with v points and w lines. Its point–line incidence matrix D has

$$DD^\top = \mathbf{1}\mathbf{1}^\top + \text{diag}(t_p - 1),$$

where t_p is the number of lines through p . Distinct points lie on exactly one line. Every $t_p \geq 2$, since a single line through p containing every other point would make N rank two. Thus this real matrix is positive definite: on a nonzero vector z its quadratic form is $(\sum z_p)^2 + \sum (t_p - 1)z_p^2 > 0$. It has rank v , so $w \geq v$.

Apply this argument to the simplification of M/p for every point p of M . The contraction is loopless because p is a flat. Its points correspond to lines of M containing p and its lines to hyperplanes containing p . Summing $w \geq v$ over p gives exactly $I_{13} \geq I_{12}$. $\square$

Proof of Theorem 2.1, except sharpness. Proposition 7.2 gives $\deg((9c_2 - 3c_1^2)\alpha) = 6 + 12f_2$. At the other endpoint use

$$\begin{aligned} u - W_2 + 2W_3 &= u - (I_{12} - f_2) + 2(I_{13} - f_3) \\ &= u + f_2 + \sum_H (|H| - 2) + (I_{13} - I_{12}). \end{aligned}$$

Every summand on the last line is nonnegative, and $u > 0$. Lemma 8.1 proves the claimed positive certificate. Linearity gives (2.3). Moreover a nonnegative combination with $a+b > 0$ cannot be the zero class: $\deg(\alpha^2(a\alpha + b\beta)) = a+b(n-1) > 0$. $\square$

The interval and equality assertions of Theorem 2.2. The two endpoint formulas in Proposition 7.2 give (2.4). A rank-four matroid has a line, so $A > 0$. Solving this affine inequality gives all three cases. Setting its value equal to zero and dividing by $t > 0$ yields (2.5). The absence of a uniform interval and the sharpness of 9 follow from the next family. $\square$

9. EXPLICIT COUNTEREXAMPLES AND SHRINKING INTERVALS

For a prime power q , let $M_q = \text{PG}(3, q)$ be the vector matroid on the one-dimensional subspaces of $\mathbb{F}_q^4$. Counting subspaces gives

$$\begin{aligned} n &= (q+1)(q^2+1), & f_2 &= (q^2+1)(q^2+q+1), & f_3 &= n, \\ |\ell| &= q+1, & |H| &= q^2+q+1, & h_\ell &= q+1. \end{aligned}$$

For completeness, the point count is $(q^4-1)/(q-1)$. The line count is the number $(q^4-1)(q^4-q)$ of ordered independent pairs, divided by $(q^2-1)(q^2-q)$. Hyperplanes are kernels of nonzero linear forms up to scaling. The local counts follow from the same calculation inside a two- or three-dimensional subspace, or in the quotient by a line. Thus these formulas do not rely on an unexamined catalogue.

Substituting $W_2 = qf_2$, $W_3 = (q^2 + q)n$, and $W_{23} = q(q + 1)f_2$ in Proposition 7.2 gives

$$(9.1) \quad \begin{aligned} C_q &= q(q + 1)(q^2 - 3q + 4)(q^2 + q + 1), \\ S_q &= q(3q^5 - 5q^4 - 6q^3 + 3q^2 + 7q + 8), \\ B_q &= -q(q^2 + 1)(q^3 - 7q^2 - 19q - 8), \\ 9C_q - 3S_q &= 6q(q^4 + 3q^3 + 3q^2 + 4q + 2) > 0. \end{aligned}$$

In particular $C_q > 0$ and $3S_q/C_q \rightarrow 9$. For every $\lambda < 9$ choose prime powers tending to infinity, for example $q = 2^k$; then $(\lambda C_q - 3S_q) < 0$ eventually. This proves sharpness in Theorem 2.1.

The cubic $g(q) = q^3 - 7q^2 - 19q - 8$ is negative for $2 \leq q \leq 7$, and $g(8) = -96$, $g(9) = -17$, $g(10) = 102$. Its derivative is positive for $q \geq 6$. Hence among prime powers the first negative B_q occurs at $q = 11$. There

$$P_{M_{11}}(t) = 178486 - 536800t, \quad t_{M_{11}} = \frac{133}{400}.$$

For $q \geq 11$ a prime power,

$$(9.2) \quad t_{M_q} = \frac{11(q^2 + q + 1)}{q^4 - 7q^3 - 8q^2 + 3q + 11} \sim \frac{11}{q^2}.$$

This proves the last assertion of Theorem 2.2. Rank four is the smallest possible counterexample rank for the stated discriminant: in rank three its degree is $8f_2 > 0$ and no polarization factor remains. We make no claim of minimal ground-set size. The number 1464 for M_{11} is minimal only within the displayed projective-geometry family.

q	A_q	B_q	maximum allowed t
2	385	660	1
3	1430	3030	1
9	82082	12546	1
11	178486	-358314	133/400
13	342210	-1677390	61/360
16	771771	-8191104	1001/11625

9.1. Paving sharpness and a smaller explicit counterexample. A rank-four matroid is paving if every three-element subset is independent. The following construction uses familiar finite-field incidence objects; the new claim concerns their Chern intersections.

Proposition 9.1. *For every prime power $q \geq 2$, there is a rank-four paving matroid N_q , realizable over $\mathbb{F}_q$, on $n = q^2 + 1$ points. With $N = \binom{n}{2}$,*

$$(9.3) \quad \begin{aligned} \deg(c_2\beta) &= 6q^2 + (q - 2)N, & \deg(c_1^2\beta) &= 16q^2 + 3(q - 4)N, \\ P_{N_q}(t) &= N(11 + (9 - q)t). \end{aligned}$$

The coefficient 9 is sharp even on this family with q restricted to powers of any fixed prime. The standard coefficient 8 fails for $q > 20$ precisely when $t > 11/(q - 9)$. For $q \leq 20$ it is strictly positive on $[0, 1]$.

Proof. Put $K = \mathbb{F}_{q^2}$ and $X = \mathbb{P}^1(K)$. Call each image of $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ under $\mathrm{PGL}_2(K)$ a circle. Every three distinct points of X lie on exactly one circle. Here is a direct justification. Given independent representatives v_a, v_b of two points and a representative v_c of a third, write $v_c = uv_a + vv_b$. Both u, v are nonzero. The matrix with columns uv_a, vv_b sends $\infty, 0, 1$ to a, b, c . A projectivity fixing $\infty, 0, 1$ is scalar, so it is unique. If a circle contains these three points, precompose its defining projectivity with one over $\mathbb{F}_q$ taking $\infty, 0, 1$ to their preimages. Uniqueness shows that this circle is the one already constructed. Thus the circles form a $3\text{--}(q^2 + 1, q + 1, 1)$ design. In particular two distinct circles meet in at most two points.

For a realization, let V be the four-dimensional $\mathbb{F}_q$ -space of Hermitian 2×2 matrices over K , using the involution $z \mapsto z^q$. Send $[v] \in \mathbb{P}^1(K)$ to the projective class of vv^* in $\mathbb{P}(V)$. Multiplying v by $a \in K^*$ multiplies vv^* by $a^{q+1} \in \mathbb{F}_q^*$, so this is well defined. It is injective because the column space of vv^* recovers the line Kv .

The map $H \mapsto gHg^*$ is an invertible $\mathbb{F}_q$ -linear map of V . Hence the projective action just used is induced by linear transformations. The images of $\infty, 0, 1$ are linearly independent. They span the three-dimensional subspace of symmetric matrices over $\mathbb{F}_q$, whose intersection with our point set is exactly $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$. A point $z \in K \setminus \mathbb{F}_q$ has an off-diagonal entry outside $\mathbb{F}_q$, so lies outside this subspace. The point set therefore has rank four. By the projective action, every triple is independent, and its spanning hyperplane intersects the point set in its unique circle. Thus all rank-two flats are pairs, and all rank-three flats are circles. This verifies the claimed paving realization without appealing to a catalogue or assuming realizability from a design construction.

Counting triples gives $f_3 = \binom{q^2+1}{3} / \binom{q+1}{3} = q(q^2 + 1)$. The circles through a pair partition the other points into sets of size $q - 1$, so their number is $q + 1$. It follows that

$$f_2 = W_2 = N, \quad W_3 = 2N, \quad W_{23} = (q + 1)N.$$

Substitute these values into (7.1). This proves (9.3), and

$$9 \deg(c_2\beta) - 3 \deg(c_1^2\beta) = 6(q^2 + 3N) > 0, \quad \frac{3 \deg(c_1^2\beta)}{\deg(c_2\beta)} \longrightarrow 9.$$

The denominator is positive for $q \geq 2$. Taking $q = p^k$ proves the fixed-characteristic sharpness assertion in Theorem 2.1. The displayed affine polynomial gives the sign and equality assertions. Since 20 is not a prime power, no endpoint equality was suppressed. $\square$

The first standard-coefficient counterexample in this family is N_{23} , with 530 points and $P_{N_{23}}(t) = 140185(11 - 14t)$. The sparse-paving coefficient 3 already fails on N_5 : it has 26 points, and

$$\deg((3c_2 - 3c_1^2)\beta) = 3(1125 - 1375) = -750.$$

Its hyperplanes have six points, so it is paving but not sparse paving. Thus the hyperplane-size restriction in Theorem 2.3 is substantive.

Here is a further explicit restriction with only 469 points. Take $K = \mathbb{F}_{23}[\tau]/(\tau^2 - 5)$; $5^{11} \equiv -1 \pmod{23}$, so 5 is a nonsquare modulo 23. Delete ∞ , all $a + b\tau$ with $b = 0, 1$, and the fourteen points with $b = 2$ and $a = 0, \dots, 13$. Denote the resulting

restriction of N_{23} by R . Equivalently, its columns over $\mathbb{F}_{23}$ are

$$(9.4) \quad (1, a, b, a^2 - 5b^2)^\top, \quad b \in \{2, \dots, 22\}, \quad a \in \mathbb{F}_{23}, \quad (b, a) \notin \{(2, 0), \dots, (2, 13)\}.$$

The three sets $C_b = \{a + b\tau : a \in \mathbb{F}_{23}\} \cup \{\infty\}$, $b = 0, 1, 2$, are circles. Exactly C_0, C_1 become empty, and C_2 retains nine points. Every other circle loses at most six points, because it meets each C_b in at most two. Thus every remaining circle has at least three points, with distinct circles still defining distinct hyperplanes of R . Also R has rank four since $469 > 24$ and every triple spans a circle.

There are $23 \cdot 24 = 552$ circles through each point, and 24 through each pair. Therefore

$$\begin{aligned} f_2 = W_2 &= 109746, & f_3 &= 12188, \\ W_3 &= 469 \cdot 552 - 12188 = 246700, & W_{23} &= 24 \cdot 109746 = 2633904. \end{aligned}$$

Formula (7.1) now gives

$$(9.5) \quad \begin{aligned} \deg(c_2\beta) &= 2307474, & \deg(c_1^2\beta) &= 6154178, \\ P_R(t) &= 1207206 - 1209948t, & t_R &= \frac{201201}{201658}. \end{aligned}$$

In particular $P_R(1) = -2742$. This gives an explicit upper bound of 469 for the least counterexample size; it does not prove global minimality.

10. SPARSE PAVING MATROIDS AND THE CONSTANT THREE

A rank-four sparse paving matroid is specified by its four-element circuit-hyperplanes $\mathcal{B}$, any two of which meet in at most two elements; all other four-subsets are bases. We include the Boolean case $n = 4$, $\mathcal{B} = \emptyset$. Let $z = |\mathcal{B}|$ and $N = \binom{n}{2}$. Every line has two points. A circuit-hyperplane replaces four three-point hyperplanes by one four-point hyperplane. No triple is replaced twice. Consequently

$$(10.1) \quad f_2 = W_2 = N, \quad W_3 = 2\binom{n}{3} - 5z, \quad W_{23} = N(n-2) - 6z, \quad 4z \leq \binom{n}{3}.$$

Formula (7.1) becomes

$$(10.2) \quad \begin{aligned} C &= 6(n-1) + N(n-5) - 6z, \\ S &= 16(n-1) + \frac{n-23}{3}N + 2z, \\ B &= N(7n-17) - 54z. \end{aligned}$$

The coefficients of $P_M(t)$ are therefore entirely explicit in n, z .

Proof of Theorem 2.3. At α , $\deg((c_2 - c_1^2)\alpha) = 2N - 10 > 0$ for $n \geq 4$. At β ,

$$C - S = \frac{n^3 + 3n^2 - 34n + 30 - 24z}{3} \geq 2(n-5)(n-1).$$

This is positive for $n \geq 6$. For $n = 4$ there is no circuit-hyperplane and $C - S = 2$. For $n = 5$, two four-subsets meet in three points, so $z \leq 1$, and the exact expression gives $C - S = 20 - 8z \geq 12$. This proves the coefficient-3 inequality with no nonzero equality. In addition, (10.1) implies

$$B \geq N\left(\frac{5}{2}n - 8\right) > 0,$$

so the standard coefficient is positive on the entire segment.

To prove sharpness without assuming an existence theorem for designs, take the point set $\mathbb{F}_2^m$, $m \geq 3$, and declare the four-subsets with sum zero to be circuit-hyperplanes. Three distinct points have exactly one fourth point completing a zero sum; hence distinct blocks share at most two points. The remaining four-subsets satisfy basis exchange: among two or more proposed replacements of a removed basis element, at most one can complete that fixed triple to a block. If there is just one possible replacement from the other basis, it produces that basis itself. There are bases, and every triple extends to a basis, since $2^m \geq 8$. Each block has rank three and adding any outside point raises its rank. Thus this indeed defines a rank-four sparse paving matroid.

Here $n = 2^m$ and $z = n(n-1)(n-2)/24$. Substitution gives

$$C = \frac{(n-1)(n^2 - 8n + 24)}{4} > 0, \quad S = \frac{(n-1)(n-8)^2}{4},$$

so $3S/C \rightarrow 3$ as $m \rightarrow \infty$. Every $\lambda < 3$ therefore fails at β in this family. This completes the proof. $\square$

11. EQUALITY AND RIGIDITY

Theorems 2.1 and 2.3 classify their equality loci completely: on their respective cones equality is equivalent to $L = 0$. No Boolean, uniform, graphic, cographic, modular, or nonrealizable exception is hidden in the proof. Sharpness need not be attained by a finite matroid.

For coefficient 8 the classification is the incidence condition (2.5). It is a necessary and sufficient combinatorial condition, not a classification by a familiar named matroid class. At $t = 0$ equality never occurs. At $t = 1$ it is equivalent to $12W_3 = 3W_2 + W_{23}$. When $B < 0$ there is exactly one interior equality point. Thus the same M_q can give a positive, zero, or negative discriminant as the polarization varies.

The subspace lattice of M_q is modular: the vector-space dimension formula is the modular equality. Every maximal flag is therefore a modular flag, so the lattice is also supersolvable. These properties do not prevent failure of coefficient 8. This is an explicit obstruction to a proposed “modular implies nonnegative for every t ” rigidity principle. Boolean matroids behave differently: for rank four, $P_{U_{4,4}}(t) = 66$.

For uniform rank-four matroids, (10.2) with $z = 0$ gives

$$P_{U_{4,n}}(t) = \binom{n}{2} (11(1-t) + (7n-17)t) > 0.$$

Direct sums and the graphic/cographic examples in the computational table also have strict standard inequalities on this segment. These observations are not claimed as a theorem for every graphic, cographic, series-parallel, or direct-sum matroid in every rank. A circuit matroid such as $U_{4,5}$ is series-parallel and supplies one explicit test.

At an interior equality point t_{M_q} the polarization is big and nef: its cube is positive, since the nonnegative mixed α, β intersections include the term $(1-t)^3 \deg \alpha^3 > 0$. Equality here records a cancellation of incidence counts. It does not imply the

complex hyperbolic uniformization familiar from geometric Miyaoka–Yau equality. Moreover the finite-field examples are not being regarded as complex realizations.

12. COMPUTATIONAL EXPERIMENTS AND REPRODUCIBILITY

The supplementary code uses integers and `fractions.Fraction`; it requires only Python’s standard library. It constructs the flat lattice from rank functions or, for projective geometries, directly from subspaces. Products with incomparable flats are discarded. To integrate a degree- d chain monomial with a repeated flat F , remove one copy of x_F and multiply the remaining monomial by an i – j linear relation, where $i \in F \setminus F_{\text{prev}}$ and $j \in F_{\text{next}} \setminus F$. The coefficient of x_F is 1. Every surviving other flat refines the chain. The number of distinct flats therefore increases, so recursion terminates at complete flags of degree 1, or at zero. This is an exact reduction algorithm, rather than numerical evaluation.

There are 25 designated examples in ranks 3–6, and 417 additional records: all 354 labelled simple rank-four matroids on at most six points, $\text{PG}(3, 2)$, $\text{PG}(3, 3)$, the eight-point zero-sum-block example, and 60 fixed-seed random vector matroids on eight elements over $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5$. The 354 count splits as 1, 16, 337 on 4, 5, 6 points. This is not a count of isomorphism types. Exhaustiveness follows by dualizing: a rank-two matroid is specified by its loops and a partition of its nonloops into parallel classes, and rank one is even simpler. The code enumerates these possibilities and retains precisely the simple rank-four duals.

Three more direct Chow-ring computations for N_2, N_3, N_5 bring the total to 445. Their circle lattices were constructed both by projectivities and by norm-level sets; for $q = 2, 3$ they were also checked against the vector realization. The 469-point counterexample was checked separately by exact enumeration of all 12190 ambient circles and their restrictions. Its file includes all 469 columns of (9.4). This latter verification evaluates the proved incidence formula and is not a full Chow-ring enumeration on 469 points.

All computed α, β volume coefficients were checked against the reduced characteristic polynomial, using [AHK18, Proposition 9.5]. The known α discriminant formula was checked in every record. For rank-four extended records the Chern numbers were separately compared with (7.1). The alternative Chern product in [Che26a, Theorem 3.4] was checked against every divisor on $U_{4,4}$, $U_{4,6}$, $\text{PG}(3, 2)$ and $\text{PG}(3, 3)$. These checks resolve coefficient and implementation risks; the proofs above are independent of the finite search.

The initial small search contained no standard-discriminant counterexample or equality. The projective-geometry formulas subsequently supplied exact counterexamples. Rows for $q > 3$ in that family are evaluations of a proved formula, not a full Chow-ring enumeration on those ground sets.

M	$\deg(c_1^2\beta)$	$\deg(c_2\beta)$	$(P_M(0), P_M(1))$
$U_{4,4}$	10	12	(66, 66)
$U_{4,5}$	4	24	(110, 180)
$U_{4,6}$	-5	45	(165, 375)
Fano dual	-2	36	(231, 294)
Vámos	-18	96	(308, 822)
Wheel graph on 5 vertices	-2	40	(220, 326)
$M(K_{3,3})^*$	-4	48	(264, 396)
$U_{2,3} \oplus U_{2,3}$	7	21	(121, 147)
$U_{3,4} \oplus U_{1,1}$	6	18	(110, 126)

For the rank-three Fano and non-Fano matroids the respective pairs $(\deg c_1^2, \deg c_2)$ are $(2, 10)$ and $(0, 12)$, giving $P = 56$ and 72 . These are ordinary, not logarithmic, Chern numbers.

13. MIXED INEQUALITIES AND THE COMPARISON OF PROOF STRATEGIES

For arbitrary rank, define the exact mixed coefficients

$$D_j(M) = \deg(\Delta_M \alpha^{d-2-j} \beta^j), \quad 0 \leq j \leq d-2.$$

Then

$$(13.1) \quad P_M(t) = \sum_{j=0}^{d-2} \binom{d-2}{j} D_j(M) (1-t)^{d-2-j} t^j.$$

If all D_j are nonnegative, expansion proves nonnegativity against any product of classes $a_i\alpha + b_i\beta$, $a_i, b_i \geq 0$. This implication is elementary and is not advertised as a new mixed theorem. Pointwise nonnegativity of $P_M(t)$ alone does not prove nonnegativity of every mixed coefficient.

For example the exact D_j lists are

$$\begin{array}{l|l} U_{5,5} & (140, 220, 140) \\ U_{5,6} & (210, 460, 480) \\ U_{6,6} & (255, 545, 545, 255) \\ U_{6,7} & (357, 980, 1365, 1050). \end{array}$$

Thus $P_{U_{5,5}}(t) = 140 + 160t - 160t^2$. All these particular mixed intersections are positive. Rank four has only one polarization factor, so Theorem 2.1 is not a genuine many-factor mixed theorem.

Method considered	Outcome for this task
Hard Lefschetz; Hodge–Riemann	Control divisor intersection forms but do not assert positivity of Δ_M .
Mixed Hodge– Riemann; Alexandrov–Fenchel	The Lefschetz-fan result [ADH23, Theorem 5.20] applies to primitive forms. No required primitive representation of Δ_M was established.
Lorentzian polynomials	The volume and matroid polynomial theories [BH20] concern specified positive coefficients. A signed Chern differential operator need not preserve that positivity.
Deletion–contraction; induction in rank or size	Deletion changes flat incidence and tangent classes; an uncontrolled correction cannot be discarded. Contraction at each point does give the elementary incidence lemma used here.
Building-set blow- ups; wonderful models	The tangent product motivates the calculation. Direct Chow relations provide its proof without realizability. Smaller building sets have different answers.
Valuative methods	Useful in the construction of the tangent theory, but no extra val- uative extension is needed for our lattice proof.

In particular none of the inequalities is justified by the sentence “nefness implies it by Hodge–Riemann.” The incidence certificate is the additional positivity input. General mixed inequalities in ranks at least five remain unresolved here.

14. REALIZABLE MATROIDS AND WONDERFUL MODELS

If a matroid is represented by a subspace $V \subset K^E$ of dimension r , the projective wonderful compactification has dimension $r-1$ and is obtained from $\mathbb{P}(V)$ by blowing up arrangement strata in the appropriate order [DCP95, Che26b]. For a complex realization of a rank-four matroid, Theorem 2.1 reads

$$\int_{W_V} (3c_2(T_{W_V}) - c_1(T_{W_V})^2)(aH + bH_{Cr}) > 0,$$

where H is the pullback of a hyperplane and H_{Cr} is the restricted ambient Cremona hyperplane class. No positivity of K_{W_V} or stability of T_{W_V} is assumed. The proof is the same intersection calculation.

The optimality families $\text{PG}(3, q)$ and N_q are realized over $\mathbb{F}_q$. Their sharpness, including the paving assertion in each fixed positive characteristic, does not determine the optimal constant within complex-realizable matroids. The combinatorial argument avoids transplanting characteristic-zero differential geometry to these examples. The weighted complex-arrangement inequality of [BP26, Theorem 1.1] concerns a parabolic class of a stable arrangement; it is not an inequality for the ordinary tangent class used here.

Building-set dependence is already visible for a Boolean matroid. The building set consisting of points and E gives $\mathbb{P}^d$, with $c_1 = (d+1)H$, $c_2 = \binom{d+1}{2}H^2$, and $\Delta = 0$. The maximal building set gives the permutohedral model; for $U_{4,4}$ its standard discriminant against α is 66. Our equality and sharp-constant statements consequently cannot be transferred unchanged to a smaller building set.

15. NOVELTY AUDIT AND OPEN PROBLEMS

The literature search was carried out on 10 September 2026. We examined Cheng’s version 3 of [Che26a], version 2 of [Che26b], Cheng–Lin’s versions 1 and 3 of [CL26], and the relevant statements in [FY04, AHK18, ADH23, BH20, Man23]. The final revision uses Cheng–Lin’s latest version 3, dated 29 April 2026: Corollary 4.15 and the prior warning in Remark 4.16 remain in that version. We also screened the tangent-class companion paper [CLG26], the tautological nef-cone paper [Sta26], and the reciprocal-space polar-degree paper [BKW26], and checked [BP26, Theorem 1.1] and [Ali26, Lemma 2.3]. These related notions do not identify the ordinary tangent discriminant with a logarithmic, parabolic, or tautological quotient discriminant.

Searches included “matroid Miyaoka Yau beta”, “matroid tangent Chern polarization”, “Cheng Lin Chern inequalities”, “matroid Chern sparse paving”, and searches for sharp constants, projective geometries, inversive planes and elliptic quadrics. The search found the explicit prior warning in [CL26, Remark 4.16]; that warning is acknowledged throughout. No theorem with the precise rank-four coefficient 9 on $\mathcal{C}_M$, its sharpness already within fixed-characteristic realizable paving matroids, the sparse-paving coefficient 3 with the zero-sum sharpness family, or the displayed shrinking-interval formulas was located in the inspected sources. To the best of our literature search as of September 2026, these are new conclusions. This is a bounded literature audit, not a guarantee that no unindexed or unpublished result exists.

The endpoint formulas are supporting calculations. Their value here lies in the optimal inequalities and the uniform obstruction they establish, not merely in being new-looking expressions. The positivity interval once its endpoints are known is linear algebra, and is not counted as a separate deep theorem. The following questions remain open in this report:

- (1) Determine the least ground-set size of a standard-coefficient counterexample (our explicit upper bound is 469), and classify rank-four matroids with $B = 0$ by structure beyond the incidence identity.
- (2) Determine the optimal coefficient on the entire nef cone, and on the α, β cone within complex-realizable or orientable matroids.
- (3) Prove, disprove, or sharply correct genuinely mixed inequalities in ranks at least five. The sample computations supply evidence only.
- (4) Track the new endpoint formulas and equality loci under nonmaximal building-set blow-ups.

日本語版

階数 4 のマトロイドに対する最適な偏極付き Chern 不等式：接続関係の判定，符号変化，等号

chatGPT 6 Astra

2026 年 9 月 10 日

要旨. 階数 4 の loopless マトロイドの最大 Chow 環上の通常の接類について， $9c_2 - 3c_1^2$ は α, β の任意の非零非負結合と狭義に正の degree を持つことを証明する．普遍係数 9 は，任意に固定した正標数で実現可能な paving マトロイドに限っても最適である．明示的な重み付き接続関係の公式は，通常の係数 8 に対する正值性区間全体を決定し，その区間は 0 へ縮小し得る．階数 4 の sparse paving マトロイドでは最適係数は 3 である．469 点と 26 点の明示的な例により，それぞれ標準係数の破綻と sparse という仮定の必要性を示す．二つの最適不等式に非零の等号例はないが，通常の判別式は内点の偏極で 0 になり得る．完全な代数的証明，厳密計算，範囲を明記した文献監査を収録する．英語版と日本語版の数学的内容は同一である．

このノートは chatGPT 6 が生成したものであり，岩井は数学的な検証を全く行っていません．そのため数学的な間違いがあるかもしれません．そのため注意深く読んでください．

1. 序論

Cheng はマトロイドの接 K 類を構成し，超平面類 α に関する Miyaoka–Yau 型不等式を証明している．Cheng–Lin は α に関するより強い不等式を与え，通常不等式が β に対して破れることも明記している [Che26a, CL26, Che26b]．本稿の新しい点は，階数 4 で α, β が生成する錐全体における最適な修正不等式，通常係数に関する接続関係の判定条件，正值性区間が縮小する明示的な無限族，および sparse paving マトロイドに対するさらに強い最適不等式である．

新しい定理では常に最大 building set を用いる．階数を $r = d + 1$ とし，対数接類ではなく通常接類を用いて

$$\Delta_M = 2(d+1)c_2(T_M) - dc_1(T_M)^2$$

と定める．主要な結果の対象は $r = 4$ ， $d = 3$ である．この階数のすべての loopless マトロイドについて無条件に成立し，実現可能性は仮定しない．より高い階数でも計算したが，その範囲で一般の mixed 不等式を証明したとは主張しない．

成立性と最適性の区別が重要である．階数 4 の対象の錐では係数 8 は破れ，最適な普遍的修正係数は 9 となる．この最適不等式では非零偏極に対して等号は起こらない．その最適性は，任意に固定した正標数で実現可能な paving マトロイドに限っても漸近的に成立する．階数 4 の sparse paving マトロイドでは係数を 3 まで下げられ，やはり狭義不等式と漸近的最適性が成立する．26 点の paving の例は sparse という仮定を外せないことを示す．また，標準係数の 469 点の反例を構成する．もとの係数 8 では α と β を結ぶ線分の内点に等号が現れ得る．

2. 主定理

$\overline{M} = \text{si}(M)$ を単純化とする．以下の集合の大きさはすべて $\overline{M}$ の点を数える．

$$n = |\overline{M}|, \quad \mathcal{L} = \{F : \text{rk } F = 2\}, \quad \mathcal{H} = \{F : \text{rk } F = 3\}, \quad f_i = \#\{F : \text{rk } F = i\}$$

とおく. $\ell \in \mathcal{L}$ に対し, $h_\ell = \#\{H \in \mathcal{H} : \ell \subset H\}$ とし,

$$(2.1) \quad W_2 = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} (|\ell| - 1), \quad W_3 = \sum_{H \in \mathcal{H}} (|H| - 1), \quad W_{23} = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} (|\ell| - 1)h_\ell$$

を定める. これらは重み付きの接続関係の数であり, 通常重みなし flag Whitney 数とは異なる. $\mathcal{C}_M = \mathbb{R}_{\geq 0}\alpha + \mathbb{R}_{\geq 0}\beta$ とおく.

Theorem 2.1 ($\mathcal{C}_M$ 上の最適普遍係数). 最大 *building set* を備えた任意の階数 4 の *loopless* マトロイドと, $a, b \geq 0$, $a + b > 0$ に対して,

$$(2.2) \quad \deg((9c_2(T_M) - 3c_1(T_M)^2)(a\alpha + b\beta)) > 0$$

が成立する. すべてのこのような M および $L \in \mathcal{C}_M$ に対して $\deg((\lambda c_2 - 3c_1^2)L) \geq 0$ が成立する実数 λ の最小値は 9 である. 任意の固定した素数 p について, M を $\mathbb{F}_p$ 上で実現可能な *paving* マトロイドに制限しても最小係数は 9 である. より詳しく, $I_{12} = \sum_\ell |\ell|$, $I_{13} = \sum_H |H|$ とおくと, (2.2) の左辺は

$$(2.3) \quad \begin{aligned} & a(6 + 12f_2) + 6b[n - 1 + f_2 + \sum_H (|H| - 2) \\ & + (I_{13} - I_{12})] \end{aligned}$$

に等しく, $I_{13} \geq I_{12}$ である. したがって閉錐における等号成立条件は正確に $L = 0$ である.

Theorem 2.2 (標準判別式の正確な成立区間). 任意の階数 4 の *loopless* マトロイドについて

$$A = 11f_2 > 0, \quad B = 12W_3 - 3W_2 - W_{23}$$

とおく. このとき

$$(2.4) \quad P_M(t) = \deg((8c_2 - 3c_1^2)((1-t)\alpha + t\beta)) = A(1-t) + Bt.$$

$B > 0$ なら $[0, 1]$ 全体で正である. $B = 0$ なら零点は 1 だけである. $B < 0$ なら $[0, 1]$ 内で非負になる範囲は正確に

$$[0, t_M], \quad t_M = \frac{A}{A - B}$$

であり, 等号は t_M でのみ成立する. 特に, 固定した $0 < t \leq 1$ に対する完全な組合せ論的等号条件は

$$(2.5) \quad W_{23} + 3W_2 = 12W_3 + 11f_2 \frac{1-t}{t}$$

である. すべての階数 4 のマトロイドとすべての $t \in [0, \varepsilon]$ で標準不等式を成立させる普遍的な $\varepsilon > 0$ は存在しない.

Theorem 2.3 (Sparse paving の場合の改善). 階数 4 の *loopless* マトロイドの単純化が *sparse paving* なら,

$$\deg((3c_2 - 3c_1^2)(a\alpha + b\beta)) > 0 \quad (a, b \geq 0, a + b > 0)$$

が成立する. このクラスと錐における最適普遍係数 λ は 3 である. 等号はやはり $L = 0$ の場合に限る. 標準係数 8 については, $[0, 1]$ 全体で $P_M(t) > 0$ である.

3. 先行研究との比較

次の比較表は新規性の主張範囲を明確にする． T_M の構成， α, β の nef 性，任意の nef 類に対して係数 8 が破れるという事実は，本稿の新結果に数えない．

文献	既知の結果	本稿との差
Cheng [Che26a], Def. 3.1, Thms. 3.4, 4.1	接 K 類と Chern 類の公式.	次数 2 の類を β と交叉させ，最適な評価を証明する．
Cheng [Che26b], Cor. 4.23	一般 building set も含む α に関する標準不等式.	新定理は最大 building set での第二の偏極とその錐を扱う．
Cheng–Lin [CL26], Cor. 4.15, Rem. 4.16	強い α 係数 $(d+2)/2$ ，および β の破綻の指摘.	階数 4 の係数 9 と 3，正確な区間，明示的な漸近的障害を決定する．
AHK [AHK18]; ADH [ADH23]	Hodge 理論と mixed Hodge 理論.	Chern 判別式には独立した接続関係の計算が必要である．
Mannino [Man23], Thms. 1.2, 1.5	対数 Chern 数と階数 3 の比の評価.	通常の接類，階数，偏極を挟んだ交叉数が異なる．
Aliabadi [Ali26], Lem. 2.3	大きな超平面の族からの paving マトロイドの構成.	構成自体は新しくない．本稿の主張は偏極付き Chern 数の最適評価である．
de Borbon–Panov [BP26], Thm. 1.1	安定な重み付き複素配置の放物型類に関する不等式.	本稿は通常の接類を用い，安定性や複素実現可能性を仮定しない．

(2.2) を α の半直線に制限したものは Cheng–Lin の結果よりはるかに弱く，それ自体は新不等式ではない．貢献は β における評価とその最適普遍係数，および係数 8 の正確な障害との組合せにある．

4. マトロイド CHOW 環と BUILDING SET

マトロイドの階数関数 $\text{rk} : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は単調かつ劣モジューラで， $0 \leq \text{rk}(S) \leq |S|$ を満たす．外部の任意の元を加えると階数が増える集合を flat という．Loopless とはすべての e で $\text{rk}\{e\} = 1$ という意味である．階数 1 の flat を点と呼ぶ．単純化は各点から代表元を一つずつ残す操作であり，階数付き flat 格子を保存する．

最大 building set について，本稿の環は

$$(4.1) \quad A^\bullet(M) = \frac{\mathbb{Z}[x_F : \emptyset \neq F \neq E \text{ は flat}]}{I + J}$$

である． $\deg x_F = 1$ とし， I は比較不能な flat の積 $x_F x_G$ で生成され， J は

$$\sum_{F \ni i} x_F - \sum_{F \ni j} x_F \quad (i, j \in E)$$

で生成される．最高次数は $d = r - 1$ であり，空でない真の flat の完全旗に対応する単項式の degree を 1 とする．これが degree 写像の正規化である．必要に応じて係数を $\mathbb{Q}$ または $\mathbb{R}$ に拡大する [FY04, AHK18]．

Building set $\mathcal{G}$ は空でない flat からなり，本稿では E を含むものとする．各 flat F に含まれる極大な $\mathcal{G}$ の元 G_i が， $\prod_i [\emptyset, G_i] \simeq [\emptyset, F]$ を誘導することを要求する．二つ以上の互いに比較不能な元の任意の部分集合の join が $\mathcal{G}$ に属さないとき，その集合を nested という．Feichtner–Yuzvinsky 表示ではすべての $G \in \mathcal{G}$ の変数，nonnested

単項式, および各点 p に対する関係 $\sum_{G \ni p} x_G = 0$ を用いる. 最大 building set で $x_E = -\alpha$ を消去すると (4.1) が得られる [FY04, Definitions 1–3].

Remark 4.1. 本稿の重み付きの数はすべて単純化の後に計算する. 平行類の元の個数をそのまま使うと β の公式は誤る. 環の表示, degree 写像, cutting class, 接類の公式は階数付き格子同型で移るため, 単純マトロイドの主張は loopless マトロイドに拡張される. Coloop は許す. Coloop があっても $d = r - 1$ は変わらず, 例外的な項が消えるわけでもない. Loop は一貫して除外する.

5. 接類と CHERN 類

最大 building set の場合, Cheng のもとの定義は, permutohedral 多様体上の $T_{X_E} - Q_M$ の制限である. ここで Q_M は tautological quotient K 類である [Che26a, Definition 3.1]. 一般の $\mathcal{G}$ について

$$\theta_F = \alpha - \sum_{\substack{H \in \mathcal{G} \\ F \subseteq H \subsetneq E}} x_H$$

とおく. [Che26b, Definition 3.3] の定義は

$$\begin{aligned} T_{M,\mathcal{G}} &= r[\mathcal{O}(\alpha)] - [\mathcal{O}] \\ &\quad + \sum_{F \in \mathcal{G} \setminus \{E\}} ([\mathcal{O}(x_F)] - [\mathcal{O}]) \\ &\quad + \text{rk}(F)([\mathcal{O}(\theta_F)] - [\mathcal{O}(\theta_F + x_F)]) \end{aligned} \quad (5.1)$$

である. 和の中の各項の階数は 0 なので, 全体の階数は $r - 1 = d$ である. Chern 類は $c(\mathcal{O}(D)) = 1 + D$ という規約を仮想的な差に乗法的に拡張する. したがって

$$c(T_{M,\mathcal{G}}) = (1 + \alpha)^r \prod_{F \in \mathcal{G} \setminus \{E\}} (1 + x_F) \left(\frac{1 + \theta_F}{1 + \theta_F + x_F} \right)^{\text{rk } F}. \quad (5.2)$$

逆数は正次数部分の冪零性により有限の冪級数として解釈する. 点 p に対しては $\theta_p = 0$ であり, 対応する因子全体が 1 になる.

直接実装できる展開のため $Q_2 = 2 \text{ch}_2(T_M)$ とおく. (5.2) の次数 1 と 2 の部分から

$$\begin{aligned} c_1 &= r\alpha - \sum_{\text{rk } F \geq 2} (\text{rk } F - 1)x_F, \\ Q_2 &= r\alpha^2 + \sum_{\text{rk } F \geq 2} ((1 - \text{rk } F)x_F^2 - 2 \text{rk}(F)\theta_F x_F), \\ c_2 &= \frac{1}{2}(c_1^2 - Q_2), \quad \Delta_M = c_1^2 - rQ_2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

を得る. これにより質問の式の負号と係数を検算できる: $2rc_2 - (r - 1)c_1^2 = c_1^2 - rQ_2$ である. 対象の交叉数の次数はすべて $2 + (d - 2) = d$ となる.

実現可能な場合, (5.1) は対応する wonderful model の通常の接束の類である. ここから $\sum_F ([\mathcal{O}(x_F)] - [\mathcal{O}])$ を引いたものが対数接類となる [Che26b, Section 3.2]. この二つの Chern 理論を取り違えてはいけない.

6. NEF 類と偏極

既存の自然な類

$$(6.1) \quad \alpha = \sum_{F \ni e} x_F, \quad \beta = \sum_{F \not\ni e} x_F$$

を用いる．線形関係が α の各表示を同一視し， $\alpha + \beta = \sum_F x_F$ であることから，両者は e の選択によらない．両者は [AHK18, Definition 5.7 and Lemma 9.7] の凸区分線形関数という意味で nef である．周囲の permutohedral 多様体上では Cremona 反転が両者を交換する．任意のマトロイドの Bergman fan 自体に Cremona 自己同型があると主張しているのではない．本証明に必要なのは nef 性だけであり，ample 性や [Che26a] で研究されるさらに強い操作的正值性ではない．

単純な階数 4 のマトロイドでは， n 個の点の関係を足し合わせると

$$(6.2) \quad \beta = (n-1)\alpha - \sum_{\ell} (|\ell| - 1)x_{\ell} - \sum_H (|H| - 1)x_H$$

となる．実際 $n\alpha = \sum_F |F|x_F$ と $\alpha + \beta = \sum_F x_F$ の差を取ればよい．この式が偏極と接続関係の数を結び付ける．

7. 階数 4 の交叉計算

非実現可能なマトロイドにも通用する環の中での証明を与える．

Lemma 7.1. $\ell \subset H$ を直線と超平面とする．必要な最高次数の値は

単項式	α^3	αx_{ℓ}^2	x_H^3	$x_{\ell}^2 x_H$	$x_{\ell} x_H^2$	x_{ℓ}^3
deg	1	-1	1	-1	0	$2(h_{\ell} - 1)$

である．また Chow 環の中で $\alpha x_H = 0$ ， $\alpha^2 x_{\ell} = 0$ であり，比較不能な flat の積は 0 となる．

Proof. (6.1) で H の外の元を選べば $\alpha x_H = 0$ となる． $e \notin \ell$ を選ぶと $\alpha x_{\ell} = x_{\ell} x_{\text{cl}(\ell \cup e)}$ なので $\alpha^2 x_{\ell} = 0$ である． $e \in H \setminus \ell$ の α 関係に $x_{\ell} x_H$ を掛けると $x_{\ell} x_H^2 = 0$ を得る．

点 $p \subset \ell$ を選ぶ． p の関係に $x_{\ell} x_H$ を掛けると $0 = x_p x_{\ell} x_H + x_{\ell}^2 x_H + x_{\ell} x_H^2$ となる．最初の項の degree は 1 なので， $\deg(x_{\ell}^2 x_H) = -1$ ，したがって $\deg(\alpha x_{\ell}^2) = -1$ である． $e \in H \setminus p$ の関係に $x_p x_H$ を掛けると $0 = x_p x_{\text{cl}(p \cup e)} x_H + x_p x_H^2$ なので $\deg(x_p x_H^2) = -1$ となる．さらに p の関係に x_H^2 を掛けると $\deg x_H^3 = 1$ が従う．

最後に， $e \notin \ell$ を選べば $\deg(\alpha x_p x_{\ell}) = 1$ である．代わりに ℓ 内の p と異なる点を選ぶと $1 = \deg(x_p x_{\ell}^2) + h_{\ell}$ となる．したがって p の関係に x_{ℓ}^2 を掛けた式は $-1 = (1 - h_{\ell}) + \deg x_{\ell}^3 - h_{\ell}$ となり，最後の公式を得る．正規化 $\deg \alpha^3 = 1$ は，同じ関係で旗を順に延長すれば従う ([AHK18, Proposition 5.8] も参照)．□

Proposition 7.2. $u = n - 1$ とおくと，端点での Chern 数は

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \deg(c_2 \alpha) &= 6 + f_2, & \deg(c_1^2 \alpha) &= 16 - f_2, \\ C := \deg(c_2 \beta) &= 6u - 3W_2 + W_{23}, \\ S := \deg(c_1^2 \beta) &= 16u - 7W_2 + 3W_{23} - 4W_3 \end{aligned}$$

となる．その結果， $\deg(\Delta_M \beta) = 12W_3 - 3W_2 - W_{23}$ ， $\deg((9c_2 - 3c_1^2)\beta) = 6(u - W_2 + 2W_3)$ である．

Proof. (5.3) により階数 4 では

$$c_1 = 4\alpha - \sum_{\ell} x_{\ell} - 2 \sum_H x_H,$$

$$Q_2 = 4\alpha^2 + \sum_{\ell} (3x_{\ell}^2 - 4\alpha x_{\ell}) + 4 \sum_{\ell \subset H} x_{\ell} x_H + \sum_H (4x_H^2 - 6\alpha x_H)$$

である。補題 7.1 を代入すると、中間計算は次の表になる：

	α	x_{ℓ}	x_H
c_1^2	$16 - f_2$	$6 - 2h_{\ell}$	$4 - f_2(M H)$
c_2	$6 + f_2$	$4 - 2h_{\ell}$	$f_2(M H)$
$8c_2 - 3c_1^2$	$11f_2$	$14 - 10h_{\ell}$	$11f_2(M H) - 12.$

各成分はその列の因子を掛けた後の degree を表す。例えば $\deg(c_1^2 x_{\ell}) = 2(h_{\ell} - 1) + 8 - 4h_{\ell} = 6 - 2h_{\ell}$ である。他の成分も上の二つの展開に六つの単項式の値を代入し、 $2c_2 = c_1^2 - Q_2$ を使うことで得られる。

ℓ を含む超平面から ℓ を取り除いた集合は $E \setminus \ell$ を分割する。外部の各点 e が唯一の flat $\text{cl}(\ell \cup e)$ を定めるためである。よって

$$(7.2) \quad \sum_{H \supset \ell} (|H| - |\ell|) = n - |\ell|$$

であり、 ℓ について和を取ると

$$\sum_H (|H| - 1) f_2(M|H) = u f_2 - W_2 + W_{23}$$

を得る。(6.2) に c_2 を掛ければ

$$C = u(6 + f_2) - 4W_2 + 2W_{23} - (u f_2 - W_2 + W_{23}) = 6u - 3W_2 + W_{23}.$$

また c_1^2 を掛ければ

$$S = u(16 - f_2) - 6W_2 + 2W_{23} - 4W_3 + (u f_2 - W_2 + W_{23})$$

となり、主張の式が得られる。二つの判別式の公式は差を取れば従う。 $\square$

8. 偏極付き不等式と最適定数

Lemma 8.1 (初等的な接続関係の不等式). 任意の単純な階数 4 のマトロイドに対して $I_{13} \geq I_{12}$ である。

Proof. まず N を v 個の点と w 本の直線を持つ単純な階数 3 のマトロイドとする。点と直線の接続行列 D は

$$DD^T = \mathbf{1}\mathbf{1}^T + \text{diag}(t_p - 1)$$

を満たす。ここで t_p は p を通る直線の数である。相異なる二点はちょうど一本の直線上にある。また、 p を通る直線が一本しかなければその直線が他のすべての点を含んでしまい階数 2 となるから、常に $t_p \geq 2$ である。従ってこの実行列は正定値である。実際、非零ベクトル z における二次形式は $(\sum z_p)^2 + \sum (t_p - 1) z_p^2 > 0$ となる。階数は v なので $w \geq v$ を得る。

M の各点 p について M/p の単純化にこの議論を適用する。 p は flat なので縮約に loop は生じない。縮約の点は p を含む M の直線に、縮約の直線は p を含む超平面に対応する。 $w \geq v$ を p について足すと正確に $I_{13} \geq I_{12}$ を得る。 $\square$

定理 2.1 の証明（最適性を除く）. 命題 7.2 により $\deg((9c_2 - 3c_1^2)\alpha) = 6 + 12f_2$ である. もう一つの端点では

$$\begin{aligned} u - W_2 + 2W_3 &= u - (I_{12} - f_2) + 2(I_{13} - f_3) \\ &= u + f_2 + \sum_H (|H| - 2) + (I_{13} - I_{12}). \end{aligned}$$

最後の行の各項は非負であり, $u > 0$ である. 補題 8.1 と合わせ, 正值性を与える分解が得られた. 線形性により (2.3) が成立する. さらに $a + b > 0$ の非負結合は零類ではない. 実際, $\deg(\alpha^2(a\alpha + b\beta)) = a + b(n - 1) > 0$ である. $\square$

定理 2.2 の区間と等号条件の証明. 命題 7.2 の二つの端点の公式から (2.4) が従う. 階数 4 のマトロイドは直線を持つので $A > 0$ である. この一次不等式を解くと三つの場合分けを得る. 値を 0 とおき $t > 0$ で割ると (2.5) となる. 一律の区間が存在しないことと係数 9 の最適性は次の族で示す. $\square$

9. 明示的反例と縮小する区間

素数冪 q に対し, $M_q = \text{PG}(3, q)$ を $\mathbb{F}_q^4$ の一次元部分空間上のベクトルマトロイドとする. 部分空間を数えると

$$\begin{aligned} n &= (q + 1)(q^2 + 1), & f_2 &= (q^2 + 1)(q^2 + q + 1), & f_3 &= n, \\ |\ell| &= q + 1, & |H| &= q^2 + q + 1, & h_\ell &= q + 1 \end{aligned}$$

を得る. 計数を明示すると, 点の数は $(q^4 - 1)/(q - 1)$ である. 直線の数に順序付き独立ベクトル対の数 $(q^4 - 1)(q^4 - q)$ を $(q^2 - 1)(q^2 - q)$ で割ったものとなる. 超平面は非零線形形式の核であり, 形式のスカラー倍を同一視して数える. 局所的な数は二次元・三次元部分空間の内部, または直線による商で同じ計算をすれば得られる. 従って未検証のカatalogに依存しない.

$W_2 = qf_2$, $W_3 = (q^2 + q)n$, $W_{23} = q(q + 1)f_2$ を命題 7.2 に代入すると

$$\begin{aligned} (9.1) \quad C_q &= q(q + 1)(q^2 - 3q + 4)(q^2 + q + 1), \\ S_q &= q(3q^5 - 5q^4 - 6q^3 + 3q^2 + 7q + 8), \\ B_q &= -q(q^2 + 1)(q^3 - 7q^2 - 19q - 8), \\ 9C_q - 3S_q &= 6q(q^4 + 3q^3 + 3q^2 + 4q + 2) > 0 \end{aligned}$$

を得る. 特に $C_q > 0$ かつ $3S_q/C_q \rightarrow 9$ である. 任意の $\lambda < 9$ に対し, 例えば $q = 2^k$ という無限大に向かう素数冪を選べば, 十分大きい q で $\lambda C_q - 3S_q < 0$ となる. これで定理 2.1 の最適性が証明された.

三次式 $g(q) = q^3 - 7q^2 - 19q - 8$ は $2 \leq q \leq 7$ で負であり, $g(8) = -96$, $g(9) = -17$, $g(10) = 102$ である. 導関数は $q \geq 6$ で正である. したがって素数冪の中で B_q が初めて負になるのは $q = 11$ であり,

$$P_{M_{11}}(t) = 178486 - 536800t, \quad t_{M_{11}} = \frac{133}{400}$$

となる. 素数冪 $q \geq 11$ について

$$(9.2) \quad t_{M_q} = \frac{11(q^2 + q + 1)}{q^4 - 7q^3 - 8q^2 + 3q + 11} \sim \frac{11}{q^2}$$

である. これで定理 2.2 の最後の主張も従う. この判別式に反例が現れ得る最小の階数は 4 である. 階数 3 では $\deg$ が $8f_2 > 0$ であり, 偏極因子が残らないからで

ある．台集合の大きさが全マトロイド中で最小だとは主張しない． M_{11} の 1464 点という大きさは，ここに示した有限射影幾何の族の中でのみ最小である．

q	A_q	B_q	許される t の最大値
2	385	660	1
3	1430	3030	1
9	82082	12546	1
11	178486	-358314	133/400
13	342210	-1677390	61/360
16	771771	-8191104	1001/11625

9.1. Paving での最適性により小さい明示的反例． 階数 4 のマトロイドが paving であるとは，任意の 3 元部分集合が独立であることをいう．以下では既存の有限体上の接続構造を用いる．新しい主張はその Chern 交叉数に関するものである．

Proposition 9.1. 任意の素数冪 $q \geq 2$ に対し， $n = q^2 + 1$ 点上の階数 4 の paving マトロイド N_q が存在し， $\mathbb{F}_q$ 上で実現可能である． $N = \binom{n}{2}$ とおくと，

$$(9.3) \quad \begin{aligned} \deg(c_2\beta) &= 6q^2 + (q-2)N, & \deg(c_1^2\beta) &= 16q^2 + 3(q-4)N, \\ P_{N_q}(t) &= N(11 + (9-q)t) \end{aligned}$$

となる． q を任意に固定した素数の冪に制限しても，この族だけで係数 9 は最適である． $q > 20$ の場合，標準係数 8 が破れるのは正確に $t > 11/(q-9)$ のときである． $q \leq 20$ の場合は $[0, 1]$ 全体で狭義に正である．

Proof. $K = \mathbb{F}_{q^2}$ ， $X = \mathbb{P}^1(K)$ とおく． $\mathrm{PGL}_2(K)$ による $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ の像を円と呼ぶ． X の任意の相異なる三点を通る円は唯一である．これを直接示す．二点の独立な代表ベクトル v_a, v_b と第三の点の代表 v_c に対し， $v_c = uv_a + vv_b$ と書く． u, v はともに非零である． uv_a, vv_b を列に持つ行列は $\infty, 0, 1$ を a, b, c に送る． $\infty, 0, 1$ を固定する射影変換はスカラー行列で与えられるため，この射影変換は唯一である．これらの三点を含む円に対し，その定義に用いた射影変換の前に， $\infty, 0, 1$ を三点の逆像に送る $\mathbb{F}_q$ 上の射影変換を合成する．一意性から，この円は先ほど構成した円と一致する．従って円の族は $3-(q^2+1, q+1, 1)$ デザインとなる．特に相異なる二つの円の共通部分は高々二点である．

実現を与えるため， $z \mapsto z^q$ を対合とする K 上の 2×2 Hermitian 行列全体を，4 次元 $\mathbb{F}_q$ 線形空間 V とする． $[v] \in \mathbb{P}^1(K)$ を $\mathbb{P}(V)$ の vv^* の射影類に送る． v を $a \in K^*$ 倍すると vv^* は $a^{q+1} \in \mathbb{F}_q^*$ 倍されるので，これは well-defined である． vv^* の列空間から直線 Kv が復元されるため，この写像は単射である．

写像 $H \mapsto gHg^*$ は V の可逆な $\mathbb{F}_q$ 線形変換である．従って上で用いた射影作用は線形変換から誘導される． $\infty, 0, 1$ の像は線形独立で， $\mathbb{F}_q$ 上の対称行列からなる 3 次元部分空間を張る．この部分空間と点集合との共通部分は正確に $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ である． $z \in K \setminus \mathbb{F}_q$ の像の非対角成分は $\mathbb{F}_q$ に入らないため，この部分空間の外にある．よって点集合の階数は 4 である．射影作用により，任意の三点が独立で，それらが張る超平面と点集合との共通部分は三点を通る唯一の円になる．従って階数 2 の flat はすべて二点集合，階数 3 の flat はすべて円である．これで，カタログにも，デザインからの実現可能性の仮定にも依存せず，paving マトロイドの実現を確認した．

三点集合を数えると $f_3 = \binom{q^2+1}{3} / \binom{q+1}{3} = q(q^2+1)$ である．二点を通る円は，残りの点を $q-1$ 点ずつに分割するので，その数は $q+1$ となる．従って

$$f_2 = W_2 = N, \quad W_3 = 2N, \quad W_{23} = (q+1)N$$

である。これらを (7.1) に代入すると (9.3) を得る。また,

$$9 \deg(c_2\beta) - 3 \deg(c_1^2\beta) = 6(q^2 + 3N) > 0, \quad \frac{3 \deg(c_1^2\beta)}{\deg(c_2\beta)} \rightarrow 9$$

となる。分母は $q \geq 2$ で正である。 $q = p^k$ と取れば、定理 2.1 の固定した正標数での最適性が従う。表示された一次多項式から符号と等号の主張が従う。20 は素数冪ではないので、端点の等号例を除外してしまうこともない。 $\square$

この族で最初の標準係数の反例は 530 点の N_{23} で、 $P_{N_{23}}(t) = 140185(11 - 14t)$ である。 Sparse paving での係数 3 は、すでに 26 点の N_5 で破れ、

$$\deg((3c_2 - 3c_1^2)\beta) = 3(1125 - 1375) = -750$$

となる。その超平面は六点を持つため、paving ではあるが sparse paving ではない。従って定理 2.3 の超平面の大きさに対する制約は本質的である。

さらに、469 点だけの明示的な制限を構成する。 $K = \mathbb{F}_{23}[\tau]/(\tau^2 - 5)$ とおく。 $5^{11} \equiv -1 \pmod{23}$ なので、5 は 23 を法として平方剰余ではない。 $\infty, b = 0, 1$ であるすべての $a + b\tau$ 、および $b = 2, a = 0, \dots, 13$ である十四点を除く。こうして得た N_{23} の制限を R とする。同値に、 $\mathbb{F}_{23}$ 上の列ベクトルは

$$(9.4) \quad (1, a, b, a^2 - 5b^2)^T, \quad b \in \{2, \dots, 22\}, \quad a \in \mathbb{F}_{23}, \quad (b, a) \notin \{(2, 0), \dots, (2, 13)\}$$

で与えられる。三つの集合 $C_b = \{a + b\tau : a \in \mathbb{F}_{23}\} \cup \{\infty\}$ 、 $b = 0, 1, 2$ は円である。正確に C_0, C_1 が空になり、 C_2 には九点が残る。他の円は各 C_b と高々二点で交わるため、高々六点しか失わない。従って残る円はすべて三点以上を持ち、相異なる円は依然として R の相異なる超平面を定める。また、各三点が円を張り $469 > 24$ であることから、 R の階数は 4 である。

各点を通る円は $23 \cdot 24 = 552$ 個、各二点を通る円は 24 個なので、

$$\begin{aligned} f_2 = W_2 &= 109746, & f_3 &= 12188, \\ W_3 &= 469 \cdot 552 - 12188 = 246700, & W_{23} &= 24 \cdot 109746 = 2633904 \end{aligned}$$

を得る。公式 (7.1) から、

$$(9.5) \quad \begin{aligned} \deg(c_2\beta) &= 2307474, & \deg(c_1^2\beta) &= 6154178, \\ P_R(t) &= 1207206 - 1209948t, & t_R &= \frac{201201}{201658} \end{aligned}$$

となる。特に $P_R(1) = -2742$ である。これにより最小反例サイズの明示的な上界 469 が得られるが、全体での最小性を証明したわけではない。

10. SPARSE PAVING マトロイドと係数 3

階数 4 の sparse paving マトロイドは 4 元の circuit-hyperplane の族 $\mathcal{B}$ で記述され、その相異なる二つの共通部分は高々 2 元である。他の 4 元部分集合はすべて基底となる。 $n = 4$ 、 $\mathcal{B} = \emptyset$ の Boolean の場合も含める。 $z = |\mathcal{B}|$ 、 $N = \binom{n}{2}$ とおく。すべての直線は 2 点からなる。一つの circuit-hyperplane によって、四つの 3 点超平面が一つの 4 点超平面に置き換わる。同じ 3 点集合が二度置き換わることはない。よって

$$(10.1) \quad f_2 = W_2 = N, \quad W_3 = 2 \binom{n}{3} - 5z, \quad W_{23} = N(n - 2) - 6z, \quad 4z \leq \binom{n}{3}$$

である. (7.1) は

$$(10.2) \quad \begin{aligned} C &= 6(n-1) + N(n-5) - 6z, \\ S &= 16(n-1) + \frac{n-23}{3}N + 2z, \\ B &= N(7n-17) - 54z \end{aligned}$$

となる. 従って $P_M(t)$ の係数は n, z から完全に計算できる.

定理 2.3 の証明. α では $\deg((c_2 - c_1^2)\alpha) = 2N - 10 > 0$ が $n \geq 4$ で成立する. β では

$$C - S = \frac{n^3 + 3n^2 - 34n + 30 - 24z}{3} \geq 2(n-5)(n-1)$$

なので, $n \geq 6$ で正である. $n = 4$ では circuit-hyperplane はなく $C - S = 2$ となる. $n = 5$ では二つの 4 元部分集合は 3 元で交わるので $z \leq 1$ であり, 正確な式から $C - S = 20 - 8z \geq 12$ を得る. これで係数 3 の不等式と非零の等号例がないことを証明した. また (10.1) から

$$B \geq N \left(\frac{5}{2}n - 8 \right) > 0$$

となるので, 標準係数でも線分全体で正である.

デザインの存在定理を仮定せずに最適性を示すため, $m \geq 3$ として点集合 $\mathbb{F}_2^m$ を取り, 和が 0 となる 4 元部分集合を circuit-hyperplane と定める. 相異なる三点を指定すると, 和を 0 にする第四の点は唯一に決まる. 従って相異なるブロックの共通部分は高々 2 点である. 残りの 4 元部分集合は基底交換公理を満たす. 実際, 基底の一元を除いてできた固定された三点に対し, 二つ以上の交換候補があるとき, ブロックを作る候補は高々一つだからである. 他方の基底から取れる交換候補が一つだけなら, 交換後はその基底そのものになる. $2^m \geq 8$ なので基底は存在し, 各三点集合も基底に延長できる. 各ブロックの階数は 3 で, 外部の任意の点を加えると階数が上がる. 従って階数 4 の sparse paving マトロイドが実際に定まる.

この場合 $n = 2^m$, $z = n(n-1)(n-2)/24$ である. 代入により

$$C = \frac{(n-1)(n^2 - 8n + 24)}{4} > 0, \quad S = \frac{(n-1)(n-8)^2}{4}$$

となる. 従って $m \rightarrow \infty$ で $3S/C \rightarrow 3$ であり, 任意の $\lambda < 3$ はこの族の β で破れる. 以上で証明が完了する. $\square$

11. 等号と剛性

定理 2.1 と定理 2.3 は, 各々の対象の錐における等号を完全に分類している. すなわち等号成立と $L = 0$ は同値である. Boolean, uniform, graphic, cographic, modular,あるいは非実現可能な場合の例外はない. 最適性は有限のマトロイドで達成されるとは限らない.

係数 8 の場合, 分類は接続関係の条件 (2.5) である. これは必要十分な組合せ論的条件であり, 既存の名称を持つマトロイドクラスによる分類ではない. $t = 0$ では等号はなく, $t = 1$ では $12W_3 = 3W_2 + W_{23}$ と同値である. $B < 0$ なら内点の等号はちょうど一つある. したがって同じ M_q でも, 偏極を変えるだけで判別式は正, 零, 負となる.

M_q の部分空間格子は modular である. ベクトル空間の次元公式が modular 等式を与えるからである. よって任意の極大旗は modular flag であり, 格子は supersolvable

でもある。これらの性質は係数 8 の破綻を防がない。従って「modular ならすべての t で非負」という剛性原理の候補に対する明示的な障害となる。Boolean の場合は異なり、階数 4 では $P_{U_{4,4}}(t) = 66$ である。

階数 4 の uniform マトロイドについては (10.2) で $z = 0$ とすれば

$$P_{U_{4,n}}(t) = \binom{n}{2} (11(1-t) + (7n-17)t) > 0$$

となる。計算表の直和, graphic, cographic の例もこの線分上で標準不等式が狭義に成立する。ただしこれを任意の階数のすべての graphic, cographic, series-parallel, 直和 マトロイドについての定理とはしない。例えば回路マトロイド $U_{4,5}$ は series-parallel であり、明示的な検算例になる。

内点の等号 t_{M_q} における偏極は big かつ nef である。実際、非負な α, β の混合交叉数による三乗の展開には、 $(1-t)^3 \deg \alpha^3 > 0$ という項が含まれる。ここでの等号は接続関係の数の相殺を表し、幾何学的 Miyaoka–Yau 等号の場合の複素双曲的な一意化を意味しない。また有限体上の例を複素数体上の実現とみなしているのでもない。

12. 計算機実験と再現性

補助コードは整数と `fractions.Fraction` だけで計算し、Python 標準ライブラリのみを必要とする。階数関数から flat 格子を作り、有限射影幾何の場合は部分空間から直接構成する。比較不能な flat を含む積は捨てる。次数 d の鎖単項式で flat F が重複する場合、 x_F を一つ取り除き、残りに i と j の線形関係を掛ける。ここで $i \in F \setminus F_{\text{prev}}$, $j \in F_{\text{next}} \setminus F$ と選ぶ。 x_F の係数は 1 である。それ以外に残る flat は鎖を細分するため、相異なる flat の個数が増える。よって再帰は degree が 1 の完全旗、または 0 で終了する。これは数値近似ではなく厳密な簡約アルゴリズムである。

階数 3 から 6 の指定例 25 件に加え、417 件を計算した。その内訳は、6 点以下の単純な階数 4 のラベル付きマトロイド全 354 件、 $\text{PG}(3, 2)$, $\text{PG}(3, 3)$, 8 点の零和ブロックの例、および $\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5$ 上の 8 元のベクトルマトロイドを固定乱数種で生成した 60 件である。354 件は 4 点, 5 点, 6 点でそれぞれ 1, 16, 337 件に分かれる。同型類の個数ではない。網羅性は双対を取ることで分かる。階数 2 のマトロイドは loop 集合と非 loop の平行類への分割で指定でき、階数 1 はさらに簡単である。コードはそれらを列挙し、双対が単純な階数 4 となる場合を正確に残している。

さらに N_2, N_3, N_5 の Chow 環を直接計算し、合計は 445 件となった。円の格子を射影変換とノルムの等位集合の二つの方法で構成し、 $q = 2, 3$ ではベクトル実現とも照合した。469 点の反例については、周囲の 12190 個の円すべてとその制限を別途厳密に列挙した。そのデータファイルには (9.4) の 469 本の列をすべて収録した。この最後の検証は証明した接続数の公式を評価するもので、469 点上の Chow 環全体の列挙ではない。

計算したすべての α, β の体積係数を、[AHK18, Proposition 9.5] に従って被約特性多項式と照合した。既知の α 判別式公式も全レコードで検算した。追加計算の階数 4 の例では、Chern 数を (7.1) と独立に照合した。さらに $U_{4,4}$, $U_{4,6}$, $\text{PG}(3, 2)$, $\text{PG}(3, 3)$ について、[Che26a, Theorem 3.4] の別の Chern 積表示をすべての因子との交叉で比較した。これらは係数や実装の誤りを検出するための検算であり、上記の証明は有限探索に依存しない。

最初の小規模探索では標準判別式の反例も等号例も見つからなかった。その後、有限射影幾何の公式から厳密な反例を得た。同族の $q > 3$ の行は証明済み公式の評価であり、その台集合上の Chow 環全体を列挙したという意味ではない。

M	$\deg(c_1^2\beta)$	$\deg(c_2\beta)$	$(P_M(0), P_M(1))$
$U_{4,4}$	10	12	(66, 66)
$U_{4,5}$	4	24	(110, 180)
$U_{4,6}$	-5	45	(165, 375)
Fano の双対	-2	36	(231, 294)
Vámos	-18	96	(308, 822)
5 頂点の wheel グラフ	-2	40	(220, 326)
$M(K_{3,3})^*$	-4	48	(264, 396)
$U_{2,3} \oplus U_{2,3}$	7	21	(121, 147)
$U_{3,4} \oplus U_{1,1}$	6	18	(110, 126)

階数 3 の Fano, non-Fano マトロイドの $(\deg c_1^2, \deg c_2)$ はそれぞれ $(2, 10)$, $(0, 12)$ であり, $P = 56, 72$ となる. これは対数 Chern 数ではなく通常の Chern 数である.

13. MIXED 不等式と証明戦略の比較

任意の階数について, 厳密な混合係数を

$$D_j(M) = \deg(\Delta_M \alpha^{d-2-j} \beta^j), \quad 0 \leq j \leq d-2$$

と定める. このとき

$$(13.1) \quad P_M(t) = \sum_{j=0}^{d-2} \binom{d-2}{j} D_j(M) (1-t)^{d-2-j} t^j.$$

すべての D_j が非負なら, $a_i, b_i \geq 0$ である類 $a_i \alpha + b_i \beta$ の任意の積に対する非負性が展開から従う. この含意は初等的であり, 新しい mixed 定理とは呼ばない. $P_M(t)$ の各点での非負性だけから, 全混合係数の非負性が従うわけではない.

例えば厳密な D_j の列は

$$\begin{array}{l|l} U_{5,5} & (140, 220, 140) \\ U_{5,6} & (210, 460, 480) \\ U_{6,6} & (255, 545, 545, 255) \\ U_{6,7} & (357, 980, 1365, 1050) \end{array}$$

である. 従って $P_{U_{5,5}}(t) = 140 + 160t - 160t^2$ となる. これらの特定の混合交叉数はすべて正である. 階数 4 では偏極因子は一つだけなので, 定理 2.1 は複数因子の本格的な mixed 定理ではない.

検討した方法	本研究での帰結
Hard Lefschetz, Hodge–Riemann	因子の交叉形式を制御するが, Δ_M の正值性自体は与えない.
Mixed Hodge–Riemann, Alexandrov–Fenchel	Lefschetz fan に対する [ADH23, Theorem 5.20] は原始形式を扱う. Δ_M に必要な原始表示は得ていない.
Lorentzian 多項式	体積やマトロイド多項式の理論 [BH20] は特定の正係数を扱う. 符号を持つ Chern 微分作用素がその正值性を保存するとは限らない.
Deletion–contraction, 階数・元数による帰納法	削除で flat の接続関係も接類も変わり, 未評価の補正項を捨てられない. 一方, 各点での縮約は本稿で用いた初等的接続不等式を与える.
Building set の blow-up, wonderful model	接類の積表示が計算の動機を与える. Chow 関係からの直接証明は実現可能性を不要にする. 小さい building set では答えが変わる.
Valuative な方法	接類理論の構成には有用だが, 本稿の格子による証明には追加の valuative 拡張は不要である.

特に「nef なので Hodge–Riemann から従う」という説明は使っていない. 追加の正值性を与えるのは接続関係による分解である. 階数 5 以上の一般 mixed 不等式は本稿では未解決である.

14. 実現可能マトロイドと WONDERFUL MODEL

マトロイドが r 次元部分空間 $V \subset K^E$ で実現される場合, 射影的 wonderful コンパクト化の次元は $r - 1$ であり, $\mathbb{P}(V)$ から配置の層を適切な順序で blow-up して得られる [DCP95, Che26b]. 階数 4 の複素実現に対し, 定理 2.1 は

$$\int_{W_V} (3c_2(T_{W_V}) - c_1(T_{W_V})^2)(aH + bH_{Cr}) > 0$$

と読める. H は超平面の引き戻し, H_{Cr} は周囲の Cremona 超平面類の制限である. K_{W_V} の正值性や T_{W_V} の安定性は仮定しない. 証明は同じ交叉計算である.

最適性を与える族 $\text{PG}(3, q)$ と N_q は $\mathbb{F}_q$ 上で実現される. 固定した各正標数における paving の主張を含め, その最適性は複素実現可能なマトロイドだけに制限した最適定数を決定するものではない. 組合せ論的証明により, 標数 0 の微分幾何をこれらの例に持ち込むことを避けている. [BP26, Theorem 1.1] の重み付き複素配置の不等式は, 安定な配置の放物型類に関するものであり, 本稿で用いる通常の接類の不等式ではない.

Building set への依存性は Boolean マトロイドですで見える. 点と E からなる building set は $\mathbb{P}^d$ を与え, $c_1 = (d+1)H$, $c_2 = \binom{d+1}{2}H^2$, $\Delta = 0$ となる. 最大 building set は permutohedral model を与え, $U_{4,4}$ の α に対する標準判別式は 66 である. したがって本稿の等号条件と最適定数を, 小さい building set へそのまま移すことはできない.

15. 新規性監査と未解決問題

文献検索は 2026 年 9 月 10 日に行った. Cheng の [Che26a] 第 3 版と [Che26b] 第 2 版, Cheng–Lin の [CL26] 第 1 版と第 3 版, および [FY04, AHK18, ADH23, BH20, Man23] の関連する定理の記述を確認した. 最終改訂では 2026 年 4 月 29 日付の Cheng–Lin の最新第 3 版を用いた. Corollary 4.15 と Remark 4.16 の先行する注意はこの版でも維持されている. 接類の companion 論文 [CLG26], tautological 類の nef 錐に関す

る論文 [Sta26], 逆数空間の polar degree に関する論文 [BKW26] も確認し, [BP26, Theorem 1.1] と [Ali26, Lemma 2.3] を調べた. これらの関連概念を理由に, 通常の接判別式を対数, 放物型, あるいは tautological quotient の判別式と同一視することはできない.

検索語には “matroid Miyaoka Yau beta”, “matroid tangent Chern polarization”, “Cheng Lin Chern inequalities”, “matroid Chern sparse paving”, および最適定数, 有限射影幾何, 反転平面, 楕円二次曲面に関する語を含めた. [CL26, Remark 4.16] の先行する明示的な注意が見つかり, 本稿全体でこれを認めている. 調査した文献中には, 階数 4 の $\mathcal{C}_M$ 上の正確な係数 9, 固定した正標数で実現可能な paving だけでその最適性, 零和ブロックの最適族を伴う sparse paving の係数 3, あるいは上記の縮小区間の公式に一致する定理は見つからなかった. 2026 年 9 月時点で行った文献調査の範囲では, これらは新しい結論と考えられる. ただしこれは範囲を限定した監査であり, 未索引・未公刊の結果まで存在しないことを保証するものではない.

端点の公式は証明を支える計算である. その価値は見た目の新しい式そのものよりも, 最適不等式と一律の障害を導く点にある. 端点が既知になった後で正值性区間を求める部分は線形代数であり, 独立の深い定理とは数えない. 本報告で残る問題は次の通りである.

- (1) 標準係数の反例の最小台集合サイズを決め (本稿の明示的な上界は 469), $B = 0$ となる階数 4 のマトロイドを接続数の等式以上の構造で分類する.
- (2) Nef 錐全体の最適係数, および複素実現可能または orientable なマトロイドの α, β 錐における最適係数を決定する.
- (3) 階数 5 以上の本格的な mixed 不等式を証明するか, 反例を構成するか, 最適に修正する. 個々の計算は証拠にとどまる.
- (4) 非最大 building set の blow-up における, 新しい端点公式と等号集合の変化を調べる.

REFERENCES

- [ADH23] F. Ardila, G. Denham, and J. Huh, *Lagrangian geometry of matroids*, J. Amer. Math. Soc. **36** (2023), 727–794. [arXiv:2004.13116](#); Theorem 5.20 (mixed HL and HR).
- [AHK18] K. Adiprasito, J. Huh, and E. Katz, *Hodge theory for combinatorial geometries*, Ann. of Math. **188** (2018), 381–452. [Published article](#); Definition 5.7, Proposition 5.8, Proposition 9.5, Lemma 9.7.
- [Ali26] M. Aliabadi, *Paving matroids that are not sparse paving*, 2026. [arXiv:2605.11054v1](#); Lemma 2.3 (paving construction; no Chern inequality).
- [BH20] P. Brändén and J. Huh, *Lorentzian polynomials*, Ann. of Math. **192** (2020), 821–891. [arXiv:1902.03719](#); Section 3.2, Theorem 3.10.
- [BKW26] C. Briand, L. Kayser, and J. Weigert, *Polar degrees of matroids*, 2026. [arXiv:2606.26281v1](#); introduction and polar-degree statements (scope comparison only).
- [BP26] M. de Borbon and D. Panov, *A Miyaoka–Yau inequality for hyperplane arrangements in $\mathbb{CP}^n$* , 2024, revised 2026. [arXiv:2411.09573v3](#); Theorem 1.1 and Section 1.2 (parabolic Chern theory).
- [Che26a] R. Cheng, *On the tangent bundle and the divisor theory of a general matroid*, 2025, revised 13 March 2026. [arXiv:2510.06609v3](#); Definitions 2.4, 2.5, 3.1; Theorems 3.4, 4.1; Section 6.
- [Che26b] R. Cheng, *Tangent classes for matroid building sets*, 2026. [arXiv:2606.22650v2](#); Definition 3.3, equations (3.5)–(3.6), Corollaries 4.20 and 4.23, and the formula following Corollary 4.23.
- [CL26] R. Cheng and W. Lin, *Inequalities for Chow polynomials and Chern numbers of matroids*, 2026, revised 29 April 2026. [arXiv:2603.21680v3](#); Corollary 4.15 and Remark 4.16. Version 1 was also checked under its earlier title.
- [CLG26] R. Cheng, S. Liu, and G. Gao, *Tangent classes of matroids and wonderful compactifications*, 2026. [arXiv:2607.05835](#); introduction and tangent-class construction (scope comparison only).
- [DCP95] C. De Concini and C. Procesi, *Wonderful models of subspace arrangements*, Selecta Math. (N.S.) **1** (1995), 459–494. [Published article](#); construction of wonderful models. No unverified theorem number is used.
- [FY04] E. M. Feichtner and S. Yuzvinsky, *Chow rings of toric varieties defined by atomic lattices*, Invent. Math. **155** (2004), 515–536. [arXiv:math/0305142](#); Definitions 1–3, Theorems 1–3.
- [Man23] E. Mannino, *Chern numbers of matroids*, 2023. [arXiv:2310.01956v3](#); Theorems 1.2, 1.5, 1.6 (logarithmic Chern numbers).
- [Sta26] C. Stastny, *Extremality of tautological classes of matroids in nef cones*, 2026. [arXiv:2606.01278v1](#); introduction and main extremality statement (scope comparison only).