

RC-POSITIVITY OF INDUCED SYMMETRIC POWERS AND POSITIVE MEAN CURVATURE

chatGPT 6 Astra

ABSTRACT. For a fixed smooth Hermitian holomorphic vector bundle, we characterize RC-positivity of an induced symmetric power of degree at least two by positive Chern mean curvature for a suitable background Hermitian metric. For a rank- r bundle, the same condition is detected by the r -fold orthogonal sum. A positive-semidefinite alternative and a symmetric tensor encoding prove the converse to the known positive-mean-curvature implication. We realize the sharpness of the number of copies on $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k)^{\oplus r}$: its prescribed metric has RC-positive sums of fewer than r copies, but the r -fold sum and every induced symmetric power of degree at least two fail at a point. The bundles also admit other Griffiths-positive metrics. The geometric application is a reformulation of an existing rational-connectedness criterion. Bibliographic novelty of the fixed-metric characterization and sharpness construction remains subject to further verification.

This note was generated by ChatGPT 6. Iwai has NOT verified any of its mathematical content. It may therefore contain mathematical errors and should be read with caution. A Japanese version is provided below.

1. INTRODUCTION

The curvature of a tensor power is a sum of curvature operators. For uniform RC-positivity one tangent direction makes every summand positive. For RC-positivity the direction may depend on the vector in the fiber, so this argument is unavailable. This note identifies exactly the additional condition needed for an *induced* symmetric or tensor power to remain RC-positive. Throughout, the metric on the original bundle is fixed.

Yang proved that positive mean curvature implies RC-positivity of induced tensor and exterior powers [Yan18, Theorem 3.6]. We prove a converse: RC-positivity of just the induced symmetric square already forces positive mean curvature for a suitable background Hermitian metric. We also construct compact examples showing that RC-positivity of the original metric alone does not suffice. The examples occur in every rank at least two, on split ample bundles over projective space.

Write $h_{\text{sym},m}$ for the restriction of $h^{\otimes m}$ to the parallel symmetric subbundle $\text{Sym}^m E \subset E^{\otimes m}$. Write $h^{\oplus q}$ for the orthogonal sum metric, and $K_{\gamma,h} = \text{tr}_{\gamma} R^h$ for the Chern mean curvature endomorphism. The background metric γ and the bundle metric h are independent.

Date: September 8, 2026.

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 32L05; Secondary 53C55, 14M22.

Key words and phrases. Chern curvature, RC-positivity, symmetric powers, mean curvature, Hermitian metrics.

Theorem 1.1 (Detection by a symmetric power). *Let X be a smooth compact complex manifold of positive dimension, and let (E, h) be a smooth Hermitian holomorphic vector bundle of rank $r \geq 1$. The following conditions are equivalent.*

- (1) $(\text{Sym}^m E, h_{\text{sym},m})$ is RC-positive for some $m \geq 2$.
- (2) $(E^{\otimes m}, h^{\otimes m})$ is RC-positive for some $m \geq 2$.
- (3) $(E^{\oplus r}, h^{\oplus r})$ is RC-positive.
- (4) There is a smooth Hermitian metric γ on X such that $K_{\gamma,h} > 0$ everywhere.

If these conditions hold, all positive tensor powers, all positive symmetric powers, all nonzero exterior powers, and every finite orthogonal sum of copies of (E, h) are RC-positive with their induced metrics. The equivalence also holds at each individual point, with condition (4) replaced by the existence of a positive definite contravariant Hermitian form at that point.

The implication from (4) to tensor and exterior powers is the cited result of Yang. The reverse implication uses a specific symmetric tensor that records an arbitrary positive semidefinite endomorphism of the fiber. Convex separation then produces a common *weighted trace*, rather than a common tangent direction. The construction of γ uses a partition of unity on inverse metrics; it does not require a globally chosen tangent vector field. It does not assert that γ is Kähler.

Theorem 1.2 (Sharpness on a compact projective base). *For each integer $r \geq 2$, there are an integer $k > 0$ and a smooth Hermitian metric h on*

$$E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k)^{\oplus r}$$

with the following properties.

- (1) $(E^{\oplus q}, h^{\oplus q})$ is RC-positive everywhere for $1 \leq q < r$.
- (2) At a point p , $(E^{\oplus r}, h^{\oplus r})$ is not RC-positive. For every $m \geq 2$, neither $(\text{Sym}^m E, h_{\text{sym},m})$ nor $(E^{\otimes m}, h^{\otimes m})$ is RC-positive at p .
- (3) The curvature of $(\det E, \det h)$ is negative definite at p . In particular no background Hermitian metric has $K_{\gamma,h} > 0$ everywhere.

The underlying bundle E also admits a different Griffiths-positive metric. Thus these are obstructions for the specified induced metrics, not obstructions to the existence of other positive metrics on the bundles.

Li–Zhang–Zhang [LZZ, Proposition 3.6] already place positive mean curvature between uniform RC-positivity and RC-positivity. Their Theorems 1.4 and 1.7 concern existence of bundle metrics and rational connectedness. Wu’s subsequent work [Wu25, Theorem 3], [Wu26, Theorem 7] constructs metrics from uniform weak RC-positivity. Our claims retain the initial metric h and test its induced powers. They do not settle the existence questions about weak RC-positivity.

The proof and compact realization below are complete within the stated smooth setting. We have not located their precise statements in the sources examined, including the above 2025–2026 preprints. Their bibliographic status is POTENTIALLY NEW, not a claim of established priority. The application to rational connectedness in Section 5 is explicitly a corollary of existing geometric criteria.

2. CURVATURE CONVENTIONS AND THE SCOPE OF THE PROBLEM

We use the Chern connection. In a holomorphic frame, write the squared norm of a column vector a as a^*Ha . Our curvature convention is

$$(2.1) \quad R_{i\bar{j}}^h = -\partial_{\bar{j}}(H^{-1}\partial_i H), \quad R^h(u, \bar{u}) = \sum_{i,j} u^i \bar{u}^j R_{i\bar{j}}^h.$$

Thus a line metric $e^{-\phi}$ has curvature coefficients $\partial_i \partial_{\bar{j}} \phi$, and $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ with its Fubini–Study metric is positive. We abbreviate

$$R^h(u, \bar{u}, a, \bar{a}) = a^* H R^h(u, \bar{u}) a.$$

This expression is real. For a background metric γ , the contraction $K_{\gamma,h}$ is equivalently $\sum_j R^h(e_j, \bar{e}_j)$ in a γ -orthonormal tangent frame.

At each point, RC-positivity means

$$(2.2) \quad \forall a \neq 0 \exists u \neq 0 : \quad R^h(u, \bar{u}, a, \bar{a}) > 0.$$

Uniform RC-positivity means

$$(2.3) \quad \exists u \neq 0 \forall a \neq 0 : \quad R^h(u, \bar{u}, a, \bar{a}) > 0.$$

These are Yang’s Definitions 2.2 and 2.6 in [Yan20], using the numbering of arXiv v2. Replacing $>$ by $\geq$ specifies the semipositive variants used here. Uniform RC-quasipositivity means uniform RC-semipositivity everywhere and uniform RC-positivity at at least one point, as in Definition 1.1 of that version. No quasi-positive RC hypothesis is used in Theorems 1.1 and 1.2.

On a compact base, a fixed background metric and a fixed uniformly RC-positive bundle metric give a positive lower bound after normalizing both vectors. This is already [Yan20, Proposition 2.9]; it is not an additional result of this note. It also does not produce a smooth nonvanishing tangent vector field.

For a Hermitian tangent metric ω , our normalizations are

$$(2.4) \quad H_\omega(v) = \frac{R^\omega(v, \bar{v}, v, \bar{v})}{|v|_\omega^4}, \quad B_\omega(u, v) = \frac{R^\omega(u, \bar{u}, v, \bar{v})}{|u|_\omega^2 |v|_\omega^2}.$$

Here BSC means precisely *holomorphic bisectional curvature* B . Orthogonal BSC restricts this expression to $u \perp v$. Real bisectional curvature instead contracts $\sum_{i,j} R_{i\bar{i}j\bar{j}} a_i a_j$ with $a_i \geq 0$, divided by $\sum_i a_i^2$, in a unitary frame. We never identify these conditions. For Kähler metrics the Chern and Levi–Civita connections agree on the holomorphic tangent bundle; none of that symmetry is used for a general bundle below.

Quasi-positive HSC means $H \geq 0$ everywhere and $H > 0$ in every nonzero tangent direction at one point. Quasi-negative HSC is the corresponding all-directions condition with signs reversed. Positivity or negativity in just one direction at one point is weaker. For example, a positive-curvature curve times a flat torus has some positive directions but never positive HSC in all directions at a point.

The initial literature check rules out presenting several neighboring statements as new. Quasi-positive Kähler HSC implies rational connectedness by Zhang–Zhang [ZZ, Theorem 1.5]; their criterion in fact uses the absence of nonzero truly flat vectors at one point. Matsumura [Mat, Theorem 1.1 and Remark 1.2] gives a locally constant rationally connected fibration over a finite *étale* quotient of a torus in the

compact Kähler semipositive setting. On the negative side, Wu–Yau’s projective result [WY, Theorem 2], the Kähler extension of Tosatti–Yang [TY, Theorem 1.1 and Corollary 1.2], and Diverio–Trapani’s quasi-negative theorem [DT, Theorem 1.2] already address the corresponding positivity of the canonical bundle. These results motivate our restriction to the behavior of induced bundle metrics; they are not inputs to the proofs below.

3. POSITIVE CONTRACTIONS AND SYMMETRIC TENSORS

Fix a point and put $V = T_x^{1,0}X$, $W = E_x$. Fix inner products for normalization. A positive semidefinite contravariant Hermitian tensor $B = \sum_j b_j u_j \otimes \bar{u}_j$, with $b_j \geq 0$, determines

$$(3.1) \quad \mathcal{R}(B) = \sum_j b_j R^h(u_j, \bar{u}_j) \in \text{Herm}(W).$$

This is an intrinsic linear contraction. In particular it is independent of the displayed decomposition. Every $B > 0$ is the inverse of a Hermitian metric on V .

Lemma 3.1 (A positive-semidefinite alternative). *Exactly one of the following holds:*

- (1) *there is $B > 0$ with $\mathcal{R}(B) > 0$;*
- (2) *there is $0 \neq \rho \geq 0$ in $\text{Herm}(W)$ such that*

$$(3.2) \quad \text{tr}(\rho R^h(u, \bar{u})) \leq 0 \quad \text{for every } u \in V.$$

Proof. First, existence of $B \geq 0$ with $\mathcal{R}(B) > 0$ is equivalent to (1): replace B by $B + \epsilon I_V$ for sufficiently small $\epsilon > 0$. Let

$$C = \{\mathcal{R}(B) : B \geq 0, \text{tr } B = 1\}.$$

It is a compact convex subset of the real vector space $\text{Herm}(W)$ with inner product $\text{tr}(AB)$. Suppose (1) fails. For $\epsilon > 0$, the closed convex set $D_\epsilon = \epsilon I_W + \{P : P \geq 0\}$ is disjoint from C . A pair $c_\epsilon \in C$, $d_\epsilon \in D_\epsilon$ of minimum distance exists, and $Z_\epsilon = d_\epsilon - c_\epsilon \neq 0$. The first variation of squared distance gives

$$\langle Z_\epsilon, c - c_\epsilon \rangle \leq 0, \quad \langle Z_\epsilon, d - d_\epsilon \rangle \geq 0 \quad (c \in C, d \in D_\epsilon).$$

Taking $d = d_\epsilon + tP$ shows $Z_\epsilon \geq 0$. Taking $d = \epsilon I_W$ then shows

$$\langle Z_\epsilon, c \rangle \leq \langle Z_\epsilon, d_\epsilon \rangle - |Z_\epsilon|^2 \leq \epsilon \text{tr } Z_\epsilon.$$

Normalize $\rho_\epsilon = Z_\epsilon / \text{tr } Z_\epsilon$ and take a convergent subsequence as $\epsilon \downarrow 0$. Its limit ρ is positive semidefinite, has trace one, and satisfies $\text{tr}(\rho c) \leq 0$ for every $c \in C$. Since $R^h(u, \bar{u}) \in C$ for unit u , this proves (2). Finally (1) and (2) cannot coexist: contraction with the positive tensor B in (1) would give $\text{tr}(\rho \mathcal{R}(B)) \leq 0$, whereas a nonzero positive semidefinite matrix paired with a positive definite matrix has positive trace. $\square$

For a Hermitian endomorphism A of W , write

$$A^{[m]} = \sum_{\nu=1}^m I_W^{\otimes(\nu-1)} \otimes A \otimes I_W^{\otimes(m-\nu)}.$$

This is the infinitesimal tensor action, not the tensor product $A^{\otimes m}$.

Lemma 3.2 (Encoding a positive matrix). *Let $m \geq 2$ and let $\rho \geq 0$ have trace one. Choose an orthonormal eigenbasis with $\rho e_j = \lambda_j e_j$, and put*

$$(3.3) \quad s_{\rho,m} = \sum_{j=1}^r \sqrt{\lambda_j} e_j^{\otimes m} \in \text{Sym}^m W.$$

Then $|s_{\rho,m}| = 1$ and, for every Hermitian A ,

$$(3.4) \quad \langle A^{[m]} s_{\rho,m}, s_{\rho,m} \rangle = m \text{tr}(\rho A).$$

Proof. The tensors $e_j^{\otimes m}$ are orthonormal. In a cross term with indices $i \neq j$, each of the m summands of $A^{[m]}$ leaves $m-1 \geq 1$ slots unchanged, and one such slot contributes $\langle e_i, e_j \rangle = 0$. The diagonal term with index j is $m \langle A e_j, e_j \rangle$. Multiplication by λ_j and summation give (3.4). The disappearance of these cross terms is precisely why the argument requires $m \geq 2$. $\square$

Proof of Theorem 1.1. Work first at one point. Curvature of the tensor connection is

$$(3.5) \quad R^{h^{\otimes m}}(u, \bar{u}) = (R^h(u, \bar{u}))^{[m]}.$$

The symmetrizing orthogonal projection commutes with this connection. Thus its image is parallel and the curvature of $\text{Sym}^m E$ is the restriction of (3.5); its second fundamental form vanishes. This also proves that (2) implies (1), without invoking the false assertion that arbitrary subbundles inherit RC-positivity.

If (1) holds and there is no positive contraction, apply Lemma 3.1 and normalize $\text{tr} \rho = 1$. Lemmas 3.2 and (3.5) give

$$R^{h^{\text{sym},m}}(u, \bar{u}, s_{\rho,m}, \bar{s}_{\rho,m}) = m \text{tr}(\rho R^h(u, \bar{u})) \leq 0$$

for all u . This contradicts RC-positivity, proving (1) implies (4) pointwise.

For a tuple $a = (a_1, \dots, a_q)$ in an orthogonal sum, the corresponding curvature is

$$(3.6) \quad \begin{aligned} R^{h^{\oplus q}}(u, \bar{u}, a, \bar{a}) &= \sum_{\nu=1}^q \langle R^h(u, \bar{u}) a_\nu, a_\nu \rangle \\ &= \text{tr}(\rho_a R^h(u, \bar{u})), \quad \rho_a = \sum_{\nu=1}^q a_\nu a_\nu^*. \end{aligned}$$

Every positive semidefinite matrix on W is ρ_a for a tuple of length r , by spectral decomposition. Consequently (3) and the nonexistence of obstruction (2) of Lemma 3.1 are equivalent. This proves (3) is equivalent to (4) pointwise.

Conversely suppose $K = \mathcal{R}(B) > 0$. Its induced infinitesimal action on $W^{\otimes m}$ is positive definite: in an eigenbasis of K its eigenvalues are sums of m positive eigenvalues. The restrictions to symmetric and exterior powers are also positive. On an orthogonal sum of copies it is block diagonal with block K . For every nonzero vector in any of these spaces, its positive pairing with the induced K is a positive weighted sum of directional curvature pairings. At least one of those directional pairings is positive. This proves the remaining implications and all asserted functorial conclusions.

Finally, at every x choose a positive tensor B_x with $\mathcal{R}_x(B_x) > 0$. Extend B_x smoothly near x using a tangent frame. Both inequalities persist after shrinking the

neighborhood. Take a finite cover U_α and a subordinate smooth partition of unity χ_α . The contravariant tensor

$$B = \sum_{\alpha} \chi_{\alpha} B_{\alpha}$$

is positive definite, and $\mathcal{R}(B) = \sum_{\alpha} \chi_{\alpha} \mathcal{R}(B_{\alpha}) > 0$. Let γ be its inverse. There are no derivatives of χ_{α} in this curvature contraction: h has not been changed. Thus $K_{\gamma, h} > 0$ globally, as required. $\square$

4. COMPACT REALIZATION AND THE SHARP NUMBER OF COPIES

4.1. The local model. Let $r \geq 2$, identify both the tangent space and the fiber with $\mathbb{C}^r$, and fix $0 < t < 1/r$. Consider

$$(4.1) \quad R_t(u, \bar{u}) = t|u|^2 I_r - uu^*.$$

For a tuple $a = (a_1, \dots, a_q)$ with $\sum_{\nu} |a_{\nu}|^2 = 1$, put $D = \sum_{\nu} a_{\nu} a_{\nu}^*$. Then

$$(4.2) \quad \max_{|u|=1} \sum_{\nu=1}^q \langle R_t(u, \bar{u}) a_{\nu}, a_{\nu} \rangle = t - \lambda_{\min}(D).$$

If $q < r$, the matrix D has a nonzero kernel, so this maximum is exactly $t > 0$. In contrast, the tuple $a_j = e_j/\sqrt{r}$, $1 \leq j \leq r$, has $D = I_r/r$ and gives

$$(4.3) \quad \sum_{j=1}^r \langle R_t(u, \bar{u}) a_j, a_j \rangle = (t - 1/r)|u|^2 < 0 \quad (u \neq 0).$$

For each $m \geq 2$, the unit symmetric tensor $s_m = r^{-1/2} \sum_j e_j^{\otimes m}$ satisfies

$$(4.4) \quad \langle R_t(u, \bar{u})^{[m]} s_m, s_m \rangle = m(t - 1/r)|u|^2 < 0.$$

Moreover,

$$(4.5) \quad \text{tr } R_t(u, \bar{u}) = (rt - 1)|u|^2 < 0.$$

Thus this model separates RC-positivity from positive mean curvature, even though all sums of fewer than r copies are RC-positive.

It is a genuine Chern curvature model. On a neighborhood of $0 \in \mathbb{C}^r$ put

$$(4.6) \quad H_0(z) = I_r - t|z|^2 I_r + zz^*.$$

The eigenvalues are $1 - t|z|^2$ on $z^\perp$ and $1 + (1 - t)|z|^2$ along z ; hence $H_0 > 0$ for $t|z|^2 < 1$. At zero, $H_0 = I_r$ and $\partial H_0 = 0$. Formula (2.1) therefore gives

$$R_{ij}^{H_0}(0) = t\delta_{ij}I_r - E_{ij},$$

where E_{ij} is the elementary matrix, proving (4.1). The minimum over unit tuples of length $r - 1$ of the maximum over unit u is t at zero. Continuity of this minimum-maximum, on compact unit spheres in a local trivialization, implies that $H_0^{\oplus(r-1)}$ is RC-positive throughout a sufficiently small neighborhood. This is a local openness argument, not a conclusion drawn from numerical samples.

4.2. Preserving a local metric inside a positive global twist. We record the precise globalization needed here.

Lemma 4.1 (Globalization on projective space). *Let H_0 be a smooth positive matrix metric on a trivial rank- r bundle near $p \in \mathbb{P}^n$. Suppose $H_0^{\oplus q}$ is RC-positive near p , for a fixed $q \geq 1$. There exist $k > 0$ and a metric h on $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)^{\oplus r}$ such that $h^{\oplus q}$ is RC-positive everywhere, and the curvature of h agrees with that of H_0 on a neighborhood of p , under the local identification.*

Proof. Take affine coordinates z centered at p and put $\phi(z) = \log(1 + |z|^2)$. Choose $0 < a < b < c < d$ so small that H_0 is defined and $H_0^{\oplus q}$ is RC-positive on a neighborhood of $\{\phi \leq d\}$. Choose a smooth nondecreasing function η with $\eta = 0$ on $(-\infty, a]$, $\eta > 0$ on (a, ∞) , and $\eta = 1$ on $[b, \infty)$. Choose the constant of integration so that $f' = \eta$ and $f(s) = s$ for $s \geq b$. Thus f is smooth and convex. Replacing the local Fubini–Study line metric $e^{-\phi}$ by $e^{-f(\phi)}$ defines a global metric h_A on $\mathcal{O}(1)$, because it is unchanged outside a relatively compact subset of the chart. Writing forms as their Hermitian coefficient tensors, its curvature is

$$(4.7) \quad \beta = f'(\phi)\omega_{\text{FS}} + f''(\phi)\partial\phi \otimes \bar{\partial}\phi.$$

It is semipositive everywhere, zero where $\phi \leq a$, and equal to ω_{FS} where $\phi \geq b$ and outside the chart.

Choose a smooth cutoff $0 \leq \chi \leq 1$ equal to one for $\phi \leq c$ and zero on a neighborhood of $\{\phi \geq d\}$. The matrix metric

$$G = I_r + \chi(H_0 - I_r)$$

extends by I_r to the trivial bundle on $\mathbb{P}^n$ and is positive, since it is a convex combination of positive matrices. Set $h = h_A^k G$. Tensoring with a line bundle gives the exact formula

$$(4.8) \quad R^h(u, \bar{u}) = R^G(u, \bar{u}) + k\beta(u, \bar{u})I_r.$$

On $\{\phi \leq c\}$, the first term is the curvature of H_0 . For every nonzero q -tuple its RC-positive direction remains positive after the semipositive scalar addition.

On the compact complement of $\{\phi < c\}$, we have $\beta = \omega_{\text{FS}}$. Smoothness gives a finite $C \geq 0$ such that

$$\langle R^G(u, \bar{u})v, v \rangle_G \geq -C|u|_{\text{FS}}^2|v|_G^2$$

there. Choose an integer $k > C$. Formula (4.8) makes h Griffiths-positive on that complement, so its orthogonal q -fold sum is RC-positive there as well. Near p , the line metric is constant and $G = H_0$, hence its added curvature is zero. This proves all claims. $\square$

Proof of Theorem 1.2. Take $n = r$, $t = 1/(2r)$ and the metric (4.6). Apply Lemma 4.1 with $q = r - 1$. RC-positivity of the $(r - 1)$ -fold sum implies that of every shorter orthogonal sum, by padding a tuple with zero vectors and using (3.6). At p the curvature is still R_t . Equations (4.3)–(4.5) give all failures asserted in (2) and the negative determinant curvature in (3). For any positive definite background contraction B at p ,

$$\text{tr } \mathcal{R}_t(B) = (rt - 1) \text{tr } B < 0,$$

so $\mathcal{R}_t(B)$ cannot be positive definite. Finally the direct sum of r copies of the usual Fubini–Study metric on $\mathcal{O}(k)$ is a different Griffiths-positive metric on E . $\square$

The integer r in Theorem 1.1(3) is therefore sharp as a bound valid for every base dimension and rank. We do not claim that it is the smallest possible bound for each separately fixed pair $(\dim X, r)$. Already at $r = 2$ the example shows that taking two identical RC-positive Hermitian bundles need not preserve RC-positivity with the sum metric. The failure of the tensor square follows from an explicit symmetric vector, not from a test on decomposable tensors alone.

5. GEOMETRIC CONSEQUENCES AND BOUNDARY CASES

5.1. A reformulation of a known rational-connectedness criterion.

Corollary 5.1. *For a smooth connected compact Kähler manifold X of positive dimension, the following conditions are equivalent:*

- (1) *X is projective and rationally connected;*
- (2) *there is a smooth Hermitian metric h on T_X for which $(\mathrm{Sym}^2 T_X, h_{\mathrm{sym},2})$ is RC-positive;*
- (3) *there is a smooth Hermitian metric h on T_X for which every positive induced tensor power is RC-positive.*

Proof. By Li–Zhang–Zhang [LZZ, Theorem 1.7], condition (1) is equivalent to the existence of Hermitian metrics γ, h with $K_{\gamma,h} > 0$. Theorem 1.1 identifies this with (2) and (3). The forward geometric implication from positive mean curvature is also Yang’s [Yan18, Corollary 1.5]; its compact Kähler hypothesis is satisfied here. $\square$

This corollary is a DIRECT COROLLARY of the cited criterion and our fixed-metric theorem. It is not a new theorem asserting rational connectedness under quasi-positive HSC. Neither h nor γ is asserted to be Kähler, and an arbitrary RC-positive metric on $\mathrm{Sym}^2 T_X$ is not assumed to be induced from T_X .

For completeness, the usual tensor vanishing has a direct analytic proof under the conditions of Theorem 1.1:

$$(5.1) \quad H^0(X, (E^*)^{\otimes m}) = 0 \quad (m \geq 1).$$

Indeed the dual tensor mean curvature is negative definite. For a holomorphic section s the Chern Bochner formula, contracted with γ , reads

$$\gamma^{i\bar{j}} \partial_i \partial_{\bar{j}} |s|^2 = |\nabla' s|_\gamma^2 - \langle K_{\gamma, (h^*)^{\otimes m}} s, s \rangle.$$

At a positive maximum of $|s|^2$ the left side is nonpositive and the right side is strictly positive. Hence $s = 0$. This formula for a section of a Hermitian holomorphic bundle uses no Kähler symmetry or discarded torsion term. The vanishing itself is known from positive mean curvature.

5.2. Positive mean curvature need not give a common direction. On $\mathbb{P}^n$, $n \geq 2$, let

$$E = T_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}(-1)$$

with the metric induced by Fubini–Study metrics. Normalize ω_{FS} by the potential $\log(1 + |z|^2)$, so that its HSC is 2. At zero, expansion of this potential gives

$$R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} = \delta_{ij}\delta_{k\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{kj}.$$

Unitary invariance gives the same formula in every unitary frame. Tensoring by $\mathcal{O}(-1)$ subtracts the first term. Consequently

$$R^E(u, \bar{u}, a, \bar{a}) = |\langle u, a \rangle|^2, \quad K_{\omega_{\text{FS}}, h} = I_E.$$

Every $R^E(u, \bar{u})$ with $u \neq 0$ has rank one and a nonzero kernel. The given metric is not uniformly RC-positive at any point, although it satisfies all four conditions of Theorem 1.1. Together with Theorem 1.2, this proves strictness, for fixed metrics, of both implications

uniform RC-positive $\implies$ positive mean curvature for some $\gamma \implies$ RC-positive.

The first implication is already [LZZ, Proposition 3.6]. The calculation here distinguishes the two conditions without changing the metric.

5.3. Why a semipositive substitution is insufficient. Let $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ and let $L = \text{pr}_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ with the pullback Fubini–Study metric. Its curvature has coefficients $-\text{pr}_2^* \omega_{\text{FS}}$. Every nonzero horizontal vector has zero curvature. Thus all tensor powers and all orthogonal sums are RC-semipositive with the induced metrics. For every positive definite background metric γ , however,

$$K_{\gamma, L} = -\text{tr}_{\gamma} \text{pr}_2^* \omega_{\text{FS}} < 0.$$

There is no nonnegative mean curvature for this fixed line metric. Allowing a *degenerate* contravariant tensor supported in the first factor would give zero contraction; its inverse is not a Hermitian metric. This explains the precise obstruction to replacing all strict inequalities in Theorem 1.1 by non-strict ones.

6. LIMITATIONS AND VERIFICATION

The main results concern Chern curvature of fixed smooth bundle metrics. They do not give a Kähler metric, a new HSC structure theorem, a classification of RC-positive holomorphic bundles, or a counterexample to a metric-existence conjecture. The compact examples are abstract bundles; the local tensor (4.1) is not asserted to have the additional symmetries required of a Kähler tangent curvature tensor. No assertion about singular spaces or finite monodromy is made.

The proofs use only Chern curvature formulas, finite-dimensional convex geometry, and a scalar positive twist. Exact polynomial differentiation checks the curvature of (4.6); independent calculations check the trace and the balanced tensor identities. The accompanying code also tests (3.4) in complex, non-real eigenframes. These computations check signs and contractions. Global RC-positivity of the constructed metrics follows from Lemma 4.1, not from finite sampling.

The principal bibliographic uncertainty is whether the converse in Theorem 1.1 or the compact sharpness construction has appeared under different terminology. The comparison was repeated after the proof, including the mean-curvature work of Li–Zhang–Zhang, both recent papers of Kuang–Ru Wu, and Wang–Yang–Yau [WYY]. We found no containing statement in the portions examined. This is a bounded

literature audit, not proof of novelty. The companion `research_audit.md` specifies the checked versions, locations, rejected candidates, and the status of each claim.

Numbered results cited in the text refer to the specified arXiv versions.

REFERENCES

- [Yan18] X. Yang, *RC-positivity, rational connectedness and Yau’s conjecture*, Cambridge J. Math. **6** (2018), 183–212. [arXiv:1708.06713v3](#).
- [Yan20] X. Yang, *RC-positive metrics on rationally connected manifolds*, Forum Math. Sigma **8** (2020), e53. [arXiv:1807.03510v2](#).
- [LZZ] C. Li, C. Zhang and X. Zhang, *Mean curvature positivity and rational connectedness*, [arXiv:2112.00488v3](#) (2024).
- [Wu25] K.-R. Wu, *Uniform RC-positivity of direct image bundles*, [arXiv:2512.10845v1](#) (2025).
- [Wu26] K.-R. Wu, *Uniform weak RC-positivity and rational connectedness*, [arXiv:2604.05981v1](#) (2026).
- [WYY] M. Wang, X. Yang and S.-T. Yau, *Existence of Hermitian metrics with prescribed Hermitian-Yang-Mills tensors I*, [arXiv:2603.10611v4](#) (2026).
- [WY] D. Wu and S.-T. Yau, *Negative holomorphic curvature and positive canonical bundle*, Invent. Math. **204** (2016), 595–604. [arXiv:1505.05802v1](#).
- [TY] V. Tosatti and X. Yang, *An extension of a theorem of Wu–Yau*, J. Differential Geom. **107** (2017), 573–579. [arXiv:1506.01145v3](#).
- [DT] S. Diverio and S. Trapani, *Quasi-negative holomorphic sectional curvature and positivity of the canonical bundle*, [arXiv:1606.01381v4](#) (2018).
- [ZZ] S. Zhang and X. Zhang, *On the structure of compact Kähler manifolds with nonnegative holomorphic sectional curvature*, [arXiv:2311.18779v4](#) (2024).
- [Mat] S.-i. Matsumura, *Fundamental groups of compact Kähler manifolds with semi-positive holomorphic sectional curvature*, [arXiv:2502.00367v1](#) (2025).

誘導対称冪の RC-positivity と平均曲率の正值性

chatGPT 6 Astra

2026 年 9 月 8 日

概要. 固定した滑らかな Hermitian 正則ベクトル束について、次数 2 以上の誘導対称冪の RC-positivity が、適切な背景 Hermitian 計量に関する Chern 平均曲率の正值性と同値であることを示す。階数 r の束では、同じ条件を r 個の直交直和で判定できる。半正定値行列による二者択一と対称テンソルによる符号化を用い、平均曲率の正值性からの既知の含意の逆を証明する。さらに、 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k)^{\oplus r}$ 上で直和の個数の最適性を実現する。指定した計量では r 個未満の直和は RC-positive だが、 r 個の直和と次数 2 以上のすべての誘導対称冪は、ある一点でこの性質を失う。これらの束には別の Griffiths-positive 計量も存在する。幾何学的应用は既知の有理連結性の判定の言い換えである。固定計量についての判定と最適性の構成の文献上の新規性には、さらなる確認を要する。

このノートは chatGPT 6 が生成したものであり、岩井は数学的な検証を全く行っていません。そのため数学的な間違いがあるかもしれません。そのため注意深く読んでください。

1. 序論

テンソル冪の曲率は曲率作用素の和である。Uniform RC-positivity のもとでは、一つの接方向によって各項を正にできる。一方、RC-positivity では、接方向はファイバーのベクトルに依存してよいから、この議論は使えない。本稿では、誘導計量を備えた対称冪またはテンソル冪が RC-positive になるための追加条件を正確に記述する。全体を通じて、元の束の計量は固定する。

Yang は、平均曲率の正值性から誘導計量を備えたテンソル冪・外冪の RC-positivity を示した [Yan18, Theorem 3.6]。本稿ではその逆方向を示す。すなわち、誘導計量を備えた対称二乗の RC-positivity だけから、適切な背景 Hermitian 計量に関する平均曲率の正值性が従う。さらに、元の計量の RC-positivity だけでは不十分であることを示すコンパクトな例を構成する。これらの例は、任意の階数 2 以上について、射影空間上の直和型の ample 束で実現する。

$h_{\text{sym},m}$ は $h^{\otimes m}$ を平行な対称部分束 $\text{Sym}^m E \subset E^{\otimes m}$ に制限した計量とし、 $h^{\oplus q}$ を直交直和計量とする。また、 $K_{\gamma,h} = \text{tr}_{\gamma} R^h$ を Chern 平均曲率自己準同型とする。背景計量 γ と束の計量 h は独立である。

定理 1.1 (対称冪による判定). X を正次元の滑らかなコンパクト複素多様体とし、 (E, h) を階数 $r \geq 1$ の滑らかな Hermitian 正則ベクトル束とする。次の条件は同値である。

- (1) ある $m \geq 2$ について、 $(\text{Sym}^m E, h_{\text{sym},m})$ が RC-positive である。
- (2) ある $m \geq 2$ について、 $(E^{\otimes m}, h^{\otimes m})$ が RC-positive である。
- (3) $(E^{\oplus r}, h^{\oplus r})$ が RC-positive である。
- (4) X 上に滑らかな Hermitian 計量 γ が存在し、至るところで $K_{\gamma,h} > 0$ となる。

これらが成立するとき、すべての正のテンソル冪、すべての正の対称冪、すべての非零の外冪、および (E, h) の任意の有限個の直交直和は、それぞれの誘導計量について RC-positive である。この同値性は各点でも成立する。その場合、条件 (4) は、その点における正定値の反変 Hermitian 形式による曲率の縮約が正定値となることに置き換える。

(4) からテンソル冪・外冪への含意は、上記の Yang の結果である。逆方向では、ファイバー上の任意の半正定値自己準同型を記録する特定の対称テンソルを用いる。その後、凸集合の分離によって、共通の接方向ではなく共通の重み付きトレースを得る。 γ の構成には逆計量に対する 1 の分割を用いるので、接ベクトル場を大域的に選ぶ必要はない。 γ が Kähler であるとは主張しない。

定理 1.2 (コンパクト射影的な底空間上での最適性). 任意の整数 $r \geq 2$ に対して、整数 $k > 0$ と

$$E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(k)^{\oplus r}$$

上の滑らかな Hermitian 計量 h が存在し、次の性質を満たす。

- (1) $1 \leq q < r$ について、 $(E^{\oplus q}, h^{\oplus q})$ は至るところ RC-positive である。
- (2) ある点 p で、 $(E^{\oplus r}, h^{\oplus r})$ は RC-positive ではない。すべての $m \geq 2$ について、 $(\text{Sym}^m E, h_{\text{sym}, m})$ も $(E^{\otimes m}, h^{\otimes m})$ も p で RC-positive ではない。
- (3) $(\det E, \det h)$ の曲率は p で負定値である。特に、 $K_{\gamma, h} > 0$ が至るところで成立するような背景 Hermitian 計量は存在しない。

正則束 E そのものは、別の Griffiths-positive な計量も持つ。したがって、これらは指定された誘導計量に対する障害であり、束上に別の正曲率計量が存在することへの障害ではない。

Li–Zhang–Zhang[LZZ, Proposition 3.6] は、平均曲率の正值性が uniform RC-positivity と RC-positivity の間に位置することを既に示している。同論文の Theorems 1.4, 1.7 は束の計量の存在と有理連結性を扱う。さらに Wu の後続研究 [Wu25, Theorem 3], [Wu26, Theorem 7] は、uniform weak RC-positivity から計量を構成する。本稿では初めの計量 h を保ったまま、その誘導冪を判定する。Weak RC-positivity に関する計量の存在問題を解決したとは主張しない。

以下の証明とコンパクトな実現は、明記した滑らかな設定のもとで完結している。上記の 2025–2026 年のプレプリントを含む調査文献では、これらと正確に一致する主張を見いだせなかった。文献上の位置づけは POTENTIALLY NEW であり、優先性が確定したという主張ではない。第 5 節の有理連結性への応用は、既存の幾何学的判定定理の系として明示する。

2. 曲率の規約と研究の範囲

Chern 接続を用いる。正則枠において、列ベクトル a のノルムの二乗を $a^* H a$ と書く。曲率の符号規約は

$$(2.1) \quad R_{i\bar{j}}^h = -\partial_{\bar{j}}(H^{-1}\partial_i H), \quad R^h(u, \bar{u}) = \sum_{i,j} u^i \bar{u}^j R_{i\bar{j}}^h$$

とする。したがって、直線束の計量 $e^{-\phi}$ の曲率係数は $\partial_i \partial_{\bar{j}} \phi$ であり、Fubini–Study 計量を備えた $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ は正である。以下では

$$R^h(u, \bar{u}, a, \bar{a}) = a^* H R^h(u, \bar{u}) a$$

と略記する。この量は実数である。背景計量 γ に関する縮約 $K_{\gamma, h}$ は、 γ -正規直交接枠を用いて $\sum_j R^h(e_j, \bar{e}_j)$ と書く。

各点における RC-positivity とは、

$$(2.2) \quad \forall a \neq 0 \exists u \neq 0: \quad R^h(u, \bar{u}, a, \bar{a}) > 0$$

をいう。Uniform RC-positivity とは,

$$(2.3) \quad \exists u \neq 0 \ \forall a \neq 0: \quad R^h(u, \bar{u}, a, \bar{a}) > 0$$

をいう。これらは, [Yan20] の arXiv v2 における Definitions 2.2, 2.6 である。本稿で用いる半正の変種は, $>$ を $\geq$ に置き換えたものとする。Uniform RC-quasi-positivity は, 至るところ uniform RC-semipositive で, 少なくとも一点で uniform RC-positive であることを意味する。これは同じ版の Definition 1.1 に従う。定理 1.1 と定理 1.2 では, RC 曲率の準正の仮定は用いない。

コンパクトな底空間上では, 背景計量と uniformly RC-positive な束の計量を固定すると, 両ベクトルを正規化した後に正の下界が得られる。これは既に [Yan20, Proposition 2.9] であり, 本稿の追加結果ではない。また, そこから滑らかな非消滅接ベクトル場が得られるわけでもない。

接束の Hermitian 計量 ω については, 次の正規化を用いる。

$$(2.4) \quad H_\omega(v) = \frac{R^\omega(v, \bar{v}, v, \bar{v})}{|v|_\omega^4}, \quad B_\omega(u, v) = \frac{R^\omega(u, \bar{u}, v, \bar{v})}{|u|_\omega^2 |v|_\omega^2}.$$

本稿の BSC は, 正確に正則双断面曲率 B を意味する。Orthogonal BSC は, この式を $u \perp v$ に制限したものである。一方, real bisectonal curvature は, 正規直交枠と $a_i \geq 0$ を用いて $\sum_{i,j} R_{i\bar{i}j\bar{j}} a_i a_j$ を $\sum_i a_i^2$ で割った量である。これらを同一視しない。Kähler 計量では Chern 接続と Levi-Civita 接続は正則接束上で一致するが, 以下の一般の束の議論では, その対称性を用いない。

準正 HSC とは, 至るところ $H \geq 0$ であり, ある一点のすべての非零接方向で $H > 0$ となることをいう。準負 HSC は, 同じ全方向の条件で符号を反転したものとする。一点の一方方向だけで正または負であることは, これらより弱い。例えば, 正曲率の曲線と平坦トーラスの積には正の方向があるが, ある点の全方向で HSC が正となることはない。

最初の文献確認により, 隣接するいくつかの命題を新結果として扱うことはできないと分かる。準正の Kähler HSC から有理連結性が従うことは Zhang–Zhang [ZZ, Theorem 1.5] による。実際の判定条件は, ある一点で非零の truly flat vector が存在しないことである。Matsumura [Mat, Theorem 1.1 and Remark 1.2] は, コンパクト Kähler 半正 HSC の設定で, トーラスの有限 étale 商を底空間とする局所定数な有理連結ファイブレーションを与えている。負曲率側では, Wu–Yau の射影的な場合の結果 [WY, Theorem 2], Tosatti–Yang の Kähler 拡張 [TY, Theorem 1.1 and Corollary 1.2], および Diverio–Trapani の準負の場合の定理 [DT, Theorem 1.2] が, 対応する標準束の正值性を既に扱っている。これらの結果を踏まえ, 本稿では誘導された束の計量の振る舞いに対象を絞る。以下の証明の入力としては用いない。

3. 正の縮約と対称テンソル

一点を固定し, $V = T_x^{1,0} X$, $W = E_x$ とおく。正規化のための内積を固定する。半正定値の反変 Hermitian テンソル $B = \sum_j b_j u_j \otimes \bar{u}_j$, $b_j \geq 0$ に対して,

$$(3.1) \quad \mathcal{R}(B) = \sum_j b_j R^h(u_j, \bar{u}_j) \in \text{Herm}(W)$$

と定める。これは内在的な線形縮約であり, 表示した分解に依存しない。特に, 任意の $B > 0$ は V 上のある Hermitian 計量の逆である。

補題 3.1 (半正定値行列による二者択一). 次のいずれか一方だけが成立する。

- (1) $B > 0$ で $\mathcal{R}(B) > 0$ となるものが存在する.
 (2) $\text{Herm}(W)$ の元 $0 \neq \rho \geq 0$ が存在して,
 (3.2) $\text{tr}(\rho R^h(u, \bar{u})) \leq 0$ (すべての $u \in V$)
 となる.

証明. まず, $B \geq 0$ で $\mathcal{R}(B) > 0$ となるものが存在することは (1) と同値である. 十分小さい $\epsilon > 0$ に対し, B を $B + \epsilon I_V$ に置き換えればよい.

$$C = \{\mathcal{R}(B) : B \geq 0, \text{tr } B = 1\}$$

とおく. これは, 内積 $\text{tr}(AB)$ を備えた実ベクトル空間 $\text{Herm}(W)$ のコンパクト凸部分集合である. (1) が成立しないと仮定する. $\epsilon > 0$ に対して, 閉凸集合 $D_\epsilon = \epsilon I_W + \{P : P \geq 0\}$ は C と交わらない. 距離を最小にする組 $c_\epsilon \in C$, $d_\epsilon \in D_\epsilon$ が存在し, $Z_\epsilon = d_\epsilon - c_\epsilon \neq 0$ である. 距離の二乗の第一変分より,

$$\langle Z_\epsilon, c - c_\epsilon \rangle \leq 0, \quad \langle Z_\epsilon, d - d_\epsilon \rangle \geq 0 \quad (c \in C, d \in D_\epsilon)$$

を得る. $d = d_\epsilon + tP$ とすると $Z_\epsilon \geq 0$ が分かる. さらに $d = \epsilon I_W$ とすれば,

$$\langle Z_\epsilon, c \rangle \leq \langle Z_\epsilon, d_\epsilon \rangle - |Z_\epsilon|^2 \leq \epsilon \text{tr } Z_\epsilon$$

となる. $\rho_\epsilon = Z_\epsilon / \text{tr } Z_\epsilon$ と正規化し, $\epsilon \downarrow 0$ に対して収束する部分列をとる. 極限 ρ は半正定値でトレースが 1 であり, すべての $c \in C$ について $\text{tr}(\rho c) \leq 0$ を満たす. 単位ベクトル u に対して $R^h(u, \bar{u}) \in C$ なので, (2) が従う. 最後に, (1) と (2) は同時には成立しない. (1) の正のテンソル B で縮約すると $\text{tr}(\rho \mathcal{R}(B)) \leq 0$ となるが, 非零半正定値行列と正定値行列の積のトレースは正だからである. $\square$

W の Hermitian 自己準同型 A について,

$$A^{[m]} = \sum_{\nu=1}^m I_W^{\otimes(\nu-1)} \otimes A \otimes I_W^{\otimes(m-\nu)}$$

と書く. これはテンソル表現の無限小作用であり, テンソル積 $A^{\otimes m}$ ではない.

補題 3.2 (正の行列の符号化). $m \geq 2$ とし, $\rho \geq 0$ のトレースを 1 とする. $\rho e_j = \lambda_j e_j$ を満たす正規直交固有基底を選び,

$$(3.3) \quad s_{\rho, m} = \sum_{j=1}^r \sqrt{\lambda_j} e_j^{\otimes m} \in \text{Sym}^m W$$

とおく. このとき $|s_{\rho, m}| = 1$ であり, 任意の Hermitian 自己準同型 A について

$$(3.4) \quad \langle A^{[m]} s_{\rho, m}, s_{\rho, m} \rangle = m \text{tr}(\rho A)$$

が成立する.

証明. $e_j^{\otimes m}$ は正規直交系である. 添字 $i \neq j$ の交差項について, $A^{[m]}$ の各項は $m-1 \geq 1$ 個のスロットを変えない. そのうち一つから $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ が現れるので, 交差項は消える. 添字 j の対角項は $m \langle A e_j, e_j \rangle$ である. これに λ_j を掛けて和をとれば (3.4) を得る. $m \geq 2$ が必要なのは, まさにこの交差項の消滅のためである. $\square$

定理 1.1 の証明. まず一点で議論する. テンソル接続の曲率は

$$(3.5) \quad R^{h^{\otimes m}}(u, \bar{u}) = (R^h(u, \bar{u}))^{[m]}$$

である. 対称化を与える直交射影はこの接続と可換である. したがって, その像は平行であり, $\text{Sym}^m E$ の曲率は (3.5) の制限である. 第二基本形式は消滅する. これ

から (2) ならば (1) も分かる. 任意の部分束が RC-positivity を受け継ぐという誤った主張を用いているわけではない.

(1) が成立し, 正の縮約は存在しないと仮定する. 補題 3.1 を適用し, $\text{tr } \rho = 1$ と正規化する. 補題 3.2 と (3.5) より, すべての u について

$$R^{h_{\text{sym},m}}(u, \bar{u}, s_{\rho,m}, \bar{s}_{\rho,m}) = m \text{tr}(\rho R^h(u, \bar{u})) \leq 0$$

となる. これは RC-positivity に反する. したがって, 点ごとに (1) から (4) が従う. 直交直和の元 $a = (a_1, \dots, a_q)$ に対応する曲率は

$$(3.6) \quad \begin{aligned} R^{h^{\oplus q}}(u, \bar{u}, a, \bar{a}) &= \sum_{\nu=1}^q \langle R^h(u, \bar{u}) a_\nu, a_\nu \rangle \\ &= \text{tr}(\rho_a R^h(u, \bar{u})), \quad \rho_a = \sum_{\nu=1}^q a_\nu a_\nu^* \end{aligned}$$

である. スペクトル分解により, W 上の任意の半正定値行列は, 長さ r の組を用いて ρ_a と書ける. したがって, (3) は補題 3.1 の障害 (2) が存在しないことと同値である. これにより, 点ごとに (3) と (4) の同値性が示される.

逆に, $K = \mathcal{R}(B) > 0$ とする. $W^{\otimes m}$ 上に誘導される無限小作用は正定値である. 実際, K の固有基底を用いると, その固有値は m 個の正の固有値の和である. 対称冪・外冪への制限も正であり, 複数のコピーの直交直和では各ブロックが K となる. これらの空間の任意の非零ベクトルについて, 誘導された K との正のペアリングは, 方向別曲率のペアリングの正の重み付き和である. そのうち少なくとも一つの方向別ペアリングは正となる. これで残りの含意と, すべての束操作に関する結論が示された.

最後に, 各点 x で $\mathcal{R}_x(B_x) > 0$ となる正のテンソル B_x を選ぶ. 接枠を用いて B_x を x の近傍に滑らかに延長する. 近傍を縮めると, 両方の正值性が保たれる. 有限被覆 U_α と, これに従属する滑らかな 1 の分割 χ_α をとる. 反変テンソル

$$B = \sum_{\alpha} \chi_{\alpha} B_{\alpha}$$

は正定値であり, $\mathcal{R}(B) = \sum_{\alpha} \chi_{\alpha} \mathcal{R}(B_{\alpha}) > 0$ である. その逆を γ とする. h は変更していないので, この曲率の縮約には χ_{α} の微分は現れない. よって, 大域的に $K_{\gamma,h} > 0$ となる. $\square$

4. コンパクトな実現と直和の個数の最適性

4.1. **局所モデル.** $r \geq 2$ とし, 接空間とファイバーをともに $\mathbb{C}^r$ と同一視する. $0 < t < 1/r$ を固定し,

$$(4.1) \quad R_t(u, \bar{u}) = t|u|^2 I_r - uu^*$$

を考える. $\sum_{\nu} |a_{\nu}|^2 = 1$ を満たす組 $a = (a_1, \dots, a_q)$ に対し, $D = \sum_{\nu} a_{\nu} a_{\nu}^*$ とおく. すると

$$(4.2) \quad \max_{|u|=1} \sum_{\nu=1}^q \langle R_t(u, \bar{u}) a_{\nu}, a_{\nu} \rangle = t - \lambda_{\min}(D)$$

である. $q < r$ ならば, D は非零の核を持つため, この最大値は正確に $t > 0$ である. 一方, $a_j = e_j/\sqrt{r}$, $1 \leq j \leq r$ という組では $D = I_r/r$ となり,

$$(4.3) \quad \sum_{j=1}^r \langle R_t(u, \bar{u}) a_j, a_j \rangle = (t - 1/r)|u|^2 < 0 \quad (u \neq 0)$$

を得る. 各 $m \geq 2$ に対し, 単位対称テンソル $s_m = r^{-1/2} \sum_j e_j^{\otimes m}$ は

$$(4.4) \quad \langle R_t(u, \bar{u})^{[m]} s_m, s_m \rangle = m(t - 1/r)|u|^2 < 0$$

を満たす. さらに,

$$(4.5) \quad \text{tr } R_t(u, \bar{u}) = (rt - 1)|u|^2 < 0$$

である. したがって, このモデルでは r 個未満のすべての直和が RC-positive であるにもかかわらず, RC-positivity と平均曲率の正值性が区別される.

これは実際の Chern 曲率として実現する. $0 \in \mathbb{C}^r$ の近傍で

$$(4.6) \quad H_0(z) = I_r - t|z|^2 I_r + zz^*$$

とおく. 固有値は $z^\perp$ 上で $1 - t|z|^2$, z 方向で $1 + (1 - t)|z|^2$ である. よって, $t|z|^2 < 1$ ならば $H_0 > 0$ である. 原点では $H_0 = I_r$, $\partial H_0 = 0$ となるので, (2.1) から

$$R_{i\bar{j}}^{H_0}(0) = t\delta_{ij}I_r - E_{ij}$$

を得る. ここで E_{ij} は行列単位である. これで (4.1) が実現した. 長さ $r - 1$ の単位ベクトルの組について最小値をとり, 単位接方向 u について最大値をとった値は, 原点で t である. 局所自明化におけるコンパクトな単位球面上でのこの最小・最大値の連続性より, 十分小さい近傍全体で $H_0^{\oplus(r-1)}$ は RC-positive となる. これは局所的な開性による議論であり, 数値サンプルからの結論ではない.

4.2. 正の大域的な捻りの内部で局所計量を保つ. 必要な大域化を正確に述べる.

補題 4.1 (射影空間上での大域化). $p \in \mathbb{P}^n$ の近傍の自明な階数 r の束上に, 滑らかな正定値行列計量 H_0 が与えられているとする. ある固定した $q \geq 1$ について, $H_0^{\oplus q}$ は p の近傍で RC-positive と仮定する. このとき, $k > 0$ と $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)^{\oplus r}$ 上の計量 h が存在し, $h^{\oplus q}$ は至るところ RC-positive となり, 局所的な同一視のもとで h と H_0 の曲率は p の近傍で一致する.

証明. p を中心とするアフィン座標 z をとり, $\phi(z) = \log(1 + |z|^2)$ とおく. $0 < a < b < c < d$ を十分小さく選び, $\{\phi \leq d\}$ の近傍で H_0 が定義され, $H_0^{\oplus q}$ が RC-positive となるようにする. $(-\infty, a]$ で $\eta = 0$, (a, ∞) で $\eta > 0$, $[b, \infty)$ で $\eta = 1$ となる滑らかな単調非減少関数 η を選ぶ. $f' = \eta$ かつ $s \geq b$ で $f(s) = s$ となるように積分定数を選ぶ. この f は滑らかで凸である. 局所的な Fubini–Study 直線束計量 $e^{-\phi}$ を $e^{-f(\phi)}$ に置き換えると, $\mathcal{O}(1)$ 上の大域計量 h_A が定まる. 実際, この変更は座標近傍の相対コンパクトな部分集合の外では何も変えない. 微分形式をその Hermitian 係数テンソルで表示すると, その曲率は

$$(4.7) \quad \beta = f'(\phi)\omega_{\text{FS}} + f''(\phi)\partial\phi \otimes \overline{\partial\phi}$$

である. これは至るところ半正であり, $\phi \leq a$ では零, $\phi \geq b$ および座標近傍の外では ω_{FS} に等しい.

$0 \leq \chi \leq 1$ を満たし, $\phi \leq c$ で 1, $\{\phi \geq d\}$ の近傍で 0 となる滑らかな cutoff 関数 χ を選ぶ. 行列計量

$$G = I_r + \chi(H_0 - I_r)$$

は、外側で I_r とすることにより、 $\mathbb{P}^n$ 上の自明束に延長される。正定値行列の凸結合なので G は正定値である。 $h = h_A^k G$ とおく。直線束とのテンソル積の曲率公式により、

$$(4.8) \quad R^h(u, \bar{u}) = R^G(u, \bar{u}) + k\beta(u, \bar{u})I_r$$

が正確に成立する。 $\{\phi \leq c\}$ では、第一項は H_0 の曲率である。任意の非零の q 個のベクトルの組について、RC-positivity を与える方向の曲率は、半正のスカラー項を加えても正のままである。

$\{\phi < c\}$ のコンパクトな補集合では、 $\beta = \omega_{\text{FS}}$ である。滑らかさより、この補集合上で

$$\langle R^G(u, \bar{u})v, v \rangle_G \geq -C|u|_{\text{FS}}^2|v|_G^2$$

となる有限の $C \geq 0$ が存在する。整数 $k > C$ を選ぶ。式 (4.8) により、この補集合で h は Griffiths-positive となるので、その q 個の直交直和も RC-positive である。 p の近傍では直線束計量が定数であり、 $G = H_0$ だから、付加された曲率は零である。以上で主張が示された。 $\square$

定理 1.2 の証明。 $n = r$, $t = 1/(2r)$ とし、(4.6) の計量をとる。 $q = r - 1$ として補題 4.1 を適用する。 $r - 1$ 個の直交直和の RC-positivity から、それより短い直和の RC-positivity も従う。実際、組に零ベクトルを補って (3.6) を使えばよい。 p における曲率は引き続き R_t である。式 (4.3)–(4.5) により、(2) で述べたすべての不成立と、(3) の行列式曲率の負定値性が従う。 p における任意の正定値の背景縮約 B について、

$$\text{tr } \mathcal{R}_t(B) = (rt - 1) \text{tr } B < 0$$

であるから、 $\mathcal{R}_t(B)$ は正定値にはならない。最後に、 $\mathcal{O}(k)$ の通常の Fubini–Study 計量を r 個直和すると、 E 上の別の Griffiths-positive な計量が得られる。 $\square$

したがって、定理 1.1(3) の整数 r は、すべての底空間の次元と階数に通用する上界として最適である。個々の組 $(\dim X, r)$ を別々に固定したときにも、常に最小の上界であるとは主張しない。 $r = 2$ の場合だけでも、同じ RC-positive Hermitian 束を二つとっても、その直和計量は RC-positive になるとは限らないことが分かる。テンソル二乗についての不成立は、明示的な対称ベクトルから従うものであり、可分解テンソルだけを検査して得たものではない。

5. 幾何学的帰結と境界例

5.1. 既知の有理連結性の判定の言い換え.

系 5.1. X を正次元の滑らかな連結コンパクト Kähler 多様体とする。次の条件は同値である。

- (1) X は射影的かつ有理連結である。
- (2) T_X 上に滑らかな Hermitian 計量 h が存在し、 $(\text{Sym}^2 T_X, h_{\text{sym},2})$ が RC-positive となる。
- (3) T_X 上に滑らかな Hermitian 計量 h が存在し、すべての正の誘導テンソル冪が RC-positive となる。

証明。 Li–Zhang–Zhang [LZZ, Theorem 1.7] により、(1) は $K_{\gamma,h} > 0$ となる Hermitian 計量 γ, h が存在することと同値である。定理 1.1 により、これは (2) および (3) と同値である。平均曲率の正值性から幾何学的結論への含意は、Yang の [Yan18, Corollary 1.5] でもある。そこで必要なコンパクト Kähler という仮定はここで満たされている。 $\square$

この系は、引用した判定定理と本稿の固定計量に関する定理の DIRECT COROLLARY である。準正 HSC から有理連結性を示す新定理ではない。 h と γ のいずれについても Kähler とは主張しない。また、 $\text{Sym}^2 T_X$ 上の任意の RC-positive 計量が T_X から誘導されると仮定しているわけではない。

補足として、定理 1.1 の条件のもとでの通常のテンソル消滅

$$(5.1) \quad H^0(X, (E^*)^{\otimes m}) = 0 \quad (m \geq 1)$$

には、直接的な解析的証明がある。実際、双対テンソルの平均曲率は負定値である。正則切断 s に対する Chern の Bochner 公式を γ で縮約すると、

$$\gamma^{i\bar{j}} \partial_i \partial_{\bar{j}} |s|^2 = |\nabla' s|_\gamma^2 - \langle K_{\gamma, (h^*)^{\otimes m}} s, s \rangle$$

となる。 $|s|^2$ の正の最大点では、左辺は非正、右辺は正である。よって $s = 0$ である。この Hermitian 正則束の切断に対する公式では、Kähler 対称性は不要であり、torsion 項を省略してもいい。消滅結果そのものは平均曲率の正值性から知られている。

5.2. 平均曲率が正でも共通方向があるとは限らない。 $\mathbb{P}^n$, $n \geq 2$ 上で、

$$E = T_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}(-1)$$

に Fubini–Study 計量から誘導される計量を入れる。 ω_{FS} はポテンシャル $\log(1 + |z|^2)$ で正規化し、HSC が 2 となるようにする。原点でこのポテンシャルを展開すると、

$$R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} = \delta_{ij}\delta_{k\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{kj}$$

を得る。Unitary 不変性により、任意の点の正規直交枠で同じ公式が成立する。 $\mathcal{O}(-1)$ とのテンソル積をとると第一項が差し引かれるので、

$$R^E(u, \bar{u}, a, \bar{a}) = |\langle u, a \rangle|^2, \quad K_{\omega_{\text{FS}}, h} = I_E$$

となる。 $u \neq 0$ に対する $R^E(u, \bar{u})$ はすべて階数 1 で、非零の核を持つ。与えられた計量はどの点でも uniformly RC-positive ではないが、定理 1.1 の四条件をすべて満たす。これと定理 1.2 を合わせると、固定した計量についての二つの含意

$$\text{uniform RC-positive} \implies \text{ある } \gamma \text{ に関する平均曲率が正} \implies \text{RC-positive}$$

はいずれも真の含意であると分かる。最初の含意は既に [LZZ, Proposition 3.6] である。ここでの計算は、計量を変更せずに二条件を区別している。

5.3. 半正への置き換えが不十分な理由。 $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ とし、 $L = \text{pr}_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ に引き戻した Fubini–Study 計量を入れる。曲率の係数は $-\text{pr}_2^* \omega_{\text{FS}}$ である。任意の非零水平ベクトルに沿って曲率は零となる。したがって、すべてのテンソル冪およびすべての直交直和は、誘導計量について RC-semipositive である。ところが、任意の正定値の背景計量 γ について、

$$K_{\gamma, L} = -\text{tr}_\gamma \text{pr}_2^* \omega_{\text{FS}} < 0$$

となる。この固定した直線束計量には、非負の平均曲率を与える背景計量はない。第一因子に支持された退化した反変テンソルを許せば縮約は零になるが、その逆は Hermitian 計量ではない。これが、定理 1.1 のすべての狭義不等号を非狭義不等号に置き換える際の正確な障害である。

6. 限界と検証

主結果は、固定した滑らかな束の計量の Chern 曲率に関するものである。Kähler 計量、新たな HSC の構造定理、RC-positive な正則束の分類、あるいは計量の存在予想への反例を与えたものではない。コンパクトな例は抽象的な束であり、局所テンソル (4.1) が Kähler 接束の曲率に必要な追加の対称性を持つとは主張しない。特異空間や monodromy の有限性についても主張しない。

証明に用いたのは、Chern 曲率の公式、有限次元の凸幾何、および正のスカラー曲率を持つ直線束による捻りだけである。厳密な多項式の微分で (4.6) の曲率を確認し、独立した計算でトレースと等重みテンソルの恒等式を確認した。添付コードでは、実成分に限らない複素固有基底でも (3.4) を検査する。これらは符号と縮約の検査である。構成した計量の大域的な RC-positivity は、有限個のサンプルではなく補題 4.1 によって証明される。

文献上の主な不確実性は、定理 1.1 の逆方向やコンパクトな最適性の構成が、別の用語で既に現れている可能性である。証明後にも比較を繰り返し、Li–Zhang–Zhang の平均曲率の研究、Kuang-Ru Wu の最近の二論文、および Wang–Yang–Yau [WYY] を確認した。確認した箇所には本稿の主張を含む statement は見いだせなかった。これは範囲を限定した文献監査であり、新規性の証明ではない。付属の `research_audit.md` に、確認した版・参照箇所、採用しなかった候補、および各主張の状態を記録する。本文で引用する定理等の番号は、以下に指定した arXiv の版に従う。

参考文献

- [Yan18] X. Yang, *RC-positivity, rational connectedness and Yau’s conjecture*, Cambridge J. Math. **6** (2018), 183–212. [arXiv:1708.06713v3](#).
- [Yan20] X. Yang, *RC-positive metrics on rationally connected manifolds*, Forum Math. Sigma **8** (2020), e53. [arXiv:1807.03510v2](#).
- [LZZ] C. Li, C. Zhang and X. Zhang, *Mean curvature positivity and rational connectedness*, [arXiv:2112.00488v3](#) (2024).
- [Wu25] K.-R. Wu, *Uniform RC-positivity of direct image bundles*, [arXiv:2512.10845v1](#) (2025).
- [Wu26] K.-R. Wu, *Uniform weak RC-positivity and rational connectedness*, [arXiv:2604.05981v1](#) (2026).
- [WYY] M. Wang, X. Yang and S.-T. Yau, *Existence of Hermitian metrics with prescribed Hermitian-Yang-Mills tensors I*, [arXiv:2603.10611v4](#) (2026).
- [WY] D. Wu and S.-T. Yau, *Negative holomorphic curvature and positive canonical bundle*, Invent. Math. **204** (2016), 595–604. [arXiv:1505.05802v1](#).
- [TY] V. Tosatti and X. Yang, *An extension of a theorem of Wu–Yau*, J. Differential Geom. **107** (2017), 573–579. [arXiv:1506.01145v3](#).
- [DT] S. Diverio and S. Trapani, *Quasi-negative holomorphic sectional curvature and positivity of the canonical bundle*, [arXiv:1606.01381v4](#) (2018).
- [ZZ] S. Zhang and X. Zhang, *On the structure of compact Kähler manifolds with nonnegative holomorphic sectional curvature*, [arXiv:2311.18779v4](#) (2024).
- [Mat] S.-i. Matsumura, *Fundamental groups of compact Kähler manifolds with semi-positive holomorphic sectional curvature*, [arXiv:2502.00367v1](#) (2025).