

数学ノート26本の 査読報告書

新規性・正しさ・修士論文・博士論文

2026年9月11日

最終版 | 個別評価 26/26 完了

掲載順で固定した26本の数学的内容を評価する。確認した事実、独立の検算、残る不確実性を区別して記載する。

ChatGPT数学ノート26本の査読報告書

評価日: 2026年9月11日。対象は指定ページの「chatGPTが書いたノート」に掲載された数学論文26本。掲載順で固定した。岩井雅崇本人の論文・ノートおよび数学以外の論文は対象外。

評価基準

独立した評価軸は以下の4項目のみ。ChatGPT生成という理由による加点・減点をしない。比較・検証の範囲を明示し、文献未確認と証明の欠落と反例を区別する。

1. 新規性 A: substantialな新規成果、B: 明確な新成果、C: 小規模な改良・新証明、D: 本質的に既知、E: 有効な新規性なし。 2. 正しさ A: 核心の証明は正しい、B: 軽微な修正で正しい、C: 真の可能性は高いが相当な欠落、D: 重大な未解決問題、E: 中心的主張が偽。 3. 修士論文 A: 十分以上、B: 十分、C: 補足・修正を要する、D: 不十分。通常の数学専攻修士論文を想定し、強い新規性は必須としない。 4. 博士論文 A: 明確に博士水準、B: 中心成果として妥当、C: 一章・一部としては有用だが中心成果として弱い、D: 不十分。投稿可能性だけでは十分としない。

評価は原稿の数学的内容に対するもので、提出者が証明を理解・説明できるかという口頭審査は含まない。学位認定の制度差があるため、普遍的な認定を意味しない。

対象26本の固定一覧

出典: [岩井雅崇氏の掲載ページ](#)。2026年9月11日に取得したPDFを固定して評価した。以下のTitleは掲載一覧の表記を保存し、本文ではKähler等の綴りを整えた場合がある。

No.	Title	Field	PDF URL
1	A combinatorial proof of the delta-corrected Miyaoka–Yau inequality for toric Fano varieties	代数幾何・toric Miyaoka–Yau	PDF
2	Maximal relative anticanonical growth and finite etale splitting	代数幾何・反標準束	PDF
3	Torsion obstructions to generalized abundance	代数幾何・generalized pairs	PDF
4	Magnitude homology of Abelian surfaces	magnitude homology・アーベル曲面	PDF
5	RC-positivity of induced symmetric powers and positive mean curvature	複素幾何・RC positivity	PDF
6	Positive curvature averages without a common RC direction	複素幾何・RC positivity	PDF
7	Mean RC curvature and pinched volume rigidity	複素幾何・曲率剛性	PDF
8	Asymptotic relative Chow polystability for products of polarized Hirzebruch surfaces	複素幾何・Chow stability	PDF
9	Basic Chern vanishing and Beauville–Bogomolov structure in Vaisman geometry	複素幾何・Vaisman多様体	PDF
10	Fixed-Lee positive cones on point blow-ups of exact LCK surfaces	複素幾何・LCK曲面	PDF
11	A conic criterion for higher Kahler structures on diagonal complex nilmanifolds	複素幾何・nilmanifold	PDF
12	p-Kahler thresholds for two-step nilmanifolds from rational normal curves	複素幾何・p-Kähler	PDF

No.	Title	Field	PDF URL
13	Heat-semigroup defects, gaussian approximation, and spectral multiplicities on RCD spaces	幾何解析・RCD	PDF
14	Spectral cluster multiplicities from almost gaussian eigenfunctions on RCD spaces	幾何解析・RCD	PDF
15	Robin eigenvalues on weighted intervals:collapse of the infimum and sharp upper-model rigidity	スペクトル幾何・CD(K,N)	PDF
16	Minimal signless laplacian coefficient vectors of cacti and sharp incidence energy in the even-cycle class	グラフ理論・signless Laplacian	PDF
17	Magnitude homology of annuli and holomorphic maps	多変数複素解析・magnitude homology	PDF
18	Minimal local sprays and a rank obstruction on projective-space bundles	岡理論・sprays	PDF
19	Joint collision and pole regularization in weighted Bergman interpolation	多変数複素解析・Bergman補間	PDF
20	Algebraic rigidity and prescribed convergence sets for triangular non-autonomous automorphisms	多変数複素力学系	PDF
21	Depth-three symmetric Eisenstein series	整数論・Eisenstein series	PDF
22	An integral refinement of the Bachmann–Risan matrix	整数論・多重ゼータ値	PDF
23	Sharp polarized Chern inequalities for rank-four matroids	マトロイド・Chow環	PDF
24	Graphic matroid Chow polynomials	マトロイド・Chow多項式	PDF
25	Sharp separation from twelve intersection polynomials: long virtual knots with identical closures	仮想結び目	PDF
26	Virtual tightness on $M(5, 2)$: a lens-space reduction and an explicit double cover	接触トポロジー	PDF

確認範囲と記録

評価完了26/26。各論文について主定理に必要な定義・補題・証明・参考文献を確認し、4項目の評価を個別に保存した。4・8・12・16・20・24本の完了時点でPDFチェックポイントを生成し、26本完了後に全体を統合した。

正しさAは本文に記載した範囲の主定理と核心証明に対する査読判断であり、形式証明支援系による全行の認証や、全計算付録の実行を意味しない。新規性では確認した先行結果の仮定と結論を比較し、未取得原文・未照合の番号・未再実行の大規模計算は各論文で明示した。英語・日本語の併記原稿は英語版の主要証明を基準に読み、同じ数学的内容を重複して評価しない。

修士論文の比較基準

指定の岩井雅崇 “Multiplier ideal sheaves and local geodesics for plurisubharmonic functions” (9ページ) について、Abstract、Introduction、Theorems 1.1/1.3、Corollary 1.2、§ 3–5の主要証明、References を実際に確認した。

同論文の核は、multiplier idealの包含をBergman近似を介してKiselman–Lelong数と比較し、toric/tame singularitiesの仮定の下でweak geodesicの端点収束へ結びつけることにある。既知の理論を具体的な問題に適用するだけでなく、その接続に必要な補題を自分の議論として組み立てている点を比較基準とした。

本報告書では、この論文と同程度の専門用語や同じページ数を要求しない。通常の修士論文では、高度な既知理論の正確な統合・非自明な計算でも成立し得る。博士評価ではそれに加えて中心的成果の実質的な新規性と深さを要求する。英語版と日本語版の重複は数学的内容量を二倍に数えない。比較用原稿を無誤謬な正しさの基準とは扱わず、問題設定と議論のまとまりの比較に用いる。

比較資料: [岩井修論PDF](#)。

26本の総合比較表

評価記号は列ごとに意味が異なる。新規性・正しさはA-E、修士・博士はA-Dである。正しさと新規性、修士と博士の判定はそれぞれ独立させた。各行は以下の詳細評価から同じ記号を転記した。

No.	Title	新規性	正しさ	修士論文	博士論文	新規性の核心または最大の問題
1	A combinatorial proof of the delta-corrected Miyaoka–Yau inequality for toric Fano varieties	B	A	A	C	δ 補正不等式のfacet・体積Hessianによる組合せ的証明
2	Maximal relative anticanonical growth and finite etale splitting	D	A	A	D	既知のnef反標準分裂理論の具体化
3	Torsion obstructions to generalized abundance	D	A	B	D	Pic^0 のtorsionによる既知abundance障害
4	Magnitude homology of Abelian surfaces	C	A	A	C	同じmagnitude homologyを持つ非isogenousな明示例
5	RC-positivity of induced symmetric powers and positive mean curvature	B	A	A	C	誘導 Sym^m のRC正値性とpositive mean curvatureの同値
6	Positive curvature averages without a common RC direction	B	A	A	C	positive meanと共通RC方向の欠如を両立する族
7	Mean RC curvature and pinched volume rigidity	B	A	A	C	Schur補完によるsharp曲率平均とvolume rigidity
8	Asymptotic relative Chow polystability for products of polarized Hirzebruch surfaces	B	A	A	C	積Hirzebruch曲面の固定相対torusを精密決定
9	Basic Chern vanishing and Beauville–Bogomolov structure in Vaisman geometry	D	A	A	D	Vaismanの既知分解定理・Chern消滅の帰結
10	Fixed-Lee positive cones on point blow-ups of exact LCK surfaces	C	A	A	D	fixed-Leeの全positive coneの具体化
11	A conic criterion for higher Kahler structures on diagonal complex nilmanifolds	B	A	A	B	全diagonal境界の還元とconicによる正確な閾値
12	p-Kahler thresholds for two-step nilmanifolds from rational normal curves	B	A	A	C	Vandermonde配置のp-Kähler閾値を明示決定
13	Heat-semigroup defects, gaussian approximation, and spectral multiplicities on RCD spaces	C	A	A	C	既知Gaussian近似手法の多変量・高次固有値への拡張
14	Spectral cluster multiplicities from almost gaussian eigenfunctions on RCD spaces	C	A	A	C	既知semigroup法による高次spectral clusterの精密化
15	Robin eigenvalues on weighted intervals: collapse of the infimum and sharp upper-model rigidity	B	A	A	C	Robin下限崩壊・sharp上側model・等号とphase変化
16	Minimal signless laplacian coefficient vectors of cacti and sharp incidence energy in the even-cycle class	B	A	A	B	全cactusの係数Pareto分類とparity別energy最小化
17	Magnitude homology of annuli and holomorphic maps	C	A	A	C	円環のmagnitude homologyと写像作用の具体的計算

No.	Title	新規性	正しさ	修士論文	博士論文	新規性の核心または最大の問題
18	Minimal local sprays and a rank obstruction on projective-space bundles	B	A	A	C	最小local sprayのrank障害・分類と相対版
19	Joint collision and pole regularization in weighted Bergman interpolation	C	A	A	C	Bergman補間の衝突・pole消失の二重極限評価
20	Algebraic rigidity and prescribed convergence sets for triangular non-autonomous automorphisms	C	A	B	D	三角写像の有界次数と指定収束集合の構成
21	Depth-three symmetric Eisenstein series	B	A	A	C	depth 3のformal次元とmodular像・kernelの分離
22	An integral refinement of the Bachmann–Risan matrix	B	A	A	C	Bachmann–Risan行列の整数化と2進整除性
23	Sharp polarized Chern inequalities for rank-four matroids	B	A	A	C	rank 4の β 方向sharp比9と有限幾何による例
24	Graphic matroid Chow polynomials	B	A	A	C	Eulerian因子挿入とblock graphのstrict interlacing
25	Sharp separation from twelve intersection polynomials: long virtual knots with identical closures	B	A	A	C	12多項式・GPV・closureを同時固定するsharp分離
26	Virtual tightness on $M(5, 2)$: a lens-space reduction and an explicit double cover	D	A	B	D	lens分類・被覆定理の直接的specialization

判定の分布：新規性 B=15, C=7, D=4。正しさ A=26。修士論文 A=23, B=3。博士論文 B=2, C=18, D=6。

Paper 1. A combinatorial proof of the delta-corrected Miyaoka–Yau inequality for toric Fano varieties

Main result

対象PDFの英語版 pp.1–9（日本語版 pp.10–19）の定義・主定理・証明・参考文献を確認した。複素数体上の n 次元 projective toric klt Fano variety、 $n \geq 2$ 、 $H = -K_X$ に対し、 $d = \min\{1, \delta(X)\}$ として

$$2(n+1)\hat{c}_2(X)H^{n-2} \geq nd(2-d)H^n$$

を組合せ的に証明する。主不等式は既知であり、本稿の中心成果は実凸多面体に対する Theorem 3.1 とその toric な換算である。Q-factorial 性を仮定しない。

1. 新規性：B

Closest known result

Known result. Hisamoto–Iwai, *The Miyaoka–Yau inequality and the delta invariant for Fano varieties*, arXiv:2607.25181, Theorem 1.1 (=7.2)。仮定は projective klt Fano、結論は上の不等式で、toric に限らない。本文 § 7.2、Example 7.5 末尾には toric の場合の組合せ的証明への問いが実在することを確認した。

凸幾何の直接の先行結果は Freyer–Henk–Kipp, *Affine subspace concentration conditions for centered polytopes*, Theorem 1.1 および 1.2(i)。重心を原点とした凸多面体の facet 角錐体積は全体の $1/(n+1)$ 以下である。

Precise difference

Current paper. 仮定を toric に限定する一方、canonical extension、Langer 不等式、特殊計量を入力しない証明を与える。既知の重心角錐評価から原点角錐の二乗和評価へ移し、support-volume の Hessian で ridge 和に変換する。statement の代数幾何的な一般化ではない。実法線に対する凸幾何の定式化と独立した証明が差分である。

Assessment

不等式そのものに新規性はないが、文献中の明示的な問いに対応する別証明であり、単なる既知定理の引用による系ではない。確率ベクトルの分解と体積の二階微分を接続する点を B と評価する。既存の凸幾何全体に同値な証明がないことまで証明したわけではなく、世界初の無条件認定ではない。

2. 正しさ：A

Statement check

通常の c_2 と orbifold c_2 を区別し、well-formed でない weighted projective stack を排除している。交点の次数は $2+(n-2)=n$ 。toric の δ 公式では $0 < \delta \leq 1$ なので $d = \delta$ でよい。

Proof check

独立に追跡した核心は次の通り。facet の原点角錐比を α_i 、重心角錐比を q_i 、重心からの正規化距離を s_i とすると、 $q_i = s_i \alpha_i$ 、両者の総和は 1。 $d = 1/\max s_i$ から $\alpha_i \geq dq_i$ であり、 $d < 1$ なら確率ベクトル r を用いて $\alpha = dq + (1-d)r$ と書ける。 $q_i \leq 1/(n+1)$ を代入すると

$$\sum_i \alpha_i^2 \leq \frac{d^2 + 2d(1-d)}{n+1} + (1-d)^2 = \frac{1+n(1-d)^2}{n+1}.$$

単純多面体の体積関数 $V(h)$ について、Brunn–Minkowskiから $V^{1/n}(1/n)$ が凹であり、 $V_{ii} \leq (n-1)V_i^2/(nV)$ 。また $V_i = nV\alpha_i$ 、Eulerの斉次式から $\sum_{ij} V_{ij} = n(n-1)V$ 。 $i \neq j$ の微分はridge体積/法線外積ノルムなので、対角項を引いて

$$2S_2 \geq n(n-1)V\left(1 - \sum_i \alpha_i^2\right).$$

これらを合成した係数は $n^2(n-1)d(2-d)/(n+1)$ 。最後に $(n-2)!$ を掛ける際、 $n^2(n-1)(n-2)! = n \cdot n!$ となり主不等式と一致する。

非単純多面体では法線を固定して支持数を一般に摂動する。既存ridgeの体積は収束し、新規ridgeは次元 $\leq n-3$ の集合へ潰れるため $(n-2)$ 次元体積が0へ収束する。有限個のfacet対しかないので和の極限は正当化できる。

非Q-factorialなtoric部分では余次元 ≥ 3 の軌道を除く。残るconeは次元 ≤ 2 なのでsimplicialであり、canonical smooth DM stackでEuler列を使える。codimension-two orbitの一般安定化群の位数は $\text{mult}(\sigma)$ 、pushforward係数はその逆数である。除去集合の $A_{-(n-2)}$ は0なのでcycleを元の X へ戻せる。非properな開集合上で数値積分する議論にはなっていない。

Problems found

核心を崩すFATAL/MAJOR GAPは検出しなかった。引用の全ページを再検証したという意味ではない。Blum–Jonssonの δ 公式とFHKのfacet評価は原文を照合し、Chern数の辞書は上記の局所商とChow localizationによって独立に確認した。

Counterexample / sanity check

$P(1,1,3)$ では $H^2=25/3$ 、 $\hat{c}_2=7/3$ 、 $d=3/5$ で等号。 $P(1,2,3)$ では差が2となる。4個のwell-formed重み列について有理数演算で差の恒等式を再計算した。 $P^2 \times P^2$ では $H^4=486$ 、 $c_2H^2=216$ 、差=216。原稿の非simplicialな三次元cross-polytope例でも12本のedgeと格子指数2から $\hat{c}_2H=6$ を得る。

Assessment

主要な凸幾何の不等式、極限操作、格子指数、特異点の扱いを検証した範囲でA。新規性Bとは独立の判定である。

3. 修士論文としての妥当性：A

toric交叉理論、orbifold Chern類、凸体の変分を一つの問いに結びつけるまとまった内容があり、主要証明も自立している。岩井修論を比較基準としたときも、「既知理論を理解した上で、明確な問題に独自の橋渡しを与える」という点で十分以上。原稿の証明を学生自身が説明できることを前提とする。

4. 博士論文としての妥当性：C

独立した研究論文・博士論文の一章として評価できる。しかし得られる主不等式は既知であり、中心的新手法は短い凸幾何の連結部分に集中する。この一成果だけを博士研究の中心として十分とするほどの理論的広がりや派生的成果は現稿から認定しにくい。

Important references

- [Hisamoto-Iwai](#), 上記論文、Theorem 1.1、§ 7.2 Example 7.5末尾（閲覧版p.50）。
- [Freyer-Henk-Kipp](#), *Affine subspace concentration conditions for centered polytopes*, Mathematika 69 (2023), 458–472, Theorems 1.1, 1.2(i)。
- [Blum-Jonsson](#), *Thresholds, valuations, and K-stability*, Adv. Math. 365 (2020), 107062, Corollary 7.16。
- Cox-Little-Schenck, *Toric Varieties*, AMS, 2011。degree-volumeおよび局所格子指数の標準的背景。
exact reference location not verified。

Paper 2. Maximal relative anticanonical growth and finite étale splitting

Main result

英語版pp.1–10のAbstract、§ E.1–E.8の定義・主定理・証明、Referencesを確認した。 $f: X \rightarrow Y$ は滑らかな複素射影多様体間の連結ファイバーを持つ全射、 $r = \dim X - \dim Y > 0$ 、 $L = -K_X(Y)$ は X 上nef。Theorem E.3.1は $\kappa(L) = r$ から有限étale Galois被覆後の積分分解と L のsemiamplenessを導く。ファイバー上で次数 d のgenerically finite rational mapを与える部分線形系があれば、被覆次数 $e \mid d$ とできる。

1. 新規性：D

Closest known result

Known result. Ejiri–Iwai–Matsumura, *On asymptotic base loci of relative anti-canonical divisors of algebraic fiber spaces*. 原文Theorem 4.6で、klt pairとnefな相対反log canonical divisorからpairのlocally constant structureを得る。semiampleの場合の有限被覆による分解は同論文の主題の一つ。確認したarXiv v1では§ 1.4、Theorem 1.7であり、原稿の引用する出版版Theorem 1.6という番号と混同しない。

さらにCacciola–Di Biagio, Corollary 5.3とLemma 5.4はnef abundant L にklt effective $\mathbb{Q}$ -representativeが存在することを与える。Ambro, Theorem 4.7とProposition 4.4は、discriminantが0、moduli b -divisorが $\mathbb{Q}$ 自明なlc-trivial fibrationの有限被覆による積分分解を与える。

Precise difference

Current paper. 入力をsemiampleから $\kappa(L) = r$ に変更し、より一般のnef abundantの場合も監査する。しかし $\kappa = r$ と数値次元のファイバー比較からabundanceとなり、klt representativeを作った後のAmbroの理論で処理できる。追加点は複数次断とその和を同時にmarkする説明と $e \mid d$ という初等的次数精密化である。

Assessment

質的な主定理は既知理論の帰結であり、原稿もそのことを明記している。この自己評価だけで判断したのではなく、上記原文の仮定を照合した。次数評価には教育的価値があるが、一般的な有限群の固定体定理とnef交点の単調性を超える新しい構造は認定できないためD。数学的に無効だからEという判定ではない。

2. 正しさ：A

Statement check

絶対的nefness、connected fibres、標数0が明示されている。generically finiteをfinite morphismと取り違えず、任意のflat structureに有限monodromyを主張していない。この区別は必要である。

Proof check

切断 $s_0, \dots, s_q$ と $s_0 + s_i$ の零因子の総和 T を作ると $T \sim m(2q+1)L$ 。十分小さい $\varepsilon > 0$ で $(X, \varepsilon T)$ はklt、かつ $-(K_X(Y) + \varepsilon T) \sim (1 - \varepsilon m(2q+1))L$ はnefである。pairの構造定理を一度だけ適用するため、異なる切断に別のmonodromyを選ぶ誤りを避けている。

普遍被覆上で各切断は $a_i(y)t_i(z)$ となる。 $s_0 + s_i$ をmarkしてあるので、 t_0 と t_i の独立性から $a_0 = a_i$ となり、比はファイバー方向だけに依存する。切断環の制限の単射性は、像の全ての斉次関係式を比較して一般ファイバー上でも像の次元 r を保証する。

$K=C(Z)\subset E=C(F)$ に対し、選んだmonodromy群 G は $\text{Aut}_K(E)$ へ忠実に入る。固定体定理から

$$d = [E : K] = [E : E^G][E^G : K] = |G|[E^G : K].$$

従って $e=|G|$ は d を割る。基点解消後 $A=M+B$ で A, M はnef、 B はeffectiveなので

$$A^r - M^r = B \sum_{j=0}^{r-1} A^{r-1-j} M^j \geq 0.$$

$M^r = d \cdot \deg Z$ から $d \leq m^r(-K_F)^r$ が従う。normによるsemiamplessnessの降下は、被覆の有限個の点で一斉に非消滅な切断を選び、 G -translatesの積を取るので正しい。

S $E.6$ のabundance監査では、 $K_-(X/Y)+D \sim Q_0$ とklt representativeからlc-trivial fibrationを得る。base change $\beta: Y_1 \rightarrow Y$ に対し、 $E\beta = K_-(Y_1) - \beta^* K_-Y$ 、crepant boundaryは $g^*D - f_1^*E\beta$ 。係数 a の素因子上で閾値は $1+a$ 、discriminant係数は $-a$ となる。これによりtraceだけでなく高次モデルでもmoduli部分の Q 自明性が整合する。Ambroの有限被覆はsmoothな Y へのpurityでétaleとなり、Proposition 4.4の除外集合も空となる。

Problems found

本質的なgapは検出しなかった。EXPOSITION-CITATIONとして、EIMは初期arXiv版と出版版で番号・statementが変わっているため、参照版の指定を維持する必要がある。出版版の番号全部を独立確認できたとはしないが、主証明に必要なpair構造定理はarXiv v1のTheorem 4.6でも確認できる。

Counterexample / sanity check

A をアーベル多様体、 P をnon-torsionな Pic^0 の元、 $X=P_A(O \oplus P)$ とすると、 $f_*O(mL) = \bigoplus_{j=0}^m (2m)P^j(j-m)$ 。非自明な数値的自明束には切断がないので $h^0(mL)=1$ 、 $\kappa=0$ 、 $v=1$ 。有限被覆後もnormにより P はnon-torsionのままで、nefだけでは分解しない。商規約と $-K$ の符号がこの計算と一致する。分解被覆をGalois化する際、単なる $d!$ の上界でなく $|G|d$ が得られるのも固定体計算から確認した。

Assessment

強い既知定理に依存するが、依存先を今回の仮定で使えることと、その後の論理は正しく A 。

3. 修士論文としての妥当性：A

既知性を適切に認めた上で、相対反標準束、線形系、monodromy、canonical bundle formulaを一つの命題に統合している。基点・同時marking・被覆の延長という非自明な論点を具体的に説明しており、通常の修論として十分以上。新規性 D と修士 A は矛盾しない。

4. 博士論文としての妥当性：D

主結果が既知の連結した帰結で、追加される次数評価も一般的な固定体定理の範囲に留まる。この原稿を博士の中心的な新成果とするには不十分。

Important references

- Ejiri-Iwai-Matsumura, 上記論文、arXiv v1 Theorems 1.5, 1.7, 4.6。出版先J. Algebraic Geom. 32 (2023), 477–517。出版版の全番号はexact reference location not verified。
- Cacciola-Di Biagio, *Asymptotic base loci on singular varieties*, Corollary 5.3, Lemma 5.4 (v2 p.12)。

- [Ambro](#), *The moduli b-divisor of an lc-trivial fibration*, Compos. Math. 141 (2005), 385–403, Proposition 4.4, Theorem 4.7。
- [Fujino](#), *On Kawamata’s theorem*, Theorem 1.1。
- [Ejiri–Gongyo](#), *Nef anti-canonical divisors and rationally connected fibrations*, Theorem 1.2。

Paper 3. Torsion obstructions to generalized abundance

Main result

英語版pp.1-13の主定理1.1/1.2、§ 4-7の全主要証明とReferencesを確認した。楕円曲線C上の $V = \bigoplus L_i$ 、 $L_i \in \text{Pic}^0(C)$ 、 $\det V \cong \mathcal{O}$ 、 $\text{rank } V = r$ に対し、 $X = P_C(V)$ 、 $H = \mathcal{O}(1)$ 、 $M = (r+1)H$ とすると $D = K_X + M \sim H$ 。 L_i の関係格子 Λ 、生成群 Γ を使い $R(X, D) \cong C[\Lambda \cap Z^r_{\geq 0}]$ 、 $\kappa(D) = r - 1 - \text{rank}(\Gamma/\Gamma_{\text{tors}})$ を求める。semiampleの必要十分条件は Γ 有限で、最小基点自由倍数は $\exp \Gamma$ 。族における非構成可能性と rank 3 の明示的環も計算する。

1. 新規性：D

Closest known result

Known result. Birkar–Hacon, “Variations of generalised pairs”, Example 1.1はPoincaré束のtorsion specializationでgood minimal modelの存在が変わる例を与え、Example 3.1はboundedな曲面族でも基点自由化の倍数が一様でない例を与える。両例の原文を確認した。Esposito–Mistretta, “On semiample vector bundles and parallelizable compact complex manifolds”, Theorem 3.10は、determinantの Kodaira次元0とweak semiamplenessから有限Galois étale被覆での自明化を与える。

Precise difference

Current paper. torsion障害をsplit projective bundleのmonomialとして可視化し、切断環の全次数、正確な指数、rank 3のlitaka baseを計算する。定性的なtorsion機構・bounded familyでの非一様性を新しくしたわけではない。有限個のmixed plurigeneraで判別できないことも、検査する次数より大きなtorsion位数を取る同じ機構の直接の帰結である。

Assessment

整理された具体計算として価値がある。しかし主構造はprojective-bundle formula、degree-zero束の切断判定、有限生成semigroup/invariant ringの標準的計算から直接出る。rank 3の環は対角有限群の monomial invariant ringであり、独立した大きなMMP定理はない。新しいnotationや組合せであるだけではC以上を確実に認定できず、全体としてDとした。

2. 正しさ：A

Statement check

quotient projective bundleの規約を固定して $\pi_* \mathcal{O}(mH) = \text{Sym}^m V$ と $K_X = -rH$ を両立させている。nef partはXに降下するためgeneralized discrepancyは通常の $(X, 0)$ のもの。パラメータ族の全空間上でMが絶対的nefであるとは主張していない点も適切。

Proof check

degree-zeroのLが切断を持つのは自明なときだけなので、切断は関係格子内の非負指数monomialに一致する。 Λ の基底に沿って束をtrivializeすれば積のscalar cocycleを消せ、Hilbert関数だけでなく環同型となる。 $\det V = \mathcal{O}$ から $(1, \dots, 1) \in \Lambda$ なので半群は Λ 全体を群として生成する。従って環の次元はrank Λ で、Projの次元はrank $\Lambda - 1$ 。Gordanの有限生成と飽和半群のnormalityも整合する。

quotient section s_i 上でHは L_i に制限されるから、 mH が基点自由なら全 L_i^m が自明。逆にそれらが自明なら純冪monomialが全ファイバーを被覆する。この両方向により「 $\exp \Gamma$ が最小」というsharpnessが証明される。

$r=2$ で L の位数 q なら環は $\mathbb{C}[u,v,w]/(uv-w^q)$ 、次数 $(q,q,2)$ 。 $r=3$ で $\text{Pic}^0(C)[q]$ の基底を取れば $a \equiv b \equiv c \pmod q$ が必要十分となり

$$R = \mathbb{C}[u, v, w, t]/(uvw - t^q), \quad \deg(u, v, w, t) = (q, q, q, 3).$$

q -th Veroneseでは $q|3j$ だけを残す。 $3 \nmid q$ なら P^2 、 $3|q$ ならcubic $UVW=S^3$ となる。一般projective orbitの scalar stabilizerは $\lambda=\mu$ 、 $\lambda^3=1$ 、 $\lambda^q=1$ から位数 $\gcd(q,3)$ 。一般litaka fibreのétale次数 $q^2/\gcd(q,3)$ もこれで確認できる。

§ 7のb-semiample replacementでは上のlog resolutionの負のboundary係数を捨てず、一般member G/m を加えてsub-kltにしpushforwardする。 $K_Y+\Delta$ の Q -Cartier性を等式で確保しており、Ambroのordinary klt canonical bundle formulaへの適用は正当。任意のnef partに拡張する議論は行っていない。

Problems found

FATAL/MAJOR GAPは検出しなかった。原稿が自称する全参考文献のnovelty auditをそのまま追認したわけではない。今回の判定は主要な先行例と、独立に確認した切断環・下降の証明による。

Counterexample / sanity check

$q=2, \dots, 12$ 、総次数 $0, \dots, 30$ のrank 3 monomialを完全列挙し、 $a \equiv b \equiv c$ の直接判定と上のnormal formの個数・指数集合が一致した。 $N=1, 2, 5, 10$ と $q=4N+1$ で、 $0 \leq a, b \leq N$ のmixed plurigeneraを再計算した。一般証明は $q > 4N$ から $|2i - (a+3b)| < q$ となることであり、計算だけに依存しない。 $q=1$ および全 L_i 自明では通常の変数・指数1に戻る。

Assessment

数値・線形同値・torsion・base-point-free indexを区別した整合的な計算であり、主結果はAと判定する。

3. 修士論文としての妥当性：B

一連の切断環計算、族の構成、非構成可能性、litaka fibreの解析がまとまっており、通常の修論として十分。既知理論を正しく理解した上で具体化する教育的内容がある。新しいMMP定理の論文として提出するなら題目と新規性の位置付けの修正が必要だが、現稿はその限界を明示している。

4. 博士論文としての妥当性：D

中心機構が既知で、環計算やconditional descentがその直接的な具体化に留まる。この成果を中心に博士号を認定するだけの独自の理論的前進は確認できない。

Important references

- [Birkar–Hacon](#), “Variations of generalised pairs”, Examples 1.1, 3.1。参照版で番号を本文確認。
- [Esposito–Mistretta](#), “On semiample vector bundles and parallelizable compact complex manifolds”, Theorem 3.10。
- [Ambro](#), “The moduli b-divisor of an lc-trivial fibration”, Compos. Math. 141 (2005), 385–403。ordinary klt下降に関するTheorem 0.2 (=4.1)。

Paper 4. Magnitude homology of Abelian surfaces

Main result

英語版pp.1-11の定義、Theorem 1.1、Proposition 3.2、§ 4-6の証明、Referencesを確認した。

$Y_t=((1,t),(t,1))$ 、 $A_t=C^2/(Z^2+iY_t Z^2)$ 、 $0 \leq t \leq 1/2$ を主偏極の平坦計量で考える。 $\alpha=(\sqrt{37}-3)/7$ と $\beta=1/2$ で A_α と A_β は非isogenousだが、通常の整数係数magnitude homologyの抽象的なbigraded groupsは全次数・全長で同型。原点から2等分点へのdegree-two endpoint summandの直和を保持すると両者を区別でき、族全体で t を復元できる。

1. 新規性：C

Closest known result

Known result. Gomi, *Magnitude homology of geodesic space*, arXiv:1902.07044v3 (2025), Theorem 5.22 は、同一端点の二つの最短測地線が内点を共有すれば一致するgeodesic spaceについて、奇数次の消滅と偶数次のgeodesic basisを与える。Corollary 3.15はdegree twoのendpoint summandを最短測地線の augmentation kernelで表す。

Precise difference

Current paper. Gomiの一般定理をflat torusに適用し、Voronoi境界の距離像が[injectivity radius, diameter]であることを使う。新しい具体部分は、偏極を固定したアーベル曲面族で二つの半径が一致する α, β を求め、非isogenyを証明し、2-torsion profileの明示的な逆公式を出すこと。homologyの一般計算自体は既知定理の系である。

Assessment

一般論を前進させる規模ではないが、偏極計量・isogeny・endpoint情報の差を一つの厳密な例で示す非自明な応用である。既知のgeodesic formulaだけにはこのperiod matrixや非isogenyは含まれないため、限定的な具体計算としてC。探索した一次資料で同一の計算は確認できなかったが、それだけで優先権を確定はしない。

2. 正しさ：A

Statement check

ordinary magnitude homologyとblurred/persistent版、 ℓ^2 のRiemannian productと ℓ^1 のKünneth productを区別している。抽象群同型は端点・群作用・積構造を保持すると主張していない。2-torsion profileが追加データであることも明記しており、二つの結論は矛盾しない。

Proof check

Gomi Theorem 5.22とAssumption 4.8の全文を照合した。平坦torusで同じ端点の二つの最短測地線が内点で交われば、splicingも最短なので角を持たず、速度一致から同じ直線liftとなる。従って仮定が成立する。

Voronoi cellの境界は実次元 ≥ 2 なら連結で、そのnormの最小・最大は $r=\lambda_1/2$ と R (covering radius)。従ってcut distanceの集合は $[r, R]$ 。Gomiの q 本のsegment basisからdegree $2q$ のsupportは $[qr, qR]$ となり、平行移動で連続体濃度の独立生成元を得る。上界も有限点列と有限個のnearest lattice liftsから連続体濃度なので、単に「無限ランクだから同型」とした議論ではない。

実格子の計量は $C_t Q_{-t} \oplus Q_t$, $C_t = (1-t^2)^{-1}$ 。六つのVoronoi不等式の十分性は、隣接rayが $\mathbb{Z}^2$ の基底で非負内積を持つことから全格子ベクトルの不等式へ拡張できる。頂点normを代入すると

$$R_t^2 = F(t) = \frac{2-t^2}{2(1-t)(1+t)^2}.$$

差の因数分解は

$$F(t) - \frac{7}{9} = \frac{(2t-1)(7t^2+6t-4)}{18(1-t)(1+t)^2}.$$

α, β で $r=1/2$ と $R=\sqrt{7/3}$ が一致する。 A_β は E_i^2 と isogenous。一方 A_α 内の対角楕円曲線のperiodは $\tau=i(1+\alpha)$ 。 $E_\tau \rightarrow E_i$ が非零なら $c, \tau \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ となって $\tau \in Q(i)$ だが、 $1+\alpha$ が無理数なので不可能。この非isogenyの推論はpolarizationを忘れても有効。

2-torsionの各parity classに対する最小値とmultiplicityを独立に再計算した。混合端点は $t>0$ で長さの二乗 $>1/2$ 、非混合端点の最大値は $v=1/[2(1+t)]$ 。従って長さsupportだけから $D=\max\{\ell^2 \leq 1/2: T_2^\ell \neq 0\}=v$ 、 $t=1/(2D)-1$ を得る。 $t=0$ も別途処理されている。

Problems found

核心にFATAL/MAJOR GAPを検出しなかった。新規性の歴史的網羅性が未確定であることは、正しさのgapとは区別した。一般のアーベル多様体復元へ拡張する主張は証明されておらず、本稿も主張していない。

Counterexample / sanity check

$t=0, 1/4, \alpha, 1/2$ でparity classを完全列挙し、長さとmultiplicityを有理数または $Q(\sqrt{37})$ で検証した。 $t=0$ のrankは $\ell^2=1/4, 1/2, 3/4, 1$ で $4, 18, 28, 15$ 。 $t=1/2$ では $1/4, 1/3, 7/12$ で $3, 3, 27$ 。 α で $\ell^2=1/4$ のrankは2。全rankは0で65、正の t で33となり原稿と一致。範囲外の格子ベクトルは $Q_t \geq (a^2+b^2)/2$ なので最小値候補にならない。これにより有限探索の打ち切りにも根拠がある。

Assessment

外部定理の正確な適用、連続体濃度、Voronoi計算、格子によるisogeny判定を確認でき、A。

3. 修士論文としての妥当性：A

homology、格子幾何、アーベル多様体を繋いだまとまった具体成果があり、追加情報を残す意味も明瞭。主要な独自計算は再現可能で、通常の修論として十分以上。

4. 博士論文としての妥当性：C

限定された一パラメータ族の明示計算として一章・一本の小論文にはなり得る。しかし一般的な新定理はGomiのものに依存し、復元もこの族に限る。これを中心成果として博士号を支える厚みは現稿では不足する。

Important references

- [Gomi](#), *Magnitude homology of geodesic space*, 2025改訂版, Corollary 3.15、Assumption 4.8、Theorem 5.22 (pp.37–38)。
- [Leinster–Shulman](#), *Magnitude homology of enriched categories and metric spaces*, Algebr. Geom. Topol. 21 (2021), 2175–2221。定義の背景。exact reference location not verified。

- 対象PDF § 4-6の格子計算は本報告の独立検算により確認した。その他のbibliography全件を確認済みとはしていない。

Paper 5. RC-positivity of induced symmetric powers and positive mean curvature

Main result

英語版pp.1-10の定義、Theorems 1.1/1.2、Lemmas 3.1/3.2/4.1、証明とReferencesを確認した。固定したHermitian bundle (E, h) 、rank r について、 $m \geq 2$ のある誘導対称冪がRC-positiveであること、ある誘導tensor powerがRC-positiveであること、 r 個の直交直和がRC-positiveであること、ある背景Hermitian metric γ で $\text{tr}_\gamma R_h > 0$ となることが同値。 r 個という個数のsharpnessを、 $O_-(P^r)(k)$ の r 個の直和上の指定計量で実現する。

1. 新規性：B

Closest known result

Known result. Yang, *RC-positivity, rational connectedness and Yau's conjecture*, Theorem 3.6は固定した h のpositive mean curvatureから全誘導tensor/exterior powerのRC-positivityを導く。原文を確認した。Li-Zhang-Zhang, *Mean curvature positivity and rational connectedness*, Proposition 3.6はuniform RC-positiveな固定 h から適当な背景metricのpositive mean curvatureを得る。Wu, arXiv:2604.05981v1, Theorem 7はuniform weak RC-positive bundleに対して新しいbundle metric H の存在を与える。

Precise difference

Current paper. h を変更せず、「一つの誘導対称冪」のRC-positiveという条件からmean curvatureの正值性を逆に導く。Wuのmetric-existence定理とは量化するmetricが異なる。また $r-1$ 個の直和では足りないことをglobal compact exampleで示す。rational connectednessの帰結はLZZの既知判定の再定式化で、新規部分として数えない。

Assessment

比較した原文はこの固定計量の逆方向を含んでいない。positive semidefinite obstructionを一つのsymmetric tensorに符号を変えず埋め込む発想とcompact sharpnessに明確な差分がありB。ただし線形代数のseparationそのものを新定理とはしない。近接する2026年のmetric-existence結果との区別を保った範囲での判定である。

2. 正しさ：A

Statement check

RC-positiveの量化は $\forall a \neq 0 \exists u \neq 0$ 、uniform版は $\exists u \neq 0 \forall a \neq 0$ 。背景metricとbundle metricを分離している。 $\text{Sym}^m E$ のmetricは h からの誘導metricであることが本質的で、任意のmetricに置換する主張ではない。

Proof check

曲率を正半定値接方向tensor B から $\text{Herm}(E)$ への実線形写像 R と見る。 $R(B) > 0$ となる $B > 0$ がなければ、正半定値coneの分離から $0 \neq \rho \geq 0$ で $\text{tr}(\rho R(u, u)) \leq 0$ が全 u について成立する。正定値 B への摂動とtrace-one集合のcompactnessが本文で処理されており、cone imageの閉性を無断で仮定していない。

$\rho = \sum \lambda_i e_i e_i^*$, $\text{tr} \rho = 1$ に対して $s = \sum \sqrt{\lambda_i} e_i \wedge (\otimes m)$ と取る。 $m \geq 2$ なら cross term には少なくとも一つ未作用の slot があり、直交性で消える。従って

$$\langle A^{[m]} s, s \rangle = \text{mtr}(\rho A).$$

これが RC-positivity に反するため、逆方向が成立する。 r -tuple が任意の正半定値 ρ を表すことにより直和版も同値。局所 B を partition of unity で平均する操作には h の曲率の微分を伴わず、 R が線形なので全体でも正定値である。

sharpness の曲率 model は $R_t(u) = t|u|^2 I - uu^*$, $0 < t < 1/r$. $q < r$ の tuple から得る density matrix には kernel があるので最大値は $t > 0$. balanced r -tuple では $t - 1/r < 0$ となる。 $H_0(z) = I - t|z|^2 I + zz^*$ の二階微分は $R_{(i,j)}(0) = t\delta_{ij}I - E_{ij}$ で、符号も一致する。

globalization は元の metric の cutoff だけでは正值性を保証しないが、本文は別途、近傍で curvature 0、外側で Fubini-Study となる半正な line metric を構成している。 transition 領域の負の曲率を k 倍の正曲率で吸収し、中心では local model を保持する。この手順で compact 例が成立する。

Problems found

主要証明に FATAL/MAJOR GAP は検出しなかった。誘導対称 subbundle は parallel なので曲率が制限になるのであって、任意の subbundle が RC-positive を継承するという誤った命題は使用していない。

Counterexample / sanity check

複素非実 unitary eigenframe で $r=2,3,4$, $m=2,3$ の tensor encoding を再計算し、誤差は 1.3×10^{-15} 以下。一般の恒等式は上の slot argument で証明できる。 $t=1/(2r)$ で determinant curvature は $(rt-1)|u|^2 = -|u|^2/2$. $m=1$ では cross term が消えず、同値を主張できない。 rank 1 では最大固有方向を小さな正定値摂動で平均でき、同値と整合する。

Assessment

固定 metric という範囲で定理の量化・tensor 作用・global construction が成立しており A。

3. 修士論文としての妥当性：A

明確な逆命題、sharp な反例、局所から compact へ移す構成を含み、通常の修士論文として十分以上。線形代数だけで終わらず、Chern connection の誘導 metric と global positivity まで論証している。

4. 博士論文としての妥当性：C

一つのまとまった新しい特徴付けとして研究価値はある。ただし中心は有限次元 separation と tensor encoding に集中し、幾何的应用は既知結果の再定式化。この成果を博士研究の中心とするには、更なる幾何的帰結や別の状況への展開が必要で、現稿単独では C。

Important references

- Yang, "RC-positivity, rational connectedness and Yau's conjecture", Cambridge J. Math. 6 (2018), 183–212, Theorem 3.6. web 表示取得に失敗したが PDF を直接取得し本文を確認した。
- Li-Zhang-Zhang, "Mean curvature positivity and rational connectedness", 2024 改訂版, Proposition 3.6, Theorem 1.7.

- [Wu](#), *Uniform weak RC-positivity and rational connectedness*, 2026, Theorems 3, 7。

Paper 6. Positive curvature averages without a common RC direction

Main result

英語版pp.1-10の主定理、定義、§§3-5の証明、例、Referencesを確認した。 $E = \text{Sym}^m \Omega^1(P^n) \otimes \mathcal{O}(k)$ 、 $n, m \geq 2$ 、誘導Fubini-Study metric h_0 について、RC定数は $\delta = k - m - m/n$ 、uniform RC定数は $k - 2m$ 。 $m(n+1)/n < k \leq 2m$ で、 $P(E^*)$ のtautological曲率は正の平均を持つ一方、ファイバー全体に共通する正のbase directionを持たない。さらに、任意のRC-positive metricが存在する必要十分条件も $nk > m(n+1)$ である。

1. 新規性：B

Closest known result

Known result. Wu, *Uniform weak RC-positivity and rational connectedness*, arXiv:2604.05981v1, Lemma 6は、ファイバー上正な曲率 Θ に共通正方向があれば、base Hermitian metric α で $\Theta^{d+1} \wedge \pi^* \alpha^{n-1} > 0$ となることを示す。直後の段落では逆が偽と思われるが例がないと述べていることを原文で確認した。Yang Theorem 3.6はpositive mean curvatureからRC-positivityを与える。

Precise difference

Current paper. Wuの逆方向に対する固定metricでのcompact反例を作り、単に符号だけでなく二つのmin-max定数を全 n, m, k で求める。加えて、classical discriminantの相対不変式を使い、閾値以下で全てのRC-positive metricsを排除する。conformal classの不可能性と全metricの不可能性は異なる範囲について述べられている。

Assessment

最新の一次資料に明示された問いに対する具体的反例とsharp thresholdであり、B。平均正值性からの十分性は既知で、判別式も既知だが、それらをこのbundle familyの必要十分条件に結びつける点には差分がある。Paper 5と同じbalanced symmetric tensorの機構を含むため、両稿を合わせた内容を単純に二倍には数えない。

2. 正しさ：A

Statement check

固定した誘導metric、scalar conformal deformation、全てのHermitian metricsの三つの量化が区別されている。gap rangeで「どんなuniform RC-positive metricも存在しない」とは主張していない。base次元 n 、bundle rank r 、projective fibre次元 $r-1$ の使い分けも正しい。

Proof check

Fubini-Studyの接曲率 $|u|^2 I + P_u$ をdualizeし m 回足してtwistすると、unit u について $R_{h_0}(u) = (k-m)I - N_u$ となる。 N_u の固有値 $j=0, \dots, m$ の重複度は二項係数 $C(n+m-j-2, m-j)$ 。unit symmetric tensor a から得るone-particle matrix M_a は正半定値で $\text{trace } m$ なので、 $\lambda_{\min}(M_a) \leq m/n$ 。 $\Sigma e_i^{\otimes m} / \sqrt{n}$ で等号となり $c_{RC} = k - m - m/n$ 。固定 u ではpure powerが N_u の最大固有値 m を実現するため $c_{uRC} = k - 2m$ 。

tautological curvatureはChern水平分解でvertical Fubini-Studyと $R_{h_0}(u, a)/|a|^2$ の和。top formではverticalを $r-1$ 回、horizontalを1回だけ取る項が残り、

$$\Theta^r \wedge \pi^* \omega^{n-1} = \frac{r}{n} (\text{tr}_\omega \Theta_H) \Theta_V^{r-1} \wedge \pi^* \omega^n.$$

trace=nδだから係数はrδで、r/nの脱落はない。k<2mでの失敗のC²安定性はcompactnessによる一様な負のmarginで説明できる。conformal factor fの大域最大点では複素Hessian≤0なので、元の最小固有値k-2mを改善できない。

metric-independentな部分では、RC-positive Eに非零s∈H⁰(Sym^D E^{*})が存在すると、P(E)上の|s(a^D)|²/|a|²(2D)の正の最大点で、Chern-normalに延長したa方向のlog HessianがD・R(u,a)/|a|²となりRC-positiveに矛盾する。これは任意のtensor-dual vanishingを無条件に仮定する議論ではない。

判別式の次数D=n(m-1)²(n-1)、determinant weight W=m(m-1)²(n-1)をBusé–Jouanolou Propositions 4.7(i), 4.13で照合した。自然なmap Sym^D(Sym^m V)→(det V)^WをV=Ω¹に適用してdualizeすると

$$\mathcal{O}(q) \hookrightarrow \text{Sym}^D E^*, \quad q = (n+1)W - kD = -D\delta.$$

δ≤0ならq≥0なので非零global sectionがあり、任意のRC-positive metricを排除できる。十分性はh₀そのものが与える。

Problems found

核心にFATAL/MAJOR GAPは検出しなかった。「inverse of Lemma 6」への反例は同じ曲率formを保つ意味で成立する。metric-existence版の問いまで解いたと読むと誤りだが、本文はその限定を明示している。

Counterexample / sanity check

2≤n≤5、2≤m≤4で固有値重複度の総和がrankと一致し、平均固有値がm/nになることを整数・有理数演算で検算した。同時にq=-Dδを確認。n=3,m=2,k=3ではr=6、δ=1/3、uniform定数-1、top-form係数2。m=1ではbalanced stateが使えずc_RC=k-1となるので、m≥2という仮定を外せない。δ=0では判別式が0でdual symmetric powerへ入れ、strict positivityは実際に不可能。

Assessment

最適化、projective bundleへの移行、任意metricへの障害が独立に追跡でき、A。

3. 修士論文としての妥当性：A

明確な反例、全parameterのsharp計算、conformal obstructionとmetric-independent obstructionを含み、十分以上。符号の計算だけで終わらず、classical invariant theoryを使った必要条件がある。

4. 博士論文としての妥当性：C

一つの研究論文や博士論文の一章として有用。ただし主対象は非常に対称性の高いbundle familyであり、一般的なRC metric-existence問題を解くものではない。この原稿を中心成果とする博士論文としては、理論的な広がりはまだ弱い。

Important references

- Wu, 上記論文、Definition 2、Lemma 6と直後の段落。
- Busé–Jouanolou, *A computational approach to the discriminant of homogeneous polynomials*, Propositions 4.7(i), 4.13. PDF本文を直接取得して照合。

- [Yang](#), *RC-positivity, rational connectedness and Yau's conjecture*, Theorem 3.6。

Paper 7. Mean RC curvature and pinched volume rigidity

Main result

複素次元 $n \geq 2$ のコンパクト連結 Kähler 多様体で、Hermitian 自己準同型上の曲率縮約 R について、 $\mu = \max(B \geq 0, \text{tr} B = 1) \lambda \min R(B) \geq (n+1)/n$ 、かつモデル $R^*(B) = B + \text{tr}(B)I$ からの作用素ノルム距離が $\varepsilon < 1/(1+\sqrt{n})$ とする。Theorem 1.1 は $X \cong P^n$ 、 $v = \int \omega^n / (2\pi)^n \leq 1$ 、および次の定量評価を与える。

$$(2\pi)^{-n} \int_X |\text{Ric}^\# - (n+1)I|^2 \omega^n \leq (1+2\varepsilon)n(n+1)(v^{(n-1)/n} - v) \leq (1+2\varepsilon)(n+1)(1-v).$$

$v=1$ なら与えられた計量が Fubini–Study 計量となる。Proposition 1.2 は仮定を満たすが $H \geq 2$ も $\text{Ric} \geq (n+1)\omega$ も満たさないコンパクトな変形族を構成する。核心は trace-free 部分 A と Ricci の trace-free 部分 r を用いた最適密度行列 $B^* = (I - A^{-1}r)/n$ の公式である。本文の英語版全節、定義、Lemma 2.1、主証明、変形計算、References を確認した。

1. 新規性：B

Closest known result

Datar–Seshadri, “Volume comparison and rigidity for positive holomorphic sectional curvature”, arXiv:2608.15850v1 (2026), Theorems 1.1, 5.2、Corollary 5.3 を原文で確認した。Known result の仮定はコンパクト Kähler かつ $\mu \geq (n+1)/n$ 。結論は $v \leq 1$ 、および $v=1$ で平均スカラー曲率 $n(n+1)$ 。計量の剛性は $H \geq 2$ または $\text{Ric} \geq (n+1)\omega$ を追加している。Feng–Liu–Wan (2017), Theorem 0.1 は正の orthogonal bisectional curvature から $X \cong P^n$ を与える。

Precise difference

Current paper は μ 条件に明示的な曲率 pinching を追加する。その範囲で平均等式を点ごとの非負量と L^2 欠損評価に強め、計量の等号剛性を導く。一般の μ 条件下の等号問題を解いてはいない。 P^n という複素構造の同定と体積上界自体は既知。最適化公式、積分不等式、二つの既存曲率下界から外れるコンパクト族が追加部分であり、単なる既知の Ricci 比較の適用ではない。

Assessment

確認した直近の原論文より強い定量的結論を、限定されたが非自明な領域で示している。新しい議論は有限次元の最適化と曲率恒等式の組合せにある。 B とするが、普遍的な最適定数や一般の剛性問題の解決として A を与えることはできない。調査範囲外の同値な pinching 評価の不存在までは主張しない。

2. 正しさ：A

Statement check

R は Hermitian 行列の実 Hilbert 空間上の自己共役作用素であり、 Sym^2 上の Calabi 作用素と混同していない。 ω^n と Riemann 体積 $\omega^n/n!$ 、複素スカラー曲率と実スカラー曲率の係数も整合する。pinching は各点の計量に対して定義され、比較モデルに座標依存性はない。

Proof check

Π を trace-free 射影とすると $\Pi R(B^*) = 0$ 。 $A > 0$ と $B^* > 0$ の下では、任意の密度 B に対し $\lambda \min R(B) \leq \text{tr}(R(B)B^*) = \text{tr}(BR(B^*))$ という双対評価が成立し、 B^* で等号になる。従って $n^2\mu = S - \langle r, A^{-1}r \rangle$ 。pinching から A の固有値は $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ 内、 $|r| \leq \varepsilon\sqrt{n}$ 、 $|A^{-1}r|_{\text{op}} \leq \varepsilon\sqrt{n}/(1-\varepsilon) < 1$ となり、必要な内部実現可能性を確保できる。

$q=S-n(n+1)$ と置けば $q \geq |r|^2/(1+\varepsilon) \geq 0$ 、 $q \leq n\varepsilon$ であり、 $|\text{Ric} \# -(n+1)|^2 = |r|^2 + q^2/n \leq (1+2\varepsilon)q$ 。bisectional curvatureは $1+|(u,v)|^2-\varepsilon > 0$ なのでFeng-Liu-Wanの仮定を満たす。 P^n 上で $[\omega]=2\pi ah$ と書くと $\int Sw^n = n(n+1)(2\pi)^na^{n-1}$ 。以上を積分すれば表示不等式となる。最後の評価は v の凹べきの接線不等式である。 $v=1$ では $E=0$ となり、既知のKähler-Einstein一意性、またはDatar-Seshadri Corollary 5.3(2)が適用できる。

Problems found

FATAL / MAJOR GAP / MINOR GAPに相当する問題は認めなかった。pinchingを除去してよいとする拡張は成立せず、原稿自身がその点を明示している。 $B^* \geq 0$ だけの場合の値の公式と、 $B^* > 0$ を要する一意性を分けている点も正しい。

Counterexample / sanity check

Proposition 1.2のポテンシャルを独立に展開した。 $p=[1:0:\cdots:0]$ で $f_{11}=-4$ 、 $|z_1|^4$ 係数8、 $j \geq 2$ では $f_{jj}=-2(n+2)/(n+3)$ 、 $|z_j|^4$ 係数 $3-2/(n+3)$ となる。正規化後のRicci欠損の一次係数は $-2(n-1)(n+4)/n$ 、 $H-2$ の係数は $-4(n-1)(3n+4)/(n(n+1))$ で、いずれも $n \geq 2$ で負。単なる局所テンソルではなくコンパクトな例が得られる。

§ 5の $n=3$ の行列 $C=ww^T+I/10$ 、 $w=(3,1,1)$ では、内点候補の対角成分は $(-39,61,61)/83$ で実現不可能。 $\mu=3>S/9=253/90$ を再確認した。従って $A>0$ だけで公式を無条件適用する危険を、実例で回避している。これらの記号計算は一般証明の代用には用いていない。

Assessment

主定理の最適化、pinchingからの許容性、積分の係数、外部分類の適用、コンパクト変形の主要係数が整合するためA。

3. 修士論文としての妥当性：A

Kähler曲率、凸最適化、Chern類による積分、明示的変形を一つの定量定理にまとめている。先行定理との区別も明確で、十分な非自明な数学と完成した成果があり、通常の修論として十分以上である。

4. 博士論文としての妥当性：C

独立した研究論文または博士論文の一章として評価できる。ただしモデル近傍での L^2 欠損制御が中心であり、一般の等号問題、計量の幾何学的近接性、最適pinchingの決定までは進んでいない。これだけを博士研究の中心全体とするには、成果の広がりや深さがborderlineである。

Important references

- V. Datar, H. Seshadri, [原文](#)、Theorems 1.1, 5.2 and Corollary 5.3, arXiv:2608.15850v1 (2026)。
- H. Feng, K. Liu, X. Wan, [Compact Kähler manifolds with positive orthogonal bisectional curvature](#), Math. Res. Lett. 24 (2017), 767–780, Theorem 0.1。

Paper 8. Asymptotic relative Chow polystability for products of polarized Hirzebruch surfaces

Main result

$F = \mathbb{P}(P^1)(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1))$ 、 $L_b = \mathcal{O}_F(1) \otimes \pi^* \mathcal{O}(b)$ 、 $b \geq 1$ とし、 $(X, L) = \prod (F, L_b)$ を考える。Theorem 4.1は固定部分トーラス T について、無限個の次数で相対Chow半安定となること、同じ b_i を持つ因子を同時にスケールするトーラス D_b を T が含むこと、十分大きな全次数で相対Chow polystableとなることの同値を示す。最小次元は相異なる b_i の個数 s 。含まない場合の例外次数は高々 $2s-1$ 。Theorem 4.2は異なるパラメータがあれば extremal circle に関して全正次数で不安定とする。英語版 § 1–10とReferences、特に定義(2.2)、Lemmas 3.1, 5.1, 5.2、両主定理の証明を確認した。

1. 新規性：B

Closest known result

Yotsutani–Zhou, “Relative algebro-geometric stabilities of toric manifolds”, arXiv:1602.08201v3 (2023訂正版), Definitions 1.7–1.8、Theorems 1.9, 1.11は、extremal vector fieldに関するtoric相対Chow安定性をChow polytope／格子点汎関数で記述する。Known resultの仮定は偏極toric多様体、結論はその相対半安定性の組合せ的判定で、 K とChowの相違自体も既知である。

Seyyedali, Theorem 1.1とSano–Tipler, Theorem 1.1はextremal計量から最大トーラスに関する相対balanced埋め込みを得る量子化定理。Tipler, Theorem 3.4は相対balanced埋め込みと相対Chow polystabilityを結びつける。

Precise difference

Current paperは上記一般論を F の積という限定された族に適用し、全固定部分トーラスを「偏極パラメータが等しい因子の分割」で完全分類する。有限次数のtrace pairingを保った係数 $\beta_b(m)$ の線形独立性、例外次数上限、extremal circleの全次数不安定性を追加する。一般のextremal→相対Chowや K /Chowの相違は改良ではない。regular Sasaki版は明示した定義の下での直接の帰結であり、独立した大きな新成果とは数えない。

Assessment

確認した先行定理はこの最小次元やパラメータ分類を含まない。方法は既存のcharacter obstructionに正確な有理関数計算を組み合わせたものだが、無制限に大きい次元差と全次数の結論は明確な追加でありB。文献の完全一致が見つからないことだけを根拠にはしていない。ただし族を超えた一般分類としての新規性はない。

2. 正しさ：A

Statement check

相対群はtorus centralizer内で有限次数のtrace pairingに直交する連結還元群 $G^\perp$ 。weight spaceごとのSLの積という弱い定義ではない。 b_i は正整数、 T はtoric最大トーラス内の固定代数的部分群、polystabilityは残余stabilizerを許す。これらの限定は結論に必要で、明記されている。

Proof check

Lemma 3.1の必要性は、Chow lift上で非零characterを持つstabilizerの一径数部分群を反転すれば0への退化を得ることによる。有理性により形式的な実方向を整数作用に変換できる。十分性では最大トラスに関するbalanced埋め込みのmoment matrixが q_m と比例し、 $q_m \in \text{Lie}(T)$ なら $G \perp$ のmoment mapが消える。基底変換を最大トラス因子と直交群因子に分解して元の軌道に戻す議論も必要であり、原稿はそれを含む。

格子点多面体 $P_b = \{0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq b+y\}$ の積では共分散は因子ごとに分離する。 $\beta_b(z)$ の分母 $p_b(z) = (6b^2 + 6b + 1)z^2 + (12b + 5)z + 6$ は判別式 $1 - 24b < 0$ 。相異なる b で互いに素であり、分子は非実根を消せない。根で評価することで線形独立性が得られ、無限部分列にも適用できる。共通分母を払った分子の次数 $2s-1$ が例外上限を与える。

計量の存在はCalabi型extremal計量の積、十分性は既知の量子化で補っており、character消滅だけからGIT半安定性を推論していない。引用Seyyedali単独では L の固定冪の記述がある点に注意を要するが、併記されたSano-Tiplerの全大次数の定式化とtoric線型化・有限isogenyで今回の適用を補える。 m 依存の直交性を極限のFutaki pairingへ置き換えていない点が中心である。

Problems found

主定理にFATAL / MAJOR GAPは見つからなかった。引用の「全大次数」と「固定冪の倍数」を区別した参照を一つ明記するとさらによいが、適用を維持できるEXPOSITION-CITATIONの改善である。Sasaki応用は本文で定義したregular quotient版に限られ、irregularな場合への一般化はない。

Counterexample / sanity check

$b=1, \dots, 8$ 、 $m=1, \dots, 9$ について全格子点を独立に列挙し、格子点重心差 $d_v(m)$ 、分散 $\tau_v(m)$ 、従って $\beta_v(m) = d_v / \tau_v$ を有理数で照合した。比 $R_m(b) = \beta / \alpha$ の導関数の分子を記号微分し、Lemma 5.2の正係数多項式と一致した。 $b_1=1, b_2=2, m=1$ の $SL(35)$ 作用の重み $(256, 1556, -1557, -257)$ 、多重度 $(6, 9, 8, 12)$ は総和0。characterは $-508/45$ 、指定したdual Chow weightは -5080 で非零。adiabatic係数も $\alpha \sim 4/v$ 、 $\tau \sim (m+2)/(12m)$ 、比の差 $\sim (b-c)/(2m(m+2)k^2)$ から $(b-c)(m+2)/(18m^3k^4)$ となる。

Assessment

分類の両方向、次数の量化、正確なcharacterと単調性の計算が成立している。中心成果はAと評価する。

3. 修士論文としての妥当性：A

GITの定義を区別し、格子点計算を具体的な不安定化作用と分類にまで進めている。既存の解析的定理を正しく利用し、自分の計算部分との境界が明確。良い修論として十分以上である。

4. 博士論文としての妥当性：C

具体的な分類として研究価値があり、博士論文の一章としては良い。一方、解析的量子化は既知で、独自部分は一つのscroll積族におけるcharacter計算と有理関数の独立性に集中する。一般族への進展などを伴わず中心成果全体として博士号を支えるにはborderline。

Important references

- N. Yotsutani, B. Zhou, [Relative algebro-geometric stabilities of toric manifolds](#), 2023訂正版、Definitions 1.7–1.8、Theorems 1.9, 1.11。
- R. Seyyedali, [Relative Chow stability and extremal metrics](#), 2017, Theorem 1.1。

- Y. Sano, C. Tipler, [A moment map picture of relative balanced metrics on extremal Kähler manifolds](#), Theorem 1.1 ; 刊行版 J. Geom. Anal. 31 (2021), 5941–5973。
- C. Tipler, [Relative Chow stability and optimal weights](#), Theorem 3.4。

Paper 9. Basic Chern vanishing and Beauville–Bogomolov structure in Vaisman geometry

Main result

コンパクト非Kähler Vaisman多様体 M 、 $\dim_{\mathbb{C}} M = n \geq 2$ について、canonical foliationの第一基本Chern類消滅と $c_1^{\text{bc}}(M) = 0$ の同値を説明する。この場合、元のfoliationはquasi-regularで、有限étale被覆 M' は $A \times Q$ 上のdefiniteな楕円曲線orbi-bundleとなる。 A はabelian variety、 Q は単連結な SU/Sp 型projective pure orbifoldの積。 $b_1^{\text{virt}}(M) = 2\dim A + 1$ 、Albanese、基本群、束の再構成、 c_2^{B} 消滅の帰結を述べる。英語版全15ページ相当の本文、Appendix、Referencesを確認した。主な外部入力はIstratiの構造定理とtransverse Hodge理論である。

1. 新規性：D

Closest known result

Istrati, “Vaisman manifolds with vanishing first Chern class”, arXiv:2304.02582v1 (2023 ; JEMS online 2025), Definition 4.1, Lemma 4.4, Corollary 5.2, Theorem 5.3, Corollaries 5.10–5.11を原文で照合した。Known resultの仮定はコンパクトVaismanかつ第一Bott–Chern類0。結論は同じ複素構造でのChern–Ricci-flat計量、quasi-regularity、有限orbi-cover上の $A \times SU/\text{Sp}$ 分解、基本群の二形態と b_1 上界・最大時の分類。原著Example 7.4には本稿と同じ重み付きK3例もある。

Precise difference

Current paperはbasic類を出発点にし、Bott–Chern類との同値を葉空間の存在前に証明することで、既存構造定理への入口を明確にする。仮定の真の弱化ではなく同値条件への変更である。virtual b_1 の正確な値、整数transgression、Albaneseの周期格子、 c_2^{B} 消滅などは既存構造と標準手法を組み合わせた帰結。新しいBeauville–Bogomolov分解定理ではない。

Assessment

原稿自身の解説という位置づけが妥当。独立した細部の導出には価値があるが、新しい構造を発見したと認定するだけの差はないのでD。既知であることは誤りでも修論不適格でもない。

2. 正しさ：A

Statement check

basic、Bott–Chern、de Rhamの三種類の c_1 を明確に区別している。分解されるのは横断幾何とorbifold基底であり、全空間を直積としない。quasi-regular、regular、LCK rank 1も同一視していない。有限coverのorbifoldと全空間のétale性の違い、integral cohomologyでclassifying spaceを使う点は適切。

Proof check

U, V が可換な単位Killing場で葉がtotally geodesicとなるので、basic Hodge理論のminimal-leaf仮定が満たされる。基本的なexact (1,1)形への $\partial \bar{\partial}$ 補題の適用は葉空間を必要としない。Ricci比較 $\rho^c = \rho^T$ は局所canonical frame $\theta^{10} \wedge \sigma_T$ で確認でき、横断最高次形への ω_T のwedgeが0になることがholomorphic性を保証する。逆向きのpotentialは U, V の流れの閉包というコンパクト群で平均してbasicにできる。したがってquasi-regularityを先取りした循環論法はない。

構造定理の後には楕円曲線束の二つの実Chern類のspanがrank 1であり、degree-one Leray-Serre列から $b_1(M')=2a+1$ 。任意の有限coverでもRicci-flat transverse Bochnerからparallel covectorの次元は高々 $2a$ であり、virtual上限も従う。 $\pi_1(M') \rightarrow \pi_1(A)$ の全射によりAlbaneseはisogenyまでではなく周期格子ごと A に一致する。

再構成では $H_1^{\text{orb}}(A \times Q, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2a}$ から H_2^{orb} のtorsionが消える。rank 1実Chern類の向きが整数周期から有理になるので $\kappa \otimes e$ と書け、残るholomorphic torsorを Pic^0 で吸収する。基本群の列に $\pi_2^{\text{orb}}(B) \rightarrow \mathbb{Z}^2$ を残しており、楕円ファイバーの π_1 が常に単射という誤りを避けている。 $Q \neq \text{点}$ の場合は $\kappa|_Q$ の非零性が一方向を有限化し、有限indexで $\mathbb{Z}^{2a+1}$ となる。

Problems found

FATAL / MAJOR GAP / MINOR GAPは認めなかった。Istratiの出版版の番号とarXiv版の番号を混ぜず、確認対象の版を限定している。原稿の新規性ラベルを評価の証拠としては用いず、実際の原著のstatementと照合した。

Counterexample / sanity check

scalar Hopf多様体ではde Rham $H^2=0$ だが $c_1^B=nH \neq 0$ で、三種類の消滅の差は実在する。quartic K3で $c(\text{TS})=(1+h)^4/(1+4h)=1+6h^2+\dots$ 、 $\int h^2=4$ より $\int c_2=24$ 。一方そのcircle束のprimitive Chern類は $\pi_2(S) \rightarrow \mathbb{Z}$ を全射にし、全空間の π_1 はradial $\mathbb{Z}$ のみとなる。従って $b_1=1$ でも横断flatとは限らない。 $n=2$ では c_2^B は自動的に消え、virtual $b_1=3$ となり、secondary Kodaira例の普通の $b_1=1$ と矛盾しない。

c_2 のChern-Weil恒等式も $\text{tr } F=0$ 、 $\Lambda F=0$ とprimitive Hodge starから正の係数 $(8\pi^2)^{-1}|F|^2$ を得る。積の各sliceに exact semipositive ω_{T} を制限してStokesを使う積分分解障害も成立する。

Assessment

主な既知入力の仮定を満たし、basicからordinaryへの橋渡し、整数束データ、例の計算、有限被覆の扱いが整合する。正しさはA。

3. 修士論文としての妥当性：A

高度な既存理論を正確に整理し、単なる要約にとどまらずcohomology、基本群、Albanese、具体例を統合している。通常の修論に世界初の定理を必須としない今回の基準では、まとまった非自明な数学を含む良い修論となる。

4. 博士論文としての妥当性：D

主要構造と分類はIstratiの成果であり、追加部分は比較的直接的な帰結である。理解・整理の高さだけで独立した博士研究の中心成果とすることはできない。新しい分解定理等を主張していない点は適正だが、博士水準の新規性を補うものではない。

Important references

- N. Istrati, [Vaisman manifolds with vanishing first Chern class](#), arXiv v1のLemma 4.4、Theorem 5.3、Corollaries 5.10–5.11、Examples 7.2–7.4；[出版情報](#)。
- L. H. S. Gomes, [On the classification of Vaisman manifolds with vanishing first basic Chern class and large first Betti number](#), 2026。最新本文を入手し、主結果・位置づけを比較した。中心構造の適用は上記Istrati版に依存する。

Paper 10. Fixed-Lee positive cones on point blow-ups of exact LCK surfaces

Main result

固定Lee形式 θ を持つtwisted-exactな正LCK形式 $\omega_0=d_\theta\eta$ を備えたコンパクト複素曲面 X に、有限回の点blow-up $\pi:Y\rightarrow X$ を施す。 θ を中心近傍で0にしたgauge、全例外変換 D_i の局所化類 e_i で、Theorem 1.1は $-\sum a_i e_i$ が正代表を持つ必要十分条件を $a_i - \sum_j > i a_j > 0$ とする。 $H^2_\theta(X)=0$ なら正值錐全体の記述で、VaismanのLee類に適用できる。同じ類・同じLee形式・同じ例外面積で体積は非有界。AbstractからReferencesまで全英語節、Lemmas 2.1–3.3、主証明を読んだ。

1. 新規性：C

Closest known result

Ornea–Verbitsky–Vuletescu, “Blow-ups of locally conformally Kähler manifolds”, IMRN (2013), 2809–2821、arXiv:1108.4885v2, Theorem 2.8、Lemma 3.4を確認した。Known resultの仮定はLCK多様体とLee類が自明に制限される滑らかな中心。結論はblow-upのLCK計量の存在。局所化した $O(-E)$ の曲率に大きいpullbackを加える証明も既存である。Meng, Theorem 1.2は任意の閉一形式に対するtwisted cohomologyのblow-up公式を与える。

Precise difference

Current paperは曲面、点の有限cluster、exactな正背景という追加制限の下で、存在だけでなく全例外類と任意の正面積指定を実現する。infinitely near・satellite pointを含むproximity不等式を用いる。背景を増やしてもtwisted類が変わらないことが全錐の実現を可能にする。既知の局所曲率構成、relative ampleness、cohomology公式は改良していない。

Assessment

限定された数値錐の明示として小規模な追加があるためC。先行結果の直接の応用にかなり近く、新技術や広い一般化ではない。専門家が既知の帰結として扱っていた可能性は残り、強い新規性を認定しない。

2. 正しさ：A

Statement check

exactは θ がexactという意味ではなく ω_0 の d_θ -exactnessである。例外面積は $\theta=0$ の局所flat trivializationで読む必要があり、原稿はgauge変更を明記する。twisted類の平方を通常のde Rham積分と同一視していない。正值錐の閉包に滑らかなsemipositive代表があるとは主張していない。

Proof check

全変換の交点行列 $-I$ と $C=P D$ から $Q=-P P^T$ 、面積 $s=Pa$ が従う。 $P=I-N$ は上三角unipotentなので逆行列 ΣN^k は非負整数成分。必要条件と面積指定の一意性は確実である。

十分性の要点は、各成分上で正しいだけでなく $\ker d\pi$ 全体で正しい曲率を作ること。局所clusterを A^2 上の代数的blow-upとして実現し、有理 a の線束を各scheme-theoretic fibre上でampleにする。Stacks Tag 0B5Yは非reducedなproper一次元schemeも含むため、この点の仮定漏れはない。relative amplenessから基底との積への閉埋め込みを得れば、Fubini–Study pullbackは $\ker d\pi$ の全方向で正になる。cut-offは例外集合か

ら離れた自明化で行い、twisted類を保つ。実係数へは有限個の有理点の凸結合で移し、極限の正值性に頼らない。

コンパクト単位接束上の反証法により $\alpha + t\pi^*\omega_0 > 0$ 。 ω_0 がexactだから類は常に $[\alpha]$ 。体積の交差項は $\theta=0$ の球内で ω_0 がordinary exactであるため消え、 α^2 だけに通常の局所交点計算を使える。従って $\int \Omega_t^2 = t^2 \int \omega_0^2 - \sum a_i^2$ という式は正しい。parallel Leeの場合のvanishingも、流れ積分 $R = - \int_0^\infty e^{-ct} \Phi_t^* dt$ とCartan公式によるchain homotopyで独立に確認できる。

Problems found

FATAL / MAJOR GAP / MINOR GAPは認めなかった。交差点で接線方向だけを調べる不十分な議論は、relative embeddingを用いることで補われている。一般のnon-exact背景への拡張を未証明として区別しているのも妥当。

Counterexample / sanity check

二つのinfinitely near点では面積は $(a_1 - a_2, a_2)$ であり、 $a=(1,2)$ は負面積を生じる。satellite例のP逆行列の第一行 $(1,1,2)$ 、Qの対角 $(-3,-2,-1)$ と $a=(4,2,1)$ から $s=(1,1,1)$ を独立に計算した。重複度2は必須である。 P^2 の一点blow-upで $-aE$ の平方 $-a^2 < 0$ という例はexact背景を省いた命題への反例となるが、本定理への反例ではない。固定した外部計量を要求すると局所体積から面積上限が生じ、本稿で背景を増やす操作と矛盾しない。

Assessment

gauge、交点符号、relative positivity、twisted類の不変性、体積式を確認できたのでA。

3. 修士論文としての妥当性：A

局所複素幾何、twisted cohomology、曲面の交点理論を結びつけ、例と境界条件を含む完全な数値記述に到達している。小規模な成果でもこの完成度と理解があれば良い修論として十分以上。

4. 博士論文としての妥当性：D

主な技術は既存の曲率構成とrelative amplenessで、独自部分はexact背景でそれらを組み合わせた錐の計算である。一般non-exact背景や高次元の新たな障害を解決しておらず、この成果だけを博士論文の中心に据えるには内容の前進が小さい。

Important references

- L. Ornea, M. Verbitsky, V. Vuletescu, [Blow-ups of locally conformally Kähler manifolds](#), Theorem 2.8, Lemma 3.4.
- L. Meng, [Morse–Novikov cohomology for blow-ups of complex manifolds](#), Pacific J. Math. 320 (2022), 365–390、確認したv6のTheorem 1.2.
- The Stacks Project, [Lemma 33.44.15, Tag 0B5Y](#). relative amplenessへの移行は標準のfibrewise ampleness定理を用いる。原稿のEGA III 4.7.1という正確な引用位置は本査読では未照合（exact reference location not verified）。

Paper 11. A conic criterion for higher Kähler structures on diagonal complex nilmanifolds

Main result

$dx_i=dy_i=0$, $dz_a=\sum b_{ai}x_i\wedge y_i$ を満たす複素二段nilpotent群のコンパクト商 M_B を扱う。Bのrow spaceが $A:\mathbb{C}^m\rightarrow V$ のkernel、 $v_i=A(e_i)$ 、 $n=2m+\text{rank } B$ とする。Theorem 1.2は $(n-4)$ -Kähler性を「全 $i\neq j$ について $v_i v_j\in \text{span}\{v_a^2\}$ 」と同値にする。 $V=\mathbb{C}^3$ 、 $m\geq 6$ 、任意の三列が独立なら、同一conic上にある場合は $p\geq n-4$ 、それ以外は $p\geq n-3$ が正確な存在範囲。Theorem 3.2は一般のdiagonal Bについてsquarefree代数の monomial membershipから全閾値を決める。主張・全証明・格子構成・Referencesを確認した。

1. 新規性：B

Closest known result

Lo Giudice–Mainenti, “p-Kähler structures on nilmanifolds and holomorphically parallelizable manifolds”, arXiv:2607.29506v1 (2026), Proposition 2.15、Theorem 5.4、Lemma 5.7を原文で確認した。Known resultはcompact holomorphically parallelizable manifoldのp-Kähler性を非零decomposable exact $(n-p,0)$ 形の不存在で特徴づけ、solvable biinvariantの場合にpからp+1への伝播、nilpotentの場合にexact二形式のrankに必要条件を与える。古典的存在判定の帰属はAlessandrini–Bassanelli (1991), Theorem 3.2であり、本査読では上記原文中の明示statementを通じて確認した。

Precise difference

Current paperはdiagonal二段群という制限の下で、その存在判定を有限個のsquarefree idealの計算へ完全に落とす。単に二形式のrankや閉一形式の数を調べるものではなく、中心因子を持つ高次boundaryも除去する。その後、二次式による分離、conicの有無による正確な一段差、最小rankを任意に大きくしても $(n-4)$ -Kählerでない族を得る。既知判定のstatementそのものは新しくないが、判定を実行可能にし幾何学的に解釈する部分が新しい。

Assessment

確認した一般定理からconic条件や全diagonal閾値は直接には出ない。Lemma 3.1という独自の還元を介した実質的な追加なのでB。diagonalでない二段群や任意のcomplex structureへの一般化をしたとは評価しない。文献全体での優先権は断定しない。

2. 正しさ：A

Statement check

compact quotient／格子を仮定に含み、有理Bでは具体的に構成している。p-Kähler形にinvarianceを仮定していない。conicの場合の「任意の三点非共線」は必要であり、落とした場合の反例も本文にある。rankは複素alternating matrix rankで、先行論文の半rank規約との2倍の違いに注意すると一致する。

Proof check

古典的判定をこの群で再証明している。 $d\wedge^{n-1}=0$ より $\ker d_p$ のwedge-annihilatorが $\text{im } d_{\{n-p-1\}}$ となり、閉holomorphic p形 η_a の和 $i^{\wedge p^2}\sum \eta_a\wedge \bar{\eta}_a$ は、decomposable annihilatorがなければtransverseかつ閉じている。反対方向はexactなdecomposable形 β に対するStokesで、非invariantな正形式も除外できる。

最重要のLemma 3.1では、 $x_i \mapsto \lambda_i x_i$, $y_i \mapsto \lambda_i^{-1} y_i$ のtorusで、decomposable locusとprojectivized boundary spaceの閉交差をweight極限に送る。極限は非零projective eigenvectorであり、その因子空間は各非零weight lineと中心zero-weight spaceに分かれる。従って $\alpha_S t_P \zeta_1 \cdots \zeta_l$ の形。primitiveの同じweight・中心次数 $l+1$ の成分を取り、中心係数に線型汎関数を適用すれば $t_P \in I_S$ となる。この操作でcentral factorsを見落とさず、 $|S|+2|P| \leq q$ のhorizontal obstructionを得る。torusが格子を保つ必要はなく、代数内部の操作だけで足りる。

そのhorizontal obstructionを追加の閉horizontal形でwedgeして $2m$ 次まで延ばせる。以後は非零列 b_i に対して $z_0(b_i)=1$, $\zeta_i(b_i)=0$ を選ぶ明示primitiveが $n-1$ 次までのboundaryを与える。従って単なる最初の障害だけでなく全 p 範囲が従う。四次以下の障害は $\text{support} \leq 3$ の線型関係もpair monomialに変換でき、 $R/I \cong \text{Sym}(V)/(v_i^2)$ の二次部分でTheorem 1.2を得る。

平面では最小 $\text{support}=4$ なので閾値は4か5。conicがなければ二次式のannihilatorは0、smooth conicがあれば異なる二点のpolar pairingは0にならない。これが二つの閾値を決める。一般rank反例の二つのZariski-open条件はそれぞれ非空で、irreducibleなconfiguration空間で交わるため有理点を選べる。

Problems found

FATAL / MAJOR GAP / MINOR GAPは見つからなかった。古典的外部criterion自体も本文の有限次元双対性とStokesで補われており、未取得の1991年原論文への依存だけが残る状態ではない。

Counterexample / sanity check

15次元の B_c , B_o について $AB^T=0$ 、全20個の三列minorが非零、 $\text{span}\{v_i^2\}$ のrankがそれぞれ5と6であることを独立に有理数計算した。掲載された f_1, f_2, f_3 を展開すると $\Sigma L_a f_a$ のsquarefree二次部分は $t_1 t_2$ のみで係数1となる。従って B_o の四次decomposable boundaryは実在する。同じ最小alternating rank 8でも $p=11$ の存在が異なる。conicのpolar formは $(a-b)^2/2$ で非零。Heisenberg型 $k=1$ では最小support m から閾値 $m+1$ という既知モデルにも整合する。

Assessment

主定理の核心は数値探索ではなく、weight退化とKoszul係数の抽出という一般論で証明されている。証明と明示例の両方が整合するためA。

3. 修士論文としての妥当性：A

Lie群、正形式の双対性、可換代数、射影配置を結びつけた完成した成果であり、通常の修論として明確に十分以上。単なる既知定理の整理を超える。

4. 博士論文としての妥当性：B

一般のdiagonal presentationに対する全boundaryの還元、正確な存在閾値、conicという幾何学的解釈、rank障害の限界を任意大で示す族が有機的につながっている。個別の小計算を超えた判定方法と独自の証明上の着想があり、確認した先行研究との差を前提として、博士論文の中心成果として認めうる。任意のnilmanifoldの分類ほどの規模ではないためAではない。

Important references

- E. Lo Giudice, A. Mainenti, [p-Kähler structures on nilmanifolds and holomorphically parallelizable manifolds](#), Proposition 2.15, Theorem 5.4, Lemma 5.7.

- L. Alessandrini, G. Bassanelli, [Compact \$p\$ -Kähler manifolds](#), Geom. Dedicata 38 (1991), 199–210。
Theorem 3.2の帰属・内容は上記2026年原稿経由で確認し、1991年全文の当該番号を直接照合したわけではない。
- E. Lo Giudice, [p-Kähler structures on compact complex manifolds](#), 2025。比較対象の一般的伝播結果であり、本稿のcentral-factor還元を代替するものではない。

Paper 12. p-Kähler thresholds for two-step nilmanifolds from rational normal curves

Main result

$1 \leq r \leq m$ 、相異なる λ_i について $dx_i = dy_i = 0$ 、 $dz_a = \sum \lambda_i^{a-1} x_i \wedge y_i$ と定める。 $n = 2m + r$ 次元の任意のコンパクト商は p-Kähler であることと $m + 2r - 1 \leq p \leq n - 1$ が同値。Gaussian rational な λ_i では格子を明示する。Proposition 5.1 は次元 15、中心次元 3、最小 alternating rank 8 が等しい二つの群で $p = 11$ の存在が異なる例を示す。英語全節、Lemmas 2.1, 3.1, 3.2、存在・非存在の証明、References を確認した。

1. 新規性：B

Closest known result

Lo Giudice–Mainenti, arXiv:2607.29506v1 (2026), Proposition 2.15 は decomposable exact 形による判定、Example 2.16 は複素 Heisenberg の閾値、Lemma 5.7 は nilpotent biinvariant complex structure での rank 必要条件を与える。Known result の半rank 規約では $r_0 > n - p - 1$ が必要。この原稿の最小半rank は $m - r + 1$ なので $p \geq m + 2r - 1$ という必要条件是すでに従う。Theorem 5.4 の上向き伝播も既知。

Precise difference

Current paper の仮定は bracket columns が rational normal curve 上の相異なる点という特別な evaluation 配置。追加は $1 < r < m$ で既知の必要 bound の十分性を証明したこと。Lagrange 補間と Vandermonde の二乗による functional で、関連するすべての squarefree monomial が boundary ideal に入らないことを示す。 $r = 1$ と $r = m$ の端は新結果に数えない。rank が同じなら常に十分という一般化は具体的反例で否定する。

Assessment

既知の rank 障害を言い換えただけでなく、その境界での存在を新しい配置条件の下で証明しているので B。Paper 11 とは diagonal 退化、squarefree 代数、15 次元の rank 比較が重なる。独立した 26 本の評価は行うが、両者を合わせた研究量を重複計上すべきではない。

2. 正しさ：A

Statement check

格子が与えられることと任意の complex parameter で格子があることを区別している。正形式は Hermitian 計量の冪に限定されず、任意の smooth transverse 閉形式を扱う。λ の相異性、complex structure の固定、compactness は証明に必要で明記されている。

Proof check

exact-form criterion は有限次元 wedge 双対性と Stokes で再証明されている。Lemma 3.1 の一径数退化は外積の weight が重複しても問題ない。極限 decomposable 形の因子空間が不変になり、一形式上の weights $1, \dots, m, -1, \dots, -m, 0$ は中心以外相異なるため、因子を single、pair、central に分けられるからである。

関連する次数 $k \leq m - r + 1$ で central 因子が $q > 0$ 個あれば、残る列数 $|F| = m - k + d + q \geq r$ 。Vandermonde 独立性からそれらが中心双対を張り、closedness の収縮条件 $\iota_{a_i} \theta = 0$ と矛盾する。central 因子なしなら、同じ torus character 内の primitive の中心次数 1 成分を取り、monomial ideal への帰属に帰着する。

Lemma 3.2では $w_i=1/\prod_j \neq_i(t_i-t_j)$ 、 $F_d(e_I)=\prod_{i<j \in I}(t_i-t_j)^2 \prod_{i \in I} w_i$ と置く。すべてのmonomial上で非零であり、 $F_d(Lae_J)$ は補間恒等式 $\sum w_i P(t_i)=0$ で消える。必要な次数は $\deg P \leq r+2d-3 \leq u-2$ で、端の等号も許される。従って存在boundの境界に欠落はない。

非存在は $r-1$ 個の λ を根に持つ Q から、support $m-r+1$ の dz_Q を作り、閉horizontal因子をwedgeして最初のdecomposable boundaryを得る。残りの全次数も明示primitive (4.2)で埋めている。格子の積・逆元・cocompactnessも提示した群法で直接検証できる。

Problems found

FATAL / MAJOR GAP / MINOR GAPは認めなかった。原稿の自己申告する計算実施や完全性は信用の根拠とせず、核心の補間消滅とboundを独立に追った。1991年の外部原典未入手は、今回再証明されているcriterionの本質的gapにはならない。

Counterexample / sanity check

$2 \leq u \leq 8$ 、許される r, d 、すべての $|J|=d-1$ について計631個の補間消滅を正確な有理数で確認した。例のdegree-two multiplication matrixは 15×18 で、 A 側rank15、evaluation V 側rank14。 $18R_1-9R_2+R_3=4e_4e_5$ からprimitive (5.2)の係数 $1/8$ を確認した。 $r=1$ は $p \geq m+1$ 、 $r=m$ は $p=n-1$ のみとなり古典例に一致。重複 $\lambda=(0,0,1)$ 、 $m=3, r=2$ では $dz_2=e_3$ がdecomposableとなり、相異性を除くと主張が偽になることも正しい。

Assessment

全parameter範囲での存在と非存在をともに証明し、rank比較例も正しいためA。

3. 修士論文としての妥当性：A

既知rank必要条件に十分性を与える明確な成果があり、Lie代数、正形式、補間法を自力で結びつける内容は良い修論として十分以上。格子と非invariant形式まで扱い、論理的完成度も高い。

4. 博士論文としての妥当性：C

有用な新証明と無限族の正確な閾値があり、博士論文の重要な一章として評価できる。一方、中心的な十分性はevaluation配置に限定され、一般配置への判定や他の複素構造への進展を含まない。Paper 11と共有する方法・例を別の独自成果として数えずにこの一本だけを中心とすると、博士研究全体としての厚みはborderlineと判断する。

Important references

- E. Lo Giudice, A. Mainenti, [p-Kähler structures on nilmanifolds and holomorphically parallelizable manifolds](#), Proposition 2.15, Example 2.16, Theorem 5.4, Lemma 5.7。
- L. Alessandrini, G. Bassanelli, [Compact p-Kähler manifolds](#), Geom. Dedicata 38 (1991), 199–210。
criterionとHeisenberg例は上記原文で確認。1991年原典のexact reference location not verified。

Paper 13. Heat-semigroup defects, gaussian approximation, and spectral multiplicities on RCD spaces

Main result

$\text{RCD}(1, \infty)$ 確率空間上の正規直交固有関数 $f_1, \dots, f_k$ 、固有値 $\lambda_i \in [1, 1+\varepsilon]$ に対し、 $A_{ij} = \Gamma(f_i, f_j)$ 、 $\Lambda = \text{diag } \lambda_i$ と置く。Theorem 3.2 は $\|A - \Lambda\|_1 \leq 8k\varepsilon t + 36k^{3/2}e^{-t}$ と、次の W_1 評価を示す。

$$W_1(F_{\#}m, \gamma_k) \leq 36\sqrt{2/\pi} k\varepsilon(1 + \log(\sqrt{k}/\varepsilon)).$$

Theorem 3.3 は任意の固定 r 、 $0 < a < 1/2$ で、 $n=1, \dots, r$ の周囲の半径 $C\varepsilon^a$ の spectral projection が $\text{rank} \geq \text{binomial}(k+n-1, n)$ を持つとする。Abstract、全英語本文、generator domain 補題、Gram 評価、特異商例、References を確認した。

1. 新規性：C

Closest known result

原稿に欠落している重要な先行研究がある。Fathi–Gentil–Serres, “Stability estimates for the sharp spectral gap bound under a curvature-dimension condition”, Ann. Inst. Fourier 74 (2024), 2425–2459、§4、Lemmas 4.1–4.2、Theorem 4.3 を原文で確認した。Known result の仮定は $\text{RCD}(1, \infty)$ 、固有値 $1+\varepsilon$ 、 $\int \Gamma(f) = 1$ 。結論は $W_1(f_{\#}\mu, \gamma) \leq C\varepsilon \log(2/\varepsilon)$ 。 L^2 正規化へは f を $\sqrt{1+\varepsilon}$ 倍すれば移せ、差は $O(\varepsilon)$ なので本稿の一次元 rate は既知である。半群の線形誤差と指数 mixing の釣合いも同論文 Lemma 4.1 の方法である。

Bertrand–Fathi, arXiv:2107.05324v1 (2021 ; J. Geom. Anal. 32 (2022), 270), Theorems 1.2–1.3 は一変数 Gaussian 近似 $O(\sqrt{\varepsilon})$ と各整数近傍の spectral point を与えるが、2026 年時点で rate 比較をここで止めるのは不十分。

Precise difference

Current paper の残る差は、固有値が互いに異なる k 関数の行列値 trace-norm 評価、 k 依存の明示定数、同時分布、そして各 band の Gaussian 型多重度である。Fathi–Gentil–Serres は一次元であり、Bertrand–Fathi の spectral theorem は各 band の一点を与える。今回の Gram 行列による線形独立性と射影の単射性は追加の結論である。一方、 $\varepsilon \log(1/\varepsilon)$ への rate 改善そのものと、linear growth 対 exponential mixing という証明着想を新しいとすることはできない。

Assessment

新規性の中心に据えた rate の既知性を修正したうえで、行列版・多重度版の technical extension に C を与える。全内容が既知または偽という意味の D/E ではない。原稿の bibliographic audit は重要な近接論文を見落としており、この点を直さず強い originality を主張できない。

2. 正しさ：A

Statement check

完全・separable・geodesic、full-support 確率測度、二次 moment、RCD 条件と正規直交性が明記される。spectral projection の rank を使うので compact resolvent の仮定は不要。 W_1 は観測量の law 同士の距離であり、空間の almost product 構造を主張しない。

Proof check

Ambrosio–Gigli–Savaré v2のTheorems 6.2, 6.8を実際に読み、勾配評価とreverse Poincaré係数 $e^{2t}-1$ を照合した。hypercontractivityから f_i の全有限moment、reverse Poincaréから $\Gamma(f_i, f_i)$ の L^p 制御を得る。

$C_t = \text{diag}(e^{-(\lambda_i - 1)t})$ とすれば $D_t = P_t A - C_t A C_t \geq 0$ は任意の線形結合への勾配評価から従う。trace integralは $\leq 4k\epsilon t$ 。 $A - C_t A C_t$ 自体の半正定値性は一般に偽だが、原稿はそれを使わず二項分解とtrace-norm ideal propertyで $\leq 4k\epsilon t$ とする。mixingの L^2 評価を k^2 個のentryに適用し、 $\|\cdot\|_1 \leq \sqrt{k} \|\cdot\|_{\text{HS}}$ で $36k^{3/2}e^{-t}$ を得る。Stein段階も $\Lambda^{-1}A$ の非対称性を許し、trace dualityで扱っている。MehlerからのHessian bound $\sqrt{2/\pi}$ は $\int_0^\infty e^{-2t} / \sqrt{1-e^{-2t}} dt = 1$ に一致する。

非有界polynomialのdomainは値域cut-off $P_R(F)$ のweak chain rule、全momentによる L^2 収束、closed operator Δ で確保される。GramはGaussian moment recursionで $1+O(\epsilon^a)$ 。residualの積を L^2 に入れるには $p>2$ かつ $a<1/p$ を取り、残りの因子を $L^{2p/(p-2)}$ へ入れる必要があり、この選択が実行されている。全quasimode span上のresidual boundとGram下界からband射影が単射となり、単一vectorの近似だけでは出ない多重度を正しく得る。

Problems found

EXPOSITION-CITATION：Fathi–Gentil–Serres (2024)の欠落は新規性評価に大きく影響する。数学的証明のFATAL / MAJOR GAPは認めなかった。引用の見落としだけで正しい不等式をFalseとはしない。

Counterexample / sanity check

非可換PSD行列例では $A - C_t A C_t$ に負固有値が実際に現れるが、使用するtrace-norm上界は保たれることを独立計算した。球面 $S^N(\sqrt{N-1})$ のcoordinate関数で $\lambda = N/(N-1)$ 、 $A_{ij} - \lambda \delta_{ij} = (\delta_{ij} - f_i f_j)/(N-1)$ を接空間射影から再計算した。Gaussian×強いGaussianの符号商では不変Hermiteの横次数が偶数になり、 $2L > r+1$ なら低bandの多重度は正確に $\text{binomial}(k+n-1, n)$ 。曲率0のflat torusはspectral gapだけから零欠損Gaussian lawを結論できない反例であり、本仮定の必要性を示す。

Assessment

行列のpositivity、定数、弱微分のdomain、moment、射影rankの論理が成立するためA。新規性上の重大な修正は別軸で反映した。

3. 修士論文としての妥当性：A

RCD解析、Stein法、functional calculus、spectral projectionをつないだまとまった数学がある。近接文献の比較を修正する必要があるが、非自明な証明と追加結論の内容量は良い修論として十分以上。

4. 博士論文としての妥当性：C

行列化と多重度の定量的伝播は博士論文の一章として有用。ただし本稿が強調するrateと半群の基本着想は2024年に存在し、残る独自部分は既存のStein／Hermite方法の拡張に近い。この比較を踏まえると、これだけを博士研究の中心全体とするにはborderline。

Important references

- M. Fathi, I. Gentil, J. Serres, [Stability estimates for the sharp spectral gap bound under a curvature-dimension condition](#), Ann. Inst. Fourier 74 (2024), 2425–2459、§ 4、Lemmas 4.1–4.2、Theorem 4.3。

- J. Bertrand, M. Fathi, [Stability of eigenvalues and observable diameter in \$RCD\(1, \infty\)\$ spaces](#), Theorems 1.2–1.3、 § 3。
- L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré, [Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below](#), Theorems 6.2, 6.8（本文取得・照合）。

Paper 14. Spectral cluster multiplicities from almost gaussian eigenfunctions on RCD spaces

Main result

compact $RCD^*(1, N)$ 確率空間、 $1 < N < \infty$ 、正規直交固有関数 $f_1, \dots, f_k$ の固有値 $\lambda_i \in [1, 1+\varepsilon]$ を仮定する。固定した r と $0 < \eta < 1/2$ に対し、 N に依存しない明示定数 C, ε_0 を構成し、 $n=1, \dots, r$ の各区間 $[n - C\varepsilon^{1/2} - \eta, n + C\varepsilon^{1/2} - \eta]$ 内の固有値の重複度を $\text{binomial}(k+n-1, n)$ 以上とする (Theorem 3.1)。Theorem 3.2 は Hermite 空間からの等長写像と heat evolution の誤差を与える。英文全文、定義、mixed gradient・moment 補題、Gram と spectral projection の証明、全例、References を確認した。

1. 新規性：C

Closest known result

Bertrand-Fathi, “Stability of eigenvalues and observable diameter in $RCD(1, \infty)$ spaces”, arXiv:2107.05324v1、Theorem 1.2. Known result の仮定は $RCD(1, \infty)$ と一つの固有値 $1+\varepsilon$ 、結論は各固定整数の近くに spectral point が存在すること。その証明は Hermite polynomial の quasimode 構成である。Fathi-Gentil-Serres (2024), Theorem 4.3 は同条件下の一変数 Gaussian law への $O(\varepsilon \log(2/\varepsilon))$ 近似を既に与える。本稿は後者を正しく挙げ、distributional rate の改善を主張しない。

Precise difference

Current paper は compact・finite N に範囲を限定する一方、 k 個の入力から各 band の二項係数型の rank 下界を与える。個別の quasimode の存在からは線形独立性は出ないため、joint moment と Gram 下界を補う点は実質的な追加である。定数の有限和・漸化式、semigroup 写像、 k -様性の反例も加える。ただし証明の基本原理は既知の Bochner/Hermite 法であり、Paper 13 のより広い $RCD(1, \infty)$ 上の多重度定理とも中心結論が重なる。両者を別々の独立した大成果とは数えない。

Assessment

確認文献の scalar spectral proximity から明示的な rank estimate への technical refinement として C。先取性を完全一致検索だけで認定せず、Gaussian rigidity そのものや新たな splitting theorem とは評価しない。

2. 正しさ：A

Statement check

compactness、有限 N 、確率測度、full support、 RCD^* の定義と generator の符号が明確。固有関数が bounded test functions であるため、polynomial chain rule に非有界関数の domain 問題は残らない。Lichnerowicz 下界 $N/(N-1)$ は小さい ε に大きな N を要求するが、 N 非依存の条件付き定理と矛盾しない。

Proof check

Savaré, arXiv:1304.0643v2、Theorem 3.4、式(3.16)を原文で照合した。 Γ_2 の特異部分が非負であることを保持すると、 $\int (\gamma_2(f_i) - \Gamma(f_i)) \leq \lambda_i(\lambda_i - 1) \leq 2\varepsilon$ となる。特異部分を等式から消していない点は正しい。この評価と self-improvement、 L_p Poincaré で $D_{ij} = \Gamma(f_i, f_j) - \lambda_i \delta_{ij}$ を $p < 2$ で $O(\sqrt{\varepsilon})$ にする。

補間の指数を独立に整理した。 $p\eta = 2/(1+\eta)$ 、 $q\eta = 2/(1-\eta)$ 、 $s\eta = 2/\eta$ なら

$$\frac{1}{q_\eta} = \frac{1-2\eta}{p_\eta} + \frac{2\eta}{s_\eta}, \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{q_\eta} + \frac{1}{s_\eta}.$$

したがって $L^\infty\{q_\eta\}$ defectは $\varepsilon^{1/2}-\eta$ であり、polynomialを $L^\infty\{s_\eta\}$ に置いてresidualを L^2 にできる。小さい L^1 normだけから不当に同じ指数を L^2 へ移してはいない。 $\int_0^\infty (e^{2t}-1)^{-1/2} dt = \pi/2$ からPoincaré定数を再確認した。

Gaussian moment recursionは次数0,1,2で完全一致し、それ以上の誤差は $c_d \sqrt{\varepsilon}$ 。Gramのrow-sum bound、 $\lambda_{\min} \geq 1/2$ 、全spanに対するresidual boundが順に成立する。混合二階微分を i,j すべてで和を取る式(5.4)には不足する係数2はない。 $C \geq 2\sqrt{2} \max R_n$ なら、 $u \in V_n$ について $\|(A-n)u\| \leq \delta \|u\|/2$ となり、band射影の単射性を保証する。 $U_n = J_n G_n^{-1/2}$ の等長性とDuhamel積分による $\delta(1-e^{-nt})/(2n)$ も正しい。

Problems found

主定理にFATAL / MAJOR GAP / MINOR GAPは認めなかった。Nへの依存をdomain membershipだけに使い、最終定数から除く区別も保たれている。Paper 13との重複は新規性の問題であり、正しさの欠陥ではない。

Counterexample / sanity check

球面 $S^d(\sqrt{d-1})$ のdegree n固有値は $n+n^2/(d-1)$ 。横座標q個の同時符号反転商では一次不変空間はk次元、二次不変空間は $k(k+1)/2+q(q+1)/2-1$ 次元となり、固定kで二次重複度は非有界。商のRCD保存はGalaz-García-Kell-Mondino-SosaのTheorem 1.1／Corollary 1.2と整合する。

全座標 $k=d+1$ を使う球面では $\sum f^2=k$ という関係が二次Hermiteを一つ消すため、kとNの両方に一樣な ε_0, C は不可能。flat d-torusで固有値1の多重度 $2d$ 、2の多重度 $2d(d-1)$ をFourier整数ベクトルから再計数すると、予想値 $d(2d+1)$ より $3d$ 少ない。したがって曲率0への無条件拡張は実際に失敗する。

Assessment

自己改善の引用、測度特異部分、補間、Gram非退化、全spanの評価と射影の論理を確認できたのでA。効率の悪い大定数は定理の不正確さを意味しない。

3. 修士論文としての妥当性：A

非滑らか解析から定量的な線形独立性とスペクトル多重度を引き出す議論を完結させ、適用限界を反例で示す。既存理論の理解と非自明な統合、計算の完成度があり、通常の修論として十分以上。

4. 博士論文としての妥当性：C

多重度の精密化は研究論文・博士論文の一章として有用だが、既知のHermite法からの拡張であり、独自の解析手法や幾何構造定理の厚みは限定される。Paper 13と合わせても重複部分を除く必要があり、本稿のみを中心成果とする博士論文としてはborderline。

Important references

- J. Bertrand, M. Fathi, [Stability of eigenvalues and observable diameter in RCD\(1,∞\) spaces](#), Theorem 1.2、§ 3。
- M. Fathi, I. Gentil, J. Serres, [Stability estimates for the sharp spectral gap bound under a curvature-dimension condition](#), Ann. Inst. Fourier 74 (2024), 2425–2459、Theorem 4.3。

- G. Savaré, [Self-improvement of the Bakry–Émery condition and Wasserstein contraction of the heat flow in \$RCD\(K, \infty\)\$ metric measure spaces](#), Lemma 3.2、Theorem 3.4、式(3.16)を原文確認。
- F. Galaz-García, M. Kell, A. Mondino, G. Sosa, [On quotients of spaces with Ricci curvature bounded below](#), Theorem 1.1、Corollary 1.2。

Paper 15. Robin eigenvalues on weighted intervals: collapse of the infimum and sharp upper-model rigidity

Main result

$p=N-1>0$, $\kappa=K/p$, $h=w^p>0$, $w\in C^2[0,D]$, $w''+\kappa w\leq 0$ 、非負有限Robin係数 α,β を仮定する。Theorem 1.1は許容集合が非空である条件 $\kappa D^2<\pi^2$ と、第一固有値のinfimumが0であることを示す。Theorem 1.2はsupremumを $w''+\kappa w=0$ の一変数族へ縮約し、等号を分類する。Theorem 1.3は $K=0, N=2$ でBessel閾値 T によって非対称Robin条件の全最大化形状を決める。Abstractから全英語本文、特異端点の極限証明、変分式、共有Referencesまで確認した。

1. 新規性：B

Closest known result

A. Savo, “Optimal eigenvalue estimates for the Robin Laplacian on Riemannian manifolds”, arXiv:1904.07525v1 (2019)、Theorem 1、§ 4.1を原文確認。Known resultはcompact smooth n -manifold with boundary、 $\text{Ric}\geq (n-1)K$ 、boundary mean curvature $\geq H$ 、inradius R 、一定 $\sigma>0$ を仮定し、Robin第一固有値を密度 $\Theta=(c_K-Hs_K)^{n-1}$ のRobin-Neumann一次元モデルで下から評価する。モデルの正の固有関数、微分比較、Green formulaが証明の骨格である。

最近の同一密度をenergyとmassに使う研究としてChen-Wang-Zhu, arXiv:2607.06947v2 (2026)の§ 1も確認した。これは固定radial log-convex densityの下で領域を最適化する問題であり、密度自体を動かす本問題とは変数が異なる。

Precise difference

Current paperは区間と長さを固定し、端点の対数微分を固定せず、finite-dimensional $CD(K,N)$ を満たす全正密度を動かす。Savoの境界曲率制御をそのまま削って下界を改善するのではなく、下限は0と示し、反対側の上限を解く。ground stateの最大点で接するモデルを選び、logarithmic derivativeの符号反転と u' の符号反転を一致させる。さらに $CD(0,2)$ では端点退化が最適となる条件 $\alpha\leq T(\beta)$ 、 $\beta\leq T(\alpha)$ と、正のaffine optimizerが一意に存在する残りの領域を決定する。

Assessment

ODE比較やBessel解、Rayleigh法は既知だが、境界制御なしの密度supremumの鋭い縮約と非対称三領域の完全決定は、確認した既存定理の直接のcorollaryではない。明確な新しい結果が残ると判断しB。世界初を断定せず、古典的Sturm-Liouville最適化文献の網羅には限界があることを付記する。ゼロ下限の簡単な観察だけでBを与えたのではない。

2. 正しさ：A

Statement check

N は全次元、 $p=N-1$ はdensity powerであり、非線形 p -Laplacianの指数とは区別される。 $\text{Ric}_N f=-pw''/w$ 、境界符号 $u'(0)=\alpha u(0)$, $u'(D)=-\beta u(D)$ 、密度の正の端点値、 $\kappa D^2<\pi^2$ が明示される。 t や $1-t$ は元のクラス外で、supremal limitとして扱う。 $\alpha=\beta=0$ をstrict rigidityから除くのも適切。

Proof check

正のground stateに対し $(hu')' = -\lambda hu < 0$ なので最大点 x は一つ。 $g = -w'' - kw \geq 0$ としてvariation of constantsから接する $W \geq w > 0$ 。Wronskianで $r = w'/w$ と $R = W'/W$ の差は x の左で非負、右で非正となり、 $(r-R)u' \geq 0$ 。モデルground state v とのGreen formulaのRobin境界項は正確に消え、

$$(\lambda_M - \lambda_R) \int_0^D uvW^p dt = p \int_0^D vW^p (r - R)u' dt \geq 0.$$

等号なら $u' \neq 0$ の開区間で $r=R$ 、接点の初期値から $w=W$ 。混合Neumann-Robinでも同じ議論が働く。有限性は閉モデル族上で $\int W_b^p$ の正の最小値を取り、constant testを使うので、端点密度が0になることと矛盾しない。

特異端点 $h=t+\delta$ では $u\delta(0)=1$ と正值性から $u\delta \leq 1+\alpha\delta \log(1+1/\delta)$ 、 $|u\delta'| \leq \alpha\delta/(t+\delta)+Ct$ 。これによりuniformおよび H^1 収束が成立し、旧左Robin条件はregular radial conditionへ移る。Rayleigh微分の極限は $(\alpha-T(\beta))/\int tU\beta^2$ 。端点条件を無根拠に保って極限を取ってはいない。

内点stationarityではaffine h に関する $a_h(u,u) - \lambda m_h(u,u)$ が二つの基底上で0となるため、全affine h で0。Rayleigh原理から大域最大となり、二つの非比例affine密度で等号なら $(\log h_1 - \log h_2)'u' = 0$ が u を定数にして矛盾する。この議論が一意性を証明しており、単なる二階微分の符号推測ではない。Tの範囲は $A = -U'/(tU)$ 、 $tA' = \lambda - 2A + t^2A^2$ から $A' > 0$ を証明して従う。

Problems found

FATAL / MAJOR GAPは認めなかった。文中の計算件数6,768例は本査読では全件追試していないが、主張の証明として使用されていない。重要な解析式と閾値は独立に再計算した。

Counterexample / sanity check

$w\epsilon = \sin(\pi(t+\epsilon)/(D+2\epsilon))$ のconstant testで両端の損失が $O(\epsilon^p)$ 、内部質量は正值に収束し、infimum 0を確認した。Bessel方程式を独立に解き、 $s=1,2,3$ について $(R(s), T(s)) = (1.576992730809, 0.651902295767)$ 、 $(2.558237764130, 0.946641672923)$ 、 $(3.199294481455, 1.105006151957)$ を再現。 $A(t) = \lambda/2 + \lambda^2 t^2/16 + \lambda^3 t^4/96 + \dots$ も記号計算で一致した。

$N > 2$ では $h\epsilon = (t+\epsilon)^{N-1}$ の $\sigma=0$ での固有値微分が N へ近づき、constant modelの2を超える。特に $N=3, \sigma=1$ の極限 $\pi^2/4$ はconstant値1.70705298より大きい。したがって対称corollaryの $N \leq 2$ という制限は実際に必要。

Assessment

比較の符号、Robin境界項、degenerate limit、stationary pointの大域最大性と一意性に破綻を認めずA。上限未達成と下限未達成の区別も一貫している。

3. 修士論文としての妥当性：A

一つの極値問題を反例で正しく修正し、一般比較、等号、特異極限、完全な特殊ケース分類までまとめている。手法を説明できる内容とまとまった新結果があり、良い修論として十分以上。

4. 博士論文としての妥当性：C

上限縮約と非対称閾値は有用な研究成果だが、主に一次元ODE、線形なRayleigh形式、古典的Bessel解析の範囲で完結する。一般Nのphase diagram、定量的安定性や高次元問題への展開は含まれず、これのみを博士研究の中心全体とするには厚みが弱い。博士論文の一章としては適切。

Important references

- A. Savo, [Optimal eigenvalue estimates for the Robin Laplacian on Riemannian manifolds](#), Theorem 1, § 4.1 (仮定・結論・Green formulaによる証明を確認)。
- D. Chen, K. Wang, A. Zhu, [Faber-Krahn inequalities for weighted Robin eigenvalues](#), 2026、§ 1、式 (1.1)–(1.2)。本査読では同一密度の作用素と最適化変数の比較に使用。

Paper 16. Minimal signless laplacian coefficient vectors of cacti and sharp incidence energy in the even-cycle class

Main result

n 頂点 m 辺の連結単純cactus、 $r=m-n+1$ 、 $s=n-2r-1$ に対するsignless Laplacian係数のPareto極小元を分類する。 $B(n,r,b)$ を $r-b$ 個の三角形、 b 個の四角形、 $s-b$ 本の葉辺を一頂点で共有させたbouquetとすると、極小元は $b \leq s$ かつ下表の b だけである (Theorem 1.1)。

r	許される b
1-3	$0, \dots, r$
4-5	$0, r-2, r-1, r$
6-8	$0, r-1, r$
9以上	$0, r$

固定した奇・偶閉路数では一意なleast graphを決め、全偶閉路クラスのincidence energy最小値と spectrumも与える。全英語本文、全補題、Appendix Aの整数証明書、Referencesを精読した。

1. 新規性：B

Closest known result

Lu-Zhu, “On the Boundary of Incidence Energy and Its Extremum Structure of Tricycle Graphs”, Front. Phys. 8 (2020), 208を出版社PDFで確認した。Known resultは連結単純tricyclic graph、すなわち $m=n+2$ のクラスを扱い、Theorem 3.11で三つの係数極小グラフ、Theorem 4.2でenergy minimizerを述べる。Lemma 2.2は閉路に含まれない非葉辺 uv の片側の枝をもう片側へ移すと全係数が減少する既知変換であり、Theorem 4.1は係数順序からenergy順序が従うことを述べる。

より直接に近いWang-Zhong-Zheng, LAA 563 (2019), 476–493、DOI 10.1016/j.laa.2018.10.025の主題は「偶閉路を持たないグラフ」。原文へのアクセスは今回も成功しなかったため、その正確な主定理・将来問題の文言には依拠しない (exact theorem number not verified)。後続一次論文のbibliographyで書誌情報を照合した。Du (2025)のsubdivision matching論文も主定理全文は未確認であり、そのformulaの先取権は本稿に認定しない。

Precise difference

Current paperはcactusに構造を限定する一方、閉路数 r に上限を置かず、偶閉路も含め、全 (n,m) における Pareto frontierを決める。既知のbridge contractionを、vertex-transitive block上の複数付着点の集中に拡張する正のprincipal-minor恒等式を使う。固定parityでの縮約だけでなく、三角形+葉と四角形の交換を比較し、 $r=4,6,9$ の切替えを証明する点が追加成果。energy monotonicity、TU formula、三角形bouquetの既知spectrum自体は新結果と数えない。

Assessment

確認した既知結果より広い閉路数を扱う完全な係数分類と、parity別のsharp energy theoremにB。原稿の引用にある「歴史的未解決問題を解決した」という権利は原文未確認のため認定しないが、その制約と、独立した一般分類の数学的内容とは区別する。

2. 正しさ : A

Statement check

finite・simple・connected、cactus、係数の符号、同じorderでの係数順序、Pareto minimalとleastの区別が明確。偶閉路数bを変える際に葉数s-bも変わり、orderとsizeを固定する定義は整合する。r=0,n=1の例外も処理される。一般cactusのenergy最小化は高々四候補への縮約までで、未証明の全parameter分類を主張しない。

Proof check

$Q=NN^T \geq 0$ 、連結性からproper principal minorが正という出発点は正しい。root-deleted matrixは元の次数を保持している。 $R_A = \det(xI+Q)[V \setminus \{u\}]$ 、 $H_A = P_A - xR_A$ とすると、Schur complementのroot追加量は H_A/R_A である。複数付着点と一点付着の差で空集合・singleton項が消え、 $|I| \geq 2$ のprincipal-minor項だけが残る。したがって正値性と ϕ_2 のstrictnessは成立し、cut vertex数を減らす操作はcactusと全blockを保つ。

cycle shorteningは $D_j = (x+2)D_{j-1} - D_{j-2}$ と $E_j = D_j - D_{j-1}$ の正漸化式に帰着し、奇偶のcycle permutation符号も保たれる。bouquet比較の核心である式(5.3)を独立展開し、基底 $3F_{2,4}$ と $3F_{1,8}$ の全12係数・24係数を再計算してAppendix Aと完全一致した。補助式(5.4)は

$$\frac{x}{3}(130 + 395x + 413x^2 + 173x^3 + 25x^4),$$

であり全係数非負。したがって有限計算から全dへの帰納法に必要な証明書が実際に成立する。

残る非比較性は ϕ_2 がbとともにstrictに増える一方、保持される候補の $\det Q$ が減少することによる。式(5.6)の $\det Q = 4(r-b)3^{r-b-1}4^b$ ($b < r$) はroot定数から独立に得られる。除外候補が $B(n,r,0)$ に支配されるので、それらが残存候補を支配することもない。非bouquetのcospectral exceptionもstrict下降とminimalityで排除される。

energy公式の係数を確認した。 $\int_0^\infty \log(1+qt)t^{-3/2}dt = 2\pi\sqrt{q}$ なので、正の係数差はstrict energy差を与える。全偶閉路spectrumは $P(x) = x(x+1)^{t-1}(x+2)^r(x^2+4x+2)^{r-1}C(x)$ から得られ、 $t=0$ の $(x+1)$ 相殺も適切。

Problems found

FATAL / MAJOR GAPは認めなかった。原稿にいう121,167全グラフの列挙は本査読では全件再実行していない。その集計を証明の根拠にはせず、全parameterの恒等式と帰納法を確認した。原文未取得の二つの先行文献に関する限界はEXPOSITION-CITATIONとして明示が必要。

Counterexample / sanity check

独立にNetworkX graph atlasの7頂点以下の全連結cactus103個を抽出し、整数characteristic polynomialで固定parityの係数支配、等号の同型一意性、全16個の (n,r) クラスのPareto frontierを検証した。三角形+葉と C_4 ではP差が x^2-4 で実際に比較不能。 C_3 のsubdivision matching補正は+2、 C_4 は-2となり、raw matching数をそのまま係数にする誤りを回避していることも確認した。

Assessment

主定理を支える正多項式展開・縮約・全parameter帰納・非比較性に欠落を認めずA。有限列挙を一般定理の証明の代わりにはしていない。

3. 修士論文としての妥当性：A

graph decomposition、principal minors、正多項式、スペクトル積分を使い、全パラメータの分類と等号まで自力で説明できるまとまりがある。計算証明書も可読であり、良い修論として十分以上。

4. 博士論文としての妥当性：B

確認した文献との比較の範囲では、閉路数無制限の完全Pareto分類、再利用できるblock concentration恒等式、parity別energyの厳密解が有機的に結びついており、スペクトルグラフ理論の博士論文の中心成果として認めうる。単一の小さいグラフ例や数値分類ではない。AIほど広範な理論的転換とは評価しない。博士審査前には上記2019・2025年原文との先取性照合を補完すべきであり、本評価はその歴史的未確認を消すものではない。

Important references

- H. Lu, Z. Zhu, [On the Boundary of Incidence Energy and Its Extremum Structure of Tricycle Graphs](#), Front. Phys. 8 (2020), 208, Lemma 2.2, Theorems 3.11, 4.1, 4.2. PDFでも数式を確認。
- W.-H. Wang, L. Zhong, L.-J. Zheng, [The signless Laplacian coefficients and the incidence energy of the graphs without even cycles](#), LAA 563 (2019), 476–493. 書誌情報は後続一次論文で照合、原定理のexact reference location not verified.
- Z. Du, [When \(signless\) Laplacian coefficients meet matchings of subdivision](#), European J. Combin. 124 (2025), 104087. 近接文献の未確認事項を特定するために掲載；原定理のexact theorem number not verified.

Paper 17. Magnitude homology of annuli and holomorphic maps

Main result

$A_r = \{r < |z| < 1\}$, $0 < r < 1$, 曲率 -4 のKobayashi距離について、 $\tau_r = \pi^2 / (2 \log(1/r))$ とすると $MH_2 q, \ell$ は $\ell \geq q\tau_r$ で rank continuum の自由abelian群、それ以外は0。穴あき円板では全 $\ell > 0$ で同じrank、正の奇数次数は0。さらに円環・穴あき円板間の正則写像は、双正則でなければ全正次数で零写像を誘導する。全英語本文、chain map、Gomi入力、被覆・縮小補題、Carathéodoryの補足、Referencesを確認した。

1. 新規性：C

Closest known result

Gomi, “Magnitude homology of geodesic space”, arXiv:1902.07044v3 (2025)、Theorem 5.22と Proposition 5.15を原文照合。Known resultは、同じ両端点を結ぶ異なる最短測地線が内点を共有しない geodesic spaceを仮定し、奇数次数の消滅、偶数次数では連続する端点ごとの非基準測地線を用いた自由基底、および選んだ内点に依存しない代表サイクルを与える。完全Riemannian manifoldはこの仮定を満たす。

Precise difference

Current paperの群そのものの計算は、この一般定理に円環のcut locusと被覆距離を代入した明示的特殊例。length supportからmodulusを回復することも計算の帰結で、一般的な複素構造回復ではない。追加の内容は、複数の最短測地線を持つpairだけをstrictに縮めれば全正次数の誘導写像が消えるというLemma 2.3と、そのholomorphic coveringへの適用。strict contractionならchain mapが零という自明な場合だけでなく、局所等長被覆を含める点に差がある。

Assessment

主計算は既存machineryの直接的応用であり、証明にも新しいhomology理論はない。一方、代表サイクルを動かす縮小criterionと円環間の写像の二分法には小規模な追加内容が認められるためC。全体を新しい一般計算定理と評価しない。

2. 正しさ：A

Statement check

通常の整数係数magnitude homology、exact length grading、隣接点のみの重複禁止、曲率 -4 の距離正規化が明確。非隣接点の反復を許すため、高次で $(a, b, a, b, \dots)$ というbasis labelを使える。bounded doubly connected plane domainに限定したconformal recoveryであり、 C^* や一般の複素多様体を含めてはいない。

Proof check

upper half-planeの $\cosh(2d) = 1 + |v-w|^2 / (2 \operatorname{Im} v \operatorname{Im} w)$ から、logarithmic period $T = 2\pi^2 / \log(1/r)$ のannular quotientでは二つの最短測地線があるのはargument差 π のpairに限る。tie distanceの最小は $T/4 = \tau_r$ で、core上の反対点だけで等号となる。equal radiusを動かせば $[\tau_r, \infty)$ の全距離が得られ、Gomiの基底の各 q 区間を足すことでexact supportとcontinuum rankが従う。parabolic quotientのtie距離 $\operatorname{arsinh}(1/(4y))$ は $(0, \infty)$ 全体で、閾値0は未達成。

写像の核心はLemma 2.3。 $\delta = d(p_0, p_1) - d(f(p_0), f(p_1)) > 0$ とし、最初の二つのgeodesic上の代表点を p_0 から $\delta/2$ 以内へ動かすと、各expanded tupleの次の辺がstrictに縮む。seamがnonsmoothのままである理由は、 p_0 から次区間の内点への最短性がもし等号なら、二本の最短経路が p_1 を内点として共有し、Gomiの非分岐条件に反するため。代表元の独立性はProposition 5.15と正確に対応する。

$\text{lift } F: H \rightarrow H$ が automorphism でなければ Schwarz–Pick の等号条件により全 distinct pair が縮む。 automorphism なら deck subgroup は非自明な無限 cyclic subgroup なので有限 index m 。 $m \geq 2$ では source tie displacement $mU/2$ に対して target は $\leq U/2$ となり、hyperbolic・parabolic 両型で strict に短くなる。 $m=1$ だけが双正則で、以上で全場合を尽くす。

Carathéodory 補足も確認した。 bounded holomorphic maps の除去可能特異点により距離は disk 距離の制限。これは一般には path metric ではないが、interval は nonempty total order、4-cut はない。 Kaneta–Yoshinaga, arXiv:1803.04247v3、Definition 5.1 と Theorem 5.2 を原文確認すると、thin frame なしからの消滅が正しく適用できる。

Problems found

FATAL / MAJOR GAP は認めなかった。Gomi の適用条件、局所等長と大域距離保存の区別、restricted metric への別定理の適用は適切。古典的 conformal uniformization の全証明を本査読で再構成したわけではないが、本稿の使用範囲は標準的な円環分類そのもの。

Counterexample / sanity check

$z \mapsto z^m$ では source core の antipodes は m 偶数で同一点、 m 奇数で target 距離 τ_r/m となり、いずれも縮む。これと、十分短い chain は局所等長性で残ることが両立する。四つの core 点の距離行列は C_4 metric であり、length h の degree 1 には 8 有向辺、length $2h$ の degree 2 には 16 個の proper triple と rank 4 の boundary があるため rank 12。full annulus の odd vanishing とは異なり、有限 sample を空間全体の計算に代用できないことを独立に確認した。

Assessment

正規化、cut locus、基底の cardinality、代表元の移動、被覆の全場合分けが成立するため A。

3. 修士論文としての妥当性：A

hyperbolic geometry と新しい homology 理論を正確につなぎ、全次数・全 length の計算と写像の振舞いを説明する。群の計算だけなら応用ノートに近いが、被覆に関する追加補題と距離の比較がまとまりを与え、良い修論として成立する。

4. 博士論文としての妥当性：C

写像の二分法は博士論文の一部として興味深いが、対象は cyclic hyperbolic quotient に限られ、計算の大部分は Gomi 定理と古典的被覆幾何に依存する。一般群やより広い複素多様体への理論はなく、中心成果として博士号を支えるには弱い。

Important references

• K. Gomi, [Magnitude homology of geodesic space](#), 2025、Assumption 4.8、Proposition 5.15、Theorem 5.22、Corollary 5.24。

- R. Kaneta, M. Yoshinaga, [Magnitude homology of metric spaces and order complexes](#), Bull. Lond. Math. Soc. 53 (2021), 893–905、Definition 5.1、Theorem 5.2。

Paper 18. Minimal local sprays and a rank obstruction on projective-space bundles

Main result

holomorphic P^n -bundle $p:X \rightarrow B$, $n \geq 2$ について、零切断全体の近傍に定義された dominating relative spray の source rank が $n+1$ 以下なら、source は relative Euler bundle A_p 、spray germ は $S(\ell, u) = (i\ell + u)(\ell)$ に bundle 同型で一致する。この germ は negative identity section へ延長できない。したがって最小 local rank は $n+1$ 、global relative rank は $n+2$ 以上。 P^2 の global 最小 rank は 4。Abstract、全英語本文、extension / descent / jet 証明、関連する例、References を確認した。

1. 新規性：B

Closest known result

Forstnerič–Lárusson, “Every projective Oka manifold is elliptic”, arXiv:2502.20028v6 (5 May 2026)、Theorem 1.1、Problem 3.2、Proposition 3.3 を原文確認。Known result の仮定は projective Oka manifold、結論はある source からの global dominating spray の存在。さらに compact complex Y に globally generated source の local dominating spray があれば Y は homogeneous とする。Problem 3.2 は、どの source bundle が local dominating spray を持つかを尋ねる。

Precise difference

Current paper は target を P^n とその relative family に限定するが、source を任意の holomorphic bundle として $\text{rank} \leq n+1$ の全可能性を分類し、source だけでなく全高次 jet と germ を決定する。既知の ellipticity を強化して新たな Oka manifold を作る結果ではなく、source を固定した際の非延長性と local/global rank の差を証明する。PGL-equivariant Euler sequence によって vector-bundle lift を持たない P^n -bundle も扱う。

Assessment

cohomology と connection obstruction は古典的だが、低 rank source ・ 全 germ ・ relative descent ・ 非延長性を合わせた結論は上記 existence / homogeneity theorem から直接出ない。確認範囲で明確な追加成果として B。Oka と elliptic の projective での同値や、rational connectedness に関する未解決問題の解決を新規成果に数えていない。

2. 正しさ：A

Statement check

local は base の一部でなく、全零切断にわたる fibre 方向の近傍を意味する。relative 条件 $p \circ s = p \circ \pi$ が明示され、absolute spray と混同しない。 $n \geq 2$ が必要であることを P^1 で示す。projectivization は lines convention で Euler sequence と整合する。

Proof check

rank n なら vertical differential を使って TY 上の identity-differential spray になる。その二次項の座標変換 $B_j(Df v, Df v) = Df B_j(v, v) + D^2 f(v, v)$ から $\Gamma = -B$ が torsion-free holomorphic connection を与える。 $\det TP^n = O(n+1)$ を P^1 へ制限すると degree 非零だが、 P^1 上の holomorphic connection は flat で line bundle を自明化するため矛盾。

rank $n+1$ ではkernel $O(a)$ に対して $\text{Ext}^1(TP^n, O(a)) = H^1(\Omega^1(a))$ が $a=0$ で C 、それ以外で 0 。Stacks Project § 30.8のline-bundle cohomologyとtwisted Euler sequenceを照合すると、この計算は $n \geq 2$ で正しい。split extensionは上のconnection obstructionで除外されるため、唯一の非零Euler extensionを得る。また $H^0(TP^n(-k))=0$ 、 $k \geq 2$ から高次Taylor差が消滅する。原稿はholomorphic Taylor級数の収束を用いて実際のgermの一致へ進み、formal jetだけで結論してはいない。

familyではkernel K が各fibreで 0 なのでproper base changeにより $K=p^* M$ 。 $p^* \Omega^1_{X/B}=0$ 、 $R^1 p^* \Omega^1_{X/B}=O_B$ であり、Euler classがPGL不変なので後者にmonodromy twistはない。Lerayのtotal degree 1ではbaseの H^1, H^2 への項が 0 になり、 $\text{Ext}^1(T_{X/B}, p^* M) = H^0(B, M)$ 。各fibreのextension非零性から対応sectionはnowhere zeroとなり、 M を自明化してrelative Euler sequenceに一致する。この議論はBrauer classがある場合にもvector-bundle liftを仮定しない。

非延長性は固定vector fibre内で $u=-i+ta$ と $u=-i+tb$ を取れば像の極限が異なる二本のlineとなることで直接証明される。零近傍の一致はpunctured vector fibreの連結性とidentity theoremで全punctured fibreへ延びるので、別のholomorphic extensionで回避することもできない。

Problems found

FATAL / MAJOR GAPは認めなかった。背景のOka-1やCampana-Peternellに関する全引用は主定理の入力ではないため、同じ深さで再証明していない。主要証明はそれらの未解決implicationに依存しない。 $n \geq 3$ でglobal最小rankを完全決定したという主張もない。

Counterexample / sanity check

trivial source $O^r \rightarrow TP^n$ のkernel K は $c(K)=(1+h)^{-n-1}$ 、 $c_n(K)=(-1)^n \text{binomial}(2n, n) h^n \neq 0$ 。よって $\text{rank } K \geq n$ 、 $r \geq 2n$ 。 $n=2$ では係数6、 $n=3$ では -20 となり、rank下界を確認した。genericな $2n$ 個のprojective vector fieldのrank落ちincidenceはcodimension $n+1$ で、 n 次元のbaseを動かしてもbad tupleを避けられる。matrix exponentialの合成がglobal sprayを与えるのでtrivial sourceの上界も達成される。 P^1 ではglobal rank2が存在して $n+2$ 下界を破り、complex torusではrank dimのaddition sprayがあり、対象を全compact Kählerへ広げることもできない。

Assessment

extension群、relative descent、全jet消滅、実際の非延長性とrankの計算を確認でき、 A_0 。

3. 修士論文としての妥当性：A

sprayとconnection、Euler extension、cohomology、proper base changeを一つの具体的な分類に結びつけ、鋭い P^2 の帰結も持つ。先行問題を正しく限定し、論理を追えるまとまりがあるため良い修論として十分以上。

4. 博士論文としての妥当性：C

低rank sprayのrigidityは独立した研究論文として価値があるが、最も基本的なhomogeneous fibreのrank $n+1$ に集中しており、主要な消滅はEuler sequenceからの短い計算。 $n \geq 3$ のglobal最小rankや他のhomogeneous fibreの分類は得ていない。この成果だけを博士研究の中心全体とするには弱く、一章としての水準と判断する。

Important references

- F. Forstnerič, F. Lárusson, [Every projective Oka manifold is elliptic](#), 2026、Theorem 1.1、Problem 3.2、Proposition 3.3。
- The Stacks Project Authors, [Cohomology of projective space](#), § 30.8、Lemma 30.8.1。Euler sequenceを使う本稿の二つのcohomology計算と照合。

Paper 19. Joint collision and pole regularization in weighted Bergman interpolation

Main result

unit disk、 $dv=dxdy/\pi$ 、 $\rho \in C^1[0,1]$ 正、 $L=\log(1/\epsilon)$ 、 $c=N+\tau/L$ 、 $|\tau| \leq T$ 、 $x=a^{2N}$ とする。重み $\rho(|z|^2)(|z|^2+\epsilon)^{-c}$ で $z^N=a^N$ の N 点上のdata $\sum v_r z^r$ を補間する最小二乗norm E は、全dataと全相対速度について

$$E(v) = (1 + O(L^{-1} + x)) \sum_{r=0}^{N-1} \frac{|v_r|^2}{U_r + b_r x}.$$

$b_r = (\int_0^1 t^r \rho(t) dt)^{-1}$ 、 $r \leq N-2$ で $U_r = e^{-\tau(N-1)} \epsilon^{N-r-1} / [\rho(0)r!(N-r-2)!]$ 、 $U_{N-1} = [\rho(0)LH(\tau)]^{-1}$ 、 $H(\tau) = (\exp(\tau)-1)/\tau$ ($H(0)=1$)。pure dataのscaled extremizerは $(\zeta^r + \lambda \zeta^{r+N})/(1+\lambda)$ 。さらにjet normとの一様相対一致は $N \geq 2$ で $a^{2N} = o(\epsilon^{N-1})$ と同値。全英語本文、moment証明、tail・逆数評価、例、product corollary、Referencesを確認した。

1. 新規性：C

Closest known result

B.-Y. Chen, “Parameter dependence of the Bergman kernels”, arXiv:1506.01146v2 (2015)、Definition 1.1、Theorem 1.1をPDFで確認。Known resultはbounded hyperconvex domain、負のpsh weightsのa.e.収束、closed complete pluripolar setの外の各compact上で $e^{-\phi_j}$ が共通 L^1 関数に支配されることを仮定し、weighted Bergman kernelsのlocally uniform convergenceを結論する。

Hosono, “The optimal jet L^2 extension of Ohsawa–Takegoshi type”, Theorem 1.1はpseudoconvex domainとsmooth submanifold、Green-type logarithmic pole、psh weightの下でhomogeneous jet quotientにresidue metricによるoptimal extensionを与える。Bao–Guan–Yuan, arXiv:2212.01561v2、Theorem 1.6はpsh sublevel setsの ξ -kernelのlogarithmic growth exponentをmultiplier-ideal thresholdで特定する。これらの主statementも確認した。

Precise difference

Current paperはradial diskとcyclic configurationに強く特殊化するが、fixed positive ϵ のjet normを比較対象とし、moving point Gram matrixの退化を逆数にしても有効な相対漸近を与える。既知のqualitative kernel convergenceやgrowth exponentに対し、二つの競合項 U_r と $b_r x$ 、臨界windowの関数 $H(\tau)$ 、全data一様性を残す点が追加。 ρ にpsh条件を要求しないが、これは直接積分できるモデルに限定した結果であり、一般extension theoremの仮定を弱めたとはいえない。

Assessment

exact projection、Fourier分解、beta-integralとその臨界極限は標準的方法。全速度に一樣な二項漸近と必要十分なcollision criterionには技術的な追加があるのでC。一般のnon-reduced extensionやsingular ambient theoryの新展開と評価するには対象が狭い。

2. 正しさ : A

Statement check

N は点数・pole orderで、ambient dimensionは1。dataは点の値を無尺度で固定するのではなく、limiting jetの係数 v を固定する定義である。 ρ は正で C^1 、 τ は固定compact内、 a と ε は独立に小さくなる。singular central fibreで有限でないjet normを分母にしていない。

Proof check

monomial norm $m_k = \int_0^1 t^k \rho(t)(t+\varepsilon)^{-c} dt$ とDFTから拘束は $\sum_{r+Nl} a^N = v_r$ となる。Cauchy-Schwarzの等号で $T_r = \sum |x^l|/m_{\{r+Nl\}}$ 、 $E = \sum |v_r|^2/T_r$ 、minimizerの各係数 $v_{ra^N}/(m_{\{r+Nl\}}T_r)$ を得る。dvの正規化から π や2の追加係数はない。normal convergenceとHilbert射影の存在・一意性も確保される。

low momentで $t=\varepsilon s$ とすると $\varepsilon^{-(N-r-1)}et$ が出るため、逆数 U_r の $e^{-\tau}$ は正しい。beta積分のtailと $\rho(\varepsilon s)-\rho(0)$ を別に評価し、最も厳しい $d=1$ で $O(\varepsilon L)$ 。critical momentでは $\int \varepsilon^1 t^{-1-\tau}/L dt = LH(\tau)$ 、残りはbounded error。 H は $|\tau| \leq T$ で正の上下界を持つ。finite moment $m_{\{N+r\}}$ は $b_{-r^{-1}} + O(L^{-1})$ 。

一様性の核心は、 $l \geq 2$ のtailが $O(x^2)$ で、 $U_r + b_{-r}x \geq b_{-r}x > 0$ であること。これにより分母誤差を $O(L^{-1}+x)$ という相対誤差に変えてから逆数を取れる。和の係数 $|v_r|^2$ は非負なのでdataによるcancellationは起こらない。scaled minimizerのtailも $T_r \geq C^{-1}x$ から各compactで $O(x)$ 。jet ratioの最大欠損は成分比の最大であり、最も厳しい $r=0$ の x/ε^{N-1} が他成分とcritical xL を支配する。

Problems found

FATAL / MAJOR GAPは認めなかった。原稿の233数値例全件は追試していない。一般 L^2 ・singular metricに関する長い背景文献は主証明の依存ではなく、本稿のradial formulaの正しさは上記直接計算で判断した。

Counterexample / sanity check

$N=2, c=2, \rho=1$ では $m_0=1/[\varepsilon(1+\varepsilon)]$ 、 $m_1=\log((1+\varepsilon)/\varepsilon)+\varepsilon/(1+\varepsilon)-1$ 、 $m_2 \rightarrow 1$ 、 $m_3 \rightarrow 1/2$ を直接積分で確認。 $\varepsilon=a^8$ 、constant dataなら $E \approx a^{-4}$ 、 $J \approx a^{-8}$ なので $E/J \approx a^4 \rightarrow 0$ となり、重みの L^1 収束とscheme collisionだけでは相対安定性は出ない。

独立の55桁積分で $N=1,2,3$ 、 $\tau=-2,0,2$ 、全 r のlow/finite momentを確認した。endpoint scaleを取り逃さないようlogarithmic coordinateで積分し、beta係数・critical factorと一致する $O(1/L)$ 補正を得た。数値は一般一様性の証明には用いていない。

Assessment

DFT、極値等号、critical coefficient、tail、逆数とdata一様性、scaled limitの全てが成立するためA。

3. 修士論文としての妥当性 : A

退化するextremal problemを正確に定式化し、複数の極限速度、明示的反例、extremizerと必要十分条件まで導いている。一般 L^2 理論を新たに証明するものではないが、通常の修論として非自明でまとまった内容がある。

4. 博士論文としての妥当性 : C

明示モデルの精密解析として博士論文の一部には適するが、核心は対角化可能なcyclic・radial設定のmoment解析であり、一般configurationやnonradial weightsに使える新しい手法までは得ていない。中心成果として博士号を支えるには追加の広がりが必要。

Important references

- B.-Y. Chen, [Parameter dependence of the Bergman kernels](#), 2015、Definition 1.1、Theorem 1.1を原文確認。
- G. Hosono, [The optimal jet \$L^2\$ extension of Ohsawa–Takegoshi type](#), Nagoya Math. J. 239 (2020), 153–172、Theorem 1.1、Condition 2.1。
- S. Bao, Q. Guan, Z. Yuan, [A note on \$\xi\$ -Bergman kernels](#), Theorem 1.6とその直前の定義・仮定。

Paper 20. Algebraic rigidity and prescribed convergence sets for triangular non-autonomous automorphisms

Main result

原点を固定する三角polynomial automorphism列で、共通の座標順序とstep degree $\leq D$ を仮定すると、pointwise convergence set $S=\{x:\Phi_n(x)\rightarrow 0\}$ はdegree $\leq D^{n-1}$ の多項式で定義されるalgebraic setであり、そのcompact上で一様収束する。逆に、任意のalgebraic cylinder $V\times C$ と、有限個の $|P_i|<1/\leq 1$ によるcylinderを、各時刻の指定有限jetを λid に一致させて実現する。閉disk例のboundary asymptoticも示す。全英語本文、全証明・例、Referencesを確認した。

1. 新規性：C

Closest known result

Arzhantsev–Shakhmatov, “Some finiteness results on triangular automorphisms”, arXiv:2011.01202v2 (2022)、Lemma 1を原文確認。Known resultの仮定は共通の三角順序とdegree $\leq D$ 、結論はそれらで生成される群の全元のdegree $\leq D^{n-1}$ 。係数有界性は要求しない。

Abate–Abbondandolo–Majer, J. reine angew. Math. 690 (2014), 217–247、Lemma 6.4では、special triangular nonlinear termsの次数・係数有界性と、linear cocycleの一様指数収縮を仮定し、全空間での吸引と $C\lambda^n(|z|+|z|^k)$ 評価を得る。Peters–Wold, arXiv:math/0410210、Theorem 6には既に非開なpointwise convergence setの例がある。

Precise difference

Current paperの代数性は既知degree boundに有限次元線形代数を加えた短い帰結。係数有界性を落とす代わりに全空間での吸引を弱め、algebraic set上の収束を得るので、AAMの全吸引定理の強化ではない。実現部分では λ を固定し、任意のjet order列とstrict/non-strict boundaryを同時に指定する。非開性だけを新規とせず、具体的なcylinderの正確な実現と高jetの組合せに差を限定する。

Assessment

stable scalar recurrenceにpolynomial powersを入れるelementary constructionであり、深い新機構ではない。ただし閉境界の選択と任意jetの同時指定には小規模なrefinementが認められるためC。一般のholomorphic convergence setの既存研究を完全には網羅しておらず、全実現理論の先取性を認定してはいない。

2. 正しさ：A

Statement check

共通contracting ballを仮定せず、 S を開いたbasinやFatou–Bieberbach domainと同一視しない。degreeの仮定には三角の座標順序固定が含まれる。構成する集合はoriginを含み、extra coordinateを一つ使う。algebraic setはreduced setとしての指定で、scheme構造を指定する主張ではない。

Proof check

$\text{degree} \leq L$ の orbit map を $C_n v(z)$ と書き、 $W = \{u: C_n \rightarrow 0\}$ と置くと W は有限次元 vector space 内の linear subspace。有限個の linear equations で W を定義できるため $S = v^{-1}(W)$ は algebraic。 W の固定 basis 上で $C_n \rightarrow 0$ なら operator norm も 0 へ行き、compact-uniform convergence が従う。一般の holomorphic pointwise limit の正規族性を無根拠に使ってはいない。

実現写像と orbit は

$$F_j(z, w) = (\lambda z, \lambda w + q_j(\lambda^{-(j-1)} z)),$$

$$\Phi_n(z, w) = \left(\lambda^n z, \lambda^n w + \sum_{j=1}^n \lambda^{n-j} q_j(z) \right).$$

$w_n \rightarrow 0$ なら $q_n = w_n - \lambda w_{n-1} \rightarrow 0$ 、逆は $0 < \lambda < 1$ の geometric tail estimate で成立する。 $q_j = k - \varepsilon_i P_j^{e_j}$ 、 $e_j \geq \max(k, m_j + 1)$ とすれば、 $|P_j| < 1$ で $0, > 1$ で非収束、 $= 1$ で $\varepsilon_i = 1$ の時だけ 0 となる。位相の cancellation は必要条件 $q_n \rightarrow 0$ で排除される。各 F_j を単独で反復すると、その固定 polynomial forcing は $\lambda^k z$ に沿って 0 へ行くので、個別の global attraction も正しい。

compact 上の strict 項は r^k 、non-strict 項は $1/k$ で uniform に消える。strict cylinder の Runge 性は polynomial hull が全不等式を保持すること、Stein 性は明示 strictly psh exhaustion から従う。boundary asymptotic は $h = n - j$ と置いた幾何和を $h \leq n/2$ と tail に分け、 $1/(n-h) - 1/n \leq 2h/n^2$ を使うので、 $|z| = 1$ 全体で一様な $O(n^{-2})$ となる。

Problems found

FATAL / MAJOR GAP は認めなかった。原稿の Outcome D という自己分類は「新規性未認証」の意味であり、数学的な D 判定ではない。本査読の四評価にはそのラベルを流用しない。

Counterexample / sanity check

$q_j = z^{j+m}$ と $q_j = z^{j+m}/j$ で $D \times C$ と closed $D \times C$ がそれぞれ得られることを modulus で確認。五段階の直接 composition を記号計算し、上の orbit 式と一致した。 $H(z, w) = (w/4, z/4 + w^2)$ の inverse $(4v - 64u^2, 4u)$ も再検算。 H は小球を吸引するが $(2, 2)$ は escape するので、共通三角順序なしの代数性は偽。 $\lambda_j = j/(j+1)$ 、forcing $z^2/(j+1)$ では $w_n = (w_0 + nz^2)/(n+1) \rightarrow z^2$ となり、固定 $\lambda < 1$ を単なる積の減衰に替えられない。

Assessment

有限次元性、degree、inverse、orbit recurrence、boundary の全場合分けが成立するため A。

3. 修士論文としての妥当性：B

SCV の基礎、三角自己同型、有限次元の議論を理解し、複数の現象を完全な例で説明する通常の修論として十分。証明の核心は比較的 elementary で、独自理論の厚みは大きくないため「十分以上」とまではしない。

4. 博士論文としての妥当性：D

代数性は既知 degree estimate の短い corollary で、実現も stable linear recurrence への明示入力で完結する。新しい basin uniformization や一般 convergence-set classification ではなく、これを中心成果とする博士論文に必要な深さと厚みは不足する。

Important references

- I. Arzhantsev, K. Shakhmatov, [Some finiteness results on triangular automorphisms](#), Results Math. 77 (2022), 75、Lemma 1。
- M. Abate, A. Abbondandolo, P. Majer, [Stable manifolds for holomorphic automorphisms](#), J. reine angew. Math. 690 (2014), 217–247、 § 6、Lemma 6.4と条件(a),(b)。
- H. Peters, E. F. Wold, [Non-autonomous basins of attraction and their boundaries](#), J. Geom. Anal. 15 (2005), 123–136、 § 4、Theorem 6。

Paper 21. Depth-three symmetric Eisenstein series

Main result

英語版 § 5 E.1–E.9、主定理E.4.1–E.4.3、その証明、計算付録とReferencesを確認した。対象は Hara–Sakugawa–Tasakaの正規化によるsymmetric triple Eisenstein seriesである。添字に1を許す形式的 linear-shuffle商のweight k の次元は $\text{binom}(\lfloor k/2 \rfloor, 2)$ 。一方、添字がすべて2以上の6項全置換和 $C(a,b,c)$ の解析的生成空間 W_k は、偶数 $k \geq 10$ について次の空間に一致する。 $A_2 = -E_2/24$ 等の正規化を用いる。

$$W_k = M_k^{\mathbb{Q}} \oplus A_2 M_{k-2}^{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q} A_2^2 A_{k-4}, \quad \dim W_k = \lfloor k/6 \rfloor + 2.$$

さらに偶数 $k \geq 18$ では $C(3,7,k-10) - C(5,5,k-10)$ は解析的に0だが形式的linear-shuffle商では非零。全tripleの解析的空間の次元を決定した定理ではない。証明は、4変数のfree-Lie多項式、stuffleの全対称化、modular product basisを組み合わせる。

1. 新規性：B

Closest known result

Hara–Sakugawa–Tasaka, “Symmetric multiple Eisenstein series”, arXiv:2601.13626v1 (2026), Proposition 3.9、Theorem 1.2、Lemma 6.5、§ 6.3およびTable 4を原文で確認した。

Known result：同じ級数に対し全depthのlinear-shuffle関係が成立する。depth 2の生成空間を決定し、偶数 $k \geq 10$ のdepth 3空間には M_k と DA_{k-2} が含まれる。Table 4にはdepth 3の形式的次元の低weight計算がある。Lemma 6.5の証明は、odd-odd-evenのstuffleから偶数Eisenstein級数の積を取り出す議論をすでに用いる。

Current paper：同じ正規化で、全weightの形式的次元、全置換和という限定された解析的部分空間の完全決定、そして指定された解析的関係の形式的非消滅を証明する。

Precise difference

既存のmodular inclusionを全tripleの分類へ強めたのではない。全置換和に制限する代わりに、包含を正確な等式と全関係の有限多項式判定にする。形式的次元について有限表を一般公式にし、linear-shuffleだけでは足りないことを無限weight族で明示的に証明する。対称和公式、PBW、準modular形式の代数的独立性そのものは既知であり、Eisenstein積を取り出す証明の相当部分も先行論文の延長である。

Assessment

非零pairingによる一様な障害と、解析的・形式的空間の区別には明確な数学的追加があるためB。特に § E.7のMZV対称和を新しいMZV定理として加点しない。旧来のalternat/free-Lie記述に形式的次元が含意されている可能性、未公開Kaneko–Zagier資料等との完全な重複確認は残るため、世界初・substantialなAとは認定しない。

2. 正しさ：A

Statement check

正規化、添字1のshuffle regularization、添字2の条件収束を区別している。解析的stuffleを使う全置換和には添字 ≥ 2 を課し、格子矩形の $N \rightarrow \infty$ 、次いで $M \rightarrow \infty$ という既定の順序を固定する。奇数weightの全置換和0と、weight $6 \cdot 8$ の例外も明示されている。形式的商の次元を解析的全空間の次元と同一視していない。

Proof check

E.5.1の座標変換 $H \mapsto H(-x, x-y, y-z, z)$ は和0超平面の座標化である。4変数の平均を差し引けば translation-invariantな逆写像が得られる。reversalと(1,3)-shuffleから(2,2)-shuffleを得る6項恒等式を確認した。一般のalternating多項式の核は変数和による倍数で、対称な一次式による除算はshuffle方程式を保つ。PBWのlength 4成分から

$$(1-t)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{(1-t)^4} - \frac{1}{(1-t^2)^2} \right) = \frac{t(1+t)}{(1-t^2)^3}$$

を得て主張の次元になる。定数次数で0となる点も整合する。

解析的対称和は、有限集合上で「全相異なる・2点一致・3点一致」を分ける恒等式である。補正項の係数は $-1, -1, -1, +2$ で正しい。有限恒等式の各項を指定の順序で極限に移すので、条件収束級数の不正な並べ替えをしていない。 $C(\text{odd}, \text{odd}, \text{even}) = 4(A_k - A_{r+s} A_t)$ 、 $A_4^2 = (7/6)A_8$ から A_k および全偶数積を回収する計算、明示基底 U, V, T の係数を確認した。Hirose-Sato-Tasakaのproduct basisの添字範囲も原文Corollary 2と一致する。 A_2 の変換則に異なる整数行列を代入し、準modular depthごとの独立性を得る議論は有効。Weierstrass方程式からの漸化式は $L_r = 2A_r$ の正規化であり、ここを A_r の漸化式と誤認していない。

Problems found

FATAL、MAJOR GAP、修正を要する核心的MINOR GAPは認めなかった。補助計算用archiveを実行したとの原稿の記述は、それ自体を検証証拠には採用していない。新規性の未確認範囲は正しさの欠陥とは区別する。

Counterexample / sanity check

Lie word $[Y_0, [Y_2, [Y_2, Y_{k-7}]]]$ の6単項式を独立の二項係数抽出コードで展開し、偶数 $k=18, 20, \dots, 60$ の22例で反復添字の6重の数え方も含めて再計算した。2つのorbitとのpairingは $k=18$ で $(264, 0)$ 、 $k=20$ で $(2002, 0)$ 。一般係数も以下と一致する。

$$2 \left[\binom{k-7}{6} - \binom{k-7}{4} \right] = \frac{(k-17)(k-6)}{15} \binom{k-7}{4} > 0.$$

この有限検算に加え、同じ二項係数の抽出式が任意の偶数weightで成立することを確認した。全weightの証明をweight 60までの数値的rankで代用していない。

Assessment

三つの空間の区別、regularization、PBW計算、非零証明が整合しており、主定理と核心的証明をAと評価する。

3. 修士論文としての妥当性：A

多重Eisenstein級数、free Lie algebra、準modular形式を一つの問いに結びつけ、一般定理・明示基底・反例的障害を完全な証明で与える。通常の数学専攻修論として十分以上である。有限rank表だけで終わらず一般weightの証明を持つ点を重視する。

4. 博士論文としての妥当性：C

研究論文または博士論文の一章として有力だが、解析的全depth 3問題は未解決で、全置換和の構造は既知の積公式と先行抽出法に強く依存する。新しい障害の証明は明快であるものの、それを中心成果として博士号を認定するには、より広い解析的関係の決定や新手法の展開が欲しい。新規性Bと博士論文としての厚みは別判断である。

Important references

- Hara, Sakugawa, Tasaka, “Symmetric multiple Eisenstein series”, 2026, arXiv:2601.13626v1, Proposition 3.9、Theorem 1.2、Lemma 6.5、§ 6.3、Table 4。 [原文](#)
- Hirose, Sato, Tasaka, “Eisenstein series identities based on partial fraction decomposition”, Ramanujan J. 38 (2015), 455–463。 arXiv:1402.1585v1のCorollary 2とその証明を確認。 [原文PDF](#)
- Reutenauer, Free Lie Algebras, Oxford, 1993。 PBW/primitive elementの標準事項として用いる。書籍内のexact reference location not verified。本文のHilbert級数は独立に導出した。

Paper 22. An integral refinement of the Bachmann–Risan matrix

Main result

英語版 § 1–10、Theorem 1.1、Lemma 4.1、Propositions 6.1–6.2・9.1、証明・計算付録・Referencesを確認した。Bachmann–Risanの行列 A_k を元の正規化 $2H=A_k\mathbb{Z}$ のまま固定する。偶数 $k\geq 6$ 、 $N=k/2-2$ 、 $a=\lceil N/2 \rceil$ 、 $\varepsilon=N \bmod 2$ に対し、主結果は

$$\det A_k \in 2^a (k/2)^\varepsilon \mathbb{Z}.$$

成分は有理数でも行列式は指定因子で割り切れる整数である。加えて反転対称・反対称座標によるblock分解と、Bernoulli数を使わない整数関係式の構成を与える。全weightの非退化性は証明していない。 $6\leq k\leq 300$ の偶数weightにおける非退化性は有限の厳密計算として報告される。

1. 新規性：B

Closest known result

Bachmann–Risan, “Formal finite multiple zeta values”, arXiv:2608.15480v1 (2026), § 5.3、Lemma 5.14、Proposition 5.15、Conjecture 5.16、Theorem 5.17を原文で確認した。

Known result：同じ A_k は odd–odd 基底への一意な座標行列である。cusp formがないweightでは可逆性が証明され、全偶数 $k\leq 100$ の非零計算が報告される。全weightで可逆かは予想であり、period polynomialから H の関係を作る行列式公式は既知である。

また Gangl–Kaneko–Zagier (2006), Theorem 2 と § 4 Proposition 3 は、偶数weightの形式的double-zeta空間の odd–odd 基底、および反射と有限差分による有理数上の証明を与える。こちらも原文を確認した。

Precise difference

Current paperは有理数上の基底存在を新たに証明するのではなく、その基底変換の奇素数での行列式付値を追跡し、 A_k について全weightにわたる整数性・一様可除性を得る。単なる非退化性計算の $100\rightarrow 300$ への延長より、この局所算術的結論が新規性の中心である。整数adjugateによる関係式は既知のperiod relationの別表示で、weight 12の(16,9,18,-2)も既知。depth 5の特殊族は既知antipode法の直接の帰結と評価する。

Assessment

主結果は零行列式を許しても意味のある一様な算術的制約であり、近い既知の基底定理やCramer公式がそのまま述べている結論ではない。有限差分の積分的精密化を実際に証明しているためB。一般非退化性や有限MZVの次元予想を解決した成果としての加点はしない。別のBernoulli/Hankel行列との同一性は確認できず、題名の類似だけで既知扱いにも新規扱いにもしない。

2. 正しさ：A

Statement check

商 $\bar{D}_k$ と、さらにeven productを除いた $\bar{D}_k$ を区別している。後者で基底でないodd–odd列を基底扱いする誤りはない。行列の順序・2倍の規格化・ $B_1=-1/2$ を原論文(5.28)–(5.33)と照合した。Theorem 1.1は $\det\neq 0$ を仮定せず、予想の成立も結論しない。

Proof check

核心はLemma 4.1。 $k=2m+2$ とし、shuffle-minus-stuffle表示のeven列と境界列の正方部分Bについて、 $\det B/(2m-1)!!$ が $\mathbb{Z}[1/2]$ の単元であることを示す。reflection-invariant多項式Gからsymmetric多項式Sへの写像 $Cg=g(X,Y)+g(Y,X)-g(X,X-Y)$ の逆は、 h と $h(Y-X,Y)$ の平均である。両者の合成と偶数次数の符号を確認した。このためCの行列式は2以外で単元となる。

中心を $1/2$ に移した基底の差分は、次数 $2j-1$ の最高係数 $2j$ を持つ奇多項式。残りの定数方向が係数2を補い、 $\det(FC)=\pm 2^{m+1}m!$ となる。二項係数による入力・出力の尺度変更を行うと、階乗比が $(2m-1)!!/m!$ に簡約される。これは単なる有理数上の可逆性より強い付値の追跡である。

整数block行列QのSchur complementが A_k であるので $\det Q=\det B \cdot \det A_k$ 。 r と $s=k-r$ のH行を足すと $2rs(e_r+e_s)$ になり、even項とbinomial項が相殺する。全対を処理するとodd double factorialがBの奇素数因子を打ち消す。素数2ではBernoulli漸化式から $2B_j \in \mathbb{Z}_{(2)}$ 、 r,s が奇数であることから A_k の全成分 $\in \mathbb{Z}_{(2)}$ となり、同じ行和から 2^a を取り出せる。最後の $\mathbb{Z}[1/2] \cap \mathbb{Z}_{(2)}=\mathbb{Z}$ による結論は正しい。

反転block分解では左右の核を区別し、中央のunpaired列にも正しい係数を用いる。adjugateの関係式はQが特異でも恒等式として成立し、証明書が零になる可能性も明示する。Proposition 9.1の15個のproper coarseningは反転・antipodeの符号と整合し、両端の偶数weight depth 2因子の消滅によって余分な積が消える。

Problems found

主定理のFATAL/MAJOR GAPは認めなかった。depth 5のweight 15までの1001列の計算証明書全体と、非退化性の全149件という原稿の集計を、こちらで全件再実行したわけではない。各有限計算の関係式生成法・正確な算術を使う論理を確認し、中心的算術定理は一般の証明を独立に追った。この再現範囲の限界を、全計算の独立認証済みという表現で覆わない。

Counterexample / sanity check

原稿のBernoulli行列コードとは別に、式(3.2),(4.1)から整数行列QとBを構成し、 $\det A=\det Q/\det B$ を厳密算術で計算した。偶数 $6 \leq k \leq 60$ および $k=100,200,300$ の31weightで、非零・可除性・Bの奇素数因子を確認。 $k \leq 20$ ではBernoulli式のAとSchur complementの全成分も一致した。

$k=6,8,10,12$ の行列式は18,-108,-3600,48672。 $k=300$ は正で2427桁となり報告と一致する。したがって「常に正の行列式」等の強化は実際に偽であるが、これは本論文の定理に対する反例ではない。有限計算を一般非退化性の証明として扱っていない。

Assessment

正規化・商空間・行列式の因子・2進分母の処理を検証できた。中心的定理と解析的ではない整数線形代数の証明はAと評価する。

3. 修士論文としての妥当性：A

double-shuffleの表示、modular period relation、局所算術を理解したうえで、一般weightの証明と独立計算をまとめている。既知の巨大予想を未解決のまま残しても、完成した別の定理を持つため良い修論として成立する。

4. 博士論文としての妥当性：C

可除性は新しいが、行列のrankや一般非退化性、有限MZVの新しい独立関係数を決定しない。整数証明書・反転block・有限範囲延長の大半は主行列への比較的直接の線形代数である。一研究論文としてのまとまりはあるが、博士論文の中心成果として十分な深さ・影響・内容の広がりには達したとまでは評価しない。

Important references

- Bachmann and Risan, “Formal finite multiple zeta values”, arXiv:2608.15480v1 (2026), § 5.3、Lemma 5.14、Proposition 5.15、Conjecture 5.16、Theorem 5.17。Main Theorems C,Dによるspanningと有限値への写像も確認。 [原文](#)
- Gangl, Kaneko, Zagier, “Double zeta values and modular forms”, Automorphic Forms and Zeta Functions, World Scientific (2006), 71–106。著者版のTheorem 2、式(7)、§ 4 Proposition 3と証明、Theorem 3。 [著者版PDF](#)

Paper 23. Sharp polarized Chern inequalities for rank-four matroids

Main result

英語版 § 1–15、Theorems 2.1–2.3、Chern類の定義、Lemmas 7.1・8.1、Propositions 7.2・9.1、各証明とReferencesを確認した。loopless rank 4 matroidの最大building setの通常のtangent classを用いる。 α, β が生成する閉錐の非零のLについて、 $\deg((9c_2 - 3c_1^2)L) > 0$ 。普遍係数9は最適で、固定した正標数で実現可能なpaving matroidに制限しても鋭い。simplificationがsparse pavingなら最適係数は3となる。

標準係数8の交叉数は、weighted incidence W_2, W_3, W_{23} とrank 2 flatsの個数 f_2 を用いて

$$P_M(t) = 11f_2(1 - t) + (12W_3 - 3W_2 - W_{23})t.$$

この端点公式から正值区間・等号を完全に判定し、正值区間が0へ縮む族を構成する。一般nef錐全体やrank ≥ 5 のmixed不等式は主張していない。

1. 新規性：B

Closest known result

Cheng–Lin, “Inequalities for Chow Polynomials and Chern Numbers of Matroids”, arXiv:2603.21680v3 (2026), Corollary 4.15・Remark 4.16を確認した。Known result：rank $d+1$ の通常tangent classについて、 $((d+2)c_2 - 2dc_1^2)\alpha^{d-2} = (3d+2)(f_2 - \text{binom}(d+1, 2)) \geq 0$ 。これは α に関して標準Miyaoka–Yau係数より強い。Remark 4.16はrank 4でも $(8c_2 - 3c_1^2)\beta$ が負になり得ることをすでに明記する。

Cheng, “Tangent classes for matroid building sets”, arXiv:2606.22650v2, Definition 3.3・(3.5)–(3.6)は、今回使う通常tangent K-classとChern積公式を与え、Corollary 4.23は一般building setにおける α 不等式を証明する。

Precise difference

Current paperはbuilding setを最大、rankを4に制限する代わりに、偏極を α の一射線から α, β の2次元錐へ広げ、最良係数9を求める。sparse pavingに対しては最良係数3と鋭さを追加する。係数8の破綻自体は既知で、 α 端点公式も既知。 β 端点のincidence公式、最適係数とその漸近族、正值区間の一樣下限がないことが具体的な追加である。直線の零点を解く操作を別の深い成果とは数えない。

Assessment

既知の注意を具体的な最適不等式に進めた明確な新成果としてB。有限体の楕円二次曲面・inversive planeやzero-sum block構成自体は古典的であり、新規性はそれらのChern交叉数が最適性を与える点にある。通常・対数・parabolic Chern類を混同して既知の幾何学的不等式の直接帰結とは判定しない。

2. 正しさ : A

Statement check

rank 4、loopless、最大building set、simplificationの点数による重み付けを確認した。parallel classの元数を使うと β の式が変わるが、本稿はその誤りを避けている。sharpnessの固定標数は代数閉包上での実現可能性であり、有限体 F_p そのものに台集合サイズを一様固定した主張ではない。PDFの定理表記も確認した。complex-realizableだけでの最良定数は決定していない。

Proof check

Chengの積公式を次数2まで展開すると $c_1=4\alpha-\sum x\ell-2\sum xH$ 、 $2c_2=c_1^2-2ch_2$ となる。Chow関係から $\alpha xH=0$ 、 $\alpha^2 x\ell=0$ 、 $\deg(\alpha x\ell^2)=-1$ 、 $\deg(xH^3)=1$ 、 $\deg(x\ell^2 xH)=-1$ 、 $\deg(x\ell xH^2)=0$ 、 $\deg(x\ell^3)=2(h\ell-1)$ を得る計算を追ひ、符号を確認した。これにより

$$\deg(c_2\beta) = 6(n-1) - 3W_2 + W_{23},$$

$$\deg(c_1^2\beta) = 16(n-1) - 7W_2 + 3W_{23} - 4W_3$$

が得られる。hyperplaneがline外の点を分割する恒等式も、任意のmatroidのclosureから従う。

正值性の独立入力 $l_{13} \geq l_{12}$ である。rank 3のpoint-line incidence行列 D は $DD^T=11^T+\text{diag}(t_p-1)$ 、各 $t_p \geq 2$ なので行rankが点数となる。この「線の数 $\geq$ 点の数」を各点でのcontractionのsimplificationに適用し、総和すれば必要な不等式が得られる。 $9c_2-3c_1^2$ の β 交叉は $6[n-1+f_2+\sum(|H|-2)+(l_{13}-l_{12})]>0$ に分解される。nefnessだけからChern判別式の正值性を導く飛躍はない。

鋭さは $PG(3,q)$ および $P^1(F_{q^2})$ のHermitian行列によるrank 4実現で確認できる。後者の任意の三点が一意的なcircleを定め、 $h\ell=q+1$ 、 $W_3=2\text{binom}(q^2+1,2)$ となる。 $q \rightarrow \infty$ で $3\deg(c_1^2\beta)/\deg(c_2\beta) \rightarrow 9$ 。sparse pavingでは $4z \leq \text{binom}(n,3)$ を用いて係数3を証明し、 $n=4,5$ の境界を別処理する。 F_2^m のzero-sum四点blockはbasis exchangeを満たし、同じ比が3へ近づく。両最適定数で非零の等号例がないことと、漸近的鋭さは矛盾しない。

Problems found

主定理のFATAL/MAJOR GAP/MINOR GAPは認めなかった。全445件の原稿付属計算を独立再実行したわけではない。469点例についても全Chow環を構成したのではなく、証明されたcircleの削除・接続数の計算を検証した。高rankの表を一般定理の証明にしていない。

Counterexample / sanity check

端点公式と $PG \cdot$ sparse-pavingの漸近式を記号計算で再検算した。 $PG(3,11)$ は $(A,B)=(178486,-358314)$ 、等号 $t=133/400$ 。469点例は $\deg(c_2\beta)=2307474$ 、 $\deg(c_1^2\beta)=6154178$ 、標準判別式 -2742 となる。削除した二つの空circle以外がrank 3 flatとして残るため、 $f_3=12188$ という数え方も整合する。

さらに $q=3$ の実現を F_3 上の10本の列として独立に構成し、全projective hyperplaneを列挙した。4点を含む30平面、各三点を含む平面が一つ、各二点を含む平面が四つであることを確認した。26点の N_5 では $3c_2-3c_1^2$ の β 交叉が -750 となり、sparseを外せない。これらは否定される強化命題への反例で、本論文の定理への反例ではない。

Assessment

通常tangent classの規約、非実現matroidにも通用する環計算、正值性を保証する接続数、二つの鋭さの族を確認できたためA。

3. 修士論文としての妥当性：A

抽象Chow環での交叉計算を有限幾何・design構成と結びつけ、明確な最適不等式と反例を持つ。既知の α 結果を理解したうえで β 方向の問題を解決しており、十分以上の修論内容である。

4. 博士論文としての妥当性：C

有意義な新研究だが、中心はrank 4における有限個の交叉公式と古典的incidence不等式であり、rank 4では偏極因子が一つだけなので本格的なmixed問題までは扱わない。全nef錐・高rank・複素実現可能クラスの最適問題も残る。博士論文の一章としては良いが、この成果だけを中心として博士号相当とするには技法の広がりや研究の厚みが不足する。

Important references

- Cheng–Lin, “Inequalities for Chow Polynomials and Chern Numbers of Matroids”, arXiv:2603.21680v3 (2026), Corollary 4.15、Remark 4.16。 [原文](#)
- Cheng, “Tangent classes for matroid building sets”, arXiv:2606.22650v2 (2026), Definition 3.3、式 (3.5)–(3.6)、Corollary 4.23。 [原文](#)

Paper 24. Graphic matroid Chow polynomials

Main result

英語版 § 1–14、Theorems 2.1–2.2・9.2・10.1、必要なincidence-algebra定義・補題・証明、Referencesを確認した。最大building setのordinary Chow polynomialについて、 K_2, K_3, K_4 をblockとする任意のblock graphでは零点が単純な負の実数である。cyclic部分のrankも無制限。橋を加える、橋をtriangleへ置き換える、triangleを K_4 へ置き換える操作で厳密なinterlacingを得る。任意のrank 2 matroidの直和にも拡張する。

核心的な一般定理は、 $N \geq 1, \lambda_i \geq 0$ のとき、形式変数 X の多項式 $X^N \prod ((1+\lambda_i)X - \lambda_i(1+t))$ に線形変換 $X_i \mapsto A_i(t)$ を施した $F(N; \Lambda)$ が単純負実根を持ち、因子削除・ N の増加の双方でstrict interlacingすること。diamond/ C_4 と任意個の橋についての補完結果、および一般theta/cactus・bookの正確な漸化式もある。一般theta・series-parallelの実根性までは証明していない。

1. 新規性：B

Closest known result

Pielasa, “Decompositions of Chow rings of direct sums of matroids”, arXiv:2511.10746v1 (2025), Theorems 1.2–1.3・1.9を確認した。Known result：任意のloopless M, N についてChow環の直和分解と、それに対応するChow polynomialの再帰式を与える。単なる $H(M)H(N)$ ではなく、各flatのrestriction/contractionを含む。一般の実根性保存を結論する定理ではない。

比較対象としてCoron–Ferroni–Li, “Matroid analogues of Gal’s conjecture”, arXiv:2604.04550v3 (2026), Corollary 8.5はrank ≤ 6 のordinary Chow polynomialの実根性を証明する。同著者の“Chow polynomials of rank-uniform labeled posets”, arXiv:2511.13819v2, Theorem 1.8・§ 3の仮定も確認した。そこではUMEL-shellableなuniform、braid、Dowling等の族を扱う。

Precise difference

Current paperは任意matroidへの分解式を、特別なblockのconvolution因子分解とEulerian変換で具体化し、実根性・重根なし・strict interlacingという追加の結論を証明する。rank 6を超え、しかも橋の増加だけでなくtriangle/ K_4 の個数も無制限である。二つのtriangleの直和で、同rankのflatを縮約したatom数が異なるため、既知UMELのuniformityをそのまま適用できない。

AthanasiadisのEulerian変換定理は、 $X^{n-k}(1+X)^k$ の非負結合という入力錐を扱う。今回の出力変数 t にも依存する交代符号の因子積への直接適用は確認できない。theta/bookの漸化式は既知の全flat再帰の特化であり、主たる新規性とは区別する。

Assessment

既知の直和公式だけでは欠けていた保存の議論を、一般の非負パラメータ族に対する同時帰納法で補っているためB。Eulerian実根性、uniformや低rankの実根性、Chow polynomialの γ -positivity自体には新規性を認めない。周辺のEulerian変換研究との全同値定式化を排除したという意味の優先権認定ではない。

2. 正しさ : A

Statement check

ordinaryとaugmented、最大と他のbuilding set、coloop追加と辺の細分を区別する。rank 0の値1は再帰の補助規約であり、主定理は正rankに適用する。rank 1の定数多項式を「負実根を持たない反例」と誤認していない。parallel extensionではflat latticeが不変なので結論を輸送できる。

Proof check

monomial basisによるflat-chain展開から $H=[r]_t + \sum q_r F_r H(M/F)$ が従う。incidence algebraのresolvent表示を独立変数で展開してから代入するため、無限級数の解析的収束は不要である。product latticeではconvolutionの各座標の和が分離し、rank 2 blockは $X((p/2)X - ((p-2)/2)(1+t))$ 、 K_4 は $X(3X - (1+t))(2X - (1+t))/2$ を与える。Eulerian変換で主公式を回収する係数・rankを確認した。

核心のTheorem 9.2は、 Λ の長さに関する帰納法で、全 N について同時に主張することが重要である。因子 i を除いた Q_i について

$$F_{N;\Lambda} = (1 + \lambda_i)F_{N+1;\Lambda \setminus i} - \lambda_i(1+t)Q_i$$

を Q_i の根で評価すると、帰納仮定から符号比が厳密に負になり、 $Q_i < F$ を得る。一方、Eulerian微分漸化式から

$$F_{N+1;\Lambda} = (1 + (N+m)t)F + t(1-t)F' + 2t \sum_i \lambda_i Q_i$$

が成り立つ。 F の負の根 x では $Q_i(x)/F'(x) > 0$ なので、右辺/ F' は $x(1-x) + 2x \sum \lambda_i Q_i/F' < 0$ 。端点・最高係数・次数も合うためsign testがstrict interlacingを与え、循環論法なく帰納が閉じる。 $\lambda_i=0$ でも第一項が厳密に負である。

rank 3 coreでは (p, ℓ, l) の3つの接続数からEulerianの3項式を導く。補助interlacerの条件 $a > c \geq 0$ 、 $T \geq 0$ 、 $S \leq 0$ は C_4 、diamond、 K_4 の表で満たされる。Theorem 10.1で使うEulerian対数微分のCauchy-Schwarz評価は、負の $B=x(1-x)$ を掛ける際の不等号の向きも正しい。theta flatの省略辺数による4場合分け、contractionのrank、bookの2種類のflatからの母関数計算も確認した。

Problems found

FATAL/MAJOR GAP/MINOR GAPは認めなかった。11,462グラフ全件と全Sturm証明書の独立再実行は行っておらず、その全件数を独自の再現結果とはしていない。有限探索で反例が出ないことを一般の実根性の証明にしている点は適切である。

Counterexample / sanity check

F の微分恒等式を $N=1, \dots, 4$ 、 $\Lambda=\emptyset, (0), (1/2, 1), (0, 100, 2/3)$ の16組で厳密に再計算し、Sturm法とgcdで実根数・単純性を確認した。さらにグラフの全辺部分集合からflatを独立生成し、5種類の直和で H を計算した。二triangleは $1+18t+18t^2+t^3$ 、triangleと K_4 は $1+65t+200t^2+65t^3+t^4$ 、二 K_4 は $1+212t+1615t^2+1615t^3+212t^4+t^5$ となり主公式と一致する。

非負パラメータ条件を外すと $F(2; -2)=1+t^2$ で失敗する。二coloopの $H=1+t$ は各 $H=1$ の積と異なる。 C_4 とdiamondは同じ $H=1+7t+t^2$ でも橋追加後の一次係数は18と19に分かれ、入力 H だけの一般的な追加作用素が存在しないという反例も正しい。

Assessment

単なる正係数和では保存できない実根性を、必要な符号・補助interlacerを含めて証明できている。中心定理と追加の証明済み結果をAとする。

3. 修士論文としての妥当性：A

matroid・incidence algebra・Eulerian polynomial・根の配置を結ぶ明快な一般定理があり、既知公式の利用と新しい保存証明を区別して説明している。通常の修論として十分以上である。

4. 博士論文としての妥当性：C

因子挿入の一般定理は良い独自の着想であり、博士論文の一章として評価できる。ただしmatroidへの主要適用は小さなblockの特殊因子分解に依存し、任意のcactus・theta・bookや一般の直和保存を解決しない。多くの再帰式と有限表を、未証明の保存定理の代わりに研究の深さへ加算はできない。中心成果だけで博士号に十分とまでは認定しない。

Important references

- Pielasa, “Decompositions of Chow rings of direct sums of matroids”, arXiv:2511.10746v1 (2025), Theorems 1.2–1.3・1.9。 [原文](#)
- Coron, Ferroni, Li, “Matroid analogues of Gal’s conjecture”, arXiv:2604.04550v3 (2026), Corollary 8.5。 [原文](#)
- Coron, Ferroni, Li, “Chow polynomials of rank-uniform labeled posets”, arXiv:2511.13819v2 (2025), Theorem 1.8、Definition 3.2、Lemma 3.6、§ 3。 [原文](#)
- Athanasiadis, “On the real-rootedness of the Eulerian transformation”, J. London Math. Soc. (2025), e70083. arXiv:2302.00754のTheorem 1.1と入力錐。 [原文PDF](#)
- Brändén–Vecchi, “Chow polynomials of uniform matroids are real-rooted”, Combinatorial Theory 6(1) (2026), article 15, Theorem 1.1、Theorem 2.7。 [出版版PDF](#)

Paper 25. Sharp separation from twelve intersection polynomials: long virtual knots with identical closures

Main result

英語版 § 1–8、Theorems 1.1–1.2・6.1、端点公式・最小性・closure・based matrix・Jones polynomial の証明、Appendix、Referencesを確認した。long virtual knotの12個の交叉多項式F,G,Hをすべて固定して Satoh–Wadaの (V_1, V_2) が異なる対を作る最小交点数上限は2。さらにdegree-two GPVの両値とoriented closureも一致させる最小上限は3で、closureをともにunknotにできる。

無限族 K_m, L_m は $4m$ 交点を持ち、同じclosure・同じ12多項式・同じGPV値 $(-m^2, -m^2)$ を持つが、 $S_m = 1 + t + \dots + t^{m-1}$ として

$$V_1(K_m; t) = V_2(K_m; t) = -t^{m+1} S_m(t)^2,$$

L_m の値はその $t \rightarrow t^{-1}$ 変換となる。交点数 $4m$ とsupporting genus 2は最小値で、Jones polynomialは1。第二種supporting genusについては1以上2以下のみを主張する。

1. 新規性：B

Closest known result

Satoh–Wada, “The V_1 - and V_2 -polynomials of a long virtual knot”, arXiv:2601.15634v1 (2026), Theorems 3.1・4.3、Lemma 4.1。Known result：任意のlong virtual knotに (V_1, V_2) を定義でき、任意のLaurent polynomialの対をあるknotの値として実現できる。符号反転で t を逆数にする対称性も既知である。ただし実現時に12多項式・GPV・closureを同時に指定しない。

Nakamura–Nakanishi–Satoh–Wada, arXiv:2512.05366v1, Theorem 2.3は12多項式の正規化を与え、Theorem 6.2は積式を与える。Turaev, “Virtual strings and their cobordisms”, § 3.3・4.3・6.3–6.4は今回のflat string $\alpha_{2m, 2m}$ とprimitive based matrixによる交点数下界を既に扱っている。

Precise difference

Current paperの仮定は任意の不変量の実現ではなく、明示的なsigned・based Gauss diagramを選び、相手と上記の全データが一致するという連立制約である。その制約の下で V の復元が不可能であることを、sharpな2/3交点の閾値と無限族の閉公式で証明する。既知の任意実現定理からこの同時一致は従わない。flat string、不変量の定義、符号反転則、primitive matrixという手法そのものは改良していない。

Assessment

新規性は既存の比較不変量をすべて同時に固定した分離と、その最小交点数にある。これは明確な新しい比較結果としてB。新しい不変量の構築や、すべての旧来のlong-knot不変量からの独立性を証明したという評価はしない。調査した原文の定理より強い同時制約を確認したのであり、全世界の例の完全な不存在検索を主張していない。

2. 正しさ : A

Statement check

交点数はvirtual crossingを数えない。closureの同値では基点を移動できるが、long knotの同値ではそうできない。この区別が小例と無限族の両方で守られている。F,G,Hの「一致」は12成分のLaurent polynomialの一致であり、 $t=1$ の値のみの一致ではない。Jones=1からunknotとは結論していない。

Proof check

左端の重み $s_i=(2a_i-1)\epsilon_i$ を使う端点和に、linked pairの補正 $(s_i+s_j)/2$ を加えた A_{ij} が交叉数となる。区間の端で $1/2$ を取る式とも一致する。 $d_i=\alpha_i \cdot \text{core}$ に対し $\alpha_i \cdot \beta_j=d_i-A_{ij}$ 、 $\beta_i \cdot \beta_j=A_{ij}-d_i+d_j$ であり、G,Hのwrithe補正には対角項も必要である。原文の正規化と照合した。

2交点例では混合typeのlinked pairだけがVへ寄与する。1交点以下にはその対がない。2交点でGPVを固定すると寄与するV成分と符号積が固定され、同符号なら指数0、異符号なら F_{01} または F_{10} が指数 ± 1 を区別する。したがって追加制約下では2交点以下に分離対がない。3交点のseed Eは端点(1,6),(2,4),(3,5)、type(0,0,1)、符号(+1,-1,+1)で、符号反転 E^* と比較する。closureでは基点をまたぐRIとRIIとともにunknotとなるが、その操作をlong同値として使っていない。

無限族は $q=2m$ として、 $A_i=(i,3q+1-i)$ 、 $B_j=(q+j,4q+1-j)$ 。各packetの前半はtype 0・符号-1、後半はtype 1・符号+1なので全 $s_i=1$ である。同packetの交叉は0、 $d(A_i)=q$ 、 $d(B_j)=-q$ 、 $A_i \cdot B_j=2q+1-i-j$ 。型別にこの一次式を足すと等比和の平方となり、12閉公式を得る。特にHの $6m^2$ 、 $4m^2$ は同packet項とcross項の合計であり省略不能である。各式がreciprocalであるため符号反転でも一致する。 $2q$ だけ基点を移しpacketの添字を逆順にすると相手のcircular diagramとなるので、closureも一致する。

genusの核心はcoreを含む行列である。4次元symplectic spaceで

$$A_i = e_1 + ie_2, \quad B_j = (2q + 1 - j)f_1 - f_2, \quad s = q(f_1 - e_2)$$

と置くと全成分を実現でき、 $\text{rank} \leq 4$ 。一方 $i,j=1,2$ のcross 2×2 小行列の行列式は-1なので $\text{rank}=4$ 。coreとの非零交叉はzero/core行を排除し、 A_i+B_j がcore行になる条件は A_1,A_2 の両方で成立しない。よってprimitiveであり、Turaevの一般定理が $4m$ 交点・ $\text{genus} \geq 2$ を与える。canonical ribbon surfaceのcoreとsmoothing loopsが H_1 の基底なので、同じrank計算がgenus 2の実現も与える。

Jonesの証明では、Gauss arrowの向きだけを変えても符号付きstate sumは変わらないという事実を使う。packet内の隣接した反対符号の対を、向きを合わせてRIIで順に消せるため値は1。これは不変量の計算であり、途中のarrow変更をisotopyと偽っていない。

Problems found

対象原稿にFATAL/MAJOR GAP/MINOR GAPは認めなかった。外部文献の注意点として、確認したTuraev arXiv版 § 4.3(1)には $\min(p,q) \geq 3$ でrank 6という数値がある。しかし同節の交叉成分に $p=q=2m$ を代入すると上のrank 4の因子分解が成立する。この数値記述を根拠に対象原稿を誤りと判定することはできず、対象原稿の独立計算を採用する。

また $V_1'(K_m;1)=-2m^3$ 、 $V_1'(L_m;1)=2m^3$ なので、Satoh-Wada Theorem 7.4によるlong welded Alexanderの $\alpha_2+\alpha_3$ は異なる。「すべての既存long invariantで区別不能」という拡大解釈は偽であるが、原稿自身がその限界を明記している。

Counterexample / sanity check

整数端点式からA、d、12多項式、Vを独立に再構成した。2交点例、上記E/E*、 $m=1, \dots, 8$ の無限族で12成分の一致を確認した。 $p=t+t^{-1}-2$ とするとseedの非零成分は $F_{00}=-p$ 、 $G_{01}=p$ 、 $H_{11}=-p$ のみで、Vは $(-t, 0)$ と $(-t^{-1}, 0)$ 。m=2のVは両成分とも $-t^3-2t^4-t^5$ となった。全8例でcoreを含む行列のrank 4とprimitive性も厳密演算で確認した。原稿の4交点までの全列挙件数そのものは独立再実行しておらず、最小性は上の全場合の数学的議論で認定した。

Assessment

主定理の同時一致、sharpな下界、最小genus、Jonesの各証明は別々の根拠で成立しており、Aとする。数値実験だけに依存する一般化は認めない。

3. 修士論文としての妥当性：A

Gauss diagram、不変量の正規化、交叉形式、surface realizationを具体的な族で統合し、最小性と無限族の両方を完結させている。有限探索を発見・検算に用い、その後一般証明を与える構成も良く、通常の修論として十分以上である。

4. 博士論文としての妥当性：C

joint separationとsharp thresholdは研究論文・博士論文の一章として意味がある。一方、核となる不変量、flat string、based matrixの理論は既存で、独自部分はその符号付けと同時キャンセルの設計に集中する。一般の復元可能性や不変量空間の構造を決定する規模ではなく、この成果を中心として博士号を認定するには研究の厚みが足りない。

Important references

- Satoh–Wada, “The V_1 - and V_2 -polynomials of a long virtual knot”, arXiv:2601.15634v1 (2026), Theorems 3.1 • 4.3 • 7.4, Lemmas 4.1–4.2, § 3の端点公式。 [原文](#)
- Nakamura–Nakanishi–Satoh–Wada, “The intersection polynomials of a long virtual knot I: Definitions and properties”, arXiv:2512.05366v1 (2025), Theorems 2.3 • 6.2。 [原文](#)
- Turaev, “Virtual strings and their cobordisms”, arXiv:math/0311185v5 (2004), § 4.2–4.3 • 6.3–6.4, Lemmas 4.2.1 • 6.2.1。 § 4.3のrankの数値は上記の通り独立に再計算した。 [原文PDF](#)

Paper 26. Virtual tightness on $M(5, 2)$: a lens-space reduction and an explicit double cover

Main result

英語版 § 1–9、Theorem 1.1、Lemma 6.1、Proposition 6.2、手術図・群・peripheral計算・被覆の延長・全被覆の証明、Computational appendix、Referencesを確認した。Min–Noninoの指定する向きのWhitehead filling $M(5, 2)$ は $L(10, 3)$ である。3個のpositive cooriented tight contact structureのうち、 Ψ 型 ξ_2 は $c_1=0$ で、二重被覆 $L(5, 3)$ 上でovertwistedになる。他の二つの Φ 型はuniversally tight。 ξ_2 は次数 $2, 5, 10$ のすべての非自明connected coverでovertwistedになり、最小検出次数は2である。

この多様体はsphericalであってhyperbolicではない。原稿はこのspecializationを既知定理の帰結と明記し、独立した新定理の主張をしていない。

1. 新規性：D

Closest known result

Kadokami–Maruyama–Shimozawa, “Lens surgeries along the n -twisted Whitehead link”, arXiv:1205.2311 (2012), Theorem 1.2(B)(5)と § 5。Known result：同じhandednessのWhitehead linkで第二係数2、第一係数 p_1/q_1 、 $|p_1 - 4q_1| = 1$ なら、正手術規約で $L(2p_1, 8q_1 - p_1)$ を得る。 $p_1=5, q_1=1$ が本例である。

Honda, “On the classification of tight contact structures I”, Geometry & Topology 4 (2000), Theorem 2.1とProposition 5.1(3)。Known result： $-p/q = [r_0, \dots, r_k]$ 、全 $r_i \leq -2$ のときtight構造数は $\prod |r_i + 1|$ で、全てLegendrian surgery chainで実現される。 $q \neq p-1$ ならuniversally tightなものは2個。Fossati, arXiv:1906.09162v3 (2020), Theorem 5は $q < p < dq$ を満たすdegree d coverで、virtually overtwistedな構造がovertwistedになることを証明する。

Precise difference

Current paperは $p=10, q=3$ の分類をMin–Noninoの Ψ/Φ の記号へ移し、Chern classで対応を特定する。Fossatiにはorientedに同値な $L(10, 7)$ を使えば $7 < 10 < 2 \cdot 7$ で二重被覆が直接含まれ、 $d=5$ も含まれる。仮定の弱化・結論の強化・新しい一般的被覆判定法はない。peripheral presentation、coreの巻きほどこき次数、Chern residueを実際に計算する説明上の追加である。

Assessment

新規性D。Min–Noninoの一般的下界がこの場合に無効であることは、旧来のlens-space理論でも未解決という意味ではない。原稿自身が主張を適切に限定しているため、誤った新規性主張としてEにする理由もない。

2. 正しさ：A

Statement check

Whitehead linkの鏡像、contact係数とsmooth係数、lens spaceの向き、branched/unbranchedを区別している。KMSのhandednessは正の1手術でright-handed trefoilを得るものとして照合した。lensの規約変更で $L(10, 7)$ を経ても $3 \cdot 7 \equiv 1 \pmod{10}$ なので同じoriented型となる。単に $|H_1|=10$ や数値的volume ≈ 0 でlens spaceを同定していない。

Proof check

KMSの手術定理がsmooth同定を与える。別の群検算では、 $c=[x,y]$ を保存するbased twists $A(x)=xy^{-1}, A(y)=y, B(x)=x, B(y)=yx$ から $\phi=ABA^4$ を求め、 $\phi(x)=x^{-3}y^{-1}, \phi(y)=yxy^{-1}$ となる。filling relation $t^2c=1$ を含む presentationから $y=txt, tx^2t=x^{-3}$ が従う。 $z=tx^2$ と置くと $z^2=x^{-1}, x=z^{-2}, t=z^5, y=z^8, z^{10}=1$ 。逆代入でも全関係が成立して z を回収するため、単なるcyclic quotientではなく $\pi_1 \cong Z/10$ を示す。元の $H_1=Z/5(\mu) \oplus Z/2(\nu)$ とも一致する。

Min-Nonino出版版Proposition 3.6のChern計算と§5の ξ_2 の定義を確認した。 $r=2$ の Ψ 図式は全rotationが0なので $c_1(\xi_2)=0$ 。図式は $\pm 3\mu$ 。負のchain $-10/3=[-4,-2,-2]$ ではfirst-meridianを h_1 として $h_2=4h_1, h_3=7h_1, 10h_1=0$ 。rotation $(-2,0,0), (0,0,0), (2,0,0)$ に対応するChern classは $-2g, 0, 2g$ で互いに異なり、zero-classの構造は唯一である。正のcontact surgeryをStein handleと誤用せず、元の図式はMin-Noninoのcontact ± 1 公式、負chainはGompf Proposition 2.3で扱っている。

二重被覆は S^3 の自由 $Z/10$ 作用 $(z_1, z_2) \mapsto (\zeta z_1, \zeta^3 z_2)$ のindex-two subgroupにより $L(5,3) \rightarrow L(10,3)$ となる。唯一のindex-two subgroupなので $\chi(\mu)=0, \chi(\nu)=1$ の被覆である。外部基底で境界写像は $\text{diag}(2,1)$ 、filling meridian $(2,1)$ はupstairsの原始元 $(1,1)$ であり、intrinsic基底では $\text{diag}(1,2)$ となる。したがって $D^2 \times S^1$ の $(w,u) \mapsto (w,u^2)$ として非分岐で延長できる。

核心のLemma 6.1では $-5/3=[-2,-3]$ よりtight構造がちょうど2個。rotationは $(0, \pm 1)$ 、cokernelは $k_2=2k_1, 5k_1=0$ で、Chern classは $\pm 2k_1 \neq 0$ となる。他方 $c_1(\pi^* \xi_2) = \pi^* c_1(\xi_2) = 0$ 。Hondaの分類が全てのtight構造を尽くすので、pullbackはovertwistedである。「contact invariantが0ならovertwisted」という偽の逆命題は使わない。

二つの Φ 型はHondaの同符号の2構造なのでuniversally tight。非自明被覆は2,5,10のみで、degree 2のovertwisted diskはuniversal cover S^3 へ持ち上がる。degree 5のtotal space RP^3 の唯一のtight構造はuniversally tightだから、degree 5 pullbackがtightなら S^3 上もtightとなって矛盾する。これで「すべての非自明connected cover」の主張まで閉じる。

$N_2(1), N_2(\infty)$ のdividing slopeをintrinsic座標へ直すと、両方ともslope -1 のstandard solid torusである。二重被覆後もdividing curveは2本、meridianとの交点数1。したがって局所部分はtightのままであり、圧縮可能な分解torusにincompressible gluing theoremを適用してはいけないという説明も正しい。

Problems found

FATAL/MAJOR GAP/MINOR GAPは認めなかった。overtwisted diskのパラメータ表示やbypass列は与えないが、tight構造の完全分類による不存在証明はdiskの存在を厳密に含意するため、これはgapではない。手術diagramを移す際の符号全反転もzero/nonzero判定を変更しない。

原稿末尾の最近の背景についても、Baldwin-Sivek-Zung arXiv:2505.21113v2 Theorem 1.4の原文を確認した。hyperbolic L-space knotのgenus g と $r > 4g$ の手術にuniversally tight構造があるため、古いhyperbolic予想を未解決のまま新規性の根拠にしていない。これは本例の証明には不要な背景である。

Counterexample / sanity check

free-group wordとして ABA^4 とcommutator保存を独立計算した。負chainのSmith normal formはそれぞれ $\text{diag}(1,1,10), \text{diag}(1,5)$ 、Chern residuesはbaseが $8, 0, 2 \bmod 10$ 、upstairsが $3, 2 \bmod 5$ 。linking pairingも元の対角行列 $\text{diag}(5,2)$ の $1/5 + 1/2 = 7/10$ と、 Q_{10}^{-1} の $-3/10$ が $\bmod Z$ で一致する。境界行列のdetとmeridianの原始性を厳密に検算した。

coreのclassは z^5 でorder 2。cover degree $d=1,2,5,10$ でcore一本当たりの次数は $d/\gcd(d,5)=1,2,1,2$ 、本数は $1,1,5,5$ となる。大きい被覆ならcoreも大きくunwrapされるという推測はこの例で否定される。SnapPyの数値volumeやrecognitionは独立再実行しておらず、証明には用いない。

Assessment

外部定理の完全性、手術規約、被覆の充填への延長、Chern classの自然性を満たしており、主定理と証明をAとする。既知結果の帰結であることは正しさの減点理由ではない。

3. 修士論文としての妥当性：B

新定理はないが、接触手術・convex torus・lens-space分類・被覆・Chern classを一つの例に正確に結び付けている。抽象的な既知結果を実際のperipheral計算と有限被覆の全リストまで具体化し、誤用しやすい議論も説明するため、通常の数学修論として十分である。優れた一般化を含む研究型修論と同じAまでは付けない。

4. 博士論文としての妥当性：D

中心結論が既知のlens-space手術・tight分類・被覆定理の直接のspecializationで、独立した新しい数学を供給しない。専門的技術を理解した正しい解説として価値はあるが、これを中心成果とする博士研究の新規性・深さは不足する。

Important references

- Min–Nonino, “Tight contact structures on a family of hyperbolic L-spaces”, Geometriae Dedicata 220 (2026), article 45, Theorems 1.2・1.6–1.7, Corollary 1.4, Proposition 3.6, § 5, Figures 8・10・31。2026年出版版を使用。 [出版版](#)
- Kadokami–Maruyama–Shimozawa, “Lens surgeries along the n -twisted Whitehead link”, arXiv:1205.2311 (2012), Theorem 1.2(B)(5), § 5とFigure 4。 [原文PDF](#)
- Honda, “On the classification of tight contact structures I”, Geometry & Topology 4 (2000), 309–368, Theorem 2.1, § 4.6.2, Proposition 5.1(2)–(3)。参照PDFは2001年erratumも収録するが今回その修正対象のouter-layer一意性は使用しない。 [原文PDF](#)
- Fossati, “Topological constraints for Stein fillings of tight structures on lens spaces”, arXiv:1906.09162v3 (2020), Theorem 5, § 4の証明。 [原文PDF](#)
- Gompf, “Handlebody construction of Stein surfaces”, Annals of Mathematics 148 (1998), 619–693, Proposition 2.3。 [原文PDF](#)
- Baldwin–Sivek–Zung, “Pseudo-Anosov flows on hyperbolic L-spaces”, arXiv:2505.21113v2 (2025), Theorem 1.4。 [原文](#)

全体総括

以下は4項目の判定を比較するための総括であり、独立した採点軸ではない。新規性はBが15本、Cが7本、Dが4本。正しさは確認した主定理と核心証明について全26本をAとした。修士論文はAが23本、Bが3本。博士論文はBが2本、Cが18本、Dが6本で、Aと認定したものはない。

新規性が特に高かった論文

今回のB判定の中では、Paper 11と16が、特定の計算例を超えた一般的方法と全パラメータの分類を組み合わせている。Paper 11はdiagonal nilmanifoldの高次boundaryをsquarefree idealへ還元し、conic配置と正確なp-Kähler閾値を結ぶ。Paper 16は閉路数に上限のないcactusの全係数Pareto frontierを決め、再利用できるblock集中の恒等式を与える。ただしPaper 16の2019・2025年の近接原文については詳細評価に記した未確認が残り、歴史的先取権を確定したとは扱わない。

Paper 18の最小local sprayの分類、Paper 21のdepth-three formal空間と解析的像の区別、Paper 24の非負パラメータ族のEulerian変換とstrict interlacingも、証明上の独自の着想がある。Paper 5-7のRC曲率、Paper 8の相対torus、Paper 15のRobin極値、Paper 23のrank-four Chern比、Paper 25のjoint separationにも明確な追加結果を認めた。これらをAにしなかったのは、数学的正しさを疑ったためではなく、確認できた範囲での一般性・研究の広がり・既存理論への依存を考慮したためである。

Paper 2・3・9・26は既知の理論から本質部分が従い、新規性Dとした。Paper 4・10・13・14・17・19・20は具体化、限定された改良、既知手法の精密化としてC。既存研究の言い換えと小さな新結果を一律に同じ判定にはしていない。

数学的正しさ・完成度が特に高かった論文

全26本について、記載した検証範囲では主定理を否定する反例や本質的な証明欠落を認めなかった。特にPaper 1・11・15・16・18・24では一般証明と明示的な境界例・等号・係数検算が対応しており、論理を追やすい。Paper 22の整数性と整除性、Paper 23のincidence counts、Paper 25の交叉行列も独立した厳密演算と整合した。

Paper 26は正しさと新規性の区別が明確な例である。既知lens分類を使って全てのtight構造を尽くしたうえで、Chern classの自然性から特定の被覆のovertwistednessを証明している。新規性Dでも正しさAとなる。

全件Aは、全引用文献の全証明や全計算付録を独立に再現したという意味ではない。例えばPaper 16の全グラフ列挙、Paper 22の全ての高weight表、Paper 24の全グラフ証明書、Paper 25の全低交点表は全件再実行していない。代わりに一般定理の核心と代表的な厳密計算を検証した。個々の未確認範囲は該当する詳細評価で追跡できる。

修士論文として特に良い論文

Paper 11・16は一般的方法、分類、具体例が一体となり、研究型の良い修論として特に強い。Paper 1・5-8・15・18・21-25も、それぞれ明確な数学的問いに対して非自明な成果と証明をまとめている。これらの博士評価がCである場合も、通常の修論としての不足を意味しない。

新規性DのPaper 2・9も高度な既知理論の統合と具体的帰結に十分な内容があり、修士評価はAとした。

Paper 3・20・26は、中心的な議論が比較的短い、または特殊化に集中する点を考慮してBとしたが、通常の数学修論としては十分である。英日併記による見かけの長さは、これらの判断の根拠に含めていない。

博士論文水準と評価できる論文

該当するのはPaper 11とPaper 16で、いずれもBである。

- Paper 11：一般のdiagonal presentationに対する還元、全 p の存在判定、conicの幾何学、rank条件の限界を示す無限族が有機的につながる。独自の証明方法を中心として博士論文を構成し得る。
- Paper 16：全cactusの係数分類、固定parityの一意最小元、sharp incidence energy、再利用できる正多項式の恒等式がまとまる。確認した先行結果との差の範囲で博士論文の中心成果として妥当。ただし近接する未取得原文の先取性照合は残る。

他のB新規性の論文でも、短い独自の着想や有用な専門的結果はあるが、一つの博士研究の中心としての厚みまでは認めなかった。特に関連するPaper 11/12、13/14等の重なる結果を二重に数えず、各原稿単体を中心とするという依頼の基準で評価した。複数原稿を合わせた博士論文の評価は今回行っていない。

重大な誤りがある論文

本査読でCorrectness D/EまたはFATAL/MAJOR GAPと認定した対象論文は、該当なし。

ただし、正しい主張を誤った方向へ拡張すると失敗する例はある。Paper 24の非負パラメータ条件を外すと $1+t^2$ が現れる。Paper 25はすべての旧long-knot不変量で区別不能という主張ではなく、degree-threeの値は実際に異なる。Paper 26の結論は指定したspherical fillingのもので、hyperbolic族一般へ広げられない。これらは対象原稿が適切に限定しているため、原稿そのものの誤りとはしなかった。

引用原文も無条件には採用しなかった。Paper 25で使用するTuraevの旧arXiv版には、記載された交叉行列と整合しないrankの数値がある。対象原稿のrank 4の独立計算を検証することで、誤った引用数値に引きずられずにgenus 2の結論を認定した。

参考文献

対象26本のPDF URLは冒頭の固定一覧に記載した。以下は各詳細評価で使用した比較文献の索引である。同じURLはまとめ、関連するPaper番号を付す。特定の定理の適用条件・原文の確認状況・別の引用箇所は各PaperのImportant referencesを参照されたい。書誌だけを照合した文献は、その未確認の表示を保持した。

修士論文の比較資料：Masataka Iwai, “Multiplier ideal sheaves and local geodesics for plurisubharmonic functions”, 指定の9ページ原稿。Theorems 1.1・1.3、Corollary 1.2、§ § 3–5。PDF。

- [R01] [Hisamoto-Iwai](#), 上記論文、Theorem 1.1、§ 7.2 Example 7.5末尾（閲覧版p.50）。関連Paper：1。
- [R02] [Freyer-Henk-Kipp](#), “Affine subspace concentration conditions for centered polytopes”, Mathematika 69 (2023), 458–472, Theorems 1.1, 1.2(i)。関連Paper：1。
- [R03] [Blum-Jonsson](#), “Thresholds, valuations, and K-stability”, Adv. Math. 365 (2020), 107062, Corollary 7.16。関連Paper：1。
- [R04] Cox-Little-Schenck, “Toric Varieties”, AMS, 2011。degree-volumeおよび局所格子指数の標準的背景。exact reference location not verified。関連Paper：1。
- [R05] [Ejiri-Iwai-Matsumura](#), 上記論文、arXiv v1 Theorems 1.5, 1.7, 4.6。出版先J. Algebraic Geom. 32 (2023), 477–517。出版版の全番号はexact reference location not verified。関連Paper：2。
- [R06] [Cacciola-Di Biagio](#), “Asymptotic base loci on singular varieties”, Corollary 5.3, Lemma 5.4 (v2 p.12)。関連Paper：2。
- [R07] [Ambro](#), “The moduli b-divisor of an lc-trivial fibration”, Compos. Math. 141 (2005), 385–403, Proposition 4.4, Theorem 4.7。関連Paper：2, 3。
- [R08] [Fujino](#), “On Kawamata’s theorem”, Theorem 1.1。関連Paper：2。
- [R09] [Ejiri-Gongyo](#), “Nef anti-canonical divisors and rationally connected fibrations”, Theorem 1.2。関連Paper：2。
- [R10] [Birkar-Hacon](#), “Variations of generalised pairs”, Examples 1.1, 3.1。参照版で番号を本文確認。関連Paper：3。
- [R11] [Esposito-Mistretta](#), “On semiample vector bundles and parallelizable compact complex manifolds”, Theorem 3.10。関連Paper：3。
- [R12] [Gomi](#), “Magnitude homology of geodesic space”, 2025改訂版, Corollary 3.15、Assumption 4.8、Theorem 5.22 (pp.37–38)。関連Paper：4, 17。
- [R13] [Leinster-Shulman](#), “Magnitude homology of enriched categories and metric spaces”, Algebr. Geom. Topol. 21 (2021), 2175–2221。定義の背景。exact reference location not verified。関連Paper：4。
- [R14] 対象PDF § § 4–6の格子計算は本報告の独立検算により確認した。その他のbibliography全件を確認済みとはしていない。関連Paper：4。
- [R15] [Yang](#), “RC-positivity, rational connectedness and Yau’s conjecture”, Cambridge J. Math. 6 (2018), 183–212, Theorem 3.6。web表示取得に失敗したがPDFを直接取得し本文を確認した。関連Paper：5, 6。
- [R16] [Li-Zhang-Zhang](#), “Mean curvature positivity and rational connectedness”, 2024改訂版, Proposition 3.6、Theorem 1.7。関連Paper：5。

- [R17] [Wu](#), *Uniform weak RC-positivity and rational connectedness*, 2026, Theorems 3, 7。 関連Paper : 5, 6。
- [R18] [Busé-Jouanolou](#), *A computational approach to the discriminant of homogeneous polynomials*, Propositions 4.7(i), 4.13。 PDF本文を直接取得して照合。 関連Paper : 6。
- [R19] V. Datar, H. Seshadri, [原文](#)、[Theorems 1.1, 5.2 and Corollary 5.3](#), arXiv:2608.15850v1 (2026)。 関連Paper : 7。
- [R20] H. Feng, K. Liu, X. Wan, [Compact Kähler manifolds with positive orthogonal bisectonal curvature](#), Math. Res. Lett. 24 (2017), 767–780, Theorem 0.1。 関連Paper : 7。
- [R21] N. Yotsutani, B. Zhou, [Relative algebro-geometric stabilities of toric manifolds](#), 2023訂正版、Definitions 1.7–1.8、Theorems 1.9, 1.11。 関連Paper : 8。
- [R22] R. Seyyedali, [Relative Chow stability and extremal metrics](#), 2017, Theorem 1.1。 関連Paper : 8。
- [R23] Y. Sano, C. Tipler, [A moment map picture of relative balanced metrics on extremal Kähler manifolds](#), Theorem 1.1 ; 刊行版J. Geom. Anal. 31 (2021), 5941–5973。 関連Paper : 8。
- [R24] C. Tipler, [Relative Chow stability and optimal weights](#), Theorem 3.4。 関連Paper : 8。
- [R25] N. Istrati, [Vaisman manifolds with vanishing first Chern class](#), arXiv v1のLemma 4.4、Theorem 5.3、Corollaries 5.10–5.11、Examples 7.2–7.4 ; 出版情報。 関連Paper : 9。
- [R26] L. H. S. Gomes, [On the classification of Vaisman manifolds with vanishing first basic Chern class and large first Betti number](#), 2026。 最新本文を入手し、主結果・位置づけを比較した。中心構造の適用は上記Istrati版に依存する。 関連Paper : 9。
- [R27] L. Ornea, M. Verbitsky, V. Vuletescu, [Blow-ups of locally conformally Kähler manifolds](#), Theorem 2.8、Lemma 3.4。 関連Paper : 10。
- [R28] L. Meng, [Morse–Novikov cohomology for blow-ups of complex manifolds](#), Pacific J. Math. 320 (2022), 365–390、確認したv6のTheorem 1.2。 関連Paper : 10。
- [R29] The Stacks Project, [Lemma 33.44.15, Tag 0B5Y](#)。relative amplenessへの移行は標準のfibrewise ampleness定理を用いる。原稿のEGA III 4.7.1という正確な引用位置は本査読では未照合 (exact reference location not verified) 。 関連Paper : 10。
- [R30] E. Lo Giudice, A. Mainenti, [p-Kähler structures on nilmanifolds and holomorphically parallelizable manifolds](#), Proposition 2.15、Theorem 5.4、Lemma 5.7。 関連Paper : 11, 12。
- [R31] L. Alessandrini, G. Bassanelli, [Compact p-Kähler manifolds](#), Geom. Dedicata 38 (1991), 199–210。Theorem 3.2の帰属・内容は上記2026年原稿経由で確認し、1991年全文の当該番号を直接照合したわけではない。 関連Paper : 11, 12。
- [R32] E. Lo Giudice, [p-Kähler structures on compact complex manifolds](#), 2025。比較対象の一般的伝播結果であり、本稿のcentral-factor還元を代替するものではない。 関連Paper : 11。
- [R33] M. Fathi, I. Gentil, J. Serres, [Stability estimates for the sharp spectral gap bound under a curvature-dimension condition](#), Ann. Inst. Fourier 74 (2024), 2425–2459、§ 4、Lemmas 4.1–4.2、Theorem 4.3。 関連Paper : 13, 14。

- [R34] J. Bertrand, M. Fathi, [Stability of eigenvalues and observable diameter in \$RCD\(1, \infty\)\$ spaces](#), Theorems 1.2–1.3、 § 3。 関連Paper : 13, 14。
- [R35] L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré, [Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below](#), Theorems 6.2, 6.8 (本文取得・照合)。 関連Paper : 13。
- [R36] G. Savaré, [Self-improvement of the Bakry–Émery condition and Wasserstein contraction of the heat flow in \$RCD\(K, \infty\)\$ metric measure spaces](#), Lemma 3.2、 Theorem 3.4、 式(3.16)を原文確認。 関連Paper : 14。
- [R37] F. Galaz-García, M. Kell, A. Mondino, G. Sosa, [On quotients of spaces with Ricci curvature bounded below](#), Theorem 1.1、 Corollary 1.2。 関連Paper : 14。
- [R38] A. Savo, [Optimal eigenvalue estimates for the Robin Laplacian on Riemannian manifolds](#), Theorem 1、 § 4.1 (仮定・結論・Green formulaによる証明を確認)。 関連Paper : 15。
- [R39] D. Chen, K. Wang, A. Zhu, [Faber-Krahn inequalities for weighted Robin eigenvalues](#), 2026、 § 1、 式(1.1)–(1.2)。 本査読では同一密度の作用素と最適化変数の比較に使用。 関連Paper : 15。
- [R40] H. Lu, Z. Zhu, [On the Boundary of Incidence Energy and Its Extremum Structure of Tricycle Graphs](#), Front. Phys. 8 (2020), 208、 Lemma 2.2、 Theorems 3.11, 4.1, 4.2。 PDFでも数式を確認。 関連Paper : 16。
- [R41] W.-H. Wang, L. Zhong, L.-J. Zheng, [The signless Laplacian coefficients and the incidence energy of the graphs without even cycles](#), LAA 563 (2019), 476–493。 書誌情報は後続一次論文で照合、原定理の exact reference location not verified。 関連Paper : 16。
- [R42] Z. Du, [When \(signless\) Laplacian coefficients meet matchings of subdivision](#), European J. Combin. 124 (2025), 104087。 近接文献の未確認事項を特定するために掲載；原定理の exact theorem number not verified。 関連Paper : 16。
- [R43] R. Kaneta, M. Yoshinaga, [Magnitude homology of metric spaces and order complexes](#), Bull. Lond. Math. Soc. 53 (2021), 893–905、 Definition 5.1、 Theorem 5.2。 関連Paper : 17。
- [R44] F. Forstnerič, F. Lárusson, [Every projective Oka manifold is elliptic](#), 2026、 Theorem 1.1、 Problem 3.2、 Proposition 3.3。 関連Paper : 18。
- [R45] The Stacks Project Authors, [Cohomology of projective space](#), § 30.8、 Lemma 30.8.1。 Euler sequenceを使う本稿の二つの cohomology 計算と照合。 関連Paper : 18。
- [R46] B.-Y. Chen, [Parameter dependence of the Bergman kernels](#), 2015、 Definition 1.1、 Theorem 1.1を原文確認。 関連Paper : 19。
- [R47] G. Hosono, [The optimal jet \$L^2\$ extension of Ohsawa–Takegoshi type](#), Nagoya Math. J. 239 (2020), 153–172、 Theorem 1.1、 Condition 2.1。 関連Paper : 19。
- [R48] S. Bao, Q. Guan, Z. Yuan, [A note on \$\xi\$ -Bergman kernels](#), Theorem 1.6とその直前の定義・仮定。 関連Paper : 19。
- [R49] I. Arzhantsev, K. Shakhmatov, [Some finiteness results on triangular automorphisms](#), Results Math. 77 (2022), 75、 Lemma 1。 関連Paper : 20。

- [R50] M. Abate, A. Abbondandolo, P. Majer, [Stable manifolds for holomorphic automorphisms](#), J. reine angew. Math. 690 (2014), 217–247、 § 6、 Lemma 6.4と条件(a),(b)。 関連Paper : 20。
- [R51] H. Peters, E. F. Wold, [Non-autonomous basins of attraction and their boundaries](#), J. Geom. Anal. 15 (2005), 123–136、 § 4、 Theorem 6。 関連Paper : 20。
- [R52] Hara, Sakugawa, Tasaka, “Symmetric multiple Eisenstein series”, 2026, arXiv:2601.13626v1, Proposition 3.9、 Theorem 1.2、 Lemma 6.5、 § 6.3、 Table 4。 [原文](#) 関連Paper : 21。
- [R53] Hirose, Sato, Tasaka, “Eisenstein series identities based on partial fraction decomposition”, Ramanujan J. 38 (2015), 455–463。 arXiv:1402.1585v1のCorollary 2とその証明を確認。 [原文PDF](#) 関連Paper : 21。
- [R54] Reutenauer, Free Lie Algebras, Oxford, 1993。 PBW/primitive elementの標準事項として用いる。書籍内のexact reference location not verified。本文のHilbert級数は独立に導出した。 関連Paper : 21。
- [R55] Bachmann and Risan, “Formal finite multiple zeta values”, arXiv:2608.15480v1 (2026), § 5.3、 Lemma 5.14、 Proposition 5.15、 Conjecture 5.16、 Theorem 5.17。 Main Theorems C,Dによるspanningと有限値への写像も確認。 [原文](#) 関連Paper : 22。
- [R56] Gangl, Kaneko, Zagier, “Double zeta values and modular forms”, Automorphic Forms and Zeta Functions, World Scientific (2006), 71–106。 著者版のTheorem 2、 式(7)、 § 4 Proposition 3と証明、 Theorem 3。 [著者版PDF](#) 関連Paper : 22。
- [R57] Cheng–Lin, “Inequalities for Chow Polynomials and Chern Numbers of Matroids”, arXiv:2603.21680v3 (2026), Corollary 4.15、 Remark 4.16。 [原文](#) 関連Paper : 23。
- [R58] Cheng, “Tangent classes for matroid building sets”, arXiv:2606.22650v2 (2026), Definition 3.3、 式(3.5)–(3.6)、 Corollary 4.23。 [原文](#) 関連Paper : 23。
- [R59] Pielasa, “Decompositions of Chow rings of direct sums of matroids”, arXiv:2511.10746v1 (2025), Theorems 1.2–1.3 · 1.9。 [原文](#) 関連Paper : 24。
- [R60] Coron, Ferroni, Li, “Matroid analogues of Gal’s conjecture”, arXiv:2604.04550v3 (2026), Corollary 8.5。 [原文](#) 関連Paper : 24。
- [R61] Coron, Ferroni, Li, “Chow polynomials of rank-uniform labeled posets”, arXiv:2511.13819v2 (2025), Theorem 1.8、 Definition 3.2、 Lemma 3.6、 § 3。 [原文](#) 関連Paper : 24。
- [R62] Athanasiadis, “On the real-rootedness of the Eulerian transformation”, J. London Math. Soc. (2025), e70083。 arXiv:2302.00754のTheorem 1.1と入力錐。 [原文PDF](#) 関連Paper : 24。
- [R63] Brändén–Vecchi, “Chow polynomials of uniform matroids are real-rooted”, Combinatorial Theory 6(1) (2026), article 15, Theorem 1.1、 Theorem 2.7。 [出版版PDF](#) 関連Paper : 24。
- [R64] Satoh–Wada, “The V_1 - and V_2 -polynomials of a long virtual knot”, arXiv:2601.15634v1 (2026), Theorems 3.1 · 4.3 · 7.4、 Lemmas 4.1–4.2、 § 3の端点公式。 [原文](#) 関連Paper : 25。
- [R65] Nakamura–Nakanishi–Satoh–Wada, “The intersection polynomials of a long virtual knot I: Definitions and properties”, arXiv:2512.05366v1 (2025), Theorems 2.3 · 6.2。 [原文](#) 関連Paper : 25。

- [R66] Turaev, “Virtual strings and their cobordisms”, arXiv:math/0311185v5 (2004), § 4.2–4.3 • 6.3–6.4, Lemmas 4.2.1 • 6.2.1. § 4.3のrankの数値は上記の通り独立に再計算した。[原文PDF](#) 関連Paper : 25。
- [R67] Min–Nonino, “Tight contact structures on a family of hyperbolic L-spaces”, Geometriae Dedicata 220 (2026), article 45, Theorems 1.2 • 1.6–1.7, Corollary 1.4, Proposition 3.6, § 5, Figures 8 • 10 • 31。2026年出版版を使用。[出版版](#) 関連Paper : 26。
- [R68] Kadokami–Maruyama–Shimozawa, “Lens surgeries along the n -twisted Whitehead link”, arXiv:1205.2311 (2012), Theorem 1.2(B)(5), § 5とFigure 4。[原文PDF](#) 関連Paper : 26。
- [R69] Honda, “On the classification of tight contact structures I”, Geometry & Topology 4 (2000), 309–368, Theorem 2.1, § 4.6.2, Proposition 5.1(2)–(3)。参照PDFは2001年erratumも収録するが今回その修正対象のouter-layer一意性は使用しない。[原文PDF](#) 関連Paper : 26。
- [R70] Fossati, “Topological constraints for Stein fillings of tight structures on lens spaces”, arXiv:1906.09162v3 (2020), Theorem 5, § 4の証明。[原文PDF](#) 関連Paper : 26。
- [R71] Gompf, “Handlebody construction of Stein surfaces”, Annals of Mathematics 148 (1998), 619–693, Proposition 2.3。[原文PDF](#) 関連Paper : 26。
- [R72] Baldwin–Sivek–Zung, “Pseudo-Anosov flows on hyperbolic L-spaces”, arXiv:2505.21113v2 (2025), Theorem 1.4。[原文](#) 関連Paper : 26。