

Yau の定理とその応用

Masataka IWAI

August 18, 2026, version 0.01

Abstract

Yau の定理とその応用を勉強した時のノートです.

Contents

1	微分幾何学の復習	3
2	Schauder 評価と楕円型作用素	6
2.1	Harmonic function	6
2.2	楕円型微分作用素	9
2.3	Sobolev 空間と Sobolev 埋め込み定理	10
2.4	Schauder 評価	12
2.5	Riemann 多様体の Schauder 評価と kernel の有限次元性	18
2.6	Laplacian の定義	21
2.7	Poisson 方程式の解の存在	24
2.8	コンパクト Riemann 多様体上の楕円型偏微分作用素の解の有限次元性	26
2.9	調和積分論との関係	32
3	Aubin-Yau の定理と Monge–Ampère 方程式	36
3.1	$c_1(X) < 0$ の場合の Monge–Ampère 方程式	36
3.2	解の openness	37
3.3	解の closedness	40
3.4	C^0 評価と C^2 評価	42
3.5	C^3 評価	49
3.6	Proposition 3.7 の証明	53
3.7	$c_1(X) = 0$ の場合	53
4	Yau の定理の応用 1 Kähler–Einstein 計量の存在と Miyaoka-Yau 不等式	58
4.1	直線束の positivity と $\partial\bar{\partial}$ 補題	58
4.2	Yau の定理と Kähler–Einstein 計量の存在	59
4.3	Miyaoka-Yau 不等式	62
4.4	Miyaoka-Yau 不等式の歴史	64

5	Yau の定理の応用 2 Enoki's Generic nefness theorem と Chern 類の不等式	65
5.1	Enoki's generic nefness theorem	65
5.2	Chern 類の不等式	68
5.3	Generic nefness theorem の歴史	68
6	Yau の定理の応用 3 Enoki's stability theorem	70
6.1	Enoki's stability theorem	70
6.2	Enoki's stability theorem の歴史	74
7	Yau の定理の応用 4 $-K_X$ が nef な多様体の基本群	75
7.1	Fano は単連結	75
7.2	$-K_X$ が semipositive ならば基本群は almost Abelian	75
7.2.1	群論の用語の定義	75
7.2.2	$-K_X$ が semipositive の基本群	76
7.2.3	Proof of Theorem 7.7	76
7.2.4	Proof of Theorem 7.8	79
7.3	$-K_X$ が nef ならば基本群は almost Abelian	85
7.4	$-K_X$ が nef な多様体の基本群の歴史	90

初めに

2020 年に基本群に関して勉強していた内容を今になって復習したくなったため作りました. なお Bishop-Gromov の定理などは引用に留めております. せっくなので Chern 類や榎 (Enoki) 先生の generic nefness theorem [Eno88], Junyan Cao さんの論文 [Cao13] など盛り込みました.

- 2章と3章は [Szé14, Section 2, 3] の内容. [Szé14] のこの部分を改めて見ると, Monge–Ampère 方程式の証明がかなり簡潔にまとまっていて良い本だと思った. 著作権的にまずい場合はこの部分は消します. (ただ加筆が多いので元々の文章とだいぶ異なってる.)
- 4章と5章は半分は Chern 類の内容. [Iwa26, Section 4–6] の内容とかぶっている. 研究で榎 (Enoki) 先生の generic nefness theorem [Eno88] を使っていたが, この際だしこの証明をつけることにした.
- 6章は榎 (Enoki) 先生の stability theorem [Eno88] の内容. [Eno88] は改めて見ても時代を先取りしている論文である. 面白い.
- 7章の基本群の話は, [DPS96, Pau98] に基づく. 一部 Junyan Cao さんの論文 [Cao13] の内容も入れた. これはずっと気になっていたが証明を読んでいなかったなので, この際だしこの証明をつけることにした.

ちなみにこのノートを書くきっかけは, 2026 年 1 月の集会で Juanyong Wang さんが [FGSW26] の講演をしていたから. 7章の内容は何かしら今後進展があると思う.

誤字脱字や間違いはあると思うので注意して読んでください. またかなりの部分を chatGPT を用いて加筆しております.

1 微分幾何学の復習

アインシュタイン規約, 複素多様体, Chern 曲率などに関しては [Iwa26] 参照. ただし 4 章までは Chern 曲率はでない.

以後アインシュタイン規約を用いる. ω Kähler form, α $(1,1)$ -form について $\sharp$ -operator を

$$\sharp^\omega \alpha: T_X \rightarrow T_X \quad \alpha(u, \bar{v}) = \omega(\sharp^\omega \alpha(u), \bar{v})$$

として定める. $\omega = \sqrt{-1}g_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}}$ かつ $\alpha = \sqrt{-1}\alpha_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}}$ ならば

$$\sharp^\omega \alpha := g^{i\bar{k}}\alpha_{j\bar{k}}dz^j \otimes \frac{\partial}{\partial z^{\bar{i}}}$$

である. また $\text{tr}_\omega(\alpha)$ を

$$\text{tr}_\omega(\alpha) := g^{i\bar{j}}\alpha_{i\bar{j}}$$

として定める. 次の公式がある.

$$n\alpha \wedge \omega^{n-1} = \text{tr}_\omega(\alpha)\omega^n$$

tr_ω は調和積分論での Λ_ω と同じである. また定義から以下が成り立つ.

$$\text{tr}(\sharp^\omega \alpha) = \sum_i g^{i\bar{k}}\alpha_{i\bar{k}} = \text{tr}_\omega(\alpha)$$

Kähler の公式をまとめると次のとおり. 以下 $\partial_i := \frac{\partial}{\partial z^i}, \partial_{\bar{j}} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\bar{j}}}$ と略記する.

Summary 1.1. $\omega = \sqrt{-1}g_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}}$ を Kähler 計量とする時

- Christoffel 記号. $\Gamma_{jk}^i = g^{i\bar{l}}\partial_j g_{k\bar{l}}$. Kähler 条件から $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ が成り立つ.
- ω によって T_X に Hermite 計量 h を入れる時, Chern 接続

$$D_h: A^0(T_X) \rightarrow A^1(T_X)$$

が定まる. これは $e_i := \frac{\partial}{\partial z^i}$, s^i を C^∞ 関数とすると, connection form θ は $(1,0)$ -form で $\theta = h^{-1}\partial h$ で与えられる. これはつまり

$$D_h(s^i e_i) = (\partial + \bar{\partial})s^i \otimes e_i + s^j \theta_j^i \otimes e_i \quad \theta_j^i = h^{i\bar{l}}\partial_j h_{k\bar{l}}dz^k = \Gamma_{jk}^i dz^k$$

となる.

- curvature tensor を

$$R_{ik\bar{l}}^j := -\partial_{\bar{l}}\Gamma_{ik}^j$$

と定める. この時 Chern 曲率 F_h は $\text{End}(T_X)$ 値 $(1, 1)$ -form なので

$$F_h := R_{i\bar{k}\bar{l}}^j \underbrace{\frac{\partial}{\partial z^j}}_{\text{End}(T_X) \text{ 値}} \otimes dz^i \otimes \underbrace{dz^k \wedge d\bar{z}^{\bar{l}}}_{(1, 1)\text{-form}}$$

- Riemann curvature tensor を

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} := g_{p\bar{j}} R_{ik\bar{l}}^p$$

とすると次が成り立つ

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = -\partial_i \partial_{\bar{j}} g_{k\bar{l}} + g^{p\bar{q}} (\partial_i g_{k\bar{q}}) (\partial_{\bar{j}} g_{p\bar{l}})$$

また i, k や $\bar{j}, \bar{l}$ は入れ替えても良い. また Griffith positivity や Nakano positivity はこれでわかる.

- Ricci curvature tensor を

$$R_{i\bar{j}} := g^{k\bar{l}} R_{i\bar{j}k\bar{l}}$$

とすると次が成り立つ

$$R_{i\bar{j}} = -\partial_i \partial_{\bar{j}} \log \det(g)$$

Ricci 曲率は以下のように定める.

$$\text{Ric}(\omega) := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}} \in c_1(X) \in H^2(X, \mathbb{R})$$

これによって実 $(1, 1)$ -form になり, $H^2(X, \mathbb{Z})$ に入る.

- Scalar curvature $R(\omega)$ を以下のように定める.

$$R(\omega) := \text{tr}_\omega \text{Ric}(\omega) = \frac{1}{2\pi} g^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}}$$

Ricci 曲率に関しては本によって 2π のズレが出る. [Sz614] は $\text{Ric}(\omega) \in 2\pi c_1(X)$ を採用している

Lemma 1.2 ([Gue16]). $\text{End}(T_X)$ 値 (n, n) -form の式として次が成り立つ.

$$n \cdot \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_h \wedge \omega^{n-1} = \sharp^\omega \text{Ric}(\omega) \cdot \omega^n$$

Proof.

$$\begin{aligned}
n \cdot \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_h \wedge \omega^{n-1} &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{tr}_\omega(\sqrt{-1} F_h) \omega^n &= \frac{1}{2\pi} g^{k\bar{l}} R_{ikl}^j \frac{\partial}{\partial z^j} \otimes dz^i \cdot \omega^n \\
&\quad \text{(公式)} &\quad \text{(curvature tensor の定義)} \\
&= \frac{1}{2\pi} g^{j\bar{p}} g^{k\bar{l}} R_{i\bar{p}k\bar{l}} \frac{\partial}{\partial z^j} \otimes dz^i \cdot \omega^n &= \frac{1}{2\pi} g^{j\bar{p}} R_{i\bar{p}} \frac{\partial}{\partial z^j} \otimes dz^i \cdot \omega^n \\
&\quad \text{(Riemann curvature の定義)} &\quad \text{(Ricci の定義)} \\
&= \sharp^\omega \operatorname{Ric}(\omega) \cdot \omega^n \\
&\quad \text{(\sharp と Ricci の定義)}
\end{aligned}$$

□

2 Schauder 評価と楕円型作用素

Szekelyhidi の lecture note [Szé14, Chapter 2] による

2.1 Harmonic function

Definition 2.1. $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする. C^2 関数 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ が harmonic であるとは

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^n} = 0 \quad \text{on } U$$

が成り立つこと.

Theorem 2.2 (平均値等式 [Szé14, Theorem 2.1]). $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ が *harmonic* で, $x \in U$ かつ $B_r(x) \subset U$ なら

$$f(x) = \frac{1}{\text{Vol}(\partial B_r)} \int_{\partial B_r(x)} f(y) dy.$$

ここで任意の $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ について

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < r\}$$

とし, $B_r := B_r(0)$ とする.

Proof. Green の定理を思い出す.

Theorem 2.3 (Green の定理).

$$\int_U (\psi \Delta \varphi + \nabla \psi \cdot \nabla \varphi) dV = \int_{\partial U} \psi (\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{\partial U} \psi \nabla \varphi \cdot d\mathbf{S}$$

さて $\rho \leq r$ に対して

$$F(\rho) := \int_{\partial B_1} f(x + \rho y) dy$$

と定める. このとき

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \rho} F(\rho) &= \int_{\partial B_1} \sum_{i=1}^n \partial_i f(x + \rho y) y_i dy \stackrel{(\text{chain rule})}{=} \frac{1}{\rho} \int_{\partial B_1} \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y^i} f(x + \rho y) y_i}_{=\nabla_y f(x + \rho y) \cdot y} dy \\
&\stackrel{(\text{Green の定理})}{=} \frac{1}{\rho} \int_{B_1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^i} f(x + \rho y) dy \stackrel{(\text{chain rule})}{=} \rho \int_{B_1} \underbrace{\sum_{i=1}^n \partial_i \partial_i f(x + \rho y)}_{=\Delta f(x + \rho y)} dy \stackrel{(\text{harmonic の仮定})}{=} 0.
\end{aligned}$$

よって F は定数である. また変数変換により

$$F(r) = \int_{\partial B_1} f(x + ry) dy = \frac{\text{Vol}(\partial B_1)}{\text{Vol}(\partial B_r)} \int_{\partial B_r(x)} f(y) dy.$$

以上より

$$F(\rho) = \lim_{r \rightarrow 0} F(r) = \text{Vol}(\partial B_1) \lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{\text{Vol}(\partial B_r)} \int_{\partial B_r(x)} f(y) dy}_{=f(x) \text{ by 微積分の基本定理}} = \text{Vol}(\partial B_1) f(x)$$

□

Corollary 2.4 ([Szé14, Corollary 2.2]). C^∞ 写像 $\eta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が *radially symmetric*, つまり $\|z\| = \|w\|$ ならば $\eta(z) = \eta(w)$ を満たすとする. さらに $\text{Supp}(\eta) \subset B_1$ かつ $\int_{\mathbb{R}^n} \eta d\mu = 1$ とする. $f: B_2 \rightarrow \mathbb{R}$ が *harmonic* なら, 任意の $x \in B_1$ に対して

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \eta(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \eta(x - y) dy$$

Proof. $\eta(y) = \phi(|y|)$ となる $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ をとると,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \eta(y) dy &\stackrel{(\text{置換積分})}{=} \int_0^1 \int_{\text{Vol}(\partial B_1)} f(x - r\theta) \phi(r) r^{n-1} d\theta dr \\
&= \int_0^1 \underbrace{\left(\int_{\text{Vol}(\partial B_1)} f(x - r\theta) d\theta \right)}_{=\text{Vol}(\partial B_1) f(x) \text{ by 平均値等式 (Thm. 2.2)}} \phi(r) r^{n-1} dr = \int_0^1 \text{Vol}(\partial B_1) f(x) \phi(r) r^{n-1} dr \\
&= f(x) \underbrace{\int_0^1 \text{Vol}(\partial B_1) \phi(r) r^{n-1} dr}_{=\int_{\mathbb{R}^n} \eta(y) dy \text{ by 置換積分}} = f(x)
\end{aligned}$$

□

Corollary 2.5 ([Szé14, Corollary 2.3]). ある定数 C_k が存在して, $f: B_2 \rightarrow \mathbb{R}$ が *harmonic* なら

$$\sup_{B_1} |\nabla^k f| \leq C_k \int_{B_2} |f(y)| dy$$

特に C^2 関数が *harmonic* ならば C^∞ である. ただし *multi-index* $l = (l_1, \dots, l_n)$ について

$$\partial^l := \frac{\partial}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{l_n}} \quad \text{and} \quad \nabla^k f(x) := \left(\partial^l f \right)_{l=(l_1, \dots, l_n), |l|=k}$$

と定義する.

Proof. Corollary 2.4 のような $\eta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ をとる. C^2 関数 f が *harmonic* ならば, $x \in B_1$ に対し, Corollary 2.4 から

$$\nabla^k f(x) = \nabla^k \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \eta(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \nabla^k \eta(x-y) dy \quad (2.1)$$

(Cor. 2.4)

よって mollifier による畳み込みの議論と同じく, $\eta \in C^\infty$ なので, $f \in C^\infty$ である.

$$|\nabla^k f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot |\nabla^k \eta(x-y)| dy \leq \left(\sup_{B_1} |\nabla^k \eta| \right) \int_{B_2} |f(y)| dy. \quad (2.1)$$

よって $C_k = \sup |\nabla^k \eta|$ と取れば結論が従う. □

Corollary 2.6 (Liouville's theorem [Szé14, Corollary 2.4]). f が $\mathbb{R}^n$ 上で *harmonic* かつ

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sup_{B_R} |f|}{R} = 0$$

を満たすならば, f は定数.

条件 $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sup_{B_R} |f|}{R} = 0$ を "sub-linear growth をもつ" ともいう.

Proof. $r > 0$ に対し $f_r(x) := f(rx)$ とおくと, これも *harmonic* である. Corollary 2.5 より r によらない定数 C' があって,

$$|\nabla f_r(0)| \leq C_1 \int_{B_2} |f_r(x)| dx \leq C' \sup_{B_2} |f_r| = C' \sup_{B_{2r}} |f|, \quad (2.2)$$

(Cor. 2.5)

一方 $\nabla f_r(0) = r \nabla f(0)$ なので,

$$|\nabla f(0)| = \frac{|\nabla f_r(0)|}{r} \leq C' \frac{\sup_{B_{2r}} |f|}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad (2.2)$$

よって $\nabla f(0) = 0$. f を平行移動することにより, 任意の x について $\nabla f(x) = 0$ が成り立ち, f は定数である. $\square$

2.2 楕円型微分作用素

Definition 2.7. $\mathbb{R}^n$ 上の領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ について, Ω 上の 2 階線形微分作用素

$$L(f) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} + \sum_{l=1}^n b_l \frac{\partial f}{\partial x^l} + cf,$$

で $f, a_{jk}, b_l, c: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は Ω 上の関数で, a_{jk}, b_l, c はすべて滑らかなものを考える.

- L が楕円型であるとは, 係数行列が対称 (つまり $a_{jk} = a_{kj}$) かつ, 行列 (a_{jk}) が正定値であること.
- L が一様楕円型であるとは, ある定数 $\lambda, \Lambda > 0$ があって, 任意のベクトル v について

$$\lambda |v|^2 \leq \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) v^j v^k \leq \Lambda |v|^2, \quad \text{for all } x \in \Omega$$

であること.

$\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) v^j v^k$ のことを L の principal symbol とも言う.

Definition 2.8. Definition 2.7 の状況下で, Ω 上局所可積分な関数 $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ が方程式 $L(f) = g$ の弱解であるとは,

$$\int_{\Omega} f L^*(\varphi) dV = \int_{\Omega} g \varphi dV \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

が成り立つこと. ここで $C_c^\infty(\Omega)$ は support がコンパクトな滑らかな関数とし, dV は $\mathbb{R}^n$ 上の通常の体積測度とし, 形式随伴 L^* を

$$L^*: C_c^\infty(\Omega) \rightarrow C_c^\infty(\Omega) \quad L^*(\varphi) := \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} (a_{jk} \varphi) - \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x^l} (b_l \varphi) + c \varphi$$

と定義する.

随伴は, もし f が $L(f) = g$ の弱解でしかも実際に滑らかならば, 部分積分により通常の意味でも $L(f) = g$ が成り立つように定義されている. 楕円型作用素の基本的性質として, 弱解は自動的に滑らくなる.

Theorem 2.9 ([Szé14, Theorem 2.5]). L は滑らかな係数をもつ線形楕円型作用素, g は滑らかな関数ならば, 方程式 $L(f) = g$ の弱解 f も滑らか.

この定理をもう少し深掘りしよう.¹

2.3 Sobolev 空間と Sobolev 埋め込み定理

Sobolev 埋め込みについてまとめておく.

Definition 2.10. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を領域, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $1 \leq p \leq \infty$ とする. 多重指数 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ に対し $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_N$, $\partial^\beta = \partial_1^{\beta_1} \dots \partial_N^{\beta_N}$ と書く.
 $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ の弱微分 $v = \partial^\beta u$ とは,

$$\int_{\Omega} u \partial^\beta \varphi \, dx = (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} v \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

が成り立つことをいう.

Definition 2.11. Sobolev 空間を

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \partial^\beta u \in L^p(\Omega) \text{ for all } |\beta| \leq m\}$$

- $1 \leq p < \infty$ のときノルムは $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\beta| \leq m} \|\partial^\beta u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$
- $p = \infty$ のときは $\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\beta| \leq m} \|\partial^\beta u\|_{L^\infty(\Omega)}$

を備えた, 完備ノルム空間 (Banach 空間) とする. 覚書として,

$W^{m,p}$ について m が微分の数 p が L^p の部分.

¹[Szé14, Theorem 2.5] には証明の概略として次が書かれていた. 「証明の一つの方法は, まず畳み込みを用いて f の平滑化 f_ε を構成し, ついで ε に依らない形で種々の Sobolev 空間における f_ε の評価を導くことである. その後 Sobolev embedding theorem により, $\varepsilon \rightarrow 0$ のときの f_ε の極限である f が滑らかであることが従う.」 多分この方法でも示せると思う.

$W^{m,p}$ を L_m^p と書くこともある. 多分幾何学の論文ではこっちが多い気がする. $W^{m,2}$ を H^m ともかく. これは多分 Hilbert 空間になるから重要視するのだと思う.

ノルム空間の用語も復習しておく.

Definition 2.12. ノルム空間 X, Y について,

- $X \hookrightarrow Y$ が連続埋め込みであるとは, ある $C > 0$ が存在して $\|u\|_Y \leq C\|u\|_X$ がすべての $u \in X$ に対して成り立つことを
- $X \hookrightarrow Y$ がコンパクト埋め込みであるとは, X の任意の有界列から Y で強収束する部分列が取れることをいう.

以下の定理は Sobolev 空間の基本的な定理である.

Theorem 2.13 (Sobolev 埋め込み定理). $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界 Lipschitz 領域とする. $m \geq 1$, $1 \leq p < \infty$ とする.

- $mp < N$ のとき $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ($1 \leq q \leq \frac{Np}{N-mp}$) が連続埋め込み.
- $mp = N$ のとき $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ($1 \leq q < \infty$) が連続埋め込み.
- $mp > N$ のとき, $m - \ell - \frac{N}{p} > \alpha$, $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $0 < \alpha < 1$ なら

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{\ell,\alpha}(\overline{\Omega})$$

が連続埋め込みである. 特に $m - \frac{N}{p} > 0$ なら

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$$

感覚として微分の回数 m がめちゃくちゃ大きければ, 滑らかになりやすい.

Theorem 2.14 (Rellich–Kondrachov の定理). $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を有界 Lipschitz 領域とする. $m \geq 1$, $1 \leq p < \infty$ とする.

- $mp < N$ のとき $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ($1 \leq q < \frac{Np}{N-mp}$) がコンパクト埋め込みである.
- $mp = N$ のとき $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ($1 \leq q < \infty$) がコンパクト埋め込みである.
- $mp > N$ のとき, $m - \ell - \frac{N}{p} > \alpha$ なら $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{\ell,\alpha}(\Omega)$ がコンパクト埋め込みである.

$C^{\ell,\alpha}(\Omega)$ は Hölder 空間である. この後の Definition 2.16 を参照. 感覚として微分の回数 m がめちゃくちゃ大きければ, $W^{m,p}(\Omega)$ の有界関数列について, 部分点列取り直して, 収束先を $C^{\ell,\alpha}(\Omega)$

から取れる。(その収束先はある程度滑らかである.)

楕円型微分作用素に関して次が成り立つ.

Theorem 2.15 (局所楕円型正則性 [Mel17, Chapter 4, Theorem 3.1]). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とし, L を Ω 上の滑らかな係数をもつ 2 階楕円型微分作用素とする. $U \Subset V \Subset \Omega$, $s, M \in \mathbb{R}$ とする.

u を Ω 上の *distribution* とし, $L(u) \in W_{\text{loc}}^{s,2}(\Omega)$ と仮定する. この時 $u \in W_{\text{loc}}^{s+2,2}(\Omega)$ である. さらに $u \in W^{M,2}(V)$ ならば, ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\|u\|_{W^{s+2,2}(U)} \leq C \left(\|L(u)\|_{W^{s,2}(V)} + \|u\|_{W^{M,2}(V)} \right) \quad (2.3)$$

が成り立つ. ここで C は L, U, V, s, M に依存するが u には依存しない.

これに関しては省略. 定数係数の場合は Fourier 変換で, そうでない場合はその場合に帰着させる. また $s, M \in \mathbb{R}$ でも Sobolev 空間は定義できる. (同じく Melrose のレクチャーノートに定義がある)

Proof of Theorem 2.9. $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ なので f は Ω 上の *distribution* とみなせる. いま $g \in C^\infty(\Omega)$ なので, 任意の $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $g \in W_{\text{loc}}^{s,2}(\Omega)$ である. L は滑らかな係数をもつ 2 階楕円型微分作用素なので, 局所楕円型正則性 (Theorem 2.15) から $f \in W_{\text{loc}}^{s+2,2}(\Omega)$ を得る. s は任意なので, Sobolev 埋め込み (Theorem 2.13) から $f \in C^\infty(\Omega)$ を得る. $\square$

2.4 Schauder 評価

Definition 2.16. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を C^1 級境界をもつ有界開集合とする. ($\mathbb{R}^n$ の開球としてもよい)

- $l = (l_1, \dots, l_n)$ は multi-index について $\partial^l := \frac{\partial}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{l_n}}$
- $\alpha \in (0, 1)$ に対し, Ω 上の関数 f の C^α Hölder 係数を

$$|f|_{C^\alpha} := \sup_{x, y \in \Omega, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

- $k \in \mathbb{N}$ および $\alpha \in (0, 1)$ に対し $C^{k,\alpha}$ -norm (Hölder norm) を

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}} := \sup_{|l| \leq k, x \in \Omega} |\partial^l f(x)| + \sup_{|l|=k} |\partial^l f|_{C^\alpha},$$

- Hölder 空間を次で定める.

$$C^{k,\alpha}(\Omega) := \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_{C^{k,\alpha}} < +\infty\}$$

ここで $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ は k 回連続微分可能な関数である. Hölder norm において, $C^{k,\alpha}(\Omega)$ は完備, つまり $C^{k,\alpha}$ norm に関する任意の Cauchy 列は $C^{k,\alpha}$ で収束する.

Theorem 2.17 (Arzelà–Ascoli theorem [Szé14, Theorem 2.6]). Ω を有界集合とし, $u_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を関数列で $\|u_k\|_{C^{k,\alpha}} < C$ がある定数 C に対して成り立つとする. このとき $l + \beta < k + \alpha$ を満たす任意の l, β に対し, u_k の部分列で $C^{l,\beta}$ において収束するものが存在する.

かっこよくいうと $C^{k,\alpha} \hookrightarrow C^{l,\beta}$ がコンパクト埋め込みである. これは厳密には普通の場合の Arzelà–Ascoli theorem の Corollary である. まず普通の場合の Arzelà–Ascoli theorem を思い出す.

Definition 2.18. K を集合とし, $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ を K 上の実数値関数列とする.

- (1) $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ が K 上で一様有界であるとは, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $j \geq 1$ と任意の $x \in K$ に対して $|f_j(x)| \leq C$ が成り立つこと
- (2) $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ が K 上で同程度連続であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $j \geq 1$ と任意の $x, y \in K$ に対して

$$|x - y| < \delta \implies |f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon$$

が成り立つこと

Theorem 2.19 (Arzelà–Ascoli の定理). $K \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト集合とし, $f_j: K \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数列とする. 関数列 $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ が K 上で一様有界かつ同程度連続であると仮定する. このとき, ある部分列 $\{f_{j_m}\}_{m=1}^\infty$ とある連続関数 $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して,

$$f_{j_m} \longrightarrow f \quad \text{uniformly on } K$$

が成り立つ. すなわち,

$$\|f_{j_m} - f\|_{C^0(K)} = \sup_{x \in K} |f_{j_m}(x) - f(x)| \longrightarrow 0$$

Proof of Theorem 2.17. $\|u_j\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq C$ と仮定する. まず, 各多重指数 γ with $|\gamma| \leq k$ に対して,

$$\|D^\gamma u_j\|_{C^0(\Omega)} \leq C$$

である。さらに $|\gamma| \leq k-1$ なら、平均値の定理より

$$|D^\gamma u_j(x) - D^\gamma u_j(y)| \leq C|x-y| \quad (x, y \in \Omega)$$

が成り立つ。また $|\gamma| = k$ なら、仮定より

$$|D^\gamma u_j(x) - D^\gamma u_j(y)| \leq C|x-y|^\alpha \quad (x, y \in \Omega)$$

である。したがって、各 $|\gamma| \leq k$ について $\{D^\gamma u_j\}_j$ は一様有界かつ同程度連続である。

$\bar{\Omega}$ はコンパクトであるから、Arzelà–Ascoli の定理を有限個の列 $\{D^\gamma u_j\}_{|\gamma| \leq k}$ に対して適用し、対角線論法を用いることで、部分列を取り直して

$$D^\gamma u_j \longrightarrow v_\gamma \quad \text{uniformly on } \Omega \quad (|\gamma| \leq k)$$

としてよい。 $u_j \rightarrow v_0$ かつ $D^\gamma u_j \rightarrow v_\gamma$ なので、任意の $|\gamma| \leq k$ について $v_\gamma = D^\gamma v_0$ である。² よって

$$u_j \longrightarrow u \quad \text{in } C^k(\Omega)$$

である。特に $u_j \rightarrow u$ は C^l で収束する。

残るのは Hölder ノルムの収束である。まず $l < k$ とする。このとき $|\gamma| \leq l$ なら $|\gamma| + 1 \leq k$ であるから、平均値の定理より

$$[D^\gamma(u_j - u)]_{C^{0,1}} \leq C \sum_{|\eta|=|\gamma|+1} \|D^\eta(u_j - u)\|_{C^0}.$$

右辺は C^k 収束により 0 に収束する。したがって任意の $0 \leq \beta \leq 1$ に対して

$$[D^\gamma(u_j - u)]_{C^{0,\beta}} \leq \text{diam}(\Omega)^{1-\beta} [D^\gamma(u_j - u)]_{C^{0,1}} \longrightarrow 0.$$

従って $u_j \rightarrow u$ in $C^{l,\beta}(\Omega)$ である。

次に $l = k$ とする。条件 $l + \beta < k + \alpha$ はこの場合 $\beta < \alpha$ を意味する。すでに

$$D^\gamma u_j \rightarrow D^\gamma u \quad \text{uniformly} \quad (|\gamma| = k)$$

である。また $C^{k,\alpha}$ ノルムの一様有界性より

$$[D^\gamma(u_j - u)]_{C^{0,\alpha}} \leq C'$$

が成り立つ。ここで Hölder 補間不等式

$$[f]_{C^{0,\beta}} \leq 2^{1-\beta/\alpha} \|f\|_{C^0}^{1-\beta/\alpha} [f]_{C^{0,\alpha}}^{\beta/\alpha} \quad (0 \leq \beta < \alpha)$$

²ここは微積分の基本定理から出る。

を $f = D^\gamma(u_j - u)$ に適用すると,

$$[D^\gamma(u_j - u)]_{C^{0,\beta}} \rightarrow 0.$$

従って $u_j \rightarrow u$ in $C^{k,\beta}(\Omega)$ である. 以上より, $l + \beta < k + \alpha$ を満たすすべての l, β に対して, $\{u_j\}$ は $C^{l,\beta}(\Omega)$ で収束する部分列を持つ. $\square$

Theorem 2.20 (Local Schauder estimates [Szé14, Theorem 2.7]). Ω を有界領域, $\Omega' \subset \Omega$ を $d(\Omega', \partial\Omega) > 0$ を満たすより小さい領域とする.

$$L(f) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} + \sum_{l=1}^n b_l \frac{\partial f}{\partial x^l} + cf$$

が滑らかな係数をもつ一様楕円型な 2 階微分作用素である, つまり不等式

$$\lambda|v|^2 \leq \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) v^j v^k \leq \Lambda|v|^2 \quad (2.4)$$

がある一様な $\lambda, \Lambda > 0$ に対して成り立つと仮定する. この時 $\alpha \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$ について, ある定数 C が存在し, 任意の $f \in C^2$ について

$$\|f\|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega')} \leq C(\|L(f)\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|f\|_{C^0(\Omega)})$$

この C は k, α , 領域 Ω, Ω', L の係数の $C^{k,\alpha}$ -norm, 一様楕円性の定数 λ, Λ にのみ依存する.

[Szé14, Theorem 2.7] では”任意の $f \in C^2$ について”の仮定はなかったがおそらく必要だと思う. ただ結局は f が distribution でいけるらしい. かなり苦労するため省略.

Proof. L の係数が定数であり, $k = 0$ かつ $b_l, c = 0$ の場合を示す.(一般の場合はこれに帰着する) また補間不等式を用いることで, 次の弱い主張を示せば良い.

Claim 2.21. Theorem 2.20 の仮定のもとで, $L(f) = g$ とすると, ある定数 C があって,

$$\|f\|_{C^{2,\alpha}(\Omega')} \leq C(\|g\|_{C^\alpha(\Omega)} + \|f\|_{C^2(\Omega)}).$$

もっと強く任意の $x \in \Omega$ に対して $d_x = \min\{1, d(x, \partial\Omega)\}$ とおくと, ある定数 C に対して

$$\min\{d_x, d_y\}^\alpha \frac{|\partial^l f(x) - \partial^l f(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C(\|g\|_{C^\alpha(\Omega)} + \|f\|_{C^2(\Omega)}),$$

が任意の $x, y \in \Omega$ と 2 階偏微分 ∂^l に対して成り立つ.

以下, ある定数 K, λ, Λ で, a_{jk} は $\|a_{jk}\|_{C^\alpha} \leq K$ を満たし, 一様楕円性条件 (2.4) を満たすとして良い.

これは Liouville の定理 (Corollary 2.6) を用いた背理法で示す. $+\infty$ に単調に発散する数列 $C_1, C_2, \dots$, とある Ω 上の関数 a_{jk}, f, g が存在して以下を満たすとする³

- $L(f) = g$, つまり $\sum_{j,k} a_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} = g$ を満たす.
- $\|g\|_{C^\alpha}, \|f\|_{C^2} \leq 1$
- ある $p, q \in \Omega$ とある 2 階偏微分 ∂^l が存在して

$$\min\{d_p, d_q\}^\alpha \frac{|\partial^l f(p) - \partial^l f(q)|}{|p - q|^\alpha} = \max_{p, q \in \Omega, l} \left\{ \min\{d_p, d_q\}^\alpha \frac{|\partial^l f(p) - \partial^l f(q)|}{|p - q|^\alpha} \right\} = C_i \quad (2.5)$$

また l は C_i によらないと仮定して良い. そこで

$$M := \frac{|\partial^l f(p) - \partial^l f(q)|}{|p - q|^\alpha} \geq C_i \quad \text{and} \quad r := |p - q|$$

とし, スケール変換した関数を

$$\tilde{f}(x) := \frac{r^{-2-\alpha} f(p + rx)}{M} \quad F(x) := \tilde{f}(x) - \tilde{f}(0) - \sum_k x^k \partial_k \tilde{f}(0) - \frac{1}{2} \sum_{j,k} x^j x^k \partial_j \partial_k \tilde{f}(0)$$

とする. するとこの関数 F は次の性質を満たす:

- (1) F は原点のまわり半径 d_p/r の球上で定義される.
- (2) $F(0) = \partial F(0) = \partial^2 F(0) = 0$. ∂^2 は任意の二階微分である.
- (3) 原点を中心とする半径 $d_p/(2r)$ の球上で, $|\partial^2 F|_{C^\alpha} \leq 2^\alpha$ が成り立つ.
- (4) $y = \frac{q-p}{r}$ とおくと $|y| = 1$ であり, $|\partial^l F(0) - \partial^l F(y)| = 1$
- (5) F は次を満たす.

$$\sum_{j,k} a_{jk} \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{r^{-\alpha}}{M} (g(p + rx) - g(p)).$$

各々 C_i について, それに対応する関数列 $F^{(i)}, g^{(i)}$ をとる. $y^{(i)} = \frac{q_i - p_i}{r_i}$ なので, $|y_i| = 1$ より点列コンパクト性を使って, $y^{(i)}$ はあるベクトル y に収束すると仮定して良い.

また $\|f\|_{C^2} \leq 1$ を仮定しているので, $i \rightarrow \infty$ で $r = \|p - q\| \rightarrow 0$ より

$$C_i \underset{(2.5)}{=} \min\{d_p, d_q\}^\alpha \frac{|\partial^l f(p) - \partial^l f(q)|}{|p - q|^\alpha} \underset{(\text{by } \|f\|_{C^2} \leq 1)}{\leq} \left(\frac{d_p}{r} \right)^\alpha \underset{i \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \infty$$

³本当は a_{jk}, f, g とも C_i によるので i で添え字をつけないといけないが, 省略する.

(1) から, $F^{(i)}$ は $\frac{d_p}{r}$ 上で定義され, $\frac{d_p}{r} \rightarrow \infty$ なので, (2) と (3) から, $F^{(i)}$ は $\frac{d_p}{2r}$ 上で一様な $C^{2,\alpha}$ 評価を満たす, つまり

$$F^{(i)} \in C^{2,\alpha}(B_{\frac{d_p}{2r}}) \quad \& \quad F^{(i)} \leq C^{2,\alpha}(B_{\frac{d_p}{2r}})$$

である. Arzelà–Ascoli の定理 (Theorem 2.17) を用いて

$$F^{(i)} \rightarrow \exists G \in C^2(B_{d_p/r})$$

とできる. 対角線論法より⁴収束部分列を取り替えることで, 上の r は任意の r として良い. この G は条件 (1)–(4) を満たす. これより

$$\sum_{j,k} a_{jk} \frac{\partial^2 F^{(i)}(x)}{\partial x_j \partial x_k} \underset{(5)}{=} \frac{1}{M} r^{-\alpha} \underbrace{(g(p+rx) - g(p))}_{\leq r^\alpha |x|^\alpha} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \sum_{j,k} a_{jk} \frac{\partial^2 G}{\partial x_j \partial x_k} = 0.$$

よって a_{jk} を用いたしかるべき行列 T を用いて, $H(x) = G(Tx)$ とすれば, H は $\mathbb{R}^n$ 全体で定義された harmonic 関数になる. Corollary 2.5 により $H \in C^\infty$ は滑らかで, 二階微分 $\partial^l H$ もまた harmonic である.

さらに (2) と (3) から H の各二階微分は Liouville の定理 (Corollary 2.6) より定数である. よって $\partial^l G \equiv 0$ だがこれは (4) に矛盾する. $\square$

もっと頑張れば次を示すことができる

Proposition 2.22 (Local Schauder estimates 2 [Szé14, Proposition 2.8]). Ω を有界領域, $\Omega' \subset \Omega$ を $d(\Omega', \partial\Omega) > 0$ を満たすより小さい領域とする.

$$L(f) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{l=1}^n b_l \frac{\partial f}{\partial x^l} + cf$$

が滑らかな係数をもつ一様楕円型な 2 階微分作用素である, つまり不等式

$$\lambda|v|^2 \leq \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) v^j v^k \leq \Lambda|v|^2 \tag{2.6}$$

がある一様な $\lambda, \Lambda > 0$ に対して成り立つと仮定する. この時 $\alpha \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$ について, ある定数 C が存在し, 任意の $f \in C^2$ について

$$\|f\|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega')} \leq C(\|L(f)\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + \|f\|_{L^1(\Omega)})$$

が成り立つ.

⁴ $r = 1$ の時に並べて, その中から $r = 2$ の時に並べて... をやって, 最後に対角線上になある関数列をとってくる

これも結局は f が distribution でいけるらしい. ただかなり苦勞するため省略. [Szé14, Proposition 2.8] に証明がなかったので chatGPT につけてもらうことにした.

Proof. Theorem 2.20 から,

$$\|f\|_{C^0(\Omega_1)} \leq C (\|L(f)\|_{C^\alpha(\Omega)} + \|f\|_{L^1(\Omega)})$$

が $\Omega' \Subset \Omega_1 \Subset \Omega$ について成り立つことを示せば良い. $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$ は compact なので, ある $r > 0$ と有限個の $x_1, \dots, x_N \in \Omega_1$ を

$$\Omega' \subset \bigcup_{i=1}^N B_r(x_i), \quad B_{2r}(x_i) \Subset \Omega$$

となるように取ることができる. よって $\Omega_1 = B_r(x) \Subset B_{2r}(x) = \Omega$ の場合に示せば良い.

$n = \dim \Omega$ とする. Gilbarg–Trudinger の局所 maximum principle [GT01, Corollary 9.21] を $p = 1$ として $B_r(x) \Subset B_{2r}(x)$ に適用すると, ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\|f\|_{L^\infty(B_r(x))} \leq C (\|f\|_{L^1(B_{2r}(x))} + \|L(f)\|_{L^n(B_{2r}(x))}) \quad (2.7)$$

が成り立つ.⁵ ここで r は固定されているので, scaling によって現れる r のべきは定数 C に含めている. また

$$\|L(f)\|_{L^n(B_{2r}(x))} \leq \text{Vol}(B_{2r}(x))^{1/n} \|L(f)\|_{C^0(\Omega)} \leq C \|L(f)\|_{C^\alpha(\Omega)}. \quad (2.8)$$

であるので, C^0 ノルムと L^∞ ノルムが同じことから (2.7) と (2.8) より従う. $\square$

2.5 Riemann 多様体の Schauder 評価と kernel の有限次元性

以下 Riemann 多様体の場合を考える. ただし多様体は常に第 2 可算で向きづけ可能とする. 一般の場合の Hölder 空間などの定義は, Levi-Civita 接続などを用いて定義する. が, 少し厄介なので, 今回は M がコンパクト Riemann 多様体の場合のみを考える. この場合, $\mathcal{U}$ という有限開被覆をとって, Hölder norm を任意のテンソル T について

$$\|T\|_{C^{k,\alpha}} := \sup_{U \in \mathcal{U}} \|T|_U\|_{C^{k,\alpha}(U)}$$

と定義できる. この Hölder ノルムは, チャートによって異なるが, 同値なノルムになるので有限性などには影響がない.

Definition 2.23. Riemann 多様体上の線形 2 回楕円型偏微分作用素とは, 各局所チャート

⁵ここに $f \in C^2$ の仮定を使っている. この定理を使うなら $f \in W^{2,n}$ が必要. 有界領域上では L^n ノルムは L^∞ ノルムで抑えられる.

で 2 階線形微分作用素

$$L(f) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} + \sum_{l=1}^n b_l \frac{\partial f}{\partial x^l} + cf,$$

とかけて行列 (a_{jk}) が正定値かつ対称 $(a_{jk} = a_{kj})$ となること

M がコンパクトならば, Definition 2.7 より, 一様楕円型となるような座標チャート V_i によって多様体を被覆することができる. Theorem 2.20 の local Schauder estimate を $U_i \Subset V_i$ で使えば次を得る.

Theorem 2.24 (Schauder estimates [Szé14, Theorem 2.9]). (M, g) をコンパクト Riemann 多様体とし, L を M 上の線形 2 回楕円型偏微分作用素とする. 任意の $k \in \mathbb{N}$ と $\alpha \in (0, 1)$ に対し, ある定数 C が存在して

$$\|f\|_{C^{k+2,\alpha}(M)} \leq C(\|L(f)\|_{C^{k,\alpha}(M)} + \|f\|_{L^1(M)})$$

が成り立つ. ここで C は $(M, g), k, \alpha, L$ の係数の $C^{k,\alpha}$ -ノルム, および各チャートの一様楕円性の定義での定数 λ, Λ にのみ依存する.

特に $L(f)$ と L の係数が $C^{k,\alpha}$ である時, $f \in C^2$ ならば $f \in C^{k+2,\alpha}$ である.

この Corollary はよく使う.

Corollary 2.25 ([Szé14, Corollary 2.10]). L をコンパクト Riemann 多様体 M 上の線形 2 回楕円型偏微分作用素とする. このとき L の kernel

$$\ker L = \{f \in L^2(M) \mid f \text{ は } Lf = 0 \text{ の弱解}\}$$

は滑らかな関数からなる有限次元空間である.

Proof. Theorem 2.24 から $Lf = 0$ の任意の弱解は, L の係数が滑らかなので, f も滑らかである. $\ker L$ が有限次元であることを示すために, L^2 計量に関して $\ker L$ の閉単位球が (点列) コンパクトであることを示す.(下の Remark 2.27 参照)

以下 $f_k \in \ker L$ を $\|f_k\|_{L^2(M)} \leq 1$ を満たす関数列とする. ここで Hölder の不等式を思い出す.

Theorem 2.26 (Hölder の不等式). (X, μ) 測度空間, $1 \leq p, q \leq +\infty$ とし, $f \in L^p(X), g \in$

$L^q(X)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とすると

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

特に今 M がコンパクトなので, ある定数 C_1 があって

$$\|f_k\|_{L^1(M)} \leq \underbrace{\|1\|_{L^2(M)}}_{<+\infty \text{ by } M \text{ コンパクト}} \|f_k\|_{L^2(M)} \leq C_1$$

とできる. Theorem 2.24 の Schauder 評価を適用すると, ある定数 C_2 が存在して

$$\|f_k\|_{C^{2,\alpha}(M)} \leq C \left(\underbrace{\|L(f_k)\|_{C^{2,\alpha}(M)}}_{=0 \text{ by 仮定}} + \|f_k\|_{L^1(M)} \right) \leq C_2$$

(Thm. 2.24)

を得る. Arzera-Ascoli の定理 Theorem 2.17 から, C^2 収束する部分列

$$f_{k_l} \rightarrow \exists f \in C^2(M)$$

が取れる. 今 M がコンパクトなので, L の係数の関数は上に有界で, 特に

$$|L(f)|_{C^0} \leq \sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|_{C^0} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} \right|_{C^0} + \sum_{l=1}^n |b_l|_{C^0} \left| \frac{\partial f}{\partial x^l} \right|_{C^0} + |c|_{C^0} |f|_{C^0} \lesssim \|f\|_{C^2}$$

である. 特に $L: C^2(M) \rightarrow C^0(M)$ は Hölder ノルムで連続である. よって $f_{k_l} \rightarrow f \in C^2(M)$ なので, L の連続性から $f \in \ker L$. また $\|f\|_{L^2(M)} \leq 1$ でもある. よって, $\ker L$ の単位球内の任意の列が収束部分列をもち点列コンパクトである. $\square$

Remark 2.27. ノルム空間は距離空間なのでコンパクトと点列コンパクトは同値である. また次が成り立つ.

Lemma 2.28. ノルム空間が無限次元ならば, 閉単位球が (点列) コンパクトでない

Proof. B を閉単位球とする $v_i \in B$ で, $\|v_i\| = 1$ かつ $\|v_i - v_j\| \geq \frac{1}{2}$ となるものを構成すれば良い. $v_1, \dots, v_m$ まで作れたとする. $W_m := \text{Span}(v_1, \dots, v_m)$ とすると $W_m \subsetneq V$ である. よって Riesz の補題より

$$d(v_{m+1}, W_m) \geq \frac{1}{2} \quad \|v_{m+1}\| = 1$$

が取れる. これを繰り返せば良い. $\square$

2.6 Laplacian の定義

以下 Kähler 多様体で議論をする. 今後の表示を簡単にするために共変微分を定義する⁶

Definition 2.29. (X, g) を Kähler 多様体とする. h を g が誘導する T_X の Hermite 計量とし, $D_h: A^0(T_X) \rightarrow A^1(T_X)$ を Chern 接続とする.
 $(z^1, \dots, z^n)$ を局所座標として, local Chart で書くと, Chern 接続

$$D_h: A^0(T_X) \rightarrow A^1(T_X)$$

は $e_i := \frac{\partial}{\partial z^i}$, s^i を C^∞ 関数とすると, connection form θ は $(1, 0)$ -form で $\theta = h^{-1}\partial h$ で与えられる. これはつまり

$$D_h(s^i e_i) = (\partial + \bar{\partial})s^i \otimes e_i + s^j \theta_j^i \otimes e_i \quad \theta_j^i = \underbrace{h^{i\bar{l}} \partial_j h_{k\bar{l}}}_{=: \Gamma_{jk}^i} dz^k = \Gamma_{jk}^i dz^k$$

となる. そこで共変微分を

$$\begin{aligned} \nabla_k: A^0(T_X) &\rightarrow A^0(T_X) \\ s^i e_i &\mapsto D_h(s^i e_i)(\partial_k) = \left((\partial_k s^i dz^k + s^j \Gamma_{jk}^i dz^k) \otimes e_i \right) (\partial_k) = (\partial_k s^i + s^j \Gamma_{jk}^i) \otimes e_i \\ \nabla_{\bar{k}}: A^0(T_X) &\rightarrow A^0(T_X) \\ s^i e_i &\mapsto D_h(s^i e_i)(\partial_{\bar{k}}) = \left((\partial_{\bar{k}} s^i d\bar{z}^k \otimes e_i) \right) (\partial_{\bar{k}}) = (\partial_{\bar{k}} s^i) \otimes e_i \end{aligned}$$

と定義する.

Remark 2.30. [BG13, (3.6)] にあった公式

$$\nabla_k X^i = \partial_k X^i + \Gamma_{jk}^i X^j, \quad \nabla_{\bar{k}} X^i = \partial_{\bar{k}} X^i, \quad \nabla_k \bar{Y}^{\bar{i}} = \partial_k \bar{Y}^{\bar{i}}, \quad \nabla_{\bar{k}} \bar{Y}^{\bar{i}} = \partial_{\bar{k}} \bar{Y}^{\bar{i}} + \overline{\Gamma_{jk}^i} \bar{Y}^{\bar{j}}.$$

は正確にいうと

$$\nabla_k X^i e_i = (\partial_k X^i + \Gamma_{jk}^i X^j) e_i \quad \nabla_{\bar{k}} X^i e_i = (\partial_{\bar{k}} X^i) e_i$$

のことである (この i 成分を見ている.) 上の 3,4 つ目の式は $A^0(\overline{T_X}) \rightarrow A^1(\overline{T_X})$ の Chern 接続を見ている.

⁶なぜこのような定義にしたかというところ岩井が Riemannian 幾何学をよくわかっていないからである. ただ Kähler ならば Chern 接続と Levi-Civita 接続は同じなので, Levi-Civita 接続をよくわかってなくても Chern 接続を用いて共変微分は定義できる. 多分これは少数派である. 普通は Levi-Civita 接続の方がメジャーである. 同様に Riemann 曲率もよくわかってないが, Chern 曲率と同じなので, こっちで理解している. Hermite 多様体を扱いたい人は別の定義を見てほしい.

[BG13, (3.7)] にあった公式も見えておくと,

$$\nabla_k a_i = \partial_k a_i - \Gamma_{ik}^j a_j, \quad \nabla_{\bar{k}} a_i = \partial_{\bar{k}} a_i, \quad \nabla_k b_{\bar{i}} = \partial_k b_{\bar{i}}, \quad \nabla_{\bar{k}} b_{\bar{i}} = \partial_{\bar{k}} b_{\bar{i}} - \overline{\Gamma_{ik}^j} b_{\bar{j}}.$$

覚書として上つき文字には $+\Gamma$ して下つき文字には $-\Gamma$ する.

Definition 2.31. Riemannian 多様体について, Laplacian を次で定める

$$\Delta_{\text{Riem}} f := \text{div}(\text{grad } f) = g_{\mathbb{R}}^{ab} (\partial_a \partial_b f - \Gamma_{ab}^c \partial_c f) \quad (\text{locally})$$

X を複素多様体として, 複素 Laplacian を次で定める

$$\Delta(f) = \text{tr}_\omega(\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} f) = g^{l\bar{k}} \partial_l \partial_{\bar{k}} f \quad (\text{locally})$$

Lemma 2.32. Kähler 多様体上では, 複素 Laplacian は通常の Riemannian Laplacian の半分になり, 局所正則座標を用いて

$$\Delta f = g^{k\bar{l}} \nabla_k \nabla_{\bar{l}} f = g^{k\bar{l}} \partial_k \partial_{\bar{l}} f$$

と書ける. 特に *elliptic* である.

Proof. Kähler 多様体上では, 複素 Laplacian は通常の Riemannian Laplacian の半分になることは調和積分論の議論から.

$\nabla_k \nabla_{\bar{l}} f$ の定義は

$$\bar{\partial}: A^0(X) \rightarrow A^{0,1}(X) = A^0(\overline{\Omega_X}) \quad f \mapsto D(f) = Df$$

$$D'_{\overline{\Omega_X}}: A^0(\overline{\Omega_X}) \rightarrow A^{1,0}(\overline{\Omega_X}) \quad \alpha \mapsto D'_{\overline{\Omega_X}}(\alpha)$$

とした場合の

$$\nabla_k \nabla_{\bar{l}}: A^0(X) \rightarrow A^0(X) \quad f \mapsto (D'_{\overline{\Omega_X}} \circ \bar{\partial})(f)(\partial_k \otimes \partial_{\bar{l}})$$

である. よって

$$(D'_{\overline{\Omega_X}} \circ \bar{\partial})(f) = (D'_{\overline{\Omega_X}}(\partial_l f d\bar{z}^{\bar{l}})) = \partial_k \partial_{\bar{l}} f dz^k \otimes d\bar{z}^{\bar{l}}$$

であるので, $g^{k\bar{l}} \nabla_k \nabla_{\bar{l}} f = g^{k\bar{l}} \partial_k \partial_{\bar{l}} f$ が言える.

楕円型であるのは

$$\partial_k \partial_{\bar{k}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial(x^j)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(y^j)^2} \right)$$

となることから, $g_{i\bar{j}} = \delta_{ij}$ とみなせばよい. □

Remark 2.33. 微分幾何学的な証明なら, local には $\Delta_{\text{Riem}} f = g_{\mathbb{R}}^{ab}(\partial_a \partial_b f - \Gamma_{ab}^c \partial_c f) = 2g^{k\bar{l}} \nabla_k \nabla_{\bar{l}} f$ である. そして一般には $\nabla_k \nabla_{\bar{l}} f = \partial_k \partial_{\bar{l}} f - \Gamma_{k\bar{l}}^a \partial_a f$ である. Kähler 計量では mixed Christoffel symbol $\Gamma_{k\bar{l}}^a$ が消えるから, ほしい式が得られる.

Definition 2.34. M をコンパクト実多様体とする. $d: A^0(M) \rightarrow A^1(M)$ の形式的随伴を $d^*: A^1(M) \rightarrow A^0(M)$ を dV を volume form として

$$\int_M \langle \alpha, df \rangle dV = \int_M \langle d^* \alpha, f \rangle dV \quad \forall f \in A^0(M), \alpha \in A^1(M),$$

が成り立つように定める.

X を複素多様体とする. $\bar{\partial}: A^0(X) \rightarrow A^{0,1}(X)$ の形式的随伴 $\bar{\partial}^*: \Omega^{0,1} X \rightarrow C^\infty(X)$ を

$$\int_X \langle \alpha, \bar{\partial} f \rangle dV = \int_X \langle \bar{\partial}^* \alpha, f \rangle dV, \quad \forall f \in A^0(X), \alpha \in A^{0,1}(X),$$

が成り立つように定める. ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は計量によって誘導される自然な Hermitian form であり, dV は Riemannian volume form なので $dV = \frac{\omega^n}{n!}$ である.

局所座標では $\alpha = \alpha_{\bar{l}} d\bar{z}^l$ と書ける. 任意の compact support を持つ smooth function f に対して

$$\int_X \langle \bar{\partial}^* \alpha, f \rangle \frac{\omega^n}{n!} \underset{\text{(随伴)}}{=} \int_X \langle \alpha, \bar{\partial} f \rangle \frac{\omega^n}{n!} \underset{\text{(定義)}}{=} \int_X g^{k\bar{l}} \alpha_{\bar{l}} \overline{\partial_k f} \frac{\omega^n}{n!} = \int_X g^{k\bar{l}} \alpha_{\bar{l}} \partial_k \bar{f} \frac{\omega^n}{n!} \underset{\text{(部分積分)}}{=} - \int_X g^{k\bar{l}} \nabla_k \alpha_{\bar{l}} \bar{f} \frac{\omega^n}{n!}.$$

したがって $\bar{\partial}^* \alpha = -g^{k\bar{l}} \nabla_k \alpha_{\bar{l}}$. さらに Kähler metric について $\Gamma_{k\bar{l}}^{\bar{q}} = 0$ なので

$$\bar{\partial}^* \alpha = -g^{k\bar{l}} \left(\partial_k \alpha_{\bar{l}} - \Gamma_{k\bar{l}}^{\bar{q}} \alpha_{\bar{q}} \right) = -g^{k\bar{l}} \partial_k \alpha_{\bar{l}}.$$

以上をまとめると

Lemma 2.35. $f \in A^0(X), \alpha \in A^{0,1}(X)$ について

$$\bar{\partial}^* \alpha = -g^{k\bar{l}} \nabla_k \alpha_{\bar{l}} = -g^{k\bar{l}} \partial_k \alpha_{\bar{l}} \quad -\bar{\partial}^* \bar{\partial} f = g^{k\bar{l}} \partial_k \partial_{\bar{l}} f = \Delta f$$

特に複素 Laplacian は $\Delta = -\bar{\partial}^* \bar{\partial}$ となる.

Remark 2.36. 同様に任意の (p, q) -forms に Hodge Laplacian

$$\Delta = -\bar{\partial}^* \bar{\partial} - \bar{\partial} \bar{\partial}^*$$

を与える. これは調和積分論 (Subsection 2.9) で使う Laplacian と符号が逆である. 理由は Hodge

theory の Laplacian は

$$\int_X \langle \bar{\partial}^* \bar{\partial} \alpha, \beta \rangle dV = \int_X \langle \bar{\partial} \alpha, \bar{\partial} \beta \rangle dV \geq 0$$

が成り立つようにしているから. これは部分積分において

$$\int_{\mathbb{R}} (f'g) dx = - \int_{\mathbb{R}} f g' dx = \int_{\mathbb{R}} -f g' dx$$

にしていることに似ている. 一方今使っている Laplacian $\Delta = -\bar{\partial}^* \bar{\partial}$ は楕円型作用素にするためにこの符号を用いている.

2.7 Poisson 方程式の解の存在

Theorem 2.37 (Poisson 方程式の解の存在). (X, ω) をコンパクト Kähler 多様体とし, $\rho: X \rightarrow \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数で $\int_X \rho dV = 0$. を満たすものとする. ただし $dV = \frac{\omega^n}{n!}$ とする. この時ある C^∞ 級関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ で, $\Delta f = \rho$ となるものが存在する.

逆に $\Delta f = \rho$ ならば, 部分積分によって,

$$\int_X \Delta f, dV \underset{\text{(定義)}}{=} - \int_X \langle \bar{\partial}^* \bar{\partial} f, 1 \rangle dV \underset{\text{(随伴)}}{=} - \int_X \langle \bar{\partial} f, \bar{\partial} 1 \rangle dV = 0.$$

であるので, $\int_X \rho dV = 0$ という条件は必要である.

Proof. まず変分問題, つまり汎関数

$$E: W^{1,2}(X) \rightarrow \mathbb{R} \quad E(f) = \int_X \left(\frac{1}{2} \underbrace{|\nabla f|^2}_{=g^{k\bar{l}} \nabla_k f \nabla_{\bar{l}} f = g^{k\bar{l}} \partial_k f \bar{\partial}_{\bar{l}} f} + \rho f \right) dV$$

を最小化する関数 f を, 制約 $\int_X f dV = 0$ のもとで探す.

Claim 2.38. ある定数 ε, C が存在して

$$E(f) \geq \varepsilon \|f\|_{W^{1,2}}^2 - C$$

が $\int_X f dV = 0$ である $f \in W^{1,2}(X)$ に対して成り立つ.

Proof of Claim 2.38. Poincaré inequality を思い出す

Theorem 2.39 (Poincaré inequality). (M, g) をコンパクト *Riemann* 多様体とする. ある定数 $C_P = C_P(M, g) > 0$ が存在して, 任意の $f \in W^{1,2}(M)$ に対して

$$\int_M |f - f_M|^2 dV_g \leq C_P \int_M |\nabla f|^2 dV_g$$

が成り立つ. ただし $f_M := \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M f dV_g$ を f の平均値とする.

これにより, 特に今仮定から $\int_X f dV = 0$ なので,

$$\|f\|_{L^2(X)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^2(X)} \quad (2.9)$$

以上より Young 不等式 $ab \leq \frac{1}{4}a^2 + b^2$ を用いると,

$$\left| \int_X \rho f dV \right| \underset{\text{(Cauchy-Schwarz)}}{\leq} \|\rho\|_{L^2(X)} \|f\|_{L^2(X)} \underset{(2.9)}{\leq} C \|\rho\|_{L^2(X)} \|\nabla f\|_{L^2(X)} \underset{\text{(Young)}}{\leq} \frac{1}{4} \|\nabla f\|_{L^2(X)}^2 + C^2 \|\rho\|_{L^2(X)}^2 \quad (2.10)$$

以上より定数 C^2 を C に取り替えて,

$$\int_X \left(\frac{1}{2} |\nabla f|^2 + \rho f \right) dV \underset{(2.10)}{\geq} \frac{1}{2} \|\nabla f\|_{L^2(X)}^2 - \frac{1}{4} \|\nabla f\|_{L^2(X)}^2 - C \|\rho\|_{L^2(X)}^2 = \frac{1}{4} \|\nabla f\|_{L^2(X)}^2 - C \quad (2.11)$$

もう一回 Poincaré inequality を使って

$$\|f\|_{W^{1,2}}^2 \underset{\text{(定義)}}{=} \|f\|_{L^2}^2 + \|\nabla f\|_{L^2}^2 \underset{(2.9)}{\lesssim} \|\nabla f\|_{L^2}^2$$

よって (2.11) と合わせて,

$$E(f) = \int_X \left(\frac{1}{2} |\nabla f|^2 + \rho f \right) dV \underset{(2.11)}{\geq} \varepsilon \|f\|_{W^{1,2}}^2 - C$$

□

今 $\inf E(f)$ に近づくような列 f_j を考える. Claim 2.38 より $\|f_j\|_{W^{1,2}}$ は有界なので, Hilbert 空間論の一般論から

$$f_{j_k} \xrightarrow{\text{弱収束}} \exists F \in W^{1,2}$$

を取れる.⁷ 今連続汎函数 $f \mapsto \int_X f dV$ と $f \mapsto \int_X \rho f dV$ を考えると, 弱収束の定義から

$$\int_X F dV = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_X f_{j_k} dV = 0 \quad \text{and} \quad \int_X \rho F dV = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_X \rho f_{j_k} dV \quad (2.12)$$

(弱収束の定義) (f_{j_k} の定義) (弱収束の定義)

一方ノルムの下半連続性⁸より

$$f_{j_k} \xrightarrow{\text{弱収束}} F \in W^{1,2} \Rightarrow \nabla f_{j_k} \xrightarrow{\text{弱収束}} \nabla F \in L^2 \Rightarrow \|\nabla F\|_{L^2} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f_{j_k}\|_{L^2} \quad (2.13)$$

これを用いると, $\int_X F dV = 0$ から

$$\begin{aligned} E(F) &= \int_X \left(\frac{1}{2} |\nabla F|^2 + \rho F \right) dV \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X \left(\frac{1}{2} |\nabla f_{j_k}|^2 + \rho f_{j_k} \right) dV = \liminf_{k \rightarrow \infty} E(f_{j_k}) \leq E(F) \end{aligned}$$

(F の定義) (2.12) & (2.13) (f_{j_k} の定義)

よって F は E の最小化関数である.

あとはこの F が滑らかで $\Delta F = \rho$ であることを示す. 任意の滑らかな平均 0 の関数 φ について

$$H: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \quad H(t) := E(F + t\varphi)$$

を考えると, これは $t = 0$ で最小値を取る. よって微分は 0 となる

実際 $t = 0$ で微分すると

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} H = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_X \left\{ \frac{1}{2} |\nabla F + t\nabla\varphi|^2 + \rho \cdot (F + t\varphi) \right\} dV \\ &= \int_X \{ \langle \nabla F, \nabla \varphi \rangle + \rho \varphi \} dV = \int_X (-\Delta F + \rho) \varphi dV \end{aligned}$$

これが任意の滑らかな平均 0 の関数 φ について成り立つので, F は $\Delta F = \rho$ の弱解である. 以上より Theorem 2.9 から F は滑らかである. □

2.8 コンパクト Riemann 多様体上の楕円型偏微分作用素の解の有限次元性

この内容は chatGPT に証明と議論を埋めてもらった.

⁷弱収束とは任意の連続汎函数を当てて収束. 強収束はノルム収束. Hilbert 空間なら弱収束は任意の内積をとって収束と同じ.

⁸一般に弱収束するならば, ノルムは下半連続

Theorem 2.40. M をコンパクト Riemann 多様体, L を係数が C^∞ である線形 2 回楕円型偏微分作用素とする. この時 L は以下の同型を誘導する.

$$L: (\ker L)^\perp \cap C^{k+2,\alpha} \rightarrow (\ker L^*)^\perp \cap C^{k,\alpha}.$$

さらに $\ker L$ は有限次元である.

特に任意の $k \geq 0$ と $\alpha \in (0, 1)$ について, $\rho \in C^{k,\alpha}(M)$ が L^2 内積で $\rho \perp \ker L^*$ となるならば, $f \in C^{k+2,\alpha}$ で $f \perp \ker L$ かつ $Lf = \rho$ となるものがただ一つ存在する.

Proof. 局所楕円型評価 (Theorem 2.15) において $s = 0$ とすることで, ある定数 $C > 0$ が存在して任意の $f \in W^{2,2}(M)$ について

$$\|f\|_{W^{2,2}(M)} \leq C(\|Lf\|_{L^2(M)} + \|f\|_{L^2(M)}) \quad (2.14)$$

が成り立つ. ここに M がコンパクトを用いている.

(1). まず $\ker L$ が有限次元であることを示す. Theorem 2.9 から $Lf = 0$ の弱解は滑らかなので, $\ker L \subset C^\infty(M)$ である. よって $\ker L \subset L^2(M)$ なので, Corollary 2.25 より有限次元である.

ただ後の補足 (Remark 2.41) のことも考え局所楕円型評価 (2.14) からでも出ること示しておく. $\ker L$ が無限次元であると仮定する. すると L^2 内積に関する正規直交列 $f_i \in \ker L$ かつ $\|f_i\|_{L^2(M)} = 1$ となるものを取りることができる. $Lf_i = 0$ なので, (2.14) から

$$\|f_i\|_{W^{2,2}(M)} \leq C\|f_i\|_{L^2(M)} = C \quad (2.14)$$

となる. 一方 Rellich–Kondrachov の定理 (Theorem 2.14) より $W^{2,2}(M) \hookrightarrow L^2(M)$ はコンパクト埋め込みである. 特に Definition 2.12 より f_i は $L^2(M)$ で収束する部分列を持つ. しかし $i \neq j$ について

$$\|f_i - f_j\|_{L^2(M)}^2 = \|f_i\|_{L^2(M)}^2 + \|f_j\|_{L^2(M)}^2 = 2$$

であり, これは矛盾である. よって $\ker L$ は有限次元である. 同じ議論を L^* に適用すれば $\ker L^*$ も滑らかな関数からなる有限次元空間である.

(2). 次に $(\ker L)^\perp$ 上では (2.14) の $\|f\|_{L^2}$ の項を除くことができることを示す. つまり, ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\|f\|_{W^{2,2}(M)} \leq C\|Lf\|_{L^2(M)} \quad \text{for all } f \in W^{2,2}(M) \cap (\ker L)^\perp \quad (2.15)$$

となることを示す. 背理法. これが成り立たないとすると, ある $f_i \in W^{2,2}(M) \cap (\ker L)^\perp$ が存在して

$$\|f_i\|_{W^{2,2}(M)} = 1, \quad \|Lf_i\|_{L^2(M)} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$$

となる. Rellich–Kondrachov の定理 (Theorem 2.14) から, 部分列を取り直すことで $L^2(M)$ 内で

$f_i \rightarrow f$ と強収束する $f \in L^2(M)$ が存在する. 一方 (2.14) を $f_i - f_j$ に適用すると

$$\|f_i - f_j\|_{W^{2,2}(M)} \leq C(\|Lf_i - Lf_j\|_{L^2(M)} + \|f_i - f_j\|_{L^2(M)}) \xrightarrow{i,j \rightarrow \infty} 0. \quad (2.14)$$

よって f_i は $W^{2,2}(M)$ で Cauchy 列なので $W^{2,2}(M)$ 内で $f_i \rightarrow f$ となる. 特に $Lf = 0$. また $f_i \perp \ker L$ かつ $f_i \rightarrow f$ が L^2 収束なので $f \perp \ker L$. したがって

$$f \in \ker L \cap (\ker L)^\perp = \{0\}$$

より $f = 0$ である. しかし

$$\|f\|_{W^{2,2}(M)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \|f_i\|_{W^{2,2}(M)} = 1$$

となり矛盾である. よって (2.15) が成り立つ.

(3).

$$R := \text{Im}(L: W^{2,2}(M) \rightarrow L^2(M))$$

とおく. まず R が $L^2(M)$ の閉部分空間であることを示す.

$Lf_i \rightarrow \rho$ が $L^2(M)$ で成り立つとする. $\ker L$ への L^2 直交射影を $P: L^2(M) \rightarrow \ker L$ とする.⁹

$$\tilde{f}_i := f_i - Pf_i$$

とおく. $Pf_i \in \ker L$ なので $\tilde{f}_i \perp \ker L$ かつ $L\tilde{f}_i = Lf_i$ である. よって (2.15) から

$$\|\tilde{f}_i - \tilde{f}_j\|_{W^{2,2}(M)} \leq C\|L\tilde{f}_i - L\tilde{f}_j\|_{L^2(M)} = C\|Lf_i - Lf_j\|_{L^2(M)} \xrightarrow{i,j \rightarrow \infty} 0. \quad (2.15)$$

したがって, $W^{2,2}(M)$ は完備なので, ある $f \in W^{2,2}(M)$ が存在して $W^{2,2}(M)$ 内で $\tilde{f}_i \rightarrow f$. 今 $L: W^{2,2}(M) \rightarrow L^2(M)$ は連続なので

$$Lf = \lim_{i \rightarrow \infty} L\tilde{f}_i = \lim_{i \rightarrow \infty} Lf_i = \rho.$$

よって $\rho \in R$ となり, R は閉である.

次に

$$R^\perp = \ker L^* \quad (2.16)$$

を示す. まず $h \in \ker L^*$ とすると, 任意の $f \in W^{2,2}(M)$ について

$$\langle Lf, h \rangle_{L^2} = \langle f, L^*h \rangle_{L^2} = 0$$

なので $h \in R^\perp$. よって $\ker L^* \subset R^\perp$. 逆に $h \in R^\perp$ とする. 任意の $\varphi \in C^\infty(M)$ について

⁹今 $\ker L$ は有限次元なので, 閉部分空間. ただそんなことを知らなくても P は $\ker L$ の有限個の基底を用いて具体的に作れる.

$L\varphi \in R$ なので $\langle L\varphi, h \rangle_{L^2} = 0$. 弱解の定義より, これは h が $L^*h = 0$ の弱解であることを意味する. Theorem 2.9 を L^* に適用すると h は滑らかであり, $h \in \ker L^*$ となる. したがって $R^\perp \subset \ker L^*$. 以上より (2.16) を得る.

R は閉部分空間なので, Hilbert 空間の基本的な性質から $R = (R^\perp)^\perp$. よって (2.16) から

$$\operatorname{Im}(L: W^{2,2}(M) \rightarrow L^2(M)) = (\ker L^*)^\perp. \quad (2.17)$$

(4). 以上を用いて Hölder 空間の間の全射性を示す. $\rho \in C^{k,\alpha}(M)$ かつ $\rho \perp \ker L^*$ とする. (2.17) から, ある $f \in W^{2,2}(M)$ が存在して $Lf = \rho$ となる. さらに f から $\ker L$ への直交射影を引くことで $f \perp \ker L$ として良い. あとは $f \in C^{k+2,\alpha}(M)$ となることを示す.

以下 $C > 0$ は i によらない定数で, 記号の濫用だが, 適宜定数を取り替えていく (つまり C は式の中で異なる可能性がある.) ρ を滑らかな関数で近似する. 有限個の座標チャート上で mollifier を用いることで, $\tilde{\rho}_i \in C^\infty(M)$ で

$$\tilde{\rho}_i \rightarrow \rho \quad \text{in } L^2(M) \quad \text{and} \quad \|\tilde{\rho}_i\|_{C^{k,\alpha}(M)} \leq C\|\rho\|_{C^{k,\alpha}(M)}$$

となるものを取りることができる.

$\ker L^*$ への L^2 直交射影を P^* として $\rho_i := \tilde{\rho}_i - P^*\tilde{\rho}_i$ とおく. $\ker L^*$ は滑らかな関数からなる有限次元空間なので $\rho_i \in C^\infty(M)$, $\rho_i \perp \ker L^*$, $\rho_i \rightarrow \rho$ in $L^2(M)$ であり, ある定数 $C > 0$ があって

$$\|\rho_i\|_{C^{k,\alpha}(M)} \leq C\|\rho\|_{C^{k,\alpha}(M)} \quad (2.18)$$

となる. (2.17) から, 各 i について $Lf_i = \rho_i$, $f_i \perp \ker L$ となる $f_i \in W^{2,2}(M)$ が存在する. ρ_i は滑らかなので Theorem 2.9 から f_i も滑らかである. M はコンパクトなので

$$\|f_i\|_{L^1(M)} \leq C\|f_i\|_{L^2(M)} \leq C\|f_i\|_{W^{2,2}(M)} \stackrel{(2.15)}{\leq} C\|\rho_i\|_{L^2(M)} \leq C\|\rho_i\|_{C^{k,\alpha}(M)} \stackrel{(2.18)}{\leq} C\|\rho\|_{C^{k,\alpha}(M)}. \quad (2.19)$$

また Schauder 評価 (Theorem 2.24) を f_i に適用できて

$$\|f_i\|_{C^{k+2,\alpha}(M)} \stackrel{(\text{Thm. 2.24})}{\leq} C(\|\rho_i\|_{C^{k,\alpha}(M)} + \|f_i\|_{L^1(M)}) \stackrel{(2.18) \& (2.19)}{\leq} C\|\rho\|_{C^{k,\alpha}(M)} \quad (2.20)$$

よって (2.20) と Theorem 2.17 から, 任意の $0 < \beta < \alpha$ について部分列を取り直すことで

$$f_i \rightarrow \tilde{f} \quad \text{in } C^{k+2,\beta}(M)$$

となる $\tilde{f}$ が存在する. この $\tilde{f}$ は f に等しい. なぜならば, また $f_i - f \perp \ker L$ なので, (2.15) から

$$\|f_i - f\|_{W^{2,2}(M)} \stackrel{(2.15)}{\leq} C\|\rho_i - \rho\|_{L^2(M)} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0. \quad (2.15)$$

特に L^2 でも収束するので, 上の $W^{2,2}$ 収束と合わせて一意性から $\tilde{f} = f$ となるためである. よって $f \in C^{k+2,\alpha}(M)$ である.

(5). 最後に単射性を示す. $f \in (\ker L)^\perp \cap C^{k+2,\alpha}(M)$ かつ $Lf = 0$ とする. すると $f \in \ker L$ である一方 $f \perp \ker L$ なので

$$f \in \ker L \cap (\ker L)^\perp = \{0\}.$$

よって $f = 0$ となり, L は単射である.

以上より

$$L: (\ker L)^\perp \cap C^{k+2,\alpha}(M) \rightarrow (\ker L^*)^\perp \cap C^{k,\alpha}(M)$$

は同型である. □

Remark 2.41. $k = \infty$ の場合は Schauder 評価 (Theorem 2.24) は不要で局所楕円型評価 (Theorem 2.15) だけからわかる. これは Sobolev 空間をメインに出した次の定理からである.

Theorem 2.42. M をコンパクト Riemann 多様体, L を係数が C^∞ である線形 2 回楕円型偏微分作用素とする. また L^* を L^2 内積に関する形式的随伴とする.

この時 $\ker L$ および $\ker L^*$ は滑らかな関数からなる有限次元空間である.

さらに任意の $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について, L は Hilbert 空間の同型

$$L: W^{m+2,2}(M) \cap (\ker L)^\perp \xrightarrow{\sim} W^{m,2}(M) \cap (\ker L^*)^\perp$$

を誘導する. ここで $(\ker L)^\perp$ および $(\ker L^*)^\perp$ は L^2 内積に関する直交補空間とする.

さらにある定数 $C_m > 0$ が存在して, 任意の $f \in W^{m+2,2}(M) \cap (\ker L)^\perp$ について

$$\|f\|_{W^{m+2,2}(M)} \leq C_m \|Lf\|_{W^{m,2}(M)} \quad (2.21)$$

が成り立つ. 特に $\rho \in W^{m,2}(M)$ が L^2 内積で $\rho \perp \ker L^*$ となるならば, $f \in W^{m+2,2}(M)$ で $f \perp \ker L$ かつ $Lf = \rho$ となるものがただ一つ存在する.

Proof. Theorem 2.40 の証明で変わる部分は Schauder 評価を使っている (4) の全射性の部分のみである. しかも (4) において, $\rho \in W^{m,2}(M)$ かつ $\rho \perp \ker L^*$ とすると, $\rho \in L^2(M)$ なので, (2.17) から, ある $f \in W^{2,2}(M)$ が存在して

$$Lf = \rho \quad \text{and} \quad f \perp \ker L$$

となる. よって示すのは $f \in W^{m+2,2}(M)$ のみである. これは局所楕円型正則性 (2.14) よりすぐにわかる.

L が Hilbert 空間の同型であることを示す. これは L と L^{-1} の連続性のみが問題である. まず L が

連続なのは, 係数 L の係数が L^∞ より

$$\|Lf\|_{W^{m,2}(M)} \leq C_m \|f\|_{W^{m+2,2}(M)}$$

となるため. 逆写像の連続性は局所楕円型評価 (Theorem 2.15) と (2.15) を組み合わせて

$$\|f\|_{W^{m+2,2}} \leq C_m (\|Lf\|_{W^{m,2}} + \|f\|_{L^2}) \leq C' \|Lf\|_{W^{m,2}} \quad (\text{Thm. 2.15}) \quad (2.15)$$

が成り立つことからわかる. □

Corollary 2.43. Theorem 2.42 と同じ仮定のもとで, $C^\infty(M)$ に *seminorm* の族

$$p_m(f) := \|f\|_{W^{m,2}(M)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

が生成する *Fréchet* 位相を入れる. また $C^\infty(M) \cap (\ker L)^\perp, C^\infty(M) \cap (\ker L^*)^\perp$ には $C^\infty(M)$ から誘導される相対位相を入れる.

この時 L は *Fréchet* 空間の同型

$$L: C^\infty(M) \cap (\ker L)^\perp \xrightarrow{\sim} C^\infty(M) \cap (\ker L^*)^\perp$$

を誘導する.

特に $\rho \in C^\infty(M)$ が L^2 内積で $\rho \perp \ker L^*$ となるならば, $f \in C^\infty(M)$ で $f \perp \ker L$ かつ $Lf = \rho$ となるものがただ一つ存在する.

Proof. まず上で定めた *Fréchet* 位相が通常の C^∞ 位相と一致することを確認する.

M はコンパクトなので, 任意の $m \geq 0$ についてある定数 $C_m > 0$ が存在して

$$\|f\|_{W^{m,2}(M)} \leq C_m \|f\|_{C^m(M)}$$

が成り立つ. 逆に $n = \dim M$ とし, $k \geq 0$ を固定する. $s > k + \frac{n}{2}$ となる整数 s を取れば, Sobolev 埋め込み (Theorem 2.13) からある定数 $C_{k,s} > 0$ が存在して

$$\|f\|_{C^k(M)} \leq C_{k,s} \|f\|_{W^{s,2}(M)}$$

が成り立つしたがって *seminorm* の族 $\{\|\bullet\|_{W^{m,2}(M)}\}_{m \geq 0}$ が生成する位相は通常の C^∞ 位相と一致し, 特に $C^\infty(M)$ は *Fréchet* 空間である.

Theorem 2.42 より $\ker L$ および $\ker L^*$ は滑らかな関数からなる有限次元空間である. 全単射性も Theorem 2.42 から明らか.

最後に *Fréchet* 位相に関する連続性を確認する. L は 2 階微分作用素なので, 任意の $m \geq 0$ につ

いて

$$p_m(Lf) = \|Lf\|_{W^{m,2}(M)} \leq C_m \|f\|_{W^{m+2,2}(M)} = C_m p_{m+2}(f).$$

したがって L は Fréchet 位相について連続である.

一方 Theorem 2.42 の (2.21) から

$$p_{m+2}(f) = \|f\|_{W^{m+2,2}(M)} \leq C_m \|Lf\|_{W^{m,2}(M)} = C_m p_m(Lf)$$

が $f \perp \ker L$ について成り立つ. また $p_0(f) \leq p_2(f) \leq C_0 p_0(Lf)$ でもあるので L^{-1} も Fréchet 位相について連続である. $\square$

なので, コンパクト多様体で調和積分論で使うぶんなら局所楕円型評価 (Theorem 2.15) だけで事足りる. ただ Hölder 空間を使うなら Schauder 評価 (Theorem 2.24) が必要になる.

2.9 調和積分論との関係

この辺りは [Dem12, Section 3] や小林先生の複素幾何の教科書を参照した

Definition 2.44. X をコンパクト複素多様体, E を正則ベクトル束とする. E の Hermite 計量を h , X の Hermite 計量 g とし, Hermitian form ω とする.

- E 値 (p, q) -form の空間 $A^{p,q}(E)$ に内積を

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \int_X \langle \alpha, \beta \rangle_{\omega, h} \frac{\omega^n}{n!}$$

をいれる. ここで

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{\omega, h} := \alpha_{I\bar{J}}^i \overline{\beta_{K\bar{L}}^j} h_{i\bar{j}} g^{I\bar{K}} g^{L\bar{J}} \quad \text{where } \alpha = \alpha_{I\bar{J}}^i dz^I \wedge \overline{dz^J} \otimes e_i, \beta = \beta_{K\bar{L}}^j dz^K \wedge \overline{dz^L} \otimes e_j$$

- Hodge star operator

$$*: A^{p,q}(E) \rightarrow A^{n-q, n-p}(E)$$

を (n, n) -form の次の等式が成り立つように入れる:

$$\alpha \wedge \overline{* \beta} = \langle \alpha, \beta \rangle_{\omega, h} \frac{\omega^n}{n!}$$

ただし左辺は $h : E \otimes \bar{E} \rightarrow \mathbb{C}$ の contraction を用いて (n, n) -form とみなしている.

- $\bar{\partial}_E^* := - * D'_E * : A^{p,q}(E) \rightarrow A^{p,q-1}(E)$ と定義し, Hodge Laplacian を

$$\square_{\text{hodge}, E} := \bar{\partial}_E^* \bar{\partial}_E + \bar{\partial}_E \bar{\partial}_E^* : A^{p,q}(E) \rightarrow A^{p,q}(E)$$

と定義する. ただし D'_E を Chern 接続の次数を $(1, 0)$ 上げるものとする.

Theorem 2.45.

$$\mathbf{H}^{p,q}(E) := \{\varphi \in A^{p,q}(E) \mid \square_{\text{hodge},E}\varphi = 0\}$$

とすると次が成り立つ.

- (1) $\mathbf{H}^{p,q}$ は有限次元
- (2) $\beta \in A^{p,q}(E) \cap (\ker \square_{\text{hodge},E})^\perp$ ならば $\beta = \square_{\text{hodge},E}\varphi$ となる $\varphi \in A^{p,q}(E)$ が存在する.
- (3) 直交分解 $A^{p,q}(E) = \mathbf{H}^{p,q}(E) \oplus \bar{\partial}_E A^{p,q-1}(E) \oplus \bar{\partial}_E^* A^{p,q+1}(E)$ が存在する.

Proof. (1). $\square_{\text{hodge},E}: L_2^{p,q}(E) \rightarrow L_2^{p,q}(E)$ と L^2 完備化の空間で考える.¹⁰ $\square_{\text{hodge},E}$ は楕円型なので, Corollary 2.43 より

$$\square_{\text{hodge},E}: (\ker \square_{\text{hodge},E})^\perp \cap A^{p,q}(E) \rightarrow (\ker \square_{\text{hodge},E}^*)^\perp \cap A^{p,q}(E)$$

は同型で, $\ker \square_{\text{hodge},E} =: \mathbf{H}^{p,q}(E)$ は有限である.

(2). 上に関して $\square_{\text{hodge},E} = \square_{\text{hodge},E}^*$ であるので,

$$\square_{\text{hodge},E} = \square_{\text{hodge},E}^*: (\ker \square_{\text{hodge},E}^*)^\perp \cap A^{p,q}(E) \rightarrow (\ker \square_{\text{hodge},E})^\perp \cap A^{p,q}(E)$$

も同型になる. よって (全射性から) 言えた.

(3). $\supset$ は明らか, $\subset$ を示す.

$$H: A^{p,q}(E) \rightarrow \mathbf{H}^{p,q}(E)$$

を直交射影とする. $\varphi \in A^{p,q}(E)$ について

$$\varphi - H\varphi \in A^{p,q}(E) \cap (\ker \square_{\text{hodge},E})^\perp$$

であるので, $\psi \in A^{p,q}(E)$ があって

$$\begin{aligned} \varphi - H\varphi &= \square_{\text{hodge},E}\psi = \bar{\partial}_E^* \bar{\partial}_E \psi + \bar{\partial}_E \bar{\partial}_E^* \psi \in \bar{\partial}_E A^{p,q-1}(E) \oplus \bar{\partial}_E^* A^{p,q+1}(E) \\ &\quad (2) \end{aligned}$$

よって言えた. □

¹⁰ この書き方は実際は良くなくて, $\square_{\text{hodge},E}$ は $L_2^{p,q}(E)$ 全体で定義されていない. が証明では定義されている部分だけ考えるので, こう書いておく.

Corollary 2.46. コンパクト *Hermite* 多様体 X と正則ベクトル束 E について,

$$H^{p,q}(X, E) := \frac{\ker(\bar{\partial}_E: A^{p,q}(X, E) \rightarrow A^{p,q+1}(X, E))}{\operatorname{Im}(\bar{\partial}_E: A^{p,q-1}(X, E) \rightarrow A^{p,q}(X, E))}$$

とおくと $H^{p,q}(X, E) \simeq \mathbf{H}^{p,q}(X, E)$ であり, 特に有限次元である. 特に大域 *holomorphic section* の空間 $H^0(X, E)$ も有限次元である.

Proof. 任意の $\alpha \in A^{p,q}(X, E)$ に対して

$$\langle \square_{\text{hodge}, E} \alpha, \alpha \rangle = \langle \bar{\partial}_E^* \bar{\partial}_E \alpha, \alpha \rangle + \langle \bar{\partial}_E \bar{\partial}_E^* \alpha, \alpha \rangle = \|\bar{\partial}_E \alpha\|^2 + \|\bar{\partial}_E^* \alpha\|^2.$$

である. 特に $\square_{\text{hodge}, E} \alpha = 0$ は $\bar{\partial}_E \alpha = 0$ かつ $\bar{\partial}_E^* \alpha = 0$ と同値である. さて Theorem 2.45 (3) から

$$A^{p,q}(E) = \mathbf{H}^{p,q}(E) \oplus \bar{\partial}_E A^{p,q-1}(E) \oplus \bar{\partial}_E^* A^{p,q+1}(E)$$

である.

これを用いて $H^{p,q}(X, E) \simeq \mathbf{H}^{p,q}(X, E)$ を示す. これは $\alpha \in A^{p,q}(X, E)$, $\bar{\partial}_E \alpha = 0$ について,

$$\alpha = h + \bar{\partial}_E u + \bar{\partial}_E^* v,$$

となる分解が取れる. α は $\bar{\partial}_E$ -closed より,

$$\langle \alpha, \bar{\partial}_E^* v \rangle = \langle \bar{\partial}_E \alpha, v \rangle = 0. \Rightarrow \alpha \perp \operatorname{Im} \bar{\partial}_E^* \Rightarrow \bar{\partial}_E^* v = 0.$$

(Hodge decomposition は直交分解)

よって $\alpha = h + \bar{\partial}_E u$. とかけて, したがって $[\alpha] = [h] \in H^{p,q}(X, E)$ となり, つまりすべての Dolbeault class は harmonic representative を持つ.

この harmonic representative は一意である, 実際 $h = \bar{\partial}_E u \in \mathbf{H}^{p,q}(X, E)$ なら

$$\|h\|^2 = \langle h, \bar{\partial}_E u \rangle = \langle \bar{\partial}_E^* h, u \rangle = 0 \Rightarrow h = 0$$

がいえることから. よってこの対応から $H^{p,q}(X, E) \simeq \mathbf{H}^{p,q}(X, E)$ がいえる. □

Theorem 2.47 (Serre duality). X を n 次元コンパクト複素多様体, E を正則ベクトル束とする. このとき *pairing*

$$H^{p,q}(X, E) \times H^{n-p, n-q}(X, E^\vee) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad ([\alpha], [\beta]) \longmapsto \int_X \alpha \wedge \beta$$

は *non-degenerate* である. 特に

$$H^{p,q}(X, E) \simeq H^{n-p, n-q}(X, E^\vee)^\vee$$

が成り立つ. 特に *Dolbeault isomorphism* より以下が成り立つ.

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes E) \simeq H^{p,q}(X, E) \simeq H^{n-p, n-q}(X, E^\vee)^\vee \simeq H^{n-q}(X, \Omega_X^{n-p} \otimes E^\vee)^\vee$$

Proof. E の Hermite 計量 h を固定する. h が誘導する複素線形同型

$$h^\flat: \overline{E} \rightarrow E^\vee, \quad h^\flat(\bar{v})(u) = h(u, v)$$

を用いて

$$*_h^\vee: A^{p,q}(E) \rightarrow A^{n-p, n-q}(E^\vee), \quad *_h^\vee \alpha := h^\flat(*\bar{\alpha})$$

と定める. 定義から

$$\alpha \wedge *_h^\vee \beta = \langle \alpha, \beta \rangle_{\omega, h} \frac{\omega^n}{n!} \quad (2.22)$$

が成り立つ.

$0 \neq [\alpha] \in H^{p,q}(X, E)$ とする. $H^{p,q}(X, E) \simeq \mathbf{H}^{p,q}(E)$ によって α を nonzero harmonic form として良い. 特に $\bar{\partial}_E \alpha = 0$, $\bar{\partial}_E^* \alpha = 0$ である. 任意の $\eta \in A^{p, q-1}(E)$ について Stokes の定理から

$$\int_X \eta \wedge \bar{\partial}_{E^\vee}(*_h^\vee \alpha) \underset{\text{(Stokes)}}{=} (-1)^{p+q} \int_X \bar{\partial}_E \eta \wedge *_h^\vee \alpha \underset{(2.22)}{=} (-1)^{p+q} \langle \bar{\partial}_E \eta, \alpha \rangle \underset{\text{(随伴)}}{=} (-1)^{p+q} \langle \eta, \bar{\partial}_E^* \alpha \rangle = 0.$$

よって $\bar{\partial}_{E^\vee}(*_h^\vee \alpha) = 0$ であり, $[_h^\vee \alpha] \in H^{n-p, n-q}(X, E^\vee)$ を定める. さらに

$$\int_X \alpha \wedge *_h^\vee \alpha = \int_X |\alpha|_{g, h}^2 \frac{\omega^n}{n!} = \|\alpha\|_{L^2}^2 > 0.$$

よって pairing は第 1 成分について non-degenerate である. 第 2 成分についても同様である. $\square$

3 Aubin-Yau の定理と Monge-Ampère 方程式

Szekelyhidi の lecture note [Szé14, Chapter 3] の内容. 本来であれば $\text{Ric}(\omega) = -\omega$ となる Kähler-Einstein 計量をメインに出すべきだが, これを次の章にとどめ, Monge-Ampère 方程式にメインを当てる.

3.1 $c_1(X) < 0$ の場合の Monge-Ampère 方程式

Theorem 3.1. X が $c_1(X) < 0$ のコンパクト Kähler 多様体とする. Kähler 計量 $\omega_0 \in -c_1(X)$ を固定し,

$$\text{Ric}(\omega_0) = -\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}F$$

となる $F \in C^\infty(X)$ を固定する. この時 (複素) Monge-Ampère 方程式の解 $\varphi \in C^\infty(X)$ で

$$\left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \right)^n = e^{F+\varphi} \omega_0^n. \quad (3.1)$$

が成り立つものがただ一つ存在する.

以下この Monge-Ampère 方程式の解の存在を示していく. 唯一性はすぐわかる.

Theorem 3.2. Theorem 3.1 において, 解の唯一性が成り立つ.

Proof. (3.1) の解を φ, ψ とし, $u = \varphi - \psi$ とする. u の最大値を取る点を p とすると

$$\sqrt{-1} \partial\bar{\partial}u \leq 0 \quad \text{at } p$$

である. 以上より

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt{-1} \partial\bar{\partial}\varphi & = & \sqrt{-1} \partial\bar{\partial}\psi + \sqrt{-1} \partial\bar{\partial}u & \leq & \sqrt{-1} \partial\bar{\partial}\psi \quad \text{at } p \\ & \text{(定義)} & & & \text{(最大値)} \end{array}$$

となる. よって

$$\left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \right)^n \leq \left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\psi \right)^n \quad \text{at } p$$

である¹¹. よって

$$1 \underset{\text{(上の式)}}{\geq} \frac{\left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi\right)^n}{\left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \psi\right)^n}(p) \underset{(3.1)}{=} \frac{e^\varphi}{e^\psi}(p) = e^u(p) \Rightarrow 0 \geq u(p)$$

p は u の最大値なので, $u \leq 0$ が X 全体でいえる. この議論を $-u$ にも適応すると, $-u \leq 0$ が X 全体でいえるので, $u \equiv 0$, つまり $\varphi = \psi$ である. $\square$

この方程式 (3.1) を連続法 (continuity method) を用いて解く. $t \in [0, 1]$ について

$$\left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi\right)^n = e^{tF + \varphi} \omega_0^n, \quad \omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi \text{ is a Kähler form} \cdots (*)_t$$

てという方程式を考える.

- (1) $(*)_0$ を解ける. これは $\varphi = 0$ が解になる.
- (2) ある $t < 1$ で $(*)_t$ が解をもつなら, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $(*)_{t+\varepsilon}$ も解ける.(陰関数定理).
- (3) ある $s \in (0, 1]$ に対し, すべての $t < s$ で $(*)_t$ を解けるなら, $(*)_s$ も解ける. これは $t \rightarrow s$ とするとき部分列に沿って極限をとるように, Hölder 空間における解の評価が必要になる.

3.2 解の openness

Theorem 3.3 ([Szé14, Lemma 3.3]). $(*)_t$ がある $t < 1$ に対して滑らかな解をもつならば, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $(*)_{t+\varepsilon}$ の滑らかな解を持つ.

次の陰関数定理を思い出す.

Definition 3.4 (Banach 空間の C^1 写像). $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ が Banach 空間, $\Omega \subset \mathcal{Y}$ が開集合とする.

- $\Phi: \Omega \rightarrow \mathcal{Z}$ が Frechet 微分可能とは, 任意の $p \in \Omega$ についてある有界線形作用素 $A: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ があって

$$\lim_{\|h\|_{\mathcal{Y}} \rightarrow 0} \frac{\|\Phi(p+h) - \Phi(p) - Ah\|_{\mathcal{Z}}}{\|h\|_{\mathcal{Y}}} = 0$$

を満たすこと. この A を $D\Phi(p)$ とかき, p での Frechet 微分という.

¹¹これは正定値 Hermite 行列 A, B について, $A \leq B$ ならば $\det A \leq \det B$ から. A の固有値が 0 以上で B より小さいので.

- $\Phi: \Omega \rightarrow \mathcal{Z}$ が C^1 級であるとは任意の $p \in \Omega$ について Frechet 微分可能かつ

$$D\Phi(p): \Omega \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \quad p \rightarrow D\Phi(p)$$

が連続となること. ただし $\text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ は $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ となる有界線形作用素で作用素ノルム $\|A\| := \sup_{\|h\|_{\mathcal{Y}}=1} \|Ah\|_{\mathcal{Z}}$ を入れる.

- $\Phi: \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ について $(x_0, y_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ を固定する. $D_x \Phi(x_0, y_0)$ を $\Phi(\bullet, y_0): \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ に関する $x = x_0$ での Frechet 微分とする.

Theorem 3.5 (Banach 空間の陰関数定理). $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ が Banach 空間, $\Omega \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ を開集合とする. $\Phi: \Omega \rightarrow \mathcal{Z}$ を C^1 写像で, ある $(x_0, y_0) \in \Omega$ について

$$\Phi(x_0, y_0) = 0 \quad \text{かつ} \quad D_x \Phi(x_0, y_0): \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z} \text{ が Banach 空間の同型}$$

であるならば, $x_0 \in U \subset \mathcal{X}$, $y_0 \in V \subset \mathcal{Y}$ となる開近傍と C^1 写像 $g: V \rightarrow U$ が存在して,

$$\Phi(g(y), y) = 0 \quad \forall y \in V$$

が成り立つ. 特に (x_0, y_0) のある近傍 W があって, $(x, y) \in W$ かつ $\Phi(x, y) = 0$ ならば $x = g(y)$ である.

Proof of Theorem 3.3.

$$\mathcal{H}^{3,\alpha} := \{\varphi \in C^{3,\alpha}(X) \mid \omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi > 0\}$$

とする. " > 0 " は Kähler form という意味である. 作用素を

$$\mathcal{F}: \mathcal{H}^{3,\alpha} \times [0, 1] \rightarrow C^{1,\alpha}(X), \quad (\varphi, t) \mapsto \log \frac{\left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi\right)^n}{\omega_0^n} - \varphi - tF \quad (3.2)$$

と定める. 仮定により $\varphi_t \in \mathcal{H}^{3,\alpha}$ で

$$\log \frac{(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi_t)^n}{\omega_0^n} - \varphi_t - tF = \mathcal{F}(\varphi_t, t) = 0$$

となるものがある. ω_t を使って X 上の Hölder norms を一つ固定する.

Claim 3.6. $\mathcal{X} = \mathcal{H}^{3,\alpha}, \mathcal{Y} = (0, 1), \mathcal{Z} = C^{1,\alpha}(X), \mathcal{F}: \mathcal{H}^{3,\alpha} \times [0, 1] \rightarrow C^{1,\alpha}(X)$ とすれば, 点

$$(x_0, y_0) = (\varphi_t, t) \in \mathcal{H}^{3,\alpha} \times (0, 1) = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$$

において陰関数定理 (Theorem 3.5) の仮定を満たす.

Proof of Claim 3.6. 点 (φ_t, t) における u 方向の $\mathcal{F}$ の Gateaux 微分 $D_u \mathcal{F}_{(\varphi_t, t)}$ を計算する.

$$\begin{aligned} D_u \mathcal{F}_{(\varphi_t, t)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\mathcal{F}_{(\varphi_t + su, t)} - \mathcal{F}_{(\varphi_t, t)}) \\ (\text{定義}) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(\log \frac{(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi_t + s \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} u)^n}{\omega_0^n} - (\varphi_t + su) - tF - \log \frac{(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi_t)^n}{\omega_0^n} + \varphi_t + tF \right) \\ (3.2) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(\log \frac{(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi_t + s \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} u)^n}{(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi_t)^n} \right) - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (su) \\ (\text{まとめる}) &= \frac{n}{2\pi} \frac{\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u \wedge \omega_t^{n-1}}{\omega_t^n} - u = \frac{1}{2\pi} \Delta_t u - u. \\ (\text{微分の計算}) &= \frac{1}{2\pi} g_t^{i\bar{j}} \partial_i \bar{\partial}_j u = \frac{1}{2\pi} \Delta_t u \quad (\text{Def. 2.31}) \end{aligned}$$

ここで Δ_t は ω_t に関する複素 Laplacian である.

$$L := D_\bullet \mathcal{F}_{(\varphi_t, t)}: C^{3,\alpha}(X) \rightarrow C^{1,\alpha}(X) \quad u \mapsto L(u) := \frac{1}{2\pi} \Delta_t u - u$$

とする. $\ker L = 0$ を示す. これは $\frac{1}{2\pi} \Delta_t u - u = 0$ ならば

$$0 \leq \int_X |u|^2 dV_t \underset{(u = \frac{1}{2\pi} \Delta_t u)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_M u \Delta_t u dV_t \underset{(\text{随伴})}{=} -\frac{1}{2\pi} \int_X |\bar{\partial} u|_t^2 dV_t \leq 0$$

より必ず $u = 0$ である. $L = L^*$ (self-adjoint) なので, L^* も自明な kernel をもつ. 以上より L は楕円型なので, Theorem 2.40 から,

$$L: C^{3,\alpha}(X) = (\ker L)^\perp \cap C^{3,\alpha} \xrightarrow{\sim} (\ker L^*)^\perp \cap C^{1,\alpha} = C^{1,\alpha}(X) \quad (\text{Thm. 2.40})$$

は同型写像である. よって $L = D_\bullet \mathcal{F}_{(\varphi_t, t)}: C^{3,\alpha}(X) \rightarrow C^{1,\alpha}(X)$ は同型である.

そして (φ_t, t) の周りの点 (x, t) について

$$\mathcal{H}^{3,\alpha}(X) \rightarrow \text{Hom}(C^{3,\alpha}(X), C^{1,\alpha}(X)) \quad x \mapsto (u \mapsto D_u \mathcal{F}_{(x, t)} = \frac{1}{2\pi} \Delta_x u - u)$$

は連続である. よって $\mathcal{F}: \mathcal{H}^{3,\alpha} \times [0, 1] \rightarrow C^{1,\alpha}(X)$ は (φ_t, t) の周りで C^1 である¹² □

以上より陰関数定理 (Theorem 3.5) から, ある開集合 $\varphi_t \in U \subset \mathcal{H}^{3,\alpha}$, $t \in V \subset (0, 1)$ と C^1 写像 $g: V \rightarrow U$ が存在して, $s \in V$ ならば

$$0 = \mathcal{F}\left(\underbrace{g(s)}_{=: \varphi_s \in \mathcal{H}^{3,\alpha}}, s\right) = \log \frac{(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi_s)^n}{\omega_0^n} - \varphi_s - sF \quad (3.3)$$

となる.

φ_s が C^∞ であることを示す.

- $\omega_0 = \sqrt{-1} g_{j\bar{k}} dz^j \wedge d\bar{z}^k$,
- $(g_s)^{j\bar{k}}$ は計量 $(g_s)_{j\bar{k}} = g_{j\bar{k}} + \frac{1}{2\pi} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_s$ の逆行列. 係数は $C^{1,\alpha}$ である.

として計算すると

$$\begin{aligned} (3.3) &\Rightarrow \log \det \left(g_{j\bar{k}} + \frac{1}{2\pi} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_s \right) - \log \det (g_{j\bar{k}}) - \varphi_s - sF = 0 \\ &\quad (\text{local に展開}) \\ &\Rightarrow (g_s)^{j\bar{k}} \left(\partial_l g_{j\bar{k}} + \frac{1}{2\pi} \partial_l \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_s \right) - \partial_l \log \det (g_{j\bar{k}}) - \partial_l \varphi_s - s \partial_l F = 0 \\ &\quad (z^l \text{ に関して微分}) \\ &\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} (g_s)^{j\bar{k}} \partial_j \partial_{\bar{k}} - 1 \right)}_{=: E \text{ 係数 } C^{1,\alpha} \text{ の楕円型}} (\partial_l \varphi_s) = \underbrace{s \partial_l F + \partial_l \log \det (g_{j\bar{k}}) - (g_s)^{j\bar{k}} \partial_l g_{j\bar{k}}}_{=: h \in C^{1,\alpha}} \end{aligned}$$

よって, $\partial_l \varphi_s$ に対する線形楕円型方程式が $E(\partial_l \varphi_s) = h$ 得られる. 以上より Schauder 評価 (Theorem 2.24) から

$$E \text{ と } h \text{ の係数が } C^{1,\alpha} \Rightarrow \partial_l \varphi_s \in C^{3,\alpha} \Rightarrow \varphi_s \in C^{4,\alpha} \Rightarrow E \text{ と } h \text{ の係数が } C^{2,\alpha} \Rightarrow \dots$$

(Thm. 2.24) (定義) (定義)

となっていき, $\varphi_s \in C^\infty$ が言える.¹³ □

3.3 解の closedness

次の Proposition を考える.

¹²2 変数 x, y に関する関数について, x, y の偏微分が連続ならば全微分が存在すると同様. つまり Gateaux 微分が偏微分, Frechet 微分が全微分に対応する.

¹³このように方程式を線形化してより良い正則性を次々に得る手法は bootstrapping と呼ばれる.

Proposition 3.7 ([Szé14, Proposition 3.4]). X, ω_0, F のみに依存する定数 $C > 0$ が存在して, もし φ_t がある $t \in [0, 1]$ について $(*)_t$ を満たすなら

$$(g_{j\bar{k}} + \frac{1}{2\pi} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_t) > C^{-1} (g_{j\bar{k}}),$$

が成り立つ. ここで $g_{j\bar{k}}$ は局所座標における ω_0 の成分であり, 行列の不等式は差が正定値であることを意味する. さらに

$$\|\varphi_t\|_{C^{3,\alpha}(X)} \leq C,$$

も成り立つ. ここで Hölder norm は計量 ω_0 に関して測っている.

これさえ示れば, 解の closedness が出る.

Lemma 3.8 ([Szé14, Lemma 3.5]). *Proposition 3.7* を仮定する. $s \in (0, 1]$ とし, すべての $t < s$ について方程式 $(*)_t$ が解けると仮定する. このとき $(*)_s$ も解ける.

Proof. $\lim t_i = s$ を満たす $t_i < s$ の数列をとる. すると

$$\left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi_i \right)^n = e^{t_i F + \varphi_i} \omega_0^n$$

を満たす関数列 φ_i が得られる. Proposition 3.7 より i によらない $C > 0$ があって

$$\|\varphi_i\|_{C^{3,\alpha}} \leq C$$

となる. よって Arzela-Ascoli の定理 (Theorem 2.17) により, $\alpha' < \alpha$ となる α' に対して, 部分列を取ることで

$$\varphi_i \rightarrow \exists \varphi \in C^{3,\alpha'}$$

と収束するものが取れる. この収束は $C^{3,\alpha'}$ 収束なので,

$$\left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi \right)^n = e^{sF + \varphi} \omega_0^n$$

を得る. さらに Proposition 3.7 より

$$\left(g_{j\bar{k}} + \frac{1}{2\pi} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi \right) > C^{-1} (g_{j\bar{k}}) > 0$$

であるので, 特に $\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi$ は Kähler 計量を定める. Theorem 3.3 の証明と同じくして, φ は滑らかである. $\square$

3.4 C^0 評価と C^2 評価

以下 F を tF に置き換え, φ_t の t の添字をなくすことで次を示せば良い.

Monge–Ampère 方程式

$$\left(\omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi \right)^n = e^{F+\varphi} \omega^n, \quad (3.4)$$

とし, $\omega = \sqrt{-1} g_{j\bar{k}} dz^j \wedge d\bar{z}^k$ とする. Hölder norm を ω で測る. この時 X, ω, F のみに依存する定数 $C > 0$ が存在して, 次の C^2 評価が成り立つ.

$$C^{-1}(g_{j\bar{k}}) < (g_{j\bar{k}} + \frac{1}{2\pi} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi) < C(g_{j\bar{k}})$$

これは最終的に Lemma 3.13 で示される. 証明はかなり長い.

Lemma 3.9 (C^0 estimate [Szé14, Lemma 3.6]). φ が方程式 (3.4) を満たすなら,

$$\sup_X |\varphi| \leq \sup_X |F|$$

Proof. φ の最大値を達成する点 $p \in X$ をとる. Theorem 3.2 と同様に

$$\begin{aligned} (g_{j\bar{k}} + \frac{1}{2\pi} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi) &\leq g_{j\bar{k}} \text{ at } p \quad \Rightarrow \quad \det \left(g_{j\bar{k}} + \frac{1}{2\pi} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi \right) \leq \det(g_{j\bar{k}}) \text{ at } p \\ &\quad \text{(最大値)} \\ \Rightarrow e^{F+\varphi} &= \frac{\left(\omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi \right)^n}{\omega^n} \leq 1 \text{ at } p \\ &\quad \text{(上の式)} \\ \Rightarrow F(p) + \varphi(p) &\leq 0 \quad \Rightarrow \quad -F(p) \geq \varphi(p) \geq \varphi(x) \quad \forall x \in X \\ &\quad \text{最大値} \end{aligned}$$

同様にして, φ の最小値を達成する点 $q \in X$ において $-F(q) \leq \varphi(q)$ であるので, 二つを合わせて, $\sup_X |\varphi| \leq \sup_X |F|$ である. $\square$

normal coordinate に関して復習する.

Proposition 3.10 (Normal coordinates). g が Kähler 計量とすると, 任意の点 $p \in X$ について, その近傍上の正則座標 $z^1, \dots, z^n$ であって, 点 p における g の成分が

$$g_{j\bar{k}}(p) = \delta_{jk} \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial z^i} g_{j\bar{k}}(p) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} g_{j\bar{k}}(p) = 0,$$

となるようにできる.

Proof. Kähler form が

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{j,k} (\delta_{jk} + O(|z|^2)) dz^j \wedge d\bar{z}^k,$$

とできることを示せば良い. ($O(|z|^2)$ は, $z^i, \bar{z}^i$ に関して少なくとも 2 次の項とする)

まず線形変換することで,

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{j,k} \left(\delta_{jk} + \sum_l (a_{j\bar{k}l} w^l + a_{jkl} \bar{w}^l) + O(|w|^2) \right) dw^j \wedge d\bar{w}^k.$$

となる座標 w^i がある. 次に $b_{ijk} = b_{ikj}$ を満たす係数 b_{ijk} , w^i から z^i への座標変換を

$$w^i := z^i - \frac{1}{2} \sum_{j,k} b_{ijk} z^j z^k,$$

で定義すると,

$$dw^i = dz^i - \sum_{j,k} b_{ijk} z^j dz^k,$$

であるので

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{-1} \sum_{j,k} \left(\delta_{jk} + \sum_l (a_{j\bar{k}l} z^l + a_{jkl} \bar{z}^l - b_{klj} z^l - \bar{b}_{jlk} \bar{z}^l) + O(|z|^2) \right) dz^j \wedge d\bar{z}^k \\ &= \sqrt{-1} \sum_{j,k} \left(\delta_{jk} + \sum_l (a_{j\bar{k}l} - b_{klj}) z^l + \sum_l (a_{jkl} - \bar{b}_{jlk}) \bar{z}^l + O(|z|^2) \right) dz^j \wedge d\bar{z}^k \end{aligned}$$

となる. ω が Kähler であれば, 定義から $a_{j\bar{k}l} = a_{l\bar{k}j}$ なので, $b_{klj} := a_{j\bar{k}l}$ と定れば良い. $\square$

Remark 3.11. Riemannian geometry では, 与えられた点で計量の一次微分が消えるような C^∞ 級な normal coordinates を常にとることができる. Hermitian 計量でも同様である.

Proposition 3.10 によって, 計量が Kähler であれば, 計量の一次微分がある点で消えるような 正則座標系さえ見つけられる, ということである. 逆にそのような正則な normal coordinates が存在すれば $d\omega = 0$ となり, 計量は Kähler である.

以下次の notation を使う.

- $g'_{j\bar{k}} := g_{j\bar{k}} + \frac{1}{2\pi} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi$
- $\text{tr}_g g' := g^{j\bar{k}} g'_{j\bar{k}}, \text{tr}_{g'} g := g'^{j\bar{k}} g_{j\bar{k}}$

この notation の上で次を得る.

$$\underbrace{g^{j\bar{k}} g'_{j\bar{k}}}_{\text{定義}} = g^{j\bar{k}} g_{j\bar{k}} + \frac{1}{2\pi} \underbrace{g^{j\bar{k}} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi}_{=:\Delta\varphi} = n + \frac{1}{2\pi} \Delta\varphi.$$

また Δ' を計量 g' に関する Laplacian とする.

Lemma 3.12 ([Szé14, Lemma 3.7]). X と g のみに依存する定数 B が存在して

$$\Delta' \log \text{tr}_g g' \geq -B \text{tr}_{g'} g - \frac{g^{j\bar{k}} R'_{j\bar{k}}}{\text{tr}_g g'},$$

が成り立つ. ここで $R'_{j\bar{k}}$ は g' の Ricci 曲率である.

Proof. $p \in X$ を固定する. normal coordinate を用いる., 点 p において

$$g = \sum_{i=1}^n dz^i \wedge d\bar{z}^i, \quad \frac{\partial}{\partial z^i} g_{j\bar{k}}(p) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} g_{j\bar{k}}(p) = 0, \quad (3.5)$$

また任意の Hermitian matrix は unitary transformation により対角化できるので, g' は p で対角であると仮定よく, 下の形を得る.

$$g' = \sum_{i=1}^n g'_{i\bar{i}} dz^i \wedge d\bar{z}^i, \quad \text{tr}_g g' = \sum_i g'_{i\bar{i}}, \quad \text{tr}_{g'} g = \sum_j g'^{j\bar{j}} = \sum_j \frac{1}{g'_{j\bar{j}}} \text{ at } p \quad (3.6)$$

と仮定して良い. 点 p での以下の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \Delta' \text{tr}_g g' &= \underbrace{g'^{p\bar{q}} \partial_p \partial_{\bar{q}} (g^{j\bar{k}} g'_{j\bar{k}})}_{(\Delta' \text{ の定義}) =: \Delta'} \underbrace{\quad}_{=: \text{tr}_g g'} \\ &\stackrel{(3.5)}{=} g'^{p\bar{q}} (\partial_p \partial_{\bar{q}} g^{j\bar{k}}) g'_{j\bar{k}} + g'^{p\bar{q}} g^{j\bar{k}} \times \underbrace{(\partial_p \partial_{\bar{q}} g'_{j\bar{k}})}_{= -R'_{j\bar{k}p\bar{q}} + g'^{a\bar{b}} (\partial_j g'_{p\bar{b}}) (\partial_{\bar{k}} g'_{a\bar{q}}) \text{ by } R'_{i\bar{j}k\bar{l}} \text{ の定義 in Sum. 1.1}} \\ &= \underbrace{g'^{p\bar{q}} (\partial_p \partial_{\bar{q}} g^{j\bar{k}}) g'_{j\bar{k}}}_{\text{Term(1)}} - \underbrace{g'^{p\bar{q}} g^{j\bar{k}} R'_{j\bar{k}p\bar{q}}}_{= g^{j\bar{k}} R'_{j\bar{k}} \text{ by } R'_{i\bar{j}} \text{ の定義 in Sum. 1.1}} + \underbrace{g'^{p\bar{q}} g^{j\bar{k}} g'^{a\bar{b}} (\partial_j g'_{p\bar{b}}) (\partial_{\bar{k}} g'_{a\bar{q}})}_{= \sum_{p,j,a} g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_j g'_{p\bar{a}}|^2 \text{ by (3.5) \& (3.6)}} \\ &\geq -B(\text{tr}_{g'} g)(\text{tr}_g g') - g^{j\bar{k}} R'_{j\bar{k}} + \sum_{p,j,a} g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_j g'_{p\bar{a}}|^2. \end{aligned}$$

(下の Term(1) の評価 (3.9))

(3.7)

ここで $B := \inf_{x \in X} -R_{i\bar{j}k\bar{l}}$ とする. Term(1) の評価は以下のとおり: まず次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
-\partial_p \partial_{\bar{p}} g^{j\bar{j}} &= -\partial_i \partial_{\bar{j}} g_{k\bar{l}} = -R_{i\bar{j}k\bar{l}} + g^{p\bar{q}} (\partial_i g_{k\bar{q}}) (\partial_{\bar{j}} g_{p\bar{l}}) \\
&\stackrel{(3.5)}{=} \stackrel{(R'_{i\bar{j}k\bar{l}} \text{ の定義 in Sum. 1.1})}{=} -R_{i\bar{j}k\bar{l}} \geq \inf_{x \in X} -R_{i\bar{j}k\bar{l}} =: B \\
&\stackrel{(3.5)}{=}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

以上より g' が対角であることを用いると

$$\underbrace{g'^{p\bar{q}} (\partial_p \partial_{\bar{q}} g^{j\bar{k}}) g'_{j\bar{k}}}_{\text{Term(1)}} \stackrel{(3.5) \text{ \& } (3.6)}{=} \sum_{p,j} g'^{p\bar{p}} g'_{j\bar{j}} (\partial_p \partial_{\bar{p}} g^{j\bar{j}}) \stackrel{(3.8)}{\geq} -B \sum_{p,j} g'^{p\bar{p}} g'_{j\bar{j}} \stackrel{(3.6)}{=} -B (\text{tr}_{g'} g) (\text{tr}_g g'), \tag{3.9}$$

これを用いて $\Delta' \log \text{tr}_g g'$ を評価する. まず次の公式を認める.

$u > 0$ ならば

$$\partial_p \partial_{\bar{q}} \log u = \partial_p \left(\frac{\partial_{\bar{q}} u}{u} \right) = \frac{\partial_p \partial_{\bar{q}} u}{u} - \frac{(\partial_p u) (\partial_{\bar{q}} u)}{u^2}$$

特に $\Delta' = g'^{p\bar{q}} \partial_p \partial_{\bar{q}}$ について,

$$\Delta' \log u = g'^{p\bar{q}} \partial_p \partial_{\bar{q}} \log u = g'^{p\bar{q}} \left(\frac{\partial_p \partial_{\bar{q}} u}{u} - \frac{(\partial_p u) (\partial_{\bar{q}} u)}{u^2} \right) = \frac{\Delta' u}{u} - \frac{g'^{p\bar{q}} (\partial_p u) (\partial_{\bar{q}} u)}{u^2} \tag{3.10}$$

$\log$ を組み込んで, $u = \text{tr}_g g'$ とすれば

$$\begin{aligned}
\Delta' \log \text{tr}_g g' &\stackrel{(3.10)}{=} \frac{\Delta' \text{tr}_g g'}{\text{tr}_g g'} - \frac{g'^{p\bar{q}} (\partial_p \text{tr}_g g') (\partial_{\bar{q}} \text{tr}_g g')}{(\text{tr}_g g')^2} \\
&\stackrel{(3.7) \text{ \& } (3.6)}{\geq} \frac{1}{\text{tr}_g g'} \left(-B (\text{tr}_{g'} g) (\text{tr}_g g') - g^{j\bar{k}} R'_{j\bar{k}} + \sum_{p,j,a} g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_j g'_{p\bar{a}}|^2 \right) - \frac{1}{(\text{tr}_g g')^2} \sum_{p,a,b} g'^{p\bar{p}} (\partial_p g'_{a\bar{a}}) (\partial_{\bar{p}} g'_{b\bar{b}}) \\
&= -B \text{tr}_{g'} g - \frac{g^{j\bar{k}} R'_{j\bar{k}}}{\text{tr}_g g'} + \frac{1}{\text{tr}_g g'} \sum_{p,j,a} g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_j g'_{p\bar{a}}|^2 - \frac{1}{(\text{tr}_g g')^2} \sum_{p,a,b} g'^{p\bar{p}} (\partial_p g'_{a\bar{a}}) (\partial_{\bar{p}} g'_{b\bar{b}}).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

ここで Cauchy-Schwarz inequality

$$\left(\sum_p x_p y_p \right)^2 \leq \left(\sum_p x_p^2 \right) \cdot \left(\sum_q y_q^2 \right)$$

を 2 回用いると

$$\begin{aligned}
\sum_{p,a,b} g'^{p\bar{p}} (\partial_p g'_{a\bar{a}}) (\partial_{\bar{p}} g'_{b\bar{b}}) &= \sum_{a,b} \sum_p \underbrace{\sqrt{g'^{p\bar{p}}} (\partial_p g'_{a\bar{a}})}_{(x_p \text{ とみる})} \underbrace{\sqrt{g'^{p\bar{p}}} (\partial_{\bar{p}} g'_{b\bar{b}})}_{(y_p \text{ とみる})} \\
&\leq \sum_{a,b} \left(\sum_p g'^{p\bar{p}} |\partial_p g'_{a\bar{a}}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_q g'^{q\bar{q}} |\partial_q g'_{b\bar{b}}|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_a \left(\sum_p g'^{p\bar{p}} |\partial_p g'_{a\bar{a}}|^2 \right)^{1/2} \right)^2 \quad (3.12) \\
&= \left(\sum_a \underbrace{\sqrt{g'_{a\bar{a}}}}_{(x_a \text{ とみる})} \underbrace{\left(\sum_p g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_p g'_{a\bar{a}}|^2 \right)^{1/2}}_{(y_a \text{ とみる})} \right)^2 \leq \underbrace{\left(\sum_a g'_{a\bar{a}} \right)}_{=\text{tr}_g g'} \left(\sum_{b,p} g'^{p\bar{p}} g'^{b\bar{b}} |\partial_p g'_{b\bar{b}}|^2 \right).
\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{1}{(\text{tr}_g g')^2} \sum_{p,a,b} g'^{p\bar{p}} (\partial_p g'_{a\bar{a}}) (\partial_{\bar{p}} g'_{b\bar{b}}) \leq \frac{1}{\text{tr}_g g'} \sum_{a,p} g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_p g'_{a\bar{a}}|^2 \leq \frac{1}{\text{tr}_g g'} \sum_{a,j,p} g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_p g'_{j\bar{a}}|^2, \quad (3.13)$$

(非負の項を足す)

以上より

$$\Delta' \log \text{tr}_g g'$$

$$\geq -B \text{tr}_{g'} g - \frac{g^{j\bar{k}} R'_{j\bar{k}}}{\text{tr}_g g'} + \frac{1}{\text{tr}_g g'} \sum_{p,j,a} g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} \underbrace{|\partial_j g'_{p\bar{a}}|^2}_{=|\partial_p g'_{j\bar{a}}|^2 \text{ by Kähler}} - \frac{1}{(\text{tr}_g g')^2} \sum_{p,a,b} g'^{p\bar{p}} (\partial_p g'_{a\bar{a}}) (\partial_{\bar{p}} g'_{b\bar{b}}). \quad (3.11)$$

$$\geq -B \text{tr}_{g'} g - \frac{g^{j\bar{k}} R'_{j\bar{k}}}{\text{tr}_g g'} + \underbrace{\frac{1}{\text{tr}_g g'} \sum_{p,j,a} g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_p g'_{j\bar{a}}|^2 - \frac{1}{\text{tr}_g g'} \sum_{a,j,p} g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_p g'_{j\bar{a}}|^2}_{=0} \quad (3.13)$$

$$= -B \text{tr}_{g'} g - \frac{g^{j\bar{k}} R'_{j\bar{k}}}{\text{tr}_g g'}$$

□

Lemma 3.13 (C^2 estimate [Szé14, Lemma 3.8]). $X, \omega, \sup_X |F|$ および ΔF の下界のみに依存する定数 C が存在して, (3.4) の解 φ は次を満たす.

$$C^{-1}(g_{j\bar{k}}) < \left(g_{j\bar{k}} + \frac{1}{2\pi} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi \right) < C(g_{j\bar{k}})$$

Proof. 前と同様に $g'_{j\bar{k}} = g_{j\bar{k}} + \frac{1}{2\pi} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi$ と書く. まず $(g_{j\bar{k}} + \frac{1}{2\pi} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi) < C(g_{j\bar{k}})$ を示す. これには, $g'_{i\bar{i}}$ を g に関する g' の固有値として, 点 $x \in X$ によらずに $g'_{i\bar{i}}$ が定数で抑えられることを示せば

良い. 方程式 (3.4) から

$$\begin{aligned}
(3.4) \quad & \Rightarrow \left(\omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi \right)^n = e^{F+\varphi} \omega^n \\
& \Rightarrow -R'_{j\bar{k}} = \partial_j \partial_{\bar{k}} F + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi - R_{j\bar{k}} = \partial_j \partial_{\bar{k}} F + 2\pi \underbrace{(g'_{j\bar{k}} - g_{j\bar{k}})}_{=\frac{1}{2\pi} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi} - R_{j\bar{k}}. \\
& \quad (-\partial \bar{\partial} \log(\bullet) \text{ をとる})
\end{aligned}$$

となる. Lemma 3.12 を用いると, X と g のみに依存する定数 B が存在して

$$\Delta' \log \operatorname{tr}_g g' \geq -B \operatorname{tr}_{g'} g - \frac{g^{j\bar{k}} R'_{j\bar{k}}}{\operatorname{tr}_g g'} = -B \operatorname{tr}_{g'} g + \frac{\Delta F + 2\pi \operatorname{tr}_g g' - 2\pi n - R}{\operatorname{tr}_g g'}, \quad (3.14)$$

(Lem. 3.12)

を得る. ここで $R := g^{j\bar{k}} R_{j\bar{k}}$ は g の scalar curvature である. Cauchy–Schwarz inequality から

$$(\operatorname{tr}_g g')(\operatorname{tr}_{g'} g) = \left(\sum_i g'_{i\bar{i}} \right) \cdot \left(\sum_j \frac{1}{g'_{j\bar{j}}} \right) \underset{(3.6)}{\geq} \left(\sum_i g'_{i\bar{i}} \cdot \frac{1}{g'_{i\bar{i}}} \right)^2 \underset{(\text{CS ineq.})}{\geq} n^2 \quad (3.15)$$

が成り立つ. そこで $-C' := \min\{-1, \Delta F - 2\pi n - R\}$ とすれば, $C' > 0$ で C' は ΔF や ω にしかよらず,

$$\begin{aligned}
\Delta' \log \operatorname{tr}_g g' & \geq -B \operatorname{tr}_{g'} g + \underbrace{\frac{\Delta F - 2\pi n - R}{\operatorname{tr}_g g'}}_{\geq -\frac{C'}{n^2} \operatorname{tr}_{g'} g \text{ by (3.15)}} + 2\pi \\
& \geq -B \operatorname{tr}_{g'} g - \underbrace{\frac{C'}{n^2} \operatorname{tr}_{g'} g}_{=: C} \\
& \quad (3.14)
\end{aligned} \quad (3.16)$$

となる. 定義から

$$\begin{aligned}
\Delta' \varphi &= g'^{j\bar{k}} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi = 2\pi g'^{j\bar{k}} (g'_{j\bar{k}} - g_{j\bar{k}}) = 2\pi (n - \operatorname{tr}_{g'} g) \\
& \quad (\Delta' \text{ の定義}) \quad (\varphi \text{ の定義}) \quad (\operatorname{tr} \text{ の定義})
\end{aligned}$$

であるので, $A := \frac{B+C+1}{2\pi}$ とおけば

$$\Delta'(\log \operatorname{tr}_g g' - A\varphi) \geq -B \operatorname{tr}_{g'} g - C \operatorname{tr}_{g'} g - 2\pi A(n - \operatorname{tr}_{g'} g) = \operatorname{tr}_{g'} g - 2\pi A n \quad (3.17)$$

((3.16) & 上の式) (A の定義)

さて $\log \operatorname{tr}_g g' - A\varphi$ が最大値を達成する点 $p \in X$ をとる. このとき

$$0 \underset{(\text{最大値})}{\geq} \Delta'(\log \operatorname{tr}_g g' - A\varphi)(p) \underset{(3.17)}{\geq} \operatorname{tr}_{g'} g(p) - 2\pi A n \Rightarrow \underbrace{\operatorname{tr}_{g'} g(p)}_{\sum_i \frac{1}{g'_{i\bar{i}}} = \sum_i g'^{i\bar{i}}} \leq 2\pi A n. \quad (3.18)$$

また (3.4) より点 p において,

$$(3.4) \Rightarrow \underbrace{\left(\omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi\right)^n}_{=\prod_i g'_{i\bar{i}}} (p) = e^{F(p)+\varphi(p)} \underbrace{\omega^n}_{=\prod_i g_{i\bar{i}}=1} \Rightarrow \prod_{i=1}^n g'_{i\bar{i}} = e^{F(p)+\varphi(p)} \leq e^{2\sup|F|} =: C_1 \quad (\text{Lem. 3.9}) \quad (3.19)$$

よって $0 < g'_{1\bar{1}} \leq \dots \leq g'_{n\bar{n}}$ とすれば

$$\begin{aligned} (3.18) \quad 2\pi An &\geq \underbrace{\sum_i \frac{1}{g'_{i\bar{i}}}}_{=\text{tr}_{g'} g(p)} \geq \frac{1}{g'_{1\bar{1}}} \Rightarrow g'_{1\bar{1}} \geq \frac{1}{2\pi An} \\ \Rightarrow C_1 &\geq \prod_{i=1}^n g'_{i\bar{i}} \geq g'_{n\bar{n}} (g'_{1\bar{1}})^{n-1} \geq g'_{n\bar{n}} \left(\frac{1}{2\pi An}\right)^{n-1} \quad (3.19) \quad (3.20) \\ \Rightarrow \underbrace{C_1 \cdot (2\pi An)^{n-1}}_{=:C_2} &\geq g'_{n\bar{n}} \geq \dots \geq g'_{1\bar{1}} > 0 \\ \Rightarrow \text{tr}_g g'(p) &= \sum_{i=1}^n g'_{i\bar{i}} \leq n g'_{n\bar{n}} \leq n C_2. \quad (\text{定義}) \end{aligned}$$

よって任意の $x \in X$ について

$$\log \text{tr}_g g'(x) - A\varphi(x) \leq \log \text{tr}_g g'(p) - A\varphi(p) \leq \log(nC_2) - A\varphi(p) \leq \underbrace{\log(nC_2) + A\sup|F|}_{=:C_3} \quad (\text{Lem. 3.9}) \quad (3.20)$$

(p が最大値)

が成り立つ. これより

$$\sup_{x \in X} \log \text{tr}_g g'(x) \leq C_3 + A\sup|\varphi| \leq \underbrace{C + A\sup|F|}_{=:C_4} \Rightarrow (g'_{i\bar{i}})_x \leq C_4 \quad (\text{上の式}) \quad (\text{Lem. 3.9}) \quad (3.21)$$

(ただし $g'_{i\bar{i}x}$ は点 x での g に関する g' の固有値とする.) 以上より $(g_{j\bar{k}} + \frac{1}{2\pi} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi) < C(g_{j\bar{k}})$ が言えた.

逆側に関しては任意の $x \in X$ について, normal coordinate をとると, $0 < (g'_{1\bar{1}})_x \leq \dots \leq (g'_{n\bar{n}})_x$ とすれば, (3.19) と同じ議論により,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (g'_{i\bar{i}})_x &= e^{F(x)+\varphi(x)} \geq \underbrace{e^{\inf F - \sup|F|}}_{=:C_5} \quad (\text{Lem. 3.9}) \quad (3.19) \\ \Rightarrow C_5 &\leq \prod_{i=1}^n (g'_{i\bar{i}})_x \leq g'_{1\bar{1}x} (g'_{n\bar{n}x})^{n-1} \leq C_4^{n-1} (g'_{1\bar{1}x}) \Rightarrow \frac{C_5}{C_4^{n-1}} \leq g'_{1\bar{1}x} \quad (3.21) \end{aligned}$$

となる. よって下からの評価もえて, $C^{-1}(g_{j\bar{k}}) < (g_{j\bar{k}} + \frac{1}{2\pi} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi)$ となる. □

3.5 C^3 評価

次の notation を使う.

- 固定された計量を $\hat{g}_{j\bar{k}}$ とかく. (つまり $\hat{g}_{j\bar{k}}$ が g_0 に対応すると思って良い)
- Monge–Ampère 方程式の解の計量を $g_{j\bar{k}} = \hat{g}_{j\bar{k}} + \frac{1}{2\pi} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi$ とする. 定義から次を満たす.

$$\left(\hat{\omega} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi \right)^n = e^{F+\varphi} \hat{\omega}^n,$$

- 上の式から Ricci 曲率に関する方程式

$$-R_{j\bar{k}} = \partial_j \partial_{\bar{k}} F + 2\pi(g_{j\bar{k}} - \hat{g}_{j\bar{k}}) - \hat{R}_{j\bar{k}} \Rightarrow R_{j\bar{k}} = -2\pi g_{j\bar{k}} + \underbrace{2\pi \hat{g}_{j\bar{k}} - \partial_j \partial_{\bar{k}} F + \hat{R}_{j\bar{k}}}_{=: T_{j\bar{k}}} \quad (3.22)$$

を得る. ここで $R_{j\bar{k}}$ は g の Ricci 曲率である. $T_{j\bar{k}}$ は固定された計量のテンソルなので, 上からも下からも抑えられる.

- Lemma 3.13 の C^2 評価より, ある定数 Λ が存在して

$$\Lambda^{-1}(\hat{g}_{j\bar{k}}) < (g_{j\bar{k}}) < \Lambda(\hat{g}_{j\bar{k}}) \quad (3.23)$$

ここでこの C^2 評価の仮定から Lemma 3.9 の C^0 評価も従う.

- Christoffel 記号の差

$$S_{jk}^i := \Gamma_{jk}^i - \hat{\Gamma}_{jk}^i \quad (3.24)$$

とおく. Γ_{jk}^i (resp. $\hat{\Gamma}_{jk}^i$) は g (resp. $\hat{g}$) の Levi–Civita 接続の Christoffel 記号とする.

なぜか [Szé14, Subsection 3.3] はここで急に記号が変わり, $\hat{g}$ が固定した計量になる. 評価するのは g であることに注意する.

Lemma 3.14 ([Szé14, Lemma 3.9]). (3.22) と (3.23) の下で, $X, T, \hat{g}, \Lambda$ のみに依存する定数 C が存在して

$$\Delta |S|_g^2 \geq -C |S|_g^2 - C$$

が成り立つ. ここで $|S|$ は計量 g により測ったテンソル S のノルムで, Δ は g に関する Laplacian である.

Proof. 以下 g の normal coordinate を用いる., 点 p において

$$g = \sum_{i=1}^n dz^i \wedge d\bar{z}^i, \quad \frac{\partial}{\partial z^i} g_{j\bar{k}}(p) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} g_{j\bar{k}}(p) = 0, \quad (3.25)$$

とする. すると

$$|S|_g^2 = \underset{(\text{ノルムの定義})}{g^{j\bar{k}} g_{a\bar{b}} g^{p\bar{q}} S_{jp}^a \overline{S_{kq}^b}} = \sum_{a,j,p} S_{ja}^p \overline{S_{ja}^p}, \quad (3.25)$$

となる. すると,

$$\begin{aligned} \Delta |S|_g^2 &= \sum_{(Lem. 2.32) p,i,j,k} \nabla_p \nabla_{\bar{p}} (S_{jk}^i \overline{S_{jk}^i}) \\ &= \sum_{p,i,j,k} (\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S_{jk}^i) \overline{S_{jk}^i} + S_{jk}^i \overline{(\nabla_{\bar{p}} \nabla_p S_{jk}^i)} + \underbrace{(\nabla_p S_{jk}^i) \overline{(\nabla_p S_{jk}^i)}}_{\geq 0} + \underbrace{(\nabla_{\bar{p}} S_{jk}^i) \overline{(\nabla_{\bar{p}} S_{jk}^i)}}_{\geq 0} \\ &\geq \sum_{p,i,j,k} \left((\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S_{jk}^i) \overline{S_{jk}^i} + S_{jk}^i \overline{(\nabla_{\bar{p}} \nabla_p S_{jk}^i)} \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

である. ここでいくつか Riemannian 幾何学から由来する恒等式などを思い出しておく.

(X, g) を Kähler 多様体とする. このとき次が成り立つ.

- 一般に共変微分の交換子において, 上付き index には $+R$, 下付き index には $-R$ が作用する. すなわち, 例えば vector V^i $((1,0)$ -tensor) と covector α_j $((0,1)$ -tensor) に対して

$$[\nabla_p, \nabla_{\bar{q}}] V^i = R^i_{mp\bar{q}} V^m, \quad [\nabla_p, \nabla_{\bar{q}}] \alpha_j = -R^m_{jp\bar{q}} \alpha_m$$

が成り立つ.

- $(1,2)$ -tensor $S = S^i_{jk}$ に対して, 共変微分の交換公式

$$\nabla_p \nabla_{\bar{q}} S^i_{jk} - \nabla_{\bar{q}} \nabla_p S^i_{jk} = [\nabla_p, \nabla_{\bar{q}}] S^i_{jk} = R^i_{mp\bar{q}} S^m_{jk} - R^m_{jp\bar{q}} S^i_{mk} - R^m_{kp\bar{q}} S^i_{jm}$$

が成り立つ. 特に normal coordinate において $q = p$ として p について和を取ると

$$\sum_p \nabla_{\bar{p}} \nabla_p S^i_{jk} = \sum_p \nabla_p \nabla_{\bar{p}} S^i_{jk} + R^m_j S^i_{mk} + R^m_k S^i_{jm} - R^i_m S^m_{jk}, \quad (3.27)$$

ここで添字を上げた Ricci テンソルを $R^m_j := g^{m\bar{k}} R_{j\bar{k}}$ とする. すると以下が成り立つ.

$$\sum_{p,i,j,k} R^m_{jp\bar{p}} S^i_{mk} = \sum_{p,i,j,k} g^{p\bar{p}} R^m_{jp\bar{p}} S^i_{mk} = \sum_{p,i,j,k} R^m_j S^i_{mk}$$

- Kähler 多様体上の第二 Bianchi 恒等式より

$$\nabla_p R^i_{jk\bar{l}} = \nabla_k R^i_{jp\bar{l}}$$

が成り立つ. 特に $\bar{l} = \bar{p}$ として p について縮約すると

$$\sum_p \nabla_p R^i_{jk\bar{p}} = \sum_p \nabla_k R^i_{jp\bar{p}} = \nabla_k R^i_j. \quad (3.28)$$

これを元に $\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S^i_{jk}$ を評価していく. まず

$$\begin{aligned} \nabla_p \nabla_{\bar{p}} S^i_{jk} &= \nabla_p \partial_{\bar{p}} (\Gamma^i_{jk} - \hat{\Gamma}^i_{jk}) = -\nabla_p (R^i_{jk\bar{p}} - \hat{R}^i_{jk\bar{p}}) \\ &\quad (S \text{ の定義 (3.24)}) \quad (R^i_{jk\bar{l}} \text{ の定義 in Sum. 1.1}) \\ &= - \underbrace{\nabla_p R^i_{jk\bar{p}}}_{=\nabla_k R^i_j \text{ by (3.28)}} + \hat{\nabla}_p \hat{R}^i_{jk\bar{p}} + (\nabla_p - \hat{\nabla}_p) \hat{R}^i_{jk\bar{p}}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

ここで $\hat{\nabla}, \hat{R}$ は $\hat{g}$ の Levi-Civita 接続と曲率テンソルである. この右辺にある 3 つの項を評価すると,

- $\nabla_k R^i_j$ については, $T_{k\bar{l}}$ は固定された計量のテンソルなので

$$\begin{aligned} \underbrace{R_{j\bar{k}} = -2\pi g_{j\bar{k}} + T_{j\bar{k}}}_{=(3.22)} &\Rightarrow R^i_j = g^{i\bar{k}} R_{j\bar{k}} = g^{i\bar{k}} (-2\pi g_{j\bar{k}} + T_{j\bar{k}}) = -2\pi \delta^i_j + g^{i\bar{k}} T_{j\bar{k}} \\ &\Rightarrow \nabla_k R^i_j = \nabla_k (g^{i\bar{l}} T_{j\bar{l}}) = g^{i\bar{l}} (\nabla_k T_{j\bar{l}}) = g^{i\bar{l}} (\partial_k - \Gamma^j_{ik}) T_{j\bar{l}} \\ &\quad (\nabla_k g_{j\bar{l}} = 0 \text{ by Kähler 条件}) \quad (\text{Rem. 2.30}) \\ &\Rightarrow |\nabla_k R^i_j|_g^2 \leq \underbrace{|g^{i\bar{l}} \partial_k T_{j\bar{l}}|_g^2}_{(\text{上への一様評価 by } C^0 \text{ 評価})} + \underbrace{|g^{i\bar{l}} \Gamma^j_{ik} T_{j\bar{l}}|_g^2}_{\leq C|S|_g^2} \leq C' + C|S|_g^2 \end{aligned}$$

$$\nabla_k R^i_j = -2\pi \nabla_k g_{j\bar{k}} + \nabla_k T^i_j = \nabla_k T^i_j$$

より, $\nabla_k R^i_j$ も評価できる. ($\nabla_k g_{j\bar{k}} = 0$ は kahler condition から)

- $\hat{R}^i_{jk\bar{p}}$ は固定された計量の tensor であり, $\hat{\nabla}_p$ も固定された計量の共変微分なので, g の C^0 評価より

$$|\hat{\nabla}_p \hat{R}^i_{jk\bar{p}}|_g^2 \leq C$$

と上への一様評価がある.

- $(\nabla_p - \hat{\nabla}_p) \hat{R}^i_{jk\bar{p}}$ については, Remark 2.30 によって

$$\begin{aligned} (\nabla_p - \hat{\nabla}_p) \hat{R}^i_{jk\bar{p}} &= S^i_{pa} \hat{R}^a_{jk\bar{q}} - S^a_{pj} \hat{R}^i_{ak\bar{q}} - S^a_{pk} \hat{R}^i_{ja\bar{q}} \\ &\quad (\text{Rem. 2.30}) \\ &\Rightarrow |(\nabla_p - \hat{\nabla}_p) \hat{R}^i_{jk\bar{p}}|_g^2 \leq C|S|_g^2 \cdot \underbrace{|\hat{R}^i_{jk\bar{p}}|_g^2}_{(\text{上への一様評価 by } C^0 \text{ 評価})} \leq C'|S|_g^2 \end{aligned}$$

以上より上の 3 つの評価から, ある定数 C_2, C_3 があって

$$|\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S_{jk}^i|_g^2 \leq \underbrace{|\nabla_p R_{jk\bar{p}}^i|_g^2}_{(3.29)} + |\hat{\nabla}_p \hat{R}_{jk\bar{p}}^i|_g^2 + |(\nabla_p - \hat{\nabla}_p) \hat{R}_{jk\bar{p}}^i|_g^2 \leq C_2 |S|_g^2 + C_3 \quad (3.30)$$

次に $\nabla_{\bar{p}} \nabla_p S_{jk}^i$ を評価する. これは共変微分の公式より, $\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S_{jk}^i$ に帰着できる. 実際,

$$\begin{aligned} \sum_p \nabla_{\bar{p}} \nabla_p S_{jk}^i &= \sum_p \nabla_p \nabla_{\bar{p}} S_{jk}^i + R^m_j S_{mk}^i + R^m_k S_{jm}^i - R^i_m S_{jk}^m, \\ \Rightarrow |\nabla_{\bar{p}} \nabla_p S_{jk}^i|_g^2 &\leq \underbrace{\left| \sum_p \nabla_p \nabla_{\bar{p}} S_{jk}^i \right|_g^2}_p + \underbrace{|R^m_j S_{mk}^i|_g^2}_{\leq C_2 |S|_g^2 \text{ by } C^2 \text{ 評価}} + \underbrace{|R^m_k S_{jm}^i|_g^2}_{\leq C_2 |S|_g^2 \text{ by } C^2 \text{ 評価}} + \underbrace{|R^i_m S_{jk}^m|_g^2}_{\leq C_2 |S|_g^2 \text{ by } C^2 \text{ 評価}} \\ &\leq C_2 |S|_g^2 + C_3 \text{ by (3.30)} \\ \Rightarrow |\nabla_{\bar{p}} \nabla_p S_{jk}^i|_g^2 &\leq C_4 |S|_g^2 + C_5 \end{aligned} \quad (3.31)$$

以上より

$$\begin{aligned} \Delta |S|^2 &\geq \sum_{p,i,j,k} \left((\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S_{jk}^i) \overline{S_{jk}^i} + S_{jk}^i \overline{(\nabla_{\bar{p}} \nabla_p S_{jk}^i)} \right) \\ &\geq -C_6 \sum (|\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S_{jk}^i|^2 + |S_{rs}^q|^2 + |S_{rs}^q|^2 + |\nabla_{\bar{p}} \nabla_p S_{jk}^i|^2) \geq -C_7 |S|^2 - C_8. \end{aligned} \quad (3.26)$$

(Young 不等式 as in (2.10)) (3.30) & (3.31)

□

Lemma 3.15 ([Szé14, Lemma 3.10]). (3.22) と (3.23) の下で, $X, T, \hat{g}, \Lambda$ のみに依存する定数 C が存在して $|S|_g \leq C$ が成り立つ.

Proof. (3.7) により, ある定数 $\varepsilon, C_1 > 0$ を選んで

$$\Delta \operatorname{tr}_{\hat{g}} g \geq \underbrace{-B(\operatorname{tr}_{\hat{g}} \hat{g})(\operatorname{tr}_{\hat{g}} g) - \hat{g}^{j\bar{k}} R_{j\bar{k}}}_{\geq -C_1 \text{ by (3.22) \& (3.23)}} + \sum_{p,j,a} g^{p\bar{p}} g^{a\bar{a}} |\partial_j g_{p\bar{a}}|^2 \geq -C_1 + \varepsilon |S|_g^2 \quad (3.32)$$

とできる. Lemma 3.14 における $C > 0$ について, $A := \frac{C+1}{\varepsilon} > 0$, $C_2 := C + AC_1 > 0$ とすれば,

$$\Delta(|S|_g^2 + A \operatorname{tr}_{\hat{g}} g) \geq (-C + A\varepsilon) |S|_g^2 - C - AC_1 = |S|_g^2 - C_2$$

(Lem. 3.14) & (3.32)

となる. 点 $p \in X$ で $|S|^2 + A \operatorname{tr}_{\hat{g}} g$ が最大値を達成するとすると,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \Delta(|S|^2 + A \operatorname{tr}_{\hat{g}} g) \geq |S|^2(p) - C_2 \Rightarrow |S|^2(p) \leq C_2 \\ &\quad (\text{最大値}) \\ \Rightarrow |S|^2(x) &\leq |S|^2(x) + A \operatorname{tr}_{\hat{g}} g(x) \leq |S|^2(p) + A \operatorname{tr}_{\hat{g}} g(p) \leq C_2 + C_3 \quad \forall x \in X \\ &\quad (p \text{ で最大値}) \end{aligned}$$

□

3.6 Proposition 3.7 の証明

Proposition 3.16 (= Proposition 3.7). X, ω_0 および F のみに依存する定数 $C > 0$ が存在し, φ_t が

$$\left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi_t \right)^n = e^{tF + \varphi_t} \omega_0^n$$

を満たすならば, ある $t \in [0, 1]$ に対して

$$\left(g_{j\bar{k}} + \frac{1}{2\pi} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_t \right) > C^{-1} (g_{j\bar{k}}), \quad \text{かつ} \quad \|\varphi_t\|_{C^{3,\alpha}(X)} \leq C$$

が成り立つ. ここで Hölder ノルムは計量 ω_0 に関して測られる.

Proof. $(g_{j\bar{k}} + \frac{1}{2\pi} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_t) > C^{-1} (g_{j\bar{k}})$ に関しては Lemma 3.13 の C^2 評価による.

$0 < \alpha < 1$ を固定する. Lemma 3.15 と C^0 評価から $\|\varphi_t\|_{C^3} \leq C$ を得る. 特に φ の $C^{2,\alpha}$ 評価を得る. よって Theorem 3.3 と同じ議論で, $\|\varphi\|_{C^{3,\alpha}}$ の評価を得る. □

3.7 $c_1(X) = 0$ の場合

おそらくこの内容は [Blo07, Subsection 3] のレクチャーノートの方が詳しい.

Theorem 3.17 ([Szé14, Theorem 3.14]). (X, ω) をコンパクト Kähler 多様体とし, C^∞ 級関数 $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$\int_X e^F \omega^n = \int_X \omega^n$$

を満たすとする.

このとき, 定数を除いて一意な C^∞ 級関数 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して, $\omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi$ は Kähler

form であり, 次の Monge–Ampère 方程式を満たす.

$$\left(\omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi \right)^n = e^F \omega^n.$$

$c_1(X) < 0$ の場合との証明の違いは C^0 評価のみである. それ以外はほとんど同じなので C^0 評価のみに焦点を当てる.

Proposition 3.18 ([Szé14, Proposition 3.15]). (X, ω) をコンパクト Kähler 多様体とし, $F, \varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする. $\omega - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi$ が Kähler form であり,

$$\left(\omega - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi \right)^n = e^F \omega^n \quad (3.33)$$

を満たすと仮定する. このとき, (X, ω) と $\sup_X F$ のみに依存する定数 C が存在して次が成り立つ.

$$\sup_X \varphi - \inf_X \varphi < C$$

どうも $\omega - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi$ を用いているのは符号を簡単にするためらしい.

Proof. [Blo07, Subsection 3] にあるような Moser iteration に基づく. それは $\|\varphi\|_p := (\int_X |\varphi|^p \omega^n)^{1/p}$ という L^p -norm を, p を反復的に大きくしながら評価し, 最後に $p \rightarrow \infty$ とするものである.

以下定数 $C_1, C_2, \dots$, は (X, ω) と $\sup_X F$ にのみ依存するものとする. また正規化して,

$$\inf_X \varphi = 1, \quad \text{and} \quad \int_X \omega^n = 1 \quad (3.34)$$

とする. 特に $\varphi \geq 1$ なので, $p \leq q$ に対して $\|\varphi\|_p \leq \|\varphi\|_q$ である.

Δ を ω に関する Laplacian とすると,

$$\omega - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi > 0 \quad \Rightarrow \quad n - \frac{1}{2\pi} \Delta \varphi = \text{tr}(\omega - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \varphi) > 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi n > \Delta \varphi \quad (3.35)$$

(Def. 2.31)

ここで Green 関数を復習する.

Definition 3.19. M をコンパクト Riemannian 多様体とし, 体積形式を dV と書く. Green

関数 $G(P, Q) \in C^\infty(M \times M \setminus \Delta_M)$ とは

$$-\Delta_Q G(P, Q) = \delta_P - \frac{1}{\text{Vol}(M)}$$

を満たす関数である. ここで δ_P は Dirac measure である. これは定数和を除いて一意に定まる.

任意の smooth function $\varphi \in C^\infty(M)$ に対して

$$\varphi(P) = \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M \varphi dV + \int_M G(P, Q)(-\Delta\varphi)(Q) dV_Q \quad (3.36)$$

が成り立つ. 実際部分積分によって

$$\begin{aligned} \int_M G(P, Q)(-\Delta\varphi)(Q) dV_Q &= \int_M \varphi(Q)(-\Delta_Q G(P, Q)) dV_Q \\ &\quad \text{(部分積分)} \\ &= \int_M \varphi(Q) \left(\delta_P - \frac{1}{\text{Vol}(M)} \right) dV_Q = \varphi(P) - \frac{1}{\text{Vol}(M)} \int_M \varphi dV. \\ &\quad \text{(定義)} \end{aligned}$$

これを移項して上の表示公式 (3.36) を得る.

$\varphi(p) = 1$ となる点 $p \in X$ を取り, $G(x, y)$ を Δ の Green's function とする. 定数を調整して $G \geq 0$ とすると

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= \int_X \varphi \omega^n - \int_X G(x, p) \Delta \varphi(x) \omega^n(x) \\ &\quad \text{(3.34) \& (3.36)} \\ \Rightarrow 1 = \varphi(p) &\geq \int_X \varphi \omega^n - 2\pi n \int_X G(x, p) \omega^n(x) \geq \int_X \varphi \omega^n - C_1 \\ &\quad \text{(3.35)} \\ \Rightarrow \|\varphi\|_1 = \int_X \varphi \omega^n &< C_2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

さて $\omega_\varphi := \omega - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi$ とすると

$$\begin{aligned} \int_X \varphi(\omega_\varphi^n - \omega^n) &= \int_X \varphi(\omega_\varphi - \omega) \wedge (\omega_\varphi^{n-1} + \omega_\varphi^{n-2} \wedge \omega + \cdots + \omega_\varphi \wedge \omega^{n-2} + \omega^{n-1}) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_X \varphi \sqrt{-1} \partial\bar{\partial}\varphi \wedge (\omega_\varphi^{n-1} + \omega_\varphi^{n-2} \wedge \omega + \cdots + \omega_\varphi \wedge \omega^{n-2} + \omega^{n-1}) \\ &\quad \text{(定義)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_X \sqrt{-1} \partial\varphi \wedge \bar{\partial}\varphi \wedge (\omega_\varphi^{n-1} + \omega_\varphi^{n-2} \wedge \omega + \cdots + \omega_\varphi \wedge \omega^{n-2} + \omega^{n-1}). \\ &\quad \text{(Stokes の定理)} \end{aligned} \quad (3.38)$$

ここで Stokes の定理を用いた. 各 $0 \leq k \leq n-1$ に対して $\sqrt{-1}\partial\varphi \wedge \bar{\partial}\varphi \wedge \omega_\varphi^k \wedge \omega^{n-1-k} \geq 0$ である. (これは各点で計算すれば良い). よって

$$\begin{aligned}
\int_X \varphi \underbrace{(\omega_\varphi^n - \omega^n)}_{=(e^F-1)\omega^n \text{ by (3.33)}} &\geq \frac{1}{2\pi} \int_X \sqrt{-1}\partial\varphi \wedge \bar{\partial}\varphi \wedge \omega^{n-1} = \frac{1}{2\pi n} \int_X |\partial\varphi|_\omega^2 \omega^n \\
\Rightarrow \frac{1}{2\pi n} \int_X |\partial\varphi|_\omega^2 \omega^n &\leq \int_X \varphi(e^F-1)\omega^n \stackrel{(F \text{ を定数で抑える})}{\leq} C_3 \int_X \varphi \omega^n \leq C_4. \\
\Rightarrow \int_X (\varphi - \|\varphi\|_1)^2 \omega^n &= \int_X \left(\varphi - \int_X \varphi \omega^n \right)^2 \omega^n \stackrel{(\text{Poincaré inequality by Thm. 2.39})}{\leq} C_P \int_X |\partial\varphi|_\omega^2 \omega^n \leq C_5 \\
\Rightarrow \|\varphi\|_2 &< C_6
\end{aligned} \tag{3.39}$$

(3.37)

これを $p \geq 2$ に対して同様のことを行う. つまり

$$\begin{aligned}
\int_X \varphi^{p-1}(\omega_\varphi^n - \omega^n) &\stackrel{(\text{定義})}{=} -\frac{1}{2\pi} \int_X \varphi^{p-1} \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \varphi \wedge (\omega_\varphi^{n-1} + \omega_\varphi^{n-2} \wedge \omega + \cdots + \omega_\varphi \wedge \omega^{n-2} + \omega^{n-1}) \\
&\stackrel{(\text{Stokes の定理})}{=} \frac{p-1}{2\pi} \int_X \sqrt{-1} \varphi^{p-2} \partial \varphi \wedge \bar{\partial} \varphi \wedge (\omega_\varphi^{n-1} + \omega_\varphi^{n-2} \wedge \omega + \cdots + \omega_\varphi \wedge \omega^{n-2} + \omega^{n-1}) \\
&= \frac{4(p-1)}{2\pi p^2} \int_X \sqrt{-1} \partial \varphi^{p/2} \wedge \bar{\partial} \varphi^{p/2} \wedge (\omega_\varphi^{n-1} + \cdots + \omega^{n-1}) \\
&\geq \frac{4(p-1)}{2\pi n p^2} \int_X \left| \partial \varphi^{p/2} \right|_\omega^2 \omega^n.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

((3.39) と同じ)

よって

$$\begin{aligned}
\frac{4(p-1)}{2\pi n p^2} \int_X \left| \partial \varphi^{p/2} \right|_\omega^2 \omega^n &\stackrel{(3.40)}{\leq} \int_X \varphi^{p-1}(\omega_\varphi^n - \omega^n) \stackrel{((3.39) \text{ と同じ})}{=} \int_X \varphi^{p-1}(e^F-1)\omega^n \\
&\stackrel{(3.39) \text{ と同じ}}{\leq} C_7 \int_X \varphi^{p-1} \omega^n = C_7 \|\varphi\|_{p-1}^{p-1}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

これにより, $p \geq 2$ であるので

$$\left\| \partial \varphi^{p/2} \right\|_2^2 \stackrel{(3.41)}{\leq} \frac{2\pi n p}{4(p-1)} C_7 p \|\varphi\|_{p-1}^{p-1} \stackrel{(p \geq 2)}{\leq} C_8 p \|\varphi\|_{p-1}^{p-1}. \tag{3.42}$$

C_8 は p に依存しないことに注意する.

Sobolev 埋め込み定理 (Theorem 2.13) において, $N = 2n, m = 1, p = 2$ とすると $q = \frac{Np}{N-mp} = \frac{2n}{n-1}$ とすれば, $mp < N$ なので, $W^{m,p}(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-1}}(\Omega) = L^q(\Omega)$ が連続埋め込みとなる.

よって, X はコンパクトであることより, ある定数 C_S が存在して任意の f に対して

$$\|f\|_{L^{\frac{2n}{n-1}}}^2 \leq C_S \|f\|_{W^{1,2}}^2 = C_S (\|f\|_2^2 + \|\partial f\|_2^2) \quad (3.43)$$

が成り立つ. これを $f = \varphi^{p/2}$ に適用すると, 任意の $p \geq 2$ について

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\frac{np}{n-1}}^p &= \left\| \varphi^{p/2} \right\|_{\frac{2n}{n-1}}^2 \leq C_S \left(\left\| \varphi^{p/2} \right\|_2^2 + \left\| \partial \varphi^{p/2} \right\|_2^2 \right) \leq C_S \left(\|\varphi\|_p^p + C_8 p \|\varphi\|_{p-1}^{p-1} \right). \\ &\Rightarrow \|\varphi\|_{\frac{np}{n-1}}^p \leq C_S \left(\|\varphi\|_p^p + C_8 p \|\varphi\|_{p-1}^p \right) \leq C_S (\|\varphi\|_p^p + C_8 p \|\varphi\|_p^p) \leq C_9 p \|\varphi\|_p^p \\ &\quad (\varphi \geq 1 \text{ \& } \|\varphi\|_{p-1} \leq \|\varphi\|_p) \\ &\Rightarrow \|\varphi\|_{\frac{np}{n-1}} \leq (Cp)^{1/p} \|\varphi\|_p. \end{aligned} \quad (3.44)$$

そこで $p_k := 2 \left(\frac{n}{n-1} \right)^k$ とおく. $p_k = \frac{n}{n-1} p_{k-1}$ であることに注意すると

$$\|\varphi\|_{p_k} \leq (Cp_{k-1})^{1/p_{k-1}} \|\varphi\|_{p_{k-1}} \leq \cdots \leq \|\varphi\|_2 \cdot \prod_{i=0}^{k-1} (Cp_i)^{1/p_i} \leq \|\varphi\|_2 \cdot \prod_{i=0}^{\infty} (Cp_i)^{1/p_i} \quad (3.45)$$

ここで

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i} < +\infty, \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\log p_i}{p_i} < +\infty \Rightarrow \log \prod_{i=0}^{\infty} (Cp_i)^{1/p_i} = (\log C) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\log p_i}{p_i} < +\infty$$

以上より $k \rightarrow \infty$ とすれば

$$\sup_X \varphi = \|\varphi\|_{\infty} \leq C' \|\varphi\|_2 \leq C'' \Rightarrow \sup_X \varphi - \inf_X \varphi = \sup_X \varphi - 1 < C'' - 1 \quad (3.34)$$

よって欲しい式が得られた. □

4 Yau の定理の応用 1 Kähler–Einstein 計量の存在と Miyaoka–Yau 不等式

以後 Yau の定理とその応用を調べる. Chern 類などは [Iwa26] 参照のこと.

4.1 直線束の positivity と $\partial\bar{\partial}$ 補題.

直線束や曲率の定義は [Dem12, Section 3.5] もしくは [Iwa26, Chapters 1 and 2] 参照. 必要なものだけ定義しておく.

Definition 4.1 ([Dem12, Section 5]). (X, ω) をコンパクト Kähler 多様体とし, L を直線束とする.

- L が ample (positive) であるとは, L の C^∞ Hermite 計量 h が存在して, $\sqrt{-1}F_{L,h} > 0$ を満たすこと.
- L が semipositive であるとは, L の C^∞ Hermite 計量 h が存在して, $\sqrt{-1}F_{L,h} \geq 0$ を満たすこと.
- L が nef であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, L の C^∞ Hermite 計量 h_ε が存在して, $\sqrt{-1}F_{L,h_\varepsilon} \geq -\varepsilon\omega$ を満たすこと.

また次もよく使うので書いておく.

Lemma 4.2 ($\partial\bar{\partial}$ 補題). X をコンパクト Kähler 多様体とし, $\alpha \in A^{1,1}(X)$ が d -exact であるとする. このときある $\psi \in C^\infty(X)$ が存在して $\alpha = \partial\bar{\partial}\psi$ となる.

Proof. Theorem 2.45 より直交分解

$$A^{1,1}(X) = \mathbf{H}^{1,1}(X) \oplus \bar{\partial}A^{1,0}(X) \oplus \bar{\partial}^*A^{1,2}(X)$$

が存在する. α は d -exact なので任意の調和形式に直交する. したがって Theorem 2.45(2) より, ある $\varphi \in A^{1,1}(X)$ が存在して $\alpha = \square_{\bar{\partial}}\varphi$ となる. よって $\bar{\partial}\varphi = \partial\varphi = 0$ が示せれば, Kähler identity

$$[\Lambda, \partial] = \sqrt{-1}\bar{\partial}^* \iff \bar{\partial}^* = -\sqrt{-1}(\Lambda\partial - \partial\Lambda) \quad (4.1)$$

によって

$$\alpha = \underbrace{\square_{\bar{\partial}}}_{:=\bar{\partial}\bar{\partial}^*+\bar{\partial}^*\bar{\partial}} \varphi = \bar{\partial}\bar{\partial}^*\varphi \stackrel{(4.1)}{=} -\sqrt{-1}\bar{\partial}(\Lambda\partial - \partial\Lambda)\varphi \stackrel{(\text{by } \partial\varphi=0)}{=} -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\Lambda\varphi.$$

よって $\psi = -\sqrt{-1}\Lambda\varphi$ とすればよい.

$\bar{\partial}\varphi = 0$ については, $d\alpha = \partial\alpha + \bar{\partial}\alpha = 0$ と $\square_{\bar{\partial}}$ と $\bar{\partial}$ が (Kähler でなくても) 可換より,

$$\square_{\bar{\partial}}\bar{\partial}\varphi = \bar{\partial}\square_{\bar{\partial}}\varphi = \bar{\partial}\alpha = 0$$

なので, $\bar{\partial}\varphi$ と $\partial\varphi$ は調和かつ exact なので, $\bar{\partial}\varphi = 0$ になる. (直交分解を用いても良いし随伴による積分からも言える.)

$\partial\varphi = 0$ については, 上と同じく $\square_{\bar{\partial}}\partial\varphi = 0$ を示せば良い. (ここに Kähler がいる). Kähler identity から

$$\partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial = -\sqrt{-1}\{\partial(\Lambda\partial - \partial\Lambda) + (\Lambda\partial - \partial\Lambda)\partial\} = -\sqrt{-1}(\partial\Lambda\partial - \partial^2\Lambda + \Lambda\partial^2 - \partial\Lambda\partial) = 0 \quad (4.1)$$

よってこれから $\square_{\bar{\partial}}\partial = \partial\square_{\bar{\partial}}$ がいえ, 上と同じ議論から $\square_{\bar{\partial}}\partial\varphi = 0$ である. □

4.2 Yau の定理と Kähler–Einstein 計量の存在

Section 3 で示した定理を Yau の定理としてまとめておく.

Theorem 4.3 (Yau の定理). (X, ω) をコンパクト Kähler 多様体, f を C^∞ 級関数, $\lambda \geq 0$ とする. さらに $\lambda = 0$ の時は, 正規化条件 $\int_X e^f \omega^n = \int_X \omega^n$ をかす. この時 C^∞ 級関数 φ であって

$$\left(\omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi\right)^n = e^{\lambda\varphi+f}\omega^n, \quad \omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi > 0.$$

となるものが存在する.

Corollary 4.4. (X, ω_0) をコンパクト Kähler 多様体とする.

- (1) K_X が ample かつ $\{\omega_0\} \in c_1(K_X)$ ならば, $\{\omega\} = \{\omega_0\}$ となる Kähler–Einstein 計量 $\text{Ric}(\omega) = -\omega$ が存在する
- (2) $c_1(K_X) = 0$ の時, $\{\omega\} = \{\omega_0\}$ となる Kähler–Einstein 計量 $\text{Ric}(\omega) = 0$ が存在する
- (3) $-K_X$ が ample の時, ある $\varepsilon > 0$ があって, $\{\omega\} = \{\omega_0\}$ かつ $\text{Ric}(\omega) \geq \varepsilon\omega$ なる Kähler 計量が存在する.

Kähler–Einstein 計量の定義をしておく.

Definition 4.5 (Kähler–Einstein 計量). X の Kähler 計量 g について, ある定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ があって

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial_i\partial_{\bar{j}}\log\det(g)}_{=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_{i\bar{j}}} = \sqrt{-1}\lambda g_{i\bar{j}} \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}R_{i\bar{j}} = \lambda g_{i\bar{j}}$$

となる時 g を Kähler–Einstein 計量という.

Proof of Corollary 4.4. まず次の簡単な claim を示す.

Claim 4.6. 2つの Kähler form ω, ω' について

$$\mathrm{Ric}(\omega') - \mathrm{Ric}(\omega) = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\frac{\omega'^n}{\omega^n}$$

ここで local chart で

$$\omega'^n := h'\sqrt{-1}^n n! dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^n \quad \omega^n := h\sqrt{-1}^n n! dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^n$$

と書けている時, $\frac{\omega'^n}{\omega^n} := \frac{h'}{h}$ という C^∞ 級関数を表す. これは local chart の取り方によらない.

Proof. $\omega = \sqrt{-1}g_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}}$, $\omega' = \sqrt{-1}g'_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}}$ とすると

$$\omega'^n = \det(g'_{i\bar{j}})\sqrt{-1}^n n! dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^n \Rightarrow \frac{\omega'^n}{\omega^n} = \frac{\det(g'_{i\bar{j}})}{\det(g_{i\bar{j}})}$$

であるので,

$$-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\frac{\omega'^n}{\omega^n} \underset{\text{上を代入}}{=} \underbrace{-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\det(g'_{i\bar{j}})}_{=\mathrm{Ric}(\omega') \text{ 上の定義}} - \underbrace{\left(-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\det(g_{i\bar{j}})\right)}_{=\mathrm{Ric}(\omega) \text{ 上の定義}}$$

□

以上より Monge–Ampère 方程式 $\left(\omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi\right)^n = e^{\lambda\varphi+f}\omega^n$ に関して上の Claim を適応すると

$$\begin{aligned}
\text{Ric}\left(\omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi\right) - \text{Ric}(\omega) &= -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\frac{\left(\omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi\right)^n}{\omega^n} \\
&\stackrel{\text{(Claim 4.6)}}{=} -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log e^{\lambda\varphi+f} = -\lambda\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}f \\
&\stackrel{\text{(Monge–Ampère 方程式の定義)}}{=}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

(1). 仮定より $\{\omega_0\} \in c_1(K_X)$ であり, $-\text{Ric}(\omega_0) \in -c_1(X) = c_1(K_X)$ なので,

$$\{-\text{Ric}(\omega_0) - \omega_0\} \in c_1(0) \Rightarrow \exists F \in C^\infty(X) \text{ s.t. } -\text{Ric}(\omega_0) - \omega_0 = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}F$$

($\partial\bar{\partial}$ 補題 by Lem. 4.2)

Yau の定理 (Theorem 4.3) を用いれば

$$\begin{aligned}
\varphi \in C^\infty(X) \text{ s.t. } \left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi\right)^n &= e^{\varphi-F}\omega_0^n \\
\Rightarrow \text{Ric}\left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi\right) - \text{Ric}(\omega_0) &= -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}F \\
\Rightarrow \text{Ric}\left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi\right) &= \underbrace{\text{Ric}(\omega_0) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}F}_{=-\omega_0} - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi = -\left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi\right)
\end{aligned}$$

(4.2)

となり言えた.

(2). $-\text{Ric}(\omega_0) \in -c_1(X) = 0$ なので,

$$\{\text{Ric}(\omega_0)\} \in c_1(0) \Rightarrow \exists F \in C^\infty(X) \text{ s.t. } \text{Ric}(\omega_0) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}F$$

($\partial\bar{\partial}$ 補題 by Lem. 4.2)

さらに $F+c$ と定数 c を考えることで, 正規化条件 $\int_X e^F \omega_0^n = \int_X \omega_0^n$ を満たすと仮定する. すると Yau の定理 (Theorem 4.3) を用いれば

$$\begin{aligned}
\varphi \in C^\infty(X) \text{ s.t. } \left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi\right)^n &= e^F \omega_0^n \\
\Rightarrow \text{Ric}\left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi\right) - \text{Ric}(\omega_0) &= -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}F \\
\Rightarrow \text{Ric}\left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\varphi\right) &= \underbrace{\text{Ric}(\omega_0) - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}F}_{=0} = 0
\end{aligned}$$

(4.2)

(3). Kähler form θ で $\theta \in c_1(-K_X)$ となるものをとる. $\text{Ric}(\omega_0) \in c_1(X) = c_1(-K_X)$ なので,

$$\{\text{Ric}(\omega_0) - \theta\} \in c_1(0) \Rightarrow \exists F \in C^\infty(X) \text{ s.t. } \text{Ric}(\omega_0) - \theta = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}F$$

($\partial\bar{\partial}$ 補題 by Lem. 4.2)

さらに $F + c$ と定数 c を考えることで, 正規化条件 $\int_X e^F \omega_0^n = \int_X \omega_0^n$ を満たすと仮定する. Yau の定理 (Theorem 4.3) を用いれば

$$\begin{aligned} \varphi \in C^\infty(X) \text{ s.t. } \left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \right)^n &= e^F \omega_0^n \\ \Rightarrow \text{Ric} \left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \right) - \text{Ric}(\omega_0) &= -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}F \\ (4.2) \quad \Rightarrow \text{Ric} \left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \right) &= \underbrace{\text{Ric}(\omega_0) - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}F}_{=\theta} = \theta \geq \varepsilon \left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \right) \end{aligned}$$

(X コンパクト)

最後は X がコンパクトを用いてうまく $\varepsilon > 0$ をとる. □

4.3 Miyaoka-Yau 不等式

Chen–Ogiue [CO75] による恒等式を思い出そう. 今回は [His24] を参照した.

Proposition 4.7 ([CO75, His24]). (X, ω) を n 次元コンパクト Kähler 多様体とする.

$$\widetilde{\text{Ric}}(\omega) := \text{Ric}(\omega) - \frac{R(\omega)}{n} \omega \quad \widetilde{\text{Rm}}_{i\bar{j}k\bar{l}}(\omega) := \frac{1}{2\pi} R_{i\bar{j}k\bar{l}}(\omega) - \frac{R(\omega)}{n(n+1)} (g_{i\bar{j}}g_{k\bar{l}} + g_{i\bar{l}}g_{k\bar{j}})$$

と定義する. このとき

$$\begin{aligned} &\{2(n+1)c_2(X) - nc_1^2(X)\} \{\omega\}^{n-2} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \int_X \left\{ (n+1) \left| \widetilde{\text{Rm}}(\omega) \right|_\omega^2 - (n+2) \left| \widetilde{\text{Ric}}(\omega) \right|_\omega^2 \right\} \omega^n. \end{aligned}$$

証明は [Iwa26, Proposition 4.17] 参照.

Theorem 4.8 (Miyaoka–Yau 不等式 [CO75, Yau77]). X が Kähler–Einstein 計量 ω を持つ時, 次の Miyaoka–Yau 不等式が成り立つ.

$$\{2(n+1)c_2(X) - nc_1^2(X)\} \{\omega\}^{n-2} \geq 0$$

さらに等号が成立するときは X の普遍被覆が $\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n$ の *unit ball* の三つに限られる。

Proof. ω は Kähler–Einstein 計量なので, $\text{Ric}(\omega) = \lambda\omega$ となる λ があり, trace をとると $R(\omega) = n\lambda$ なので,

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Ric}}(\omega) &= \text{Ric}(\omega) - \frac{R(\omega)}{n}\omega = \lambda\omega - \lambda\omega = 0 \\ &\text{(定義)} \end{aligned}$$

よって Proposition 4.7 より

$$\begin{aligned} &\{2(n+1)c_2(X) - nc_1^2(X)\} \{\omega\}^{n-2} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \int_X \left\{ (n+1) \left| \widetilde{\text{Rm}}(\omega) \right|_\omega^2 - (n+2) \left| \widetilde{\text{Ric}}(\omega) \right|_\omega^2 \right\} \omega^n \\ &\text{(Prop. 4.7)} \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \int_X \left\{ (n+1) \left| \widetilde{\text{Rm}}(\omega) \right|_\omega^2 \right\} \omega^n \geq 0 \end{aligned}$$

等号成立するときは $\widetilde{\text{Rm}}(\omega) = 0$ である。よって

$$\frac{1}{2\pi} R_{i\bar{j}k\bar{l}}(\omega) = \frac{R(\omega)}{n(n+1)} (g_{i\bar{j}}g_{k\bar{l}} + g_{i\bar{l}}g_{k\bar{j}})$$

となり, 定数 holomorphic sectional curvature をもつ。古典的な結果¹⁴によって X の普遍被覆が $\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n$ の *unit ball* の三つに限られる。□

よって次の定理を得る。

Theorem 4.9 ([Yau77]). K_X が *ample* ならば

$$\{2(n+1)c_2(X) - nc_1^2(X)\} c_1(K_X)^{n-2} \geq 0$$

であり, 等号が成立するときは X の普遍被覆が $\mathbb{C}^n$ の *unit ball* になる。

Proof. Corollary 4.4 より Kähler–Einstein 計量が存在するため, Theorem 4.8 より従う。□

Theorem 4.10 ([Yau77]). $c_1(K_X) = 0$ ならば, 任意の Kähler form ω について

$$c_2(X) \{\omega\}^{n-2} \geq 0$$

であり, 等号が成立するとき, X の有限不分岐被覆が複素トーラスになる。

¹⁴かの有名な微分幾何の本 “Kobayashi–Nomizu” によると Hawley と Igusa が独立に示したとのことである。

Proof. Corollary 4.4 より Kähler–Einstein 計量が存在するため, Theorem 4.8 より従う. 等号が成立するとき X の普遍被覆が $\mathbb{C}^n$ になるが, Bieberbach の古典的定理により, 複素トーラスによって被覆される. $\square$

$-K_X$ が ample の時は Kähler–Einstein 計量を持つとは限らないので次の形でしか書けない.

Theorem 4.11 (=Theorem 4.8). $-K_X$ が ample かつ Kähler–Einstein 計量を持てば

$$\{2(n+1)c_2(X) - nc_1^2(X)\} c_1(X)^{n-2} \geq 0$$

であり, 等号が成立するときは $X \cong \mathbb{CP}^n$ となる.

実際 Miyaoka–Yau が成り立たない Fano の例が [GKP22] により知られている. [Ban87, Tia92, SW16, GKP22, DGP24] より次がわかっている.

Theorem 4.12 ([Ban87, Tia92, SW16, GKP22, DGP24]). $-K_X$ が ample かつ, K -semistable ならば

$$\{2(n+1)c_2(X) - nc_1^2(X)\} c_1(X)^{n-2} \geq 0$$

であり, 等号が成立するときは $X \cong \mathbb{CP}^n$ となる.

4.4 Miyaoka-Yau 不等式の歴史

曲面の場合の Miyaoka–Yau 不等式は $3c_2 \geq c_1(X)^2$ と同値である. この形は Bogomolov–Miyaoka–Yau の不等式と呼ばれる. 歴史的には以下の通り.

- Theorem 4.8 は Chen–Ogiue [CO75] で示された. なので, 個人的にこの不等式を述べる際には [CO75] も引用すべき気がする.
- [Miy77] が曲面の場合に $3c_2 \geq c_1(X)^2$ を示した. この場合は K_X が big でもよい.
- [Yau77] で Yau が Kähler–Einstein 計量の存在を示して, K_X が ample の場合の Miyaoka–Yau 不等式を示した. $c_1(K_X) = 0$ の場合も Yau の定理である.
- KLT の拡張としては $c_1(K_X) = 0$ の場合は [GKP16, LT18] により示された. maximal-quasi-étale cover をつかう. K_X ample の場合は [GKPT20, GKPT19] により示された. Higgs 束などを使う.
- $-K_X$ が ample かつ, K -semistable の場合は, smooth な場合は実質的には [Ban87] が初めらしいこれは久本さんに教えてもらった. [SW16] も近いことをやっていて引用すべき気がする. [Tia92] による canonical extension sheaf を使った別証明もある.
- $-K_X$ が ample かつ, K -semistable KLT 多様体は [GKP22, DGP24] による. Tian の canonical extension sheaf をつかう.

5 Yau の定理の応用 2 Enoki's Generic nefness theorem と Chern 類の不等式

5.1 Enoki's generic nefness theorem

Corollary 5.1. (X, ω_0) をコンパクト Kähler 多様体とする.

- (1) $-K_X$ が nef の時, 任意の $\varepsilon > 0$ について $\{\omega\} = \{\omega_0\}$ かつ $\text{Ric}(\omega) \geq -\varepsilon\omega$ となる Kähler 計量が存在する.
- (2) K_X が nef の時, 任意の $\varepsilon > 0$ について $\{\omega\} = \{\omega_0\}$ かつ $\text{Ric}(\omega) \leq \varepsilon\omega_0$ なる Kähler 計量が存在する

Proof. (1). $\varepsilon > 0$ を固定する. $-K_X$ が nef なので, ある $-K_X$ の計量 h_ε で

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \underbrace{F_{h_\varepsilon}}_{\text{Chern 曲率}} \geq -\varepsilon\omega_0 \quad \text{and} \quad \left\{ \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{h_\varepsilon} \right\} = c_1(-K_X)$$

となるものが存在する. $\text{Ric}(\omega_0) \in c_1(X) = c_1(-K_X)$ なので,

$$\{\text{Ric}(\omega_0) - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{h_\varepsilon}\} \in c_1(0) \Rightarrow \exists G_\varepsilon \in C^\infty(X) \text{ s.t. } \text{Ric}(\omega_0) - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{h_\varepsilon} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}G_\varepsilon$$

($\partial\bar{\partial}$ 補題 by Lem. 4.2)

Yau の定理 (Theorem 4.3) を用いれば

$$\begin{aligned} \varphi \in C^\infty(X) \text{ s.t. } \left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \right)^n &= e^{\varepsilon\varphi + G_\varepsilon} \omega_0^n \\ \Rightarrow \text{Ric} \left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \right) - \text{Ric}(\omega_0) &= -\varepsilon \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}G_\varepsilon \\ (4.2) \quad \Rightarrow \text{Ric} \left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \right) &= \underbrace{\text{Ric}(\omega_0) - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}G_\varepsilon}_{= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{h_\varepsilon} \geq -\varepsilon\omega_0} - \varepsilon \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \geq -\varepsilon \left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \right) \end{aligned}$$

(2). $\varepsilon > 0$ を固定する. K_X が nef なので, ある K_X の計量 h_ε で

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \underbrace{F_{h_\varepsilon}}_{\text{Chern 曲率}} \geq -\varepsilon\omega_0 \quad \text{and} \quad \left\{ \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{h_\varepsilon} \right\} = c_1(K_X)$$

となるものが存在する. $\text{Ric}(\omega_0) \in c_1(X) = c_1(-K_X)$ なので,

$$\{-\text{Ric}(\omega_0) - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{h_\varepsilon}\} \in c_1(0) \quad \Rightarrow \quad \exists G_\varepsilon \in C^\infty(X) \text{ s.t. } -\text{Ric}(\omega_0) - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{h_\varepsilon} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} G_\varepsilon$$

($\partial\bar{\partial}$ 補題 by Lem. 4.2)

さらに $G_\varepsilon + c$ と定数 c を考えることで, 正規化条件 $\int_X e^{-G_\varepsilon} \omega_0^n = \int_X \omega_0^n$ を満たすと仮定する. Yau の定理 (Theorem 4.3) を用いれば

$$\begin{aligned} \varphi \in C^\infty(X) \text{ s.t. } \left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \right)^n &= e^{-G_\varepsilon} \omega_0^n \\ \Rightarrow \text{Ric} \left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \right) - \text{Ric}(\omega_0) &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} G_\varepsilon \\ (4.2) \quad \Rightarrow \text{Ric} \left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \right) &= \underbrace{\text{Ric}(\omega_0) + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} G_\varepsilon}_{= -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{h_\varepsilon} \leq \varepsilon \omega_0} \leq \varepsilon \omega_0 \end{aligned}$$

□

Lemma 5.2. ω を Kähler 計量とする. ある $\lambda \in \mathbb{R}$ と *semipositive form* u があって

$$\text{Ric}(\omega) = \lambda \omega \pm u$$

となると仮定する.

ω によって T_X に誘導される *Hermite 計量* を h とするとき

$$n \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_h \wedge \omega^{n-1} = \lambda \text{Id}_{T_X} \omega^n \pm \sharp^\omega u \omega^n \quad \text{in } \text{End}(T_X)\text{-値 } (n, n)\text{-form}$$

Proof. Lemma 1.2 の公式

$$n \cdot \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_h \wedge \omega^{n-1} = \sharp^\omega \text{Ric}(\omega) \cdot \omega^n$$

を用いると

$$n \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_h \wedge \omega^{n-1} = \sharp^\omega \text{Ric}(\omega) \cdot \omega^n = \sharp^\omega (\lambda \omega \pm u) \cdot \omega^n = \lambda \text{Id}_{T_X} \omega^n \pm \sharp^\omega u \omega^n$$

(代入)

□

Theorem 5.3 (Enoki's generic nefness theorem [Eno88, Cao13]). X をコンパクト Kähler 多様体とする.

- (1) $-K_X$ nef の時, 任意の quotient torsion-free sheaf $T_X \rightarrow \mathcal{Q}$ と任意の Kähler form ω_0 について, $c_1(\mathcal{Q})\{\omega_0\}^{n-1} \geq 0$ である.
- (2) K_X nef の時, 任意の quotient torsion-free sheaf $\Omega_X \rightarrow \mathcal{Q}$ と任意の Kähler form ω_0 について, $c_1(\mathcal{Q})\{\omega_0\}^{n-1} \geq 0$ である.

Proof. (1). $\varepsilon > 0$ を固定する. すると Corollary 5.1 より Kähler form ω とある semipositive form u があって

$$\text{Ric}(\omega) = -\varepsilon\omega + u \quad \{\omega\} = \{\omega_0\} \quad (5.1)$$

となるものがある.

$T_X \rightarrow \mathcal{Q}$ を rank r torsion-free quotient sheaf とし W を locally free locus, $Q = \mathcal{Q}|_W$ を W 上のベクトル束とする. b を $T_X \rightarrow \mathcal{Q}$ と T_X の計量に関する second fundamental form とする. ([Dem12, Section 11] や [Iwa26, Subsection 5.7] 参照) これはあるベクトル値を持つ $(1, 0)$ -form である.

すると次のようになる.

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{Q}) \cdot \{\omega_0\}^{n-1} &= c_1(\mathcal{Q}) \cdot \{\omega\}^{n-1} = \int_W \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \text{tr} F_Q \wedge \omega^{n-1} \\ &\stackrel{(5.1)}{=} \int_W \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \text{tr}(\text{pr}_Q(F_{T_X, h}|_Q)) \wedge \omega^{n-1} + \int_W \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \text{tr}(b \wedge b^* \wedge \omega^{n-1}) \\ &\stackrel{[\text{Dem12, Chapter 11}]}{=} \underbrace{\int_W \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \text{tr}(\text{pr}_Q(F_{T_X, h}|_Q)) \wedge \omega^{n-1}}_{= \frac{1}{n} \text{tr}(\#^\omega(-\varepsilon\omega + u))\omega^n \text{ by Lemma 5.2}} + \underbrace{\int_W \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \text{tr}(b \wedge b^* \wedge \omega^{n-1})}_{\geq 0 \text{ by [Dem12, Chapter 11]}} \\ &\stackrel{(\text{Lem. 5.2})}{\geq} \frac{\varepsilon}{n} \int_W \underbrace{-\text{tr}(\text{pr}_Q(\text{Id}_{T_X})|_Q)}_{\geq -\text{tr}(\text{Id}_Q) \text{ (by 射影の性質)}} \omega^n + \frac{1}{n} \int_W \underbrace{\text{tr}(\text{pr}_Q(\#^\omega u)|_Q)}_{\geq 0} \omega^n \\ &\stackrel{(5.1)}{\geq} -\frac{\varepsilon}{n} \int_W \text{tr}(\text{Id}_Q) \omega^n = -\varepsilon \left(\frac{\text{rank}(\mathcal{Q})}{n} \int_X \omega_0^n \right) \end{aligned}$$

よって $\frac{\text{rank}(\mathcal{Q})}{n} \int_X \omega_0^n$ は ε によらないので, $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば $c_1(\mathcal{Q}) \cdot \{\omega_0\}^{n-1} \geq 0$ をえる.

(2). 双対をとって, 任意の rank r torsion-free subsheaf $\mathcal{F} \subset T_X$ について $c_1(\mathcal{F}) \cdot \{\omega_0\}^{n-1} \leq 0$ を示せば良い. $\varepsilon > 0$ を固定する. Corollary 5.1 よりある semipositive form u があって

$$\text{Ric}(\omega) = \varepsilon\omega_0 - u \quad \{\omega\} = \{\omega_0\} \quad (5.2)$$

となるものがある.

$\mathcal{F} \subset T_X$ を rank r torsion-free subsheaf とし W を locally free locus, $F = \mathcal{F}|_W$ を W 上のベクトル束とする. ¹⁵ b を $\mathcal{F} \subset T_X$ と T_X の計量に関する second fundamental form とする. これはある

¹⁵ 下の式変形の [Dem12, Chapter 11] の部分は微妙な点がある. $T_X/\mathcal{F}$ が torsion を持つ場合は “=”ではなく “ $\leq$ ” が正しい. ただ今 slope の不等式の評価しかしていないので, 問題はない. 面倒なら saturation をとって $\mathcal{F}$ が T_X 内で saturated であるとして良い.

ベクトル値を持つ $(1, 0)$ -form である. すると次のようになる.

$$\begin{aligned}
c_1(\mathcal{F}) \cdot \{\omega_0\}^{n-1} & \stackrel{(5.2)}{=} c_1(\mathcal{F}) \cdot \{\omega\}^{n-1} \stackrel{(\text{Chern-Weil})}{=} \int_W \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \operatorname{tr} F_F \wedge \omega^{n-1} \\
& \stackrel{[\text{Dem12, Chapter 11}]}{=} \underbrace{\int_W \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \operatorname{tr}(\operatorname{pr}_F(F_{T_{X,h}|F})) \wedge \omega^{n-1}}_{=\frac{1}{n} \operatorname{tr}(\sharp^\omega(\varepsilon\omega_0 - u))\omega^n \text{ by Lemma 5.2}} + \underbrace{\int_W \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \operatorname{tr}(-b \wedge b^* \wedge \omega^{n-1})}_{\leq 0 \text{ by [\text{Dem12, Chapter 11}]}} \\
& \stackrel{(\text{Lem. 5.2})}{\leq} \underbrace{\frac{\varepsilon}{n} \int_W \operatorname{tr}(\operatorname{pr}_F(\sharp^\omega \omega_0)|_F)) \omega^n}_{\leq \operatorname{tr}(\sharp^\omega \omega_0) \text{ (by 射影の性質)}} + \underbrace{-\frac{1}{n} \int_W \operatorname{tr}(\operatorname{pr}_F(\sharp^\omega u)|_F)) \omega^n}_{\leq 0} \\
& \leq \frac{\varepsilon}{n} \int_W \underbrace{\operatorname{tr}(\sharp^\omega \omega_0) \omega^n}_{=n\omega_0 \wedge \omega^{n-1}} \stackrel{(5.2)}{=} \varepsilon \int_X \omega_0^n
\end{aligned}$$

よって $\int_X \omega_0^n$ は ε によらないので, $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば $c_1(\mathcal{F}) \cdot \{\omega_0\}^{n-1} \leq 0$ をえる. $\square$

5.2 Chern 類の不等式

Generic nefness theorem (Theorem 5.3) を使えば [Miy87] の計算を用いて次を示すことができる.

Theorem 5.4 ([Miy87, Cao13, Ou23, IM22, IMM25]). (X, ω) をコンパクト Kähler 多様体とする

- $-K_X$ が nef ならば,

$$c_2(T_X)(c_1(-K_X) + \varepsilon\{\omega\})^{n-2} \geq 0$$

が十分に小さい $\varepsilon > 0$ で成り立つ.

- K_X が nef ならば

$$(3c_2(\Omega_X) - c_1(X)^2)(c_1(K_X) + \varepsilon\{\omega\})^{n-2} \geq 0$$

が十分に小さい $\varepsilon > 0$ で成り立つ.

この辺りは [Iwa26, Subsection 6.2, 6.3] を参照のこと. 次は [Iwa26, Subsection 6.2, 6.3] の方が強いことが言えている.

5.3 Generic nefness theorem の歴史

まず Projective とコンパクト Kähler によってだいぶ違う. Projective の場合は, [Miy87] が初だと思ふ.

Theorem 5.5 ([Miy87, Corollary 6.4]). X を n 次元の *normal projective variety* とし H を *ample Cartier divisor* とする. $\pi_*: \tilde{X} \rightarrow X$ を特異点解消とする. X が *non-uniruled* ならば, 任意の *torsion-free quotient sheaf* $\pi_*\Omega_{\tilde{X}} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ について $c_1(\mathcal{Q}) \cdot H^{n-1} \geq 0$ である.

証明の概略は次のとおり.

- (1) $c_1(\mathcal{Q}) \cdot H^{n-1} < 0$ となる $\pi_*\Omega_{\tilde{X}} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ があるとする. すると $\mathcal{F} \subset T_{\tilde{X}}$ で minimal slope が 0 より大きいものが作れる.
- (2) この $\mathcal{F}$ が algebraic foliation with rationally connected leaves になる. 特に $\mathcal{F}$ から fibration $f: \tilde{X} \dashrightarrow Y$ で general fiber の Zariski closure が有理連結であるものが誘導される.
- (3) しかしこれは rational curve がいっぱいあるので, X が non-uniruled に矛盾する.

この方向性の研究は歴史的には以下の通り.

- [BDPP13] より X が smooth ならば non-uniruled と K_X psef が同値なので, 上は canonical singularity で K_X psef で成り立つ.
- Foliation に関しては [BM16, KSCT07] など色々あるが, 最終的に movable class まで拡張したのは [CP19] だと思う. [Cla17] のサーベイに詳しい. [Laz] も読みやすいと思う.
- [CKT21] より KLT でも成り立つことがわかった
- $-K_X$ が nef の generic nefness は [Ou23] で完全解決.

コンパクト Kähler の場合は上の foliation の議論が成り立つかどうか最近まで不明だった. (2025 年に解決) ただそれまで時間がかかなりあったので, コンパクト Kähler の場合は独自の進化があった

- generic nefness は [Eno88] がおそらく初め. その後 [Cao13] が出たのだが, 多分結果が被ったように思う ([Cao13, Remark 2] 参照)
- [Gue16] で KLT や LC で拡張された. 多分 SLC までできたと思う
- [Ou25] でコンパクト Kähler の場合に上の foliation の議論が成り立つことがわかった. ブレイクスルーと言っても良い.
- $-K_X$ が nef の場合は [Ou25] を使って [IJZ25, MWWZ25, FGSW26] で解決. 意外と最近のことである.

Chern 類の不等式に関しては [Miy87, Cao13, Ou23, IM22] で smooth な場合, singular な場合は [IMM25] である. 等号成立もきっちりとしらべたのが [Cao13, Ou23, IM22, IMM25] である. [IMM25] で全て解決という感じである. (今読んでも [Miy87, Cao13, Ou23] で学ぶことは多い)

最後に”generic nef”についてだが, これは多分 [Pet12] による. 元々 [Miy87, Eno88] では generic semipositive という言い方だったが, [Ou23] などで generic nef に変わったと思う.

6 Yau の定理の応用 3 Enoki's stability theorem

6.1 Enoki's stability theorem

Corollary 6.1. (X, ω_0) をコンパクト Kähler 多様体とする. K_X nef の時, 任意の $\varepsilon > 0$ について, $\omega \in c_1(K_X) + \varepsilon\{\omega_0\}$ かつ $\text{Ric}(\omega) = -\omega + \varepsilon\omega_0$ なる Kähler 計量が存在する.

Proof. $\varepsilon > 0$ を固定する. K_X が nef なので, ある K_X の計量 h_ε で

$$\underbrace{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{h_\varepsilon}}_{\text{Chern 曲率}} \geq -\frac{\varepsilon}{2}\omega_0 \quad \text{and} \quad \left\{ \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{h_\varepsilon} \right\} = c_1(K_X)$$

となるものが存在する. そこで

$$\chi_\varepsilon := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{h_\varepsilon} + \varepsilon\omega_0$$

とする. χ_ε は Kähler form で $\{\chi_\varepsilon\} = c_1(K_X) + \varepsilon\{\omega_0\}$ である. $\text{Ric}(\chi_\varepsilon) \in c_1(X) = c_1(-K_X)$ なので,

$$\{-\text{Ric}(\chi_\varepsilon) - \chi_\varepsilon + \varepsilon\omega_0\} \in c_1(0) \quad \Rightarrow \quad \exists G_\varepsilon \in C^\infty(X) \text{ s.t. } -\text{Ric}(\chi_\varepsilon) - \chi_\varepsilon + \varepsilon\omega_0 = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} G_\varepsilon$$

($\partial\bar{\partial}$ 補題 by Lem. 4.2)

Yau の定理 (Theorem 4.3) を用いれば

$$\begin{aligned} \varphi \in C^\infty(X) \text{ s.t. } (\chi_\varepsilon + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi)^n &= e^{\varphi - G_\varepsilon} \chi_\varepsilon^n \\ \Rightarrow \text{Ric}(\chi_\varepsilon + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi) - \text{Ric}(\chi_\varepsilon) &= -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} G_\varepsilon \\ (4.2) \quad \Rightarrow \text{Ric}(\chi_\varepsilon + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi) &= \text{Ric}(\chi_\varepsilon) - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} G_\varepsilon = -\left(\chi_\varepsilon + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi\right) + \varepsilon\omega_0 \end{aligned}$$

よって $\omega := \chi_\varepsilon + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi$ とおけば良い. □

Theorem 6.2 ([Eno88, Theorem 1.1]). (X, ω_0) をコンパクト Kähler 多様体とする. K_X nef の時, 任意の rank r torsion freesheaf $\mathcal{F} \subset T_X$ について

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} c_1(\mathcal{F}) \cdot (c_1(K_X) + \varepsilon\{\omega_0\})^{n-1} \\ & \leq \frac{1}{n} c_1(-K_X) \cdot (c_1(K_X) + \varepsilon\{\omega_0\})^{n-1} + \varepsilon \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{n} \right) \cdot \{\omega_0\} (c_1(K_X) + \varepsilon\{\omega_0\})^{n-1} \end{aligned} \quad (6.1)$$

証明の前にすぐにわかる corollary を書いておく.

Corollary 6.3 ([Eno88, Corollary 1.2, 1.3]). (X, ω_0) を n 次元コンパクト Kähler 多様体とする. K_X nef とし, 数値的小平次元を

$$\nu := \max \left\{ 0 \leq k \leq n \mid c_1(K_X)^k \neq 0 \right\}.$$

と定義する. この時次が成り立つ.

- (1) $\nu = 0$ の時, T_X は $\{\omega_0\}^{n-1}$ -semistable である.
- (2) $\nu = n$ の時, つまり K_X が big の時, T_X は K_X^{n-1} -semistable である.
- (3) $0 < \nu < n$ の時, 任意の rank r torsion-free sheaf $\mathcal{F} \subset T_X$ について

$$c_1(\mathcal{F}) \cdot c_1(K_X)^\nu \cdot \{\omega_0\}^{n-\nu-1} \leq 0$$

である. さらにこの等号が成立する時

$$\nu c_1(\mathcal{F}) \cdot c_1(K_X)^{\nu-1} \cdot \{\omega_0\}^{n-\nu} \leq (r + \nu - n) c_1(-K_X) \cdot c_1(K_X)^{\nu-1} \cdot \{\omega_0\}^{n-\nu}$$

となる. 特に T_X は $K_X^\nu \cdot \{\omega_0\}^{n-\nu-1}$ -semistable である.

Proof. rank r torsion-free sheaf $\mathcal{F} \subset T_X$ とする. $\nu < n$ ならば (6.1) の $\varepsilon^{n-\nu-1}$ の項のみを展開すると,

$$\binom{n-1}{\nu} \varepsilon^{n-\nu-1} \cdot \frac{1}{r} c_1(\mathcal{F}) c_1(K_X)^\nu \{\omega_0\}^{n-\nu-1} \leq \binom{n-1}{\nu} \varepsilon^{n-\nu-1} \cdot \frac{1}{n} c_1(-K_X) c_1(K_X)^\nu \{\omega_0\}^{n-\nu-1} + O(\varepsilon^{n-\nu}) \quad (6.2)$$

となる. ここで $O(\varepsilon^{n-\nu})$ はランダウの記号とする. $\nu = n$ ならば (6.1) の ε を含まない定数項を見れば

$$\frac{1}{r} c_1(\mathcal{F}) c_1(K_X)^{n-1} \leq \frac{1}{n} c_1(-K_X) c_1(K_X)^{n-1} + O(\varepsilon) \quad (6.3)$$

よって (1), (2) は (6.2), (6.3) を $\varepsilon \rightarrow 0$ すればすぐに従う. (厳密には ε の何乗かで割ってから極限を取る.)

(3) については, 一つ目の主張は $c_1(-K_X) c_1(K_X)^\nu \{\omega_0\}^{n-\nu-1} = 0$ なので, (6.2) からすぐに従う. 二つ目の主張について, (6.1) の $\varepsilon^{n-\nu}$ の項を展開すれば,

$$\begin{aligned} & \binom{n-1}{\nu-1} \varepsilon^{n-\nu} \frac{1}{r} c_1(\mathcal{F}) \cdot c_1(K_X)^{\nu-1} \cdot \{\omega_0\}^{n-\nu} \\ & \leq \binom{n-1}{\nu-1} \varepsilon^{n-\nu} \frac{1}{n} c_1(-K_X) \cdot c_1(K_X)^{\nu-1} \cdot \{\omega_0\}^{n-\nu} + \binom{n-1}{\nu} \varepsilon^{n-\nu} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{n} \right) \cdot c_1(K_X)^\nu \cdot \{\omega_0\}^{n-\nu} + O(\varepsilon^{n-\nu+1}) \end{aligned}$$

よって $\varepsilon^{n-\nu}$ の項を整理すれば、欲しい式を得る。 $\square$

Proof of Theorem 6.2. $\varepsilon > 0$ を固定する。Corollary 6.1 より

$$\text{Ric}(\omega) = -\omega + \varepsilon\omega_0 \quad \{\omega\} = c_1(K_X) + \varepsilon\{\omega_0\} \quad (6.4)$$

となるものがある。

$\mathcal{F} \subset T_X$ を rank r torsion-free subsheaf とし W を locally free locus, $F = \mathcal{F}|_W$ を W 上のベクトル束とする。¹⁶ b を $\mathcal{F} \subset T_X$ と T_X の計量に関する second fundamental form とする。これはあるベクトル値を持つ $(1, 0)$ -form である。すると次のようになる。

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{F}) \cdot (c_1(K_X) + \varepsilon\{\omega_0\})^{n-1} &= c_1(\mathcal{F}) \cdot \{\omega\}^{n-1} = \int_W \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \text{tr } F_F \wedge \omega^{n-1} \\ &\stackrel{\text{Chern-Weil}}{=} \int_W \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \text{tr}(\text{pr}_F(F_{T_X, h}|_F)) \wedge \omega^{n-1} + \int_W \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \text{tr}(-b \wedge b^* \wedge \omega^{n-1}) \\ &\stackrel{[\text{Dem12, Chapter 11}]}{=} \underbrace{\frac{1}{n} \text{tr}(\#^\omega(-\omega + \varepsilon\omega_0))\omega^n}_{=\frac{1}{n} \text{tr}(\#^\omega(-\omega + \varepsilon\omega_0))\omega^n \text{ by Lemma 5.2}} + \underbrace{\int_W \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \text{tr}(-b \wedge b^* \wedge \omega^{n-1})}_{\leq 0 \text{ by } [\text{Dem12, Chapter 11}]} \\ &\leq -\frac{1}{n} \int_W \text{tr}(Id_F)\omega^n + \underbrace{\frac{\varepsilon}{n} \int_W \text{tr}(\text{pr}_F(\#^\omega\omega_0)|_F)\omega^n}_{\leq \text{tr}(\#^\omega\omega_0) \text{ (by 射影の性質)}} \\ &\stackrel{(\text{Lem. 5.2})}{\leq} -\frac{r}{n} \int_X \omega^n + \frac{\varepsilon}{n} \underbrace{\int_X \text{tr}(\#^\omega\omega_0)\omega^n}_{=n \int_X \omega_0 \wedge \omega^{n-1}} \stackrel{(6.4)}{=} -\frac{r}{n} (c_1(K_X) + \varepsilon\{\omega_0\})^n + \varepsilon\{\omega_0\} \cdot (c_1(K_X) + \varepsilon\{\omega_0\})^{n-1} \end{aligned}$$

よってあとは式変形をすれば欲しい式が得られる。 $\square$

Theorem 6.4 ([Eno88, Theorem 1.1]). (X, ω_0) をコンパクト Kähler 多様体とし, $m \geq 1$ となる整数とする。 K_X nef の時, 任意の rank r torsion-free sheaf $\mathcal{F} \subset T_X^{\otimes m}$ について

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r} c_1(\mathcal{F}) \cdot (c_1(K_X) + \varepsilon\{\omega_0\})^{n-1} \\ &\leq \frac{1}{n^m} c_1(T_X^{\otimes m}) \cdot (c_1(K_X) + \varepsilon\{\omega_0\})^{n-1} + \varepsilon m n^{m-1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{n^m} \right) \cdot \{\omega_0\} (c_1(K_X) + \varepsilon\{\omega_0\})^{n-1} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Proof. $\varepsilon > 0$ を固定する。Corollary 6.1 より

$$\text{Ric}(\omega) = -\omega + \varepsilon\omega_0 \quad \{\omega\} = c_1(K_X) + \varepsilon\{\omega_0\} \quad (6.6)$$

となるものがある。

¹⁶ ここも前と同じく微妙な問題があって、下の式変形の [Dem12, Chapter 11] の部分 $T_X/\mathcal{F}$ が torsion を持つ場合は “=” ではなく “ $\leq$ ” が正しい。

h を ω によって誘導される T_X の Hermite 計量とし, $T_X^{\otimes m}$ に h^m という計量を入れる. すると tensor と曲率の公式から,

$$F_{T_X^{\otimes m}, h^m} = \sum_{j=1}^m \text{Id}^{\otimes(j-1)} \otimes F_{T_X, h} \otimes \text{Id}^{\otimes(m-j)}$$

となる. 特に以上より

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{T_X^{\otimes m}, h^m} \wedge \omega^{n-1} = -\frac{m}{n} \text{Id}_{T_X^{\otimes m}} \cdot \omega^n + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{j=1}^m \left(\text{Id}^{\otimes(j-1)} \otimes \sharp^\omega \omega_0 \otimes \text{Id}^{\otimes(m-j)} \right) \cdot \omega^n \quad (6.7)$$

(Lem. 5.2 & (6.6))

$\mathcal{F} \subset T_X^{\otimes m}$ を rank r torsion-free subsheaf とし W を locally free locus, $F = \mathcal{F}|_W$ を W 上のベクトル束とする. ¹⁷ b を $\mathcal{F} \subset T_X^{\otimes m}$ と $T_X^{\otimes m}$ の計量に関する second fundamental form とする. これはあるベクトル値を持つ $(1, 0)$ -form である. すると次のようになる.

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{F}) \cdot (c_1(K_X) + \varepsilon\{\omega_0\})^{n-1} &= c_1(\mathcal{F}) \cdot \{\omega\}^{n-1} = \int_W \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \text{tr } F_F \wedge \omega^{n-1} \\ &\quad \text{(6.4)} \quad \text{Chern-Weil} \\ &= \int_W \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \text{tr} \left(\text{pr}_F(F_{T_X^{\otimes m}, h^m}|_F) \right) \wedge \omega^{n-1} + \underbrace{\int_W \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \text{tr}(-b \wedge b^* \wedge \omega^{n-1})}_{\leq 0 \text{ by [Dem12, Chapter 11]}} \\ &\stackrel{(6.7)}{\leq} -\frac{m}{n} \int_W \text{tr}(Id_F) \omega^n + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{j=1}^m \int_W \text{tr} \left(\text{pr}_F(\text{Id}^{\otimes(j-1)} \otimes \sharp^\omega \omega_0 \otimes \text{Id}^{\otimes(m-j)})|_F \right) \omega^n \\ &\leq -\frac{mr}{n} \int_X \omega^n + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{j=1}^m n^{m-1} \underbrace{\int_X \text{tr}(\sharp^\omega \omega_0) \omega^n}_{=n \int_X \omega_0 \wedge \omega^{n-1}} \\ &\stackrel{(6.4)}{=} -\frac{mr}{n} (c_1(K_X) + \varepsilon\{\omega_0\})^n + \varepsilon m n^{m-1} \{\omega_0\} \cdot (c_1(K_X) + \varepsilon\{\omega_0\})^{n-1} \end{aligned}$$

よってあとは $\frac{1}{n^m} c_1(T_X^{\otimes m}) = \frac{m}{n} c_1(-K_X)$ を用いて式変形をすれば欲しい式が得られる.

□

Corollary 6.5 (cf. [CP16, Subsection 5]). (X, ω_0) を 2次元以上のコンパクト Kähler 多様体とし, $m \geq 2$ となる整数とする. *torsion-free sheaf* による完全系列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow (\Omega_X^1)^{\otimes m} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

であって, $\text{rk } L = 1$ となるものを考える. K_X が nef かつ $c_1(\mathcal{Q}) = 0$ が成り立つならば,

¹⁷ ここも前と同じく微妙な問題があって, 下の式変形の [Dem12, Chapter 11] の部分 $T_X/\mathcal{F}$ が torsion を持つ場合は “=” ではなく “ $\leq$ ” が正しい.

$K_X \equiv 0$ である.

実は [CP16] により弱い仮定 $c_1(\mathcal{Q}) \cdot \{\omega_0\}^{n-1} = 0$ でもいけるが、それにはより強い主張を示す必要がある.

Proof. $\text{rank } \mathcal{Q} = n^m - 1$ であり, $\mathcal{Q}^\vee \subset T_X^{\otimes m}$, かつ $c_1(\mathcal{Q}^\vee) = -c_1(\mathcal{Q}) = 0$ である. Theorem 6.4 を $\mathcal{F} = \mathcal{Q}^\vee$ に適用すると,

$$0 \leq -\frac{m}{n} c_1(K_X) \cdot (c_1(K_X) + \varepsilon \{\omega_0\})^{n-1} + \frac{\varepsilon m}{n(n^m - 1)} \{\omega_0\} \cdot (c_1(K_X) + \varepsilon \{\omega_0\})^{n-1}.$$

したがって

$$0 \geq ((n^m - 1)c_1(K_X) - \varepsilon \{\omega_0\}) \cdot (c_1(K_X) + \varepsilon \{\omega_0\})^{n-1}.$$

$c_1(K_X) \neq 0$ と仮定し, $\nu := \nu(K_X) \geq 1$ とする. すると

$$((n^m - 1)c_1(K_X) - \varepsilon \{\omega_0\}) \cdot (c_1(K_X) + \varepsilon \{\omega_0\})^{n-1} = \binom{n-1}{\nu-1} \frac{\nu n^m - n}{\nu} \varepsilon^{n-\nu} c_1(K_X)^\nu \cdot \{\omega_0\}^{n-\nu} + O(\varepsilon^{n-\nu+1}).$$

$m \geq 2, n \geq 2, \nu \geq 1$ より $\frac{\nu n^m - n}{\nu} > 0$. である. したがって十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して上式の右辺は正となり矛盾する. よって $\nu(K_X) = 0$ であり, K_X は nef なので $K_X \equiv 0$ となる. $\square$

6.2 Enoki's stability theorem の歴史

時系列としてはこんな感じである.

- Kähler–Einstein 計量があれば T_X が polystability はわかるので ([Iwa26, Section 5] 参照), K_X が ample や $c_1(K_X) = 0$ の場合は, polystability に関しては [Yau77] が初めだと思う.
- K_X が nef の場合は [Eno88] がおそらく初め. この論文, X が terminal かつ K_X が nef + effective と書ける場合をやっている. 時代を先取りした研究である.
- [Gue16] で KLT や LC で拡張された. 多分 SLC までできたと思う. これは [Eno88] の方法を精密化したものだと思う.
- [CP16] の log pair の応用もある. これも [Eno88] の方法を精密化したものだと思う.
- 実は LC だと $c_1(K_X) = 0$ でも polystability は成り立たない. [BFPT24] による.

7 Yau の定理の応用 $-K_X$ が nef な多様体の基本群

以下 Riemannian 幾何学, とりわけ比較定理に関する定理を用いる. これに関しては [Zhu97] のサーベイを引用する

7.1 Fano は単連結

Theorem 7.1. *Fano* 多様体は単連結である. つまり $-K_X$ ample ならば単連結である.

Proof. Corollary 4.4 から, ある $\varepsilon > 0$ があって, $\text{Ric}(\omega) \geq \varepsilon\omega$ なる Kähler 計量が存在する. ここで Myers の定理を思い出す.

Theorem 7.2 (Myers の定理 [Zhu97, Theorem 3.4]). n 次元完備 Riemannian 多様体 (M, g, ω) について, $H > 0$ となる定数があるとして, $\text{Ric}(\omega) \geq (n-1)H\omega$ が成り立つならば, $\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{H}}$ であり, 基本群 $\pi_1(M)$ は有限である. 特に M はコンパクトである.

よって X の基本群は有限である. そこで普遍被覆 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ をとる. 基本群の有限性より π は finite etale であり, $\tilde{X}$ もまた Fano である. π の次数を d とすると

$$d \cdot \chi(X, \mathcal{O}_X) = \chi(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

である. 今 X も $\tilde{X}$ も Fano なので, $\chi(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \chi(X, \mathcal{O}_X) = 1$ である. よって $d = 1$ であり, π は恒等写像となる. 特に X の基本群は自明である. $\square$

7.2 $-K_X$ が semipositive ならば基本群は almost Abelian

7.2.1 群論の用語の定義

以下群に関して次の用語を定義しておく.

Definition 7.3. G を群とする.

- (1) G が almost nilpotent (or virtually nilpotent) であるとは, 有限指数の正規部分群 $H \triangleleft G$ があって, H が nilpotent であること.
- (2) G が almost Abelian (or virtually Abelian) であるとは, 有限指数の正規部分群 $H \triangleleft G$ があって, H が Abelian であること.

almost nilpotent に関しては有限生成であれば次の有用な定理がある. そのために次の準備をする.

Definition 7.4 ([Zhu97, Definition 3.9]). G を有限生成群とし, $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle$ とする.

- generators の集合 $S = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ とする. $S \cup S^{-1}$ に関する $g \in G$ の word length を

$$|g|_S := \min\{m \geq 0 \mid g = t_1 \cdots t_m \quad t_i \in S \cup S^{-1}\}$$

と定める.

- r -neighborhood を $U_S(r) := \{g \in G \mid |g|_S \leq r\}$ によって定義する.
- G が polynomial growth であるとは, generators の集合 S と正の数 s が存在して, 十分大きな r に対して $|U_S(r)| \leq r^s$ が成立することとする.

Theorem 7.5 (Gromov 81 [Zhu97, Theorem 3.10]). 有限生成群 G が *polynomial growth* をもつことは, *almost nilpotent* と同値.

7.2.2 $-K_X$ が semipositive の基本群

Theorem 7.6 ([DPS96]). コンパクト Kähler 多様体 X について, $-K_X$ が *semipositive* ならば基本群は *almost Abelian* である.

この証明は二つの定理に基づく.

Theorem 7.7. X をコンパクト Kähler 多様体とする. $-K_X$ *semipositive* ならば, 基本群は *almost nilpotent* である.

Theorem 7.8. X をコンパクト Kähler 多様体とする. $-K_X$ が *nef* かつ基本群は *almost nilpotent* ならば, 基本群は *almost Abelian* である.

以下これを示していく.

7.2.3 Proof of Theorem 7.7

こっちは Milnor の定理 (cf. [Zhu97, Theorem 3.11]) と呼ばれているものである. Bishop-Gromov の不等式の応用である.

Proof. $-K_X$ semipositive ならば, $\text{Ric}(\omega) \geq 0$ となる Kähler 計量が存在する. これは Corollary 5.1

と同じである. 実際 $-K_X$ が semipositive なので, ある $-K_X$ の計量 h で

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \underbrace{F_h}_{\text{Chern 曲率}} \geq 0 \quad \text{and} \quad \left\{ \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_h \right\} = c_1(-K_X)$$

となるものが存在する. $\text{Ric}(\omega_0) \in c_1(X) = c_1(-K_X)$ なので,

$$\left\{ \text{Ric}(\omega_0) - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_h \right\} \in c_1(0) \Rightarrow \exists G_\varepsilon \in C^\infty(X) \text{ s.t. } \text{Ric}(\omega_0) - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_h = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}G$$

($\partial\bar{\partial}$ 補題 by Lem. 4.2)

さらに $G+c$ と定数 c を考えることで, 正規化条件 $\int_X e^G \omega_0^n = \int_X \omega_0^n$ を満たすと仮定する. Yau の定理 (Theorem 4.3) を用いれば

$$\begin{aligned} \varphi \in C^\infty(X) \text{ s.t. } \left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \right)^n &= e^G \omega_0^n \\ \Rightarrow \text{Ric} \left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \right) - \text{Ric}(\omega_0) &= -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}G \\ (4.2) \quad \Rightarrow \text{Ric} \left(\omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \right) &= \text{Ric}(\omega_0) - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}G = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_h \geq 0 \end{aligned}$$

以降の議論は [Zhu97, Theorem 3.11] に同じである. 普遍被覆 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ を考え, $\tilde{X}$ 上の Riemannian 計量 $\tilde{g}$ を, $\text{Ric}(\omega) \geq 0$ となる Kähler 計量から誘導する. $n = \dim_{\mathbb{C}} X$ とすると, $\tilde{X}$ は複素 n 次元の複素多様体であるとともに, 実 $2n$ 次元完備 Riemann 多様体で $\text{Ric}(\tilde{g}) \geq 0$ となる.

ここで Bishop-Gromov の定理 (で下からの曲率が 0 のもの) を思い出そう.

Theorem 7.9 (Bishop-Gromov の定理 [Zhu97, Corollary 3.3]). 実 $2n$ 次元完備 Riemann 多様体 (M, g, ω) が, $\text{Ric}(\omega) \geq 0$ を満たすならば, 任意の $p \in M$ と $0 < r \leq R$ に対して

$$\frac{\text{vol}(B_p(r))}{\text{vol}(B_p(R))} \geq \left(\frac{r}{R} \right)^{2n}. \quad (7.1)$$

が成り立つ. ここで $B_p(r) := \{x \in M \mid d_g(p, x) < r\}$ は p を中心とする半径 r の測地球であり, $\text{vol}(B_p(r)) := \int_{B_p(r)} dV_g = \int_{B_p(r)} \frac{\omega^n}{n!}$ は g に関する Riemann 体積である.

特に次が成り立つ.

$$\text{vol}(B_p(r)) \leq \frac{\pi^n}{n!} r^{2n}$$

示すべきことは $\pi_1(X)$ が almost nilpotent であること, 同値的に Theorem 7.5 から polynomial growth であることである. $G := \pi_1(X, p)$ とし, $\tilde{X}$ に G が作用しているとして良い. $\pi(\tilde{p}) = p$ となる $\tilde{p} \in \tilde{X}$ を一つ固定しておく.

G は有限生成なので, $S = \{g_1, \dots, g_k\}$ と generator を一つ固定する. このとき, 各 $g_i \in \pi_1(X, p)$ は $p \in X$ 内の loop の同値類, つまり

$$\sigma_i: [0, l_i] \rightarrow X \quad \sigma_i(0) = \sigma_i(l_i) = p$$

とみなせる. 今 σ_i の lift は

$$\tilde{\sigma}_i: [0, l_i] \rightarrow \tilde{X} \quad \tilde{\sigma}_i(0) = \tilde{p} \quad \tilde{\sigma}_i(l_i) = g_i(\tilde{p})$$

となる. G は $\tilde{X}$ に isometry に作用しているので

$$d_{\tilde{g}}(\tilde{p}, g_i \tilde{p}) \leq l_i \leq \max\{l_1, \dots, l_k\} =: l \quad (7.2)$$

である. 次に $\varepsilon > 0$ で相異なる任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して,

$$h_1(B_{\tilde{p}}(\varepsilon)) \cap h_2(B_{\tilde{p}}(\varepsilon)) = \emptyset \quad (7.3)$$

となるようなものをとる. これは $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ が covering map なので, $p \in V$ という近傍で $\pi^{-1}(V) = \sqcup_{g \in G} V_g$ となるものが存在する. そこで $\tilde{p} \in B_{\tilde{p}}(\varepsilon) \subset V_g$ となるように ε を小さく取れば良い.

この時長さ r となる $h \in U(r) \subset G$ について

$$h(B_{\tilde{p}}(\varepsilon)) \subset B_{\tilde{p}}(rl + \varepsilon) \quad (7.4)$$

である. 実際 $z \in h(B_{\tilde{p}}(\varepsilon))$ について, $z = h \cdot x$ となる $x \in B_{\tilde{p}}(\varepsilon)$ をとると

$$d_{\tilde{g}}(\tilde{p}, z) \leq d_{\tilde{g}}(\tilde{p}, h \cdot \tilde{p}) + d_{\tilde{g}}(h \cdot \tilde{p}, h \cdot x) = d_{\tilde{g}}(\tilde{p}, h \cdot \tilde{p}) + d_{\tilde{g}}(\tilde{p}, x) \leq lr + \varepsilon \quad (7.2)$$

となるためである. 以上をまとめると

$$|U(r)| \cdot \text{vol}(B_{\tilde{p}}(\varepsilon)) \stackrel{(7.3)}{=} \text{vol} \left(\bigsqcup_{h \in U(r)} h(B_{\tilde{p}}(\varepsilon)) \right) \stackrel{(7.4)}{\leq} \text{vol}(B_{\tilde{p}}(rl + \varepsilon))$$

よって Bishop Gromov の定理を使って

$$|U(r)| \leq \frac{\text{vol}(B_{\tilde{p}}(rl + \varepsilon))}{\text{vol}(B_{\tilde{p}}(\varepsilon))} \stackrel{(7.1)}{\leq} \frac{(rl + \varepsilon)^{2n}}{\varepsilon^{2n}} = cr^{2n}$$

となるように定数 c を r によらず取れる. よって定義から G は polynomial growth である. $\square$

7.2.4 Proof of Theorem 7.8

この辺りは [Iwa25, Section 7] にまとめている. 要するに Campana の Special 多様体の話である. 鍵となるのは Special 多様体などでも現れる "Albanese map が全射かつファイバー連結" であることである.

Proof. finite etale cover をとって, $\pi_1(X)$ を nilpotent かつ torsion-free であるとして良い. ここで $-K_X$ が nef ならば, Campana の意味で special である.¹⁸ よって [Iwa25, Subsection 5.2] から Albanese map が全射かつファイバー連結である. (下の Remark 7.12 の別証明も参照)

このあとは [Cam95b] の議論による. [Voi21, Theorem 3.23] を参考にした. ([Iwa25, Subsection 7.2] そのまま写した) $\alpha: X \rightarrow A$ を Albanese map とする.

- (1) $\alpha_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(A)$ は全射になる. これは $\phi: X \rightarrow A$ がファイバー連結なので (Lemma 7.10(1) 参照)
- (2) $\alpha_*: H_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(A, \mathbb{Z})$ は全射かつ, finite kernel である. これは Albanese map の性質から. 特に $H_1(X, \mathbb{Q}) \cong H_1(A, \mathbb{Q})$ である.
- (3) $\alpha^*: H^2(A, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Q})$ 単射である. (Lemma 7.10(2) 参照)

$H := \pi_1(A) = \mathbb{Z}^{2k}$ とおく.

$$n: H^2(H, \mathbb{Q}) = H^2(\mathbb{Z}^{2k}, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(A, \mathbb{Q})$$

という (全) 単射が存在することを示す. $E_H \rightarrow B_H = E_H/H$ を H の分類空間とする.¹⁹ 具体的にいうと $E_H = \mathbb{R}^{2l}$ で, $B_H = (S^1)^{2l}$ である. 一方普遍被覆 $\mathbb{C}^k \rightarrow A = \mathbb{C}^k/H$ も主 H 束であり, $\mathbb{C}^k$ は可縮である. したがってこれもまた H の分類空間となり, classifying map $u: A \rightarrow B_H$ は homotopy equivalence である. 群のコホモロジーの性質から $H^2(H, \mathbb{Q}) \cong H^2(B_H, \mathbb{Q})$ なので, これを用いて n を以下で定める.

$$n := u^*: \underbrace{H^2(H, \mathbb{Q})}_{\cong H^2(B_H, \mathbb{Q})} \rightarrow H^2(A, \mathbb{Q}).$$

u は homotopy equivalence なので, n は全単射である. また, $H \simeq \mathbb{Z}^{2k}$ なので,

$$H^2(H, \mathbb{Q}) = H^2(\mathbb{Z}^{2k}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H^2(A, \mathbb{Q})$$

さて (3) より $\alpha^*: H^2(A, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Q})$ 単射なので, 上と合わせて

$$H_2(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\alpha_*} H_2(A, \mathbb{Q}) \xrightarrow{u_*} H_2(H, \mathbb{Q})$$

¹⁸ [Iwa25, Remark 2.22] 参照. Theorem 5.3 の Corollary である.

¹⁹ <http://pantodon.jp/index.rb?body=BG> 参照. 任意の位相空間 X 上の主 H 束 $E \rightarrow X$ について, ある連続写像 $h: X \rightarrow B_H$ が存在して, h^*E_H と E は同相になる. 例えば $H = \mathbb{Z}$ なら $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ がそれに当たる.

は全射の合成で全射になる. $G = \pi_1(X)$ とすると, 分類空間を用いて以下の可換図式が成り立つ:

$$\begin{array}{ccc} H_2(X, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_2(A, \mathbb{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_2(G, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_2(H, \mathbb{Q}) \end{array}$$

よって $H_2(G, \mathbb{Q}) \rightarrow H_2(H, \mathbb{Q})$ は全射である.

まとめると

- $\alpha_*: H_1(G, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(H, \mathbb{Q})$ 同型. これは (2) と群のホモロジーの性質 $H_1(G, \mathbb{Q}) \cong G_{ab}$ と Hurewicz の定理 $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \pi_1(X)_{ab} = G_{ab}$ から.
- $\alpha_*: H_2(G, \mathbb{Q}) \rightarrow H_2(H, \mathbb{Q})$ 全射.

よって Lemma 7.11 より, $\pi_1(X), \pi_1(A)$ とともに nilpotent であるから,

$$G = \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(A) = H$$

は有限の kernel を持つ.(全射であることは前から言えてる)

□

使った定理をまとめておく.

Lemma 7.10 ([Voi21, Lemma 1.2]). $f: X \rightarrow Y$ は *proper surjective* で次を満たす.

- (1) $f_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ について, $f_*(\pi_1(X)) \subset \pi_1(Y)$ は *finite index* を持つ. さらにファイバー連結ならば, $f_*(\pi_1(X)) = \pi_1(Y)$
- (2) $f^*: H^i(Y, \mathbb{Q}) \rightarrow H^i(X, \mathbb{Q})$ は *Hodge* 構造における単射である.
- (3) 一般ファイバー X_s が連結かつ, 任意の $i > 0$ で $H^0(X_s, \Omega_{X_s}^i) = 0$ ならば, $f^*: H^0(Y, \Omega_Y^i) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^i)$ は $i \geq 0$ で同型である.

Lemma 7.11 ([Voi21, Lemma 3.24], [Wan22, Proposition 6.2]). $\alpha: G \rightarrow H$ を有限生成群の準同型とする. $H_1(G, \mathbb{Q}) \simeq H_1(H, \mathbb{Q})$ 同型かつ, $H_2(G, \mathbb{Q}) \twoheadrightarrow H_2(H, \mathbb{Q})$ 全射ならば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について,

$$G/G_n \rightarrow H/H_n$$

は *finite kernel and cokernel* を持つ. ここで群 Γ について, n -th lower central series を $\Gamma_n = [\Gamma, \Gamma_{n-1}]$ とする.

Remark 7.12. $-K_X$ nef ならば Albanese map が全射かつファイバー連結に関しては [Cao13] による別証明もある. こっちも見ておく.

Proof. まず $0 \neq \tau \in H^0(X, \Omega_X^1)$ は X 上のどの点でも消えないならば, Albanese map $\alpha: X \rightarrow A$ が submersion であることを示そう. 任意の $x \in X$ について

$$(d\alpha_x)^*: T_{\alpha(x)}^* A \longrightarrow T_x^* X$$

を考える. A 上の holomorphic 1-form は translation invariant であり,

$$\alpha^*: H^0(A, \Omega_A^1) \xrightarrow{\sim} H^0(X, \Omega_X^1)$$

である. もし $(d\alpha_x)^*$ が injective でなければ, ある $0 \neq \eta \in H^0(A, \Omega_A^1)$ について $(\alpha^*\eta)(x) = 0$ となる. よって仮定から, 任意の $x \in X$ について $(d\alpha_x)^*$ は injective であり,

$$d\alpha_x: \Omega_{X,x}^1 \longrightarrow \Omega_{A,\alpha(x)}^1$$

は surjective である. ゆえに α は submersion である. 特に $\alpha(X)$ は A の open subset であるが, X は compact なので $\alpha(X)$ は closed でもある. A は connected であるから $\alpha(X) = A$, すなわち α は全射である.

α の Stein factorization を

$$X \xrightarrow{\beta} Y \xrightarrow{\nu} A$$

とする. ここで β は連結ファイバーをもち, ν は finite surjective である. ν が étale でないと仮定する. branch locus の purity により ν は ramification divisor をもつ. その一般点 y では $d\nu_y$ は surjective でない. $x \in \beta^{-1}(y)$ を取ると $d\alpha_x = d\nu_y \circ d\beta_x$ であるから $d\alpha_x$ も surjective でないことになり, α が submersion であることに矛盾する. したがって ν は finite étale である. よって Y も complex torus である. 原点を適当に選べば, Albanese map の universal property から ν は同型となり, α は連結ファイバーをもつ.

よって $0 \neq \tau \in H^0(X, \Omega_X^1)$ がどの点でも消えないことを示す.²⁰ T_X の ω^{n-1} に関する Harder–Narasimhan filtration をとったのち Jordan filtration をとって

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_s = T_X$$

という filtration で $Q_i := E_i/E_{i-1}$ は ω -stable かつ $\mu_\omega(Q_i)$ が i に関して非増加となるものが取れる. Theorem 5.3 より $\mu_\omega(Q_i) \geq 0$ である. ここで以下簡単のための各 E_i は locally free であり, subbundle による filtration であると仮定する.²¹

²⁰一般には $-K_X$ が nef なだけではこれは言えない. $-K_X$ が nef と言えるのは $0 \neq \tau \in H^0(X, \Omega_X^1)$ が codimension 2 の analytic set を除いてどの点でも消えないことである. しかしこの場合でも, α が全射連結ファイバーを持つのは言える. また codimension 2 の analytic set を除いて submersion も言える.

²¹この仮定の場合は $0 \neq \tau \in H^0(X, \Omega_X^1)$ がどの点でも消えないことが言える. そうでない場合に codimension 2 の analytic set の議論が出てくる.

今, $Q_i := E_i/E_{i-1}$ は ω -stable なので, Hermite-Einstein 計量 h_i があって

$$\Lambda_\omega \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{h_i} \right) = c_i \text{Id}_{Q_i} \quad \text{here} \quad c_i := \frac{n}{\{\omega\}^n} \mu_\omega(Q_i)$$

となるものがある. (例えば [Iwa26, Proposition 4.7] 参照) 特に Theorem 5.3 から $c_i \geq 0$ である.

すると下の Lemma 7.13 によって, ある $C > 0$ があって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して T_X 上の Hermite 計量 h_ε で

$$\Lambda_\omega \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{h_\varepsilon} \right) \geq -\varepsilon \text{id}_{T_X} \quad \text{and} \quad \|\sqrt{-1}F_{h_\varepsilon}\|_{L^\infty} \leq C \quad (7.5)$$

を満たすものを取りることができる. ここで次を思い出す

$\rho: X \rightarrow \mathbb{R}, \theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ について $\chi(x) := \theta(\rho(x))$ とすると

$$i\partial\bar{\partial}\chi = \theta''(\rho) i\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho + \theta'(\rho) i\partial\bar{\partial}\rho.$$

特に u を実数値関数として

$$\partial\bar{\partial} \log u = \frac{\partial\bar{\partial}u}{u} - \frac{\partial u \wedge \bar{\partial}u}{u^2}$$

特に (E, H) ベクトル束と Hermite 計量の pair と $\tau \in H^0(X, E)$ について

$$\begin{aligned} \sqrt{-1}\partial\bar{\partial} \log(|\tau|_H^2) &= \frac{\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}|\tau|_H^2}{|\tau|_H^2} - \frac{\sqrt{-1}\partial|\tau|_H^2 \wedge \bar{\partial}|\tau|_H^2}{(|\tau|_H^2)^2} \\ &= \frac{\sqrt{-1}\{D'\tau, D'\tau\}}{(|\tau|_H^2)} - \frac{\sqrt{-1}\{D'\tau, \tau\} \wedge \{\tau, D'\tau\}}{(|\tau|_H^2)^2} - \frac{\{\tau, \sqrt{-1}F_H\tau\}}{(|\tau|_H^2)} \end{aligned} \quad (7.6)$$

ここで $\{\cdot, \cdot\}$ は次の canonical sesquilinear pairing を表す:

$$C^\infty(\wedge^p T_X^* \otimes E) \times C^\infty(\wedge^q T_X^* \otimes E) \longrightarrow C^\infty(\wedge^{p+q} T_X^*). \quad \{\alpha \otimes u, \beta \otimes v\} := \alpha \wedge \bar{\beta} H(u, v)$$

上の等式は

$$\partial|\tau|_H^2 = \{D'\tau, \tau\} \quad \bar{\partial}|\tau|_H^2 = \{\tau, D'\tau\} \quad \partial\bar{\partial}|\tau|_H^2 = \{D'\tau, D'\tau\} - \{\tau, \Theta_{E,H}\tau\}$$

から従う.

今 $0 \neq \tau \in H^0(X, \Omega_X^1)$ を取り, h_ε^* を dual metric とする. $E = \Omega_X^1, H = h_\varepsilon^*$ に上の公式 (7.6) を用

いれば

$$\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(|\tau|_{h_\varepsilon^*}^2) \stackrel{(7.6)}{=} \underbrace{\frac{\sqrt{-1}\{D'\tau, D'\tau\}}{(|\tau|_{h_\varepsilon^*}^2)} - \frac{\sqrt{-1}\{D'\tau, \tau\} \wedge \{\tau, D'\tau\}}{(|\tau|_{h_\varepsilon^*}^2)^2}}_{\geq 0 \text{ by local computation}} - \frac{\{\tau, \sqrt{-1}F_{h_\varepsilon^*}\tau\}}{(|\tau|_{h_\varepsilon^*}^2)} \quad (7.7)$$

以上よりこれを合わせて

$$\begin{aligned} \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log|\tau|_{h_\varepsilon^*}^2 \wedge \omega^{n-1} &= \frac{1}{n}\Lambda_\omega \left(\left(\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log|\tau|_{h_\varepsilon^*}^2 \right) \right) \cdot \omega^n \\ &\stackrel{(7.7)}{\geq} -\frac{\{\tau, \Lambda_\omega \sqrt{-1}F_{h_\varepsilon^*}\tau\}}{n(|\tau|_{h_\varepsilon^*}^2)} \cdot \omega^n \stackrel{(7.5)}{\geq} -\frac{2\pi}{n}\varepsilon\omega^n \end{aligned} \quad (7.8)$$

これを用いてある $x \in X$ で $\tau(x) = 0$ であるとして矛盾を示す.

$$T_\varepsilon := \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(|\tau|_{h_\varepsilon^*}^2)$$

とする. すると (7.5) にある $C > 0$ を用いて

$$T_\varepsilon := \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(|\tau|_{h_\varepsilon^*}^2) \stackrel{(7.7)}{\geq} -\frac{\{\tau, \sqrt{-1}F_{h_\varepsilon^*}\tau\}}{(|\tau|_{h_\varepsilon^*}^2)} \stackrel{(7.5)}{\geq} -C\omega$$

特に $T_\varepsilon + C\omega$ は positivecurrent で T_ε は exact なので, その $\text{mass} \int_X (T_\varepsilon + C\omega) \wedge \omega^{n-1}$ は有界である. よって positivecurrent の weak compactness²² から部分列を取り替えて

$$T_\varepsilon + C\omega \longrightarrow S$$

と closed positivecurrent S に current の意味で収束する. $T := S - C\omega$ とする.

今 $x \in X$ で $\tau(x) = 0$ なので, $\log(|\tau|_{h_\varepsilon^*}^2)$ は x で analytic singularity を持つ. 特に Lelong number は 1 以上である. よって

$$1 \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu(T_\varepsilon + C\omega, x) \leq \nu(T + C\omega, x) \quad (\text{weak compactness})$$

である. Lelong 数の定義を思い出すと, ω にしか寄らない定数 $D > 0$ があって

$$\nu(T + C\omega, x) = D \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^{2n-2}} \int_{B_x(r)} (T + C\omega) \wedge \omega^{n-1}$$

²²positivecurrent の列の mass が一様有界なら, 部分列が current の意味で収束する. これは Banach-Alaoglu の定理から.

である. よって $\nu(T + C\omega, x) \geq 1$ なので, 定数 D を取り替えて, 十分小さな $r > 0$ について

$$\int_{B_x(r)} (T + C\omega) \wedge \omega^{n-1} \geq Dr^{2n-2} \quad (7.9)$$

が成り立つとして良い. 以上から r を十分小さくすれば, 定数 $D' > 0$ があって

$$\int_{B_x(r)} T \wedge \omega^{n-1} = \int_{B_x(r)} (T + C\omega) \wedge \omega^{n-1} - \int_{B_x(r)} C\omega^n \geq Dr^{2n-2} + O(r^{2n-1}) \geq D'r^{2n-2} \quad (7.10)$$

とできる. 今ほとんど全ての $r > 0$ について

$$\int_{B_x(r)} (T_\varepsilon + C\omega) \wedge \omega^{n-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_x(r)} (T + C\omega) \wedge \omega^{n-1} \Rightarrow \int_{B_x(r)} T_\varepsilon \wedge \omega^{n-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_x(r)} T \wedge \omega^{n-1}$$

である. 以上より

$$\int_X T_\varepsilon \wedge \omega^{n-1} = \underbrace{\int_{B_x(r)} T \wedge \omega^{n-1}}_{\geq D'r^{2n-2} \text{ by (7.10)}} + \underbrace{\int_{B_x(r)} (T_\varepsilon - T) \wedge \omega^{n-1}}_{\rightarrow 0 \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0} + \underbrace{\int_{X \setminus B_x(r)} T_\varepsilon \wedge \omega^{n-1}}_{\geq -\frac{2\pi}{n} \varepsilon \int_X \omega^n \text{ by (7.8)}} \Rightarrow \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_X T_\varepsilon \wedge \omega^{n-1} > 0$$

しかし T_ε は exact で $\log(|\tau|^2)$ は locally L^1 なので, Stokes の定理から $\int_X T_\varepsilon \wedge \omega^{n-1} = 0$ である.²³ これは矛盾である. $\square$

Lemma 7.13 ([Cao13, Lemma 2.6]). (X, ω) をコンパクト Kähler 多様体とする. E を二つのベクトル束 E_1, E_2 の extension

$$0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$$

とする. E_1, E_2 上に二つの滑らかな計量 h_1, h_2 が存在して, 各点で

$$\Lambda_\omega \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{h_1} \right) \geq c_1 \cdot \text{Id}_{E_1} \quad \text{and} \quad \Lambda_\omega \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{h_2} \right) \geq c_2 \cdot \text{Id}_{E_2} \quad (7.11)$$

が成り立つと仮定する. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, E 上の滑らかな計量 h_ϵ が存在して

$$\Lambda_\omega \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{h_\epsilon} \right) \geq (\min(c_1, c_2) - \epsilon) \cdot \text{Id}_E \quad (7.12)$$

を満たし, さらに ϵ に依存しないある一様な定数 C に対して

$$\|\sqrt{-1}F_{h_\epsilon}(E)\|_{L^\infty} \leq C \cdot (\|\sqrt{-1}F_{h_1}(E_1)\|_{L^\infty} + \|\sqrt{-1}F_{h_2}(E_2)\|_{L^\infty}) \quad (7.13)$$

²³ $\log(|\tau|^2)$ は locally L^1 なので $\partial\bar{\partial}\log(|\tau|^2)$ が well defined な current になり, integral by parts を使えるから.

が成り立つ.

Proof. $[E] \in H^1(X, \text{Hom}(E_2, E_1))$ を extension group において E を表す元とする.[Dem12, Section 11] からこれは $\text{Hom}(E_2, E_1)$ 値 $(0, 1)$ -form である second fundamental form の β の代表元とも見れる. そこで E_1 と E_2 の別の extension で $s \in \mathbb{C}^*$ について $[E_s] = s \cdot [E]$ を満たすものとする. これは $s\beta$ を考えることに同じである. このとき, これら二つのベクトル束の間には isomorphism が存在する. この isomorphism を

$$\varphi_s: E \rightarrow E_s$$

と書く.[Dem12, Equation (11.6)] の式と (7.11) から, $|s|$ が ϵ に比べて十分小さければ, E_s 上の滑らかな計量 h_s で

$$\Lambda_\omega \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{h_s} \right) \geq (\min(c_1, c_2) - \epsilon) \cdot \text{Id}_{E_s} \quad (7.14)$$

を満たし, さらに一様な定数 C に対して

$$\|\sqrt{-1}F_{h_s}(E_s)\|_{L^\infty} \leq C \cdot (\|\sqrt{-1}F_{h_1}(E_1)\|_{L^\infty} + \|\sqrt{-1}F_{h_2}(E_2)\|_{L^\infty}) \quad (7.15)$$

を満たすものを取れる. そこで $h = \varphi_s^*(h_s)$ を E 上に誘導される metric とする. このとき, 任意の $\alpha \in E$ に対して

$$\frac{\langle \sqrt{-1}F_h(E)\alpha, \alpha \rangle_h}{\langle \alpha, \alpha \rangle_h} = \frac{\langle \varphi_s^{-1} \circ \sqrt{-1}F_{h_s}(E_s)\varphi_s(\alpha), \alpha \rangle_h}{\langle \alpha, \alpha \rangle_h} = \frac{\langle \sqrt{-1}F_{h_s}(E_s)\varphi_s(\alpha), \varphi_s(\alpha) \rangle_{h_s}}{\langle \varphi_s(\alpha), \varphi_s(\alpha) \rangle_{h_s}} \quad (7.16)$$

以上より

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_\omega \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_h(E)\alpha, \alpha \rangle_h &= \frac{\langle \Lambda_\omega \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{h_s}(E_s)\varphi_s(\alpha), \varphi_s(\alpha) \rangle_{h_s}}{\langle \varphi_s(\alpha), \varphi_s(\alpha) \rangle_{h_s}} \cdot \langle \alpha, \alpha \rangle_h \\ &\geq (\min(c_1, c_2) - \epsilon) \cdot \frac{\langle \varphi_s(\alpha), \varphi_s(\alpha) \rangle_{h_s}}{\langle \varphi_s(\alpha), \varphi_s(\alpha) \rangle_{h_s}} \cdot \langle \alpha, \alpha \rangle_h = (\min(c_1, c_2) - \epsilon) \cdot \langle \alpha, \alpha \rangle_h \end{aligned} \quad (7.14)$$

を得る. よって (7.12) が成り立つ. (7.13) も (7.15) と (7.16) から従う. $\square$

7.3 $-K_X$ が nef ならば基本群は almost Abelian

$-K_X$ が semipositive の仮定は弱めることができる. つまり以下が成り立つ

Theorem 7.14 ([Pau98]). コンパクト Kähler 多様体 X について, $-K_X$ が nef ならば基本群は almost Abelian である.

Theorem 7.8 によって, 以下を示せば良い.

Theorem 7.15 ([Pau98]). X をコンパクト Kähler 多様体とする. $-K_X$ nef ならば, 基本群は *almost nilpotent* である.

Proof. 次の Generalized Margulis lemma を認める.

Theorem 7.16 (Generalized Margulis lemma [KW11, Theorem 1]). 任意の整数 $m \geq 2$ に対して定数 $\delta(m) > 0$ と $C(m) > 0$ が存在し, 次を満たす:

(M, g) を完備 m 次元 Riemann 多様体とし, $p \in M$ とする. $B_g(p, 1)$ 上で

$$\text{Ric}(g) > -(m-1)g$$

が成り立つと仮定する. このとき自然な準同型

$$\pi_1(B_g(p, \delta(m)), p) \longrightarrow \pi_1(B_g(p, 1), p)$$

の像は, *index* が高々 $C(m)$ である *nilpotent subgroup* を含む. 特にこの像は *almost nilpotent* である.

$-K_X$ が nef であるから, Corollary 5.1 から任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\{\omega_\varepsilon\} = \{\omega_0\}$ かつ $\text{Ric}(\omega_\varepsilon) \geq -\varepsilon\omega_\varepsilon$ を満たす Kähler 計量 ω_ε が存在する. $G := \pi_1(X)$ とおき, 有限個の generator $G = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_k \rangle$ を固定する.

Claim 7.17 ([DPS96, Lemma 1.3]). $\tilde{X} \rightarrow X$ を普遍被覆とし, $G = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_k \rangle$ が $\tilde{X}$ に作用しているとみなす. ある定数 $D > 0$ があって, 任意の ε についてある $p_\varepsilon \in \tilde{X}$ があって

$$d_{\pi^*\omega_\varepsilon}(p_\varepsilon, \gamma_j(p_\varepsilon)) \leq D, \quad j = 1, \dots, k$$

Proof. 次の claim を後に示す.

Claim 7.18 ([DPS96, Lemma 1.3]). 任意のコンパクト集合 $U \subset \tilde{X}$ と任意の $\delta > 0$ に対して, 閉部分集合 $U_{\varepsilon, \delta} \subset U$ が存在して次を満たすようにできる.

$$(1) \text{Vol}_{\tilde{\omega}_0}(U \setminus U_{\varepsilon, \delta}) < \delta$$

$$(2) \text{ 任意の } x, y \in U_{\varepsilon, \delta} \text{ は } \tilde{\omega}_\varepsilon\text{-length が高々 } C\delta^{-1/2} \text{ である path によって結ぶことができる}$$

ここで $C > 0$ は ε および δ に依らないようにできる.

この部分はテクニカルな上に重要かどうか不明なので後に回す. さて基本領域 $E \subset \tilde{X}$ とし, $E \subset U$

となるコンパクト集合を

$$\text{Int}(U) \cap \gamma_j(\text{Int}(U)) \neq \emptyset, \quad j = 1, \dots, k$$

となるように大きくとる. 特に $j = 1, \dots, k$ について $\text{Vol}_{\widetilde{\omega}_0}(U \cap \gamma_j(U)) > 0$ なので,

$$2\delta < \min_{1 \leq j \leq k} \text{Vol}_{\widetilde{\omega}_0}(U \cap \gamma_j(U))$$

となる $\delta > 0$ を取ることができる.

そこで Claim 7.18 の (1), (2) を満たすような閉部分集合 $U_{\varepsilon, \delta} \subset U$ をとる. このとき各 j について $U_{\varepsilon, \delta} \cap \gamma_j(U_{\varepsilon, \delta}) \neq \emptyset$ である. 実際, もしこの交わりが空ならば

$$U \cap \gamma_j(U) \subset (U \setminus U_{\varepsilon, \delta}) \cup \gamma_j(U \setminus U_{\varepsilon, \delta})$$

となる. γ_j は $\widetilde{\omega}_0 = \pi^* \omega_0$ に関する isometry なので $\text{Vol}_{\widetilde{\omega}_0}(\gamma_j(U \setminus U_{\varepsilon, \delta})) = \text{Vol}_{\widetilde{\omega}_0}(U \setminus U_{\varepsilon, \delta}) < \delta$. であり, これから $\text{Vol}_{\widetilde{\omega}_0}(U \cap \gamma_j(U)) < 2\delta$ となり, δ の取り方に矛盾する. そこで各 j に対して

$$q_j \in U_{\varepsilon, \delta}, \quad \gamma_j(q_j) \in U_{\varepsilon, \delta}$$

となる q_j を取る.

$p_\varepsilon \in U_{\varepsilon, \delta}$ を固定する. すると任意の $j = 1, \dots, k$ について

- $p_\varepsilon, \gamma_j(q_j) \in U_{\varepsilon, \delta}$ より, (2) からこの二つを結ぶ $\widetilde{\omega}_\varepsilon$ -length が高々 $C\delta^{-1/2}$ である path が存在.
- 同様に q_j と p_ε を結ぶ $\widetilde{\omega}_\varepsilon$ -length が高々 $C\delta^{-1/2}$ である path が存在. よって γ_j を作用させて, $\gamma_j(q_j)$ と $\gamma_j(p_\varepsilon)$ を結ぶ $\widetilde{\omega}_\varepsilon$ -length が高々 $C\delta^{-1/2}$ である path が存在.

したがって

$$d_{\widetilde{\omega}_\varepsilon}(p_\varepsilon, \gamma_j(p_\varepsilon)) \leq 2C\delta^{-1/2} =: D$$

□

さて X 上の Riemann 計量を $\widehat{\omega}_\varepsilon := \varepsilon \omega_\varepsilon$ とおく. $\text{Ric}(g) = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \det(g)$ なので, 特に定数倍では Ricci tensor は変わらず,

$$\text{Ric}(\widehat{\omega}_\varepsilon) = \text{Ric}(\omega_\varepsilon) \geq -\varepsilon \omega_\varepsilon = -\widehat{\omega}_\varepsilon \geq -(2n-1)\widehat{\omega}_\varepsilon$$

一般に Riemann 計量 g に関する path γ の距離は $L(\gamma) = \int_I \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt$ なので, 特に g を定数 ε 倍すると長さは $\sqrt{\varepsilon}$ 倍される. よって $d_{\pi^* \widehat{\omega}_\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon} d_{\pi^* \omega_\varepsilon}$ であり特に

$$d_{\pi^* \widehat{\omega}_\varepsilon}(p_\varepsilon, \gamma_j(p_\varepsilon)) = \sqrt{\varepsilon} d_{\pi^* \omega_\varepsilon}(p_\varepsilon, \gamma_j(p_\varepsilon)) \leq \sqrt{\varepsilon} D. \quad (7.17)$$

今 Theorem 7.16 での定数を $\delta(m)$ とし, $\varepsilon > 0$ を十分小さく取って $\sqrt{\varepsilon} D < \delta(m)$ とする. (7.17)

から

$$\gamma_j \in B_{\widehat{\omega}_\varepsilon}(\pi(p_\varepsilon), \delta(m))$$

である. ここでこの γ_j は始点 $\pi(p_\varepsilon)$ で終点 $\pi(\gamma_j p_\varepsilon)$ となる loop とみている. 以上より, $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ は $\pi_1(X)$ を生成するので,

$$\pi_1(B_{\widehat{\omega}_\varepsilon}(\pi(p_\varepsilon), \delta(m)), \pi(p_\varepsilon)) \longrightarrow \pi_1(X, \pi(p_\varepsilon))$$

は全射である. よって Generalized Margulis lemma (Theorem 7.16) から, $\pi_1(X, \pi(p_\varepsilon))$ は almost nilpotent である. $\square$

残っていた Claim 7.18 の証明をする.

Proof of Claim 7.18. $\widetilde{\omega}_\varepsilon := \pi^* \omega_\varepsilon, \widetilde{\omega}_0 := \pi^* \omega_0$ とおく. $\{\omega_\varepsilon\} = \{\omega_0\}$ であるから

$$\int_X \text{tr}_{\omega_0}(\omega_\varepsilon) \omega_0^n = n \int_X \omega_\varepsilon \wedge \omega_0^{n-1} = n \int_X \omega_0^n.$$

したがって $\|\omega_\varepsilon\|_{L^1(X, \omega_0)}$ は ε に関して一様に有界である.

U がコンパクトなので, $U = K$ で K が $\widetilde{X}$ のある coordinate open set Ω 内の compact convex subset である場合に帰着できる. この場合に示そう.

$x_1, x_2 \in K$ に対して

$$c_{x_1, x_2}(t) := (1-t)x_1 + tx_2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

とおく. K は convex なので $c_{x_1, x_2}([0, 1]) \subset K$ である. この segment の $\widetilde{\omega}_\varepsilon$ -length を

$$L_\varepsilon(x_1, x_2) := \int_0^1 \sqrt{\widetilde{\omega}_\varepsilon((1-t)x_1 + tx_2)(x_2 - x_1, x_2 - x_1)} dt$$

とする. Cauchy–Schwarz の不等式より

$$L_\varepsilon(x_1, x_2)^2 \leq \int_0^1 \widetilde{\omega}_\varepsilon((1-t)x_1 + tx_2)(x_2 - x_1, x_2 - x_1) dt.$$

固定された座標近傍上では Euclid 計量と $\widetilde{\omega}_0$ は一様に同値であり, $|x_2 - x_1| \leq \text{diam } K$ であるから, ある定数 $C_K > 0$ について

$$L_\varepsilon(x_1, x_2)^2 \leq C_K \int_0^1 |\widetilde{\omega}_\varepsilon((1-t)x_1 + tx_2)|_{\widetilde{\omega}_0} dt.$$

したがって Fubini の定理より

$$\int_{K \times K} L_\varepsilon(x_1, x_2)^2 dx_1 dx_2 \leq C_K \int_0^1 dt \int_{K \times K} |\widetilde{\omega}_\varepsilon((1-t)x_1 + tx_2)|_{\widetilde{\omega}_0} dx_1 dx_2 \leq C \|\widetilde{\omega}_\varepsilon\|_{L^1(\Omega, \widetilde{\omega}_0)}.$$

最後の計算は変数変換による. $\Omega \in \widetilde{X}$ は固定されており, $\widetilde{\omega}_\varepsilon = \pi^* \omega_\varepsilon$ であるから, $\|\omega_\varepsilon\|_{L^1(X, \omega_0)}$ は ε に関して一様に有界であることを用いれば, この式の右辺は ε に依らず取ることができる. そこで

$$S := \left\{ (x_1, x_2) \in K \times K \mid L_\varepsilon(x_1, x_2) > \left(\frac{C_1}{\delta} \right)^{1/2} \right\}$$

とおく. すると

$$C_1 \geq \int_S L_\varepsilon(x_1, x_2)^2 dx_1 dx_2 > \frac{C_1}{\delta} \text{Vol}(S) \Rightarrow \text{Vol}(S) < \delta.$$

各 $x \in K$ について

$$S(x) := \{y \in K \mid (x, y) \in S\} \quad \text{and} \quad Q := \left\{ x \in K \mid \text{Vol}(S(x)) \geq \frac{1}{2} \text{Vol}(K) \right\}$$

とおく. Fubini の定理より

$$\delta > \text{Vol}(S) = \int_K \text{Vol}(S(x)) dx \geq \frac{1}{2} \text{Vol}(K) \text{Vol}(Q), \Rightarrow \text{Vol}(Q) < \frac{2\delta}{\text{Vol}(K)}.$$

ここで $x_1, x_2 \in K \setminus Q$ とする. このとき Q の定義から

$$\text{Vol}(S(x_1)), \text{Vol}(S(x_2)) < \frac{1}{2} \text{Vol}(K) \Rightarrow \text{Vol}(S(x_1) \cup S(x_2)) < \text{Vol}(K) \Rightarrow K \setminus (S(x_1) \cup S(x_2)) \neq \emptyset.$$

そこで $y \in K \setminus (S(x_1) \cup S(x_2))$ を取る. すると $(x_1, y) \notin S, (x_2, y) \notin S$ であるから

$$L_{\widetilde{\omega}_\varepsilon}([x_1, y]) \leq \left(\frac{C_1}{\delta} \right)^{1/2}, L_{\widetilde{\omega}_\varepsilon}([x_2, y]) \leq \left(\frac{C_1}{\delta} \right)^{1/2} \Rightarrow d_{\widetilde{\omega}_\varepsilon}(x_1, x_2) \leq 2 \left(\frac{C_1}{\delta} \right)^{1/2}.$$

また固定されたコンパクト集合 K 上では Euclid 計量による体積と $\widetilde{\omega}_0$ による体積は一様に同値であるから, ある定数 $C_2 > 0$ について

$$\text{Vol}_{\widetilde{\omega}_0}(Q) \leq C_2 \text{Vol}(Q) < \frac{2C_2}{\text{Vol}(K)} \delta.$$

したがって最初の δ を適当な定数倍に置き換えることにより $\text{Vol}_{\widetilde{\omega}_0}(Q) < \delta$ としてよい. よって $K_{\varepsilon, \delta} := K \setminus Q$ とおけば

$$\text{Vol}_{\widetilde{\omega}_0}(K \setminus K_{\varepsilon, \delta}) < \delta$$

かつ任意の $x_1, x_2 \in K_{\varepsilon, \delta}$ を $\widetilde{\omega}_\varepsilon$ -length が $C\delta^{-1/2}$ 以下である path によって結ぶことができる. $\square$

7.4 $-K_X$ が nef な多様体の基本群の歴史

Fano が単連結の歴史はかなり古いらしい. 藤野先生のサーベイ「ファノ多様体についてのいくつかの問題」<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~fujino/Fano-problems5.pdf> によると

厳密な証明がついたのは, Atiyah の論文 (1976) が最初のようなのである. ... (中略)... さらに調べてみると, この問題への最初の貢献は小林昭七先生の論文 (1961) のようである.

Fano が単連結の証明はかなり面白い. 知ってる限り 3 つの証明がある.

- (1) $\text{Ric} > 0$ な計量を作って Myers の定理を使う
- (2) $\pi_1(X)$ に関する Shafarevich map が自明であることを示す.
- (3) MRC fibration が自明であることを示して, X が有理連結であることを示す. (有理連結ならば単連結である)

(2) の方向性は以下の通り

- KLT Fano (もっと弱く weak Fano) も単連結. [Tak00] による. この証明はかなり多変数複素解析である.
- KLT Fano (もっと弱く weak Fano) の regular locus X_{reg} の基本群は有限 [Bra21] による. この証明 (の半分以上) は 高山先生の証明を orbifold に拡張することで証明する. かなり面白い証明である. ちなみに weak Fano の X_{reg} の代数的基本群の有限性は [Xu14] で知られていた.

(3) の方向性は以下の通り

- Fano 多様体は有理連結は [Cam92, KMM92] による.
- KLT weak Fano は有理連結. [Zha06] による. この方向性, 他にも [BP11, EG19, CCM21, EIM23] などいろいろあるが, 実は多変数複素解析を用いるとかなりわかりやすく理解できる. それが [Den21] である. [Den21] の主定理は代数幾何学の話だが, 証明は Ohsawa-Takegoshi を用いる解析的で面白い証明である.
- KLT Fano の X_{reg} の基本群の有限性に関して, [JLR25] で有理連結っぽい感じで証明された. 1-free curve の存在がわかるようである. [Bra21] のイントロで書かれていた内容が実現したようである.

$-K_X$ が nef の場合の基本群に関しては以下の通り

- X が smooth な場合は [Pau98] が初め. [DPS96] をかなり使う.
- X が KLT の場合は X も基本群が almost Abelian であるかはわかっていない. 3次元の場合に $\pi_1(X)$ の almost Abelian が [FGSW26] で解決.

- [GGK19, Cam21] より X が KLT で $c_1(K_X) = 0$ の場合, irreducible symplectic varieties が偶次元の強い意味での Calabi-Yau ならば, $\pi_1(X)$ が有限がわかっている. これは $\chi(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ であり, [Cam95a] を用いる. よって残りは奇次元の強い意味での Calabi-Yau である. おそらくこの $\pi_1(X)$ が有限がわかれば, $-K_X$ が nef で X が KLT の場合の基本群 $\pi_1(X)$ が almost Abelian は [MW25] の構造定理からわかるはずである.

$-K_X$ が nef で KLT の場合の $\pi_1(X_{\text{reg}})$ の almost Abelian は全くわかっていない. (多分 3 次元ならわかっているかも). また $c_1(K_X) = 0$ の場合に帰着できるかも不明らしい. これは有理連結 KLT 多様体の X_{reg} がどうなるかが難しいためである. なお $-K_X$ が nef で X が KLT の場合は, $\pi_1(X_{\text{reg}})$ の有限次元表現が almost Abelian な像を持つことは [GGK19] と [MW25] を用いればわかる. ([IMM25] 参照)

References

- [Ban87] Shigetoshi Bando. The K -energy map, almost Einstein Kähler metrics and an inequality of the Miyaoka type. *Tôhoku Math. J. (2)*, 39:231–235, 1987.
- [BDPP13] Sébastien Boucksom, Jean-Pierre Demailly, Mihai Păun, and Thomas Peternell. The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension. *J. Algebraic Geom.*, 22(2):201–248, 2013.
- [BFPT24] Fabio Bernasconi, Stefano Filipazzi, Zsolt Patakfalvi, and Nikolaos Tsakanikas. A strong counterexample to the log canonical Beauville–Bogomolov decomposition, 2024. Preprint. arXiv:2407.17260.
- [BG13] Sébastien Boucksom and Vincent Guedj. Regularizing properties of the Kähler-Ricci flow. In *An introduction to the Kähler-Ricci flow*, volume 2086 of *Lecture Notes in Math.*, pages 189–237. Springer, Cham, 2013.
- [Blo07] Zbigniew Błocki. The complex Monge–Ampère equation on compact Kähler manifolds, 2007. Lecture notes. Course given at the Winter School in Complex Analysis, Toulouse, 24–28 January 2005. Available at https://academicweb.nd.edu/~jdiller/teaching/archive/spring11_80380/blocki2.pdf.
- [BM16] Fedor Bogomolov and Michael McQuillan. Rational curves on foliated varieties. In Paolo Cascini, James McKernan, and Jorge Vitório Pereira, editors, *Foliation theory in algebraic geometry*, Simons Symposia, pages 21–51. Cham: Springer, 2016.
- [BP11] Amaël Broustet and Gianluca Pacienza. Rational connectedness modulo the non-nef locus. *Comment. Math. Helv.*, 86(3):593–607, 2011.
- [Bra21] Lukas Braun. The local fundamental group of a Kawamata log terminal singularity is finite. *Invent. Math.*, 226(3):845–896, 2021.
- [Cam92] Frédéric Campana. Connexité rationnelle des variétés de Fano. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 25(5):539–545, 1992.
- [Cam95a] F. Campana. Fundamental group and positivity of cotangent bundles of compact Kähler manifolds. *J. Algebraic Geom.*, 4(3):487–502, 1995.
- [Cam95b] F. Campana. Remarques sur les groupes de Kähler nilpotents. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 28(3):307–316, 1995.
- [Cam21] Frédéric Campana. The Bogomolov-Beauville-Yau decomposition for KLT projective varieties with trivial first Chern class—without tears. *Bull. Soc. Math. France*, 149(1):1–13, 2021.

- [Cao13] Junyan Cao. A remark on compact Kähler manifolds with nef anticanonical bundles and its applications, 2013. Preprint. arXiv:1305.4397.
- [CCM21] Frédéric Campana, Junyan Cao, and Shin-ichi Matsumura. Projective klt pairs with nef anti-canonical divisor. *Algebr. Geom.*, 8(4):430–464, 2021.
- [CKT21] Benoît Claudon, Stefan Kebekus, and Behrouz Taji. Generic positivity and applications to hyperbolicity of moduli spaces. In *Hyperbolicity properties of algebraic varieties*, volume 56 of *Panor. Synthèses*, pages 169–208. Soc. Math. France, Paris, 2021.
- [Cla17] Benoît Claudon. Postivity of the logarithmic cotangent and Shafarevich-Viehweg conjecture. In *Séminaire Bourbaki. Volume 2015/2016. Exposés 1104–1119. Avec table par noms d’auteurs de 1948/49 à 2015/16*, pages 27–63, ex. Paris: Société Mathématique de France (SMF), 2017.
- [CO75] Bang-yen Chen and Koichi Ogiue. Some characterizations of complex space forms in terms of Chern classes. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 26(104):459–464, 1975.
- [CP16] Frédéric Campana and Mihai Păun. Positivity properties of the bundle of logarithmic tensors on compact Kähler manifolds. *Compos. Math.*, 152(11):2350–2370, 2016.
- [CP19] Frédéric Campana and Mihai Păun. Foliations with positive slopes and birational stability of orbifold cotangent bundles. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 129:1–49, 2019.
- [Dem12] Jean-Pierre Demailly. *Analytic methods in algebraic geometry*, volume 1 of *Surveys of Modern Mathematics*. International Press, Somerville, MA; Higher Education Press, Beijing, 2012.
- [Den21] Ya Deng. Applications of the Ohsawa-Takegoshi extension theorem to direct image problems. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (23):17611–17633, 2021.
- [DGP24] Stéphane Druel, Henri Guenancia, and Mihai Păun. A decomposition theorem for $\mathbb{Q}$ -Fano Kähler-Einstein varieties. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 362(S1):93–118, 2024.
- [DPS96] Jean-Pierre Demailly, Thomas Peternell, and Michael Schneider. Compact Kähler manifolds with Hermitian semipositive anticanonical bundle. *Compos. Math.*, 101(2):217–224, 1996.
- [EG19] Sho Ejiri and Yoshinori Gongyo. Nef anti-canonical divisors and rationally connected fibrations. *Compos. Math.*, 155(7):1444–1456, 2019.

- [EIM23] Sho Ejiri, Masataka Iwai, and Shin-Ichi Matsumura. On asymptotic base loci of relative anti-canonical divisors of algebraic fiber spaces. *J. Algebr. Geom.*, 32(3):477–517, 2023.
- [Eno88] Ichiro Enoki. Stability and negativity for tangent sheaves of minimal Kähler spaces. In *Geometry and analysis on manifolds (Katata/Kyoto, 1987)*, volume 1339 of *Lecture Notes in Math.*, pages 118–126. Springer, Berlin, 1988.
- [FGSW26] Xin Fu, Bin Guo, Jian Song, and Juanyong Wang. Fundamental groups of compact Kähler varieties with nef anti canonical bundle, 2026. Preprint. arXiv:2602.07420.
- [GGK19] Daniel Greb, Henri Guenancia, and Stefan Kebekus. Klt varieties with trivial canonical class: holonomy, differential forms, and fundamental groups. *Geom. Topol.*, 23(4):2051–2124, 2019.
- [GKP16] Daniel Greb, Stefan Kebekus, and Thomas Peternell. Étale fundamental groups of Kawamata log terminal spaces, flat sheaves, and quotients of abelian varieties. *Duke Math. J.*, 165(10):1965–2004, 2016.
- [GKP22] Daniel Greb, Stefan Kebekus, and Thomas Peternell. Projective flatness over klt spaces and uniformisation of varieties with nef anti-canonical divisor. *J. Algebraic Geom.*, 31(3):467–496, 2022.
- [GKPT19] Daniel Greb, Stefan Kebekus, Thomas Peternell, and Behrouz Taji. The Miyaoka-Yau inequality and uniformisation of canonical models. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 52(6):1487–1535, 2019.
- [GKPT20] Daniel Greb, Stefan Kebekus, Thomas Peternell, and Behrouz Taji. Harmonic metrics on Higgs sheaves and uniformization of varieties of general type. *Math. Ann.*, 378(3-4):1061–1094, 2020.
- [GT01] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [Gue16] Henri Guenancia. Semistability of the tangent sheaf of singular varieties. *Algebr. Geom.*, 3(5):508–542, 2016.
- [His24] Tomoyuki Hisamoto. On the Miyaoka-Yau inequality for manifolds with nef anti-canonical line bundle, 2024. Preprint. arXiv:2403.09120.
- [IJZ25] Masataka Iwai, Satoshi Jinnouchi, and Shiyu Zhang. The miyaoka-yau inequality for singular varieties with big canonical or anticanonical divisors, 2025. Preprint. arXiv:2507.08522.

- [IM22] Masataka Iwai and Shin-ichi Matsumura. Abundance theorem for minimal compact Kähler manifolds with vanishing second Chern class, 2022. Preprint. arXiv:2205.10613.
- [IMM25] Masataka Iwai, Shin-ichi Matsumura, and Niklas Müller. Minimal projective varieties satisfying Miyaoka’s equality. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 131(6):41, 2025. Id/No e70104.
- [Iwa25] Masataka Iwai. Campana の Special variety まとめ, 2025. Lecture notes. Available at https://masataka123.github.io/blog3/pdf/20251218_campana/Campana_04_2025_1218.pdf.
- [Iwa26] Masataka Iwai. Chern 類と複素幾何学, 2026. Lecture notes. Available at <https://masataka123.github.io/blog3/sub2/>.
- [JLR25] Eric Jovinely, Brian Lehmann, and Eric Riedl. Free curves and fundamental groups, 2025. Preprint. arXiv:2510.27031.
- [KMM92] János Kollár, Yoichi Miyaoka, and Shigefumi Mori. Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds. *J. Differ. Geom.*, 36(3):765–779, 1992.
- [KSCT07] Stefan Kebekus, Luis Solá Conde, and Matei Toma. Rationally connected foliations after Bogomolov and McQuillan. *J. Algebraic Geom.*, 16(1):65–81, 2007.
- [KW11] Vitali Kapovitch and Burkhard Wilking. Structure of fundamental groups of manifolds with Ricci curvature bounded below, 2011. Preprint. arXiv:1105.5955.
- [Laz] Vladimir Lazić. Algebraic geometry: Foliations. Preprint. Available from the author’s web site <https://www.uni-saarland.de/fileadmin/upload/lehrstuhl/lazic/Skripten/foliation.pdf>.
- [LT18] Steven Lu and Behrouz Taji. A characterization of finite quotients of abelian varieties. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2018(1):292–319, 2018.
- [Mel17] Richard B. Melrose. Elliptic regularity, 2017. Chapter 4 of the lecture notes for MIT 18.155, Graduate Analysis.
- [Miy77] Yoichi Miyaoka. On the Chern numbers of surfaces of general type. *Invent. Math.*, 42:225–237, 1977.
- [Miy87] Yoichi Miyaoka. The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety. In *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, volume 10 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 449–476. North-Holland, Amsterdam, 1987.

- [MW25] Shin-ichi Matsumura and Juanyong Wang. Structure theorem for projective klt pairs with nef anti-canonical divisor. *J. Eur. Math. Soc.*, 2025. Published online first.
- [MWWZ25] Shin-ichi Matsumura, Juanyong Wang, Xiaojun Wu, and Qimin Zhang. Compact Kähler manifolds with nef anti-canonical bundle, 2025. Preprint. arXiv: 2506.23218.
- [Ou23] Wenhao Ou. On generic nefness of tangent sheaves. *Math. Z.*, 304(4):58, 2023.
- [Ou25] Wenhao Ou. A characterization of uniruled compact Kähler manifolds, 2025. Preprint. arXiv:2501.18088.
- [Pau98] Mihai Paun. Sur les variétés kählériennes compactes à classe de Ricci numériquement effective. *Bull. Sci. Math.*, 122(2):83–92, 1998.
- [Pet12] Thomas Peternell. Varieties with generically nef tangent bundles. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 14(2):571–603, 2012.
- [SW16] Jian Song and Xiaowei Wang. The greatest Ricci lower bound, conical Einstein metrics and Chern number inequality. *Geom. Topol.*, 20(1):49–102, 2016.
- [Szé14] Gábor Székelyhidi. *An introduction to extremal Kähler metrics*, volume 152 of *Grad. Stud. Math.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2014.
- [Tak00] Shigeharu Takayama. Simple connectedness of weak Fano varieties. *J. Algebraic Geom.*, 9(2):403–407, 2000.
- [Tia92] Gang Tian. On stability of the tangent bundles of Fano varieties. *Int. J. Math.*, 3(3):401–413, 1992.
- [Voi21] Claire Voisin. Fibrations in algebraic geometry and applications. In *Hyperbolicity properties of algebraic varieties*, volume 56 of *Panor. Synthèses*, pages 319–353. Soc. Math. France, Paris, [2021] ©2021.
- [Wan22] Juanyong Wang. Structure of projective varieties with nef anticanonical divisor: the case of log terminal singularities. *Math. Ann.*, 384(1-2):47–100, 2022.
- [Xu14] Chenyang Xu. Finiteness of algebraic fundamental groups. *Compos. Math.*, 150(3):409–414, 2014.
- [Yau77] Shing Tung Yau. Calabi’s conjecture and some new results in algebraic geometry. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 74(5):1798–1799, 1977.
- [Zha06] Qi Zhang. Rational connectedness of log $\mathbb{Q}$ -Fano varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 590:131–142, 2006.

- [Zhu97] Shunhui Zhu. The comparison geometry of Ricci curvature. In *Comparison geometry*, volume 30 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 221–262. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.