

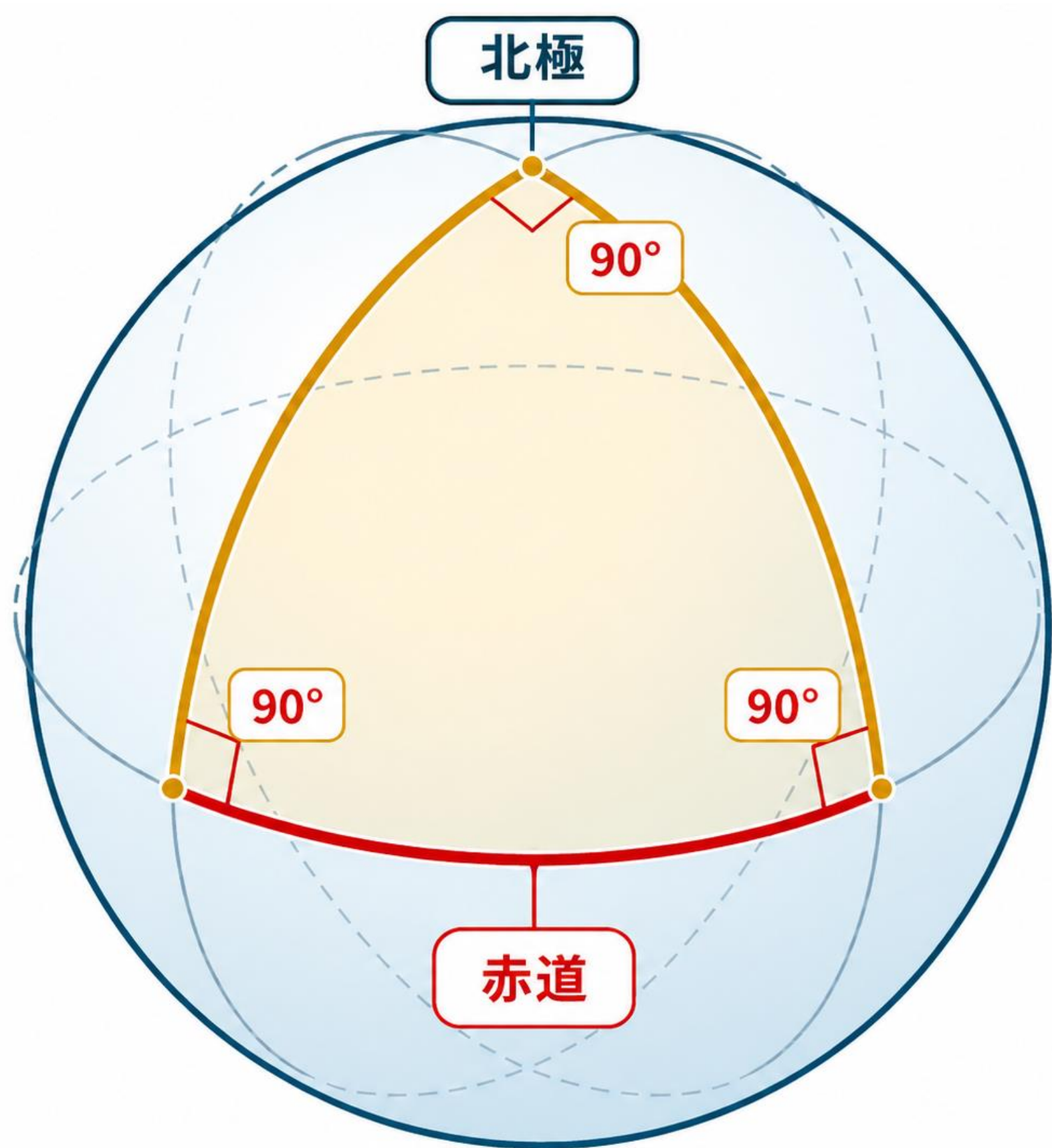
曲がりから、空間の正体へ

曲がり方を数にして、図形を見分ける数学

大阪大学大学院理学研究科 数学専攻 岩井雅崇

① 三角形の内角が180度を超える？

球面上では三つの角がすべて90度の三角形を下のようにつくります。

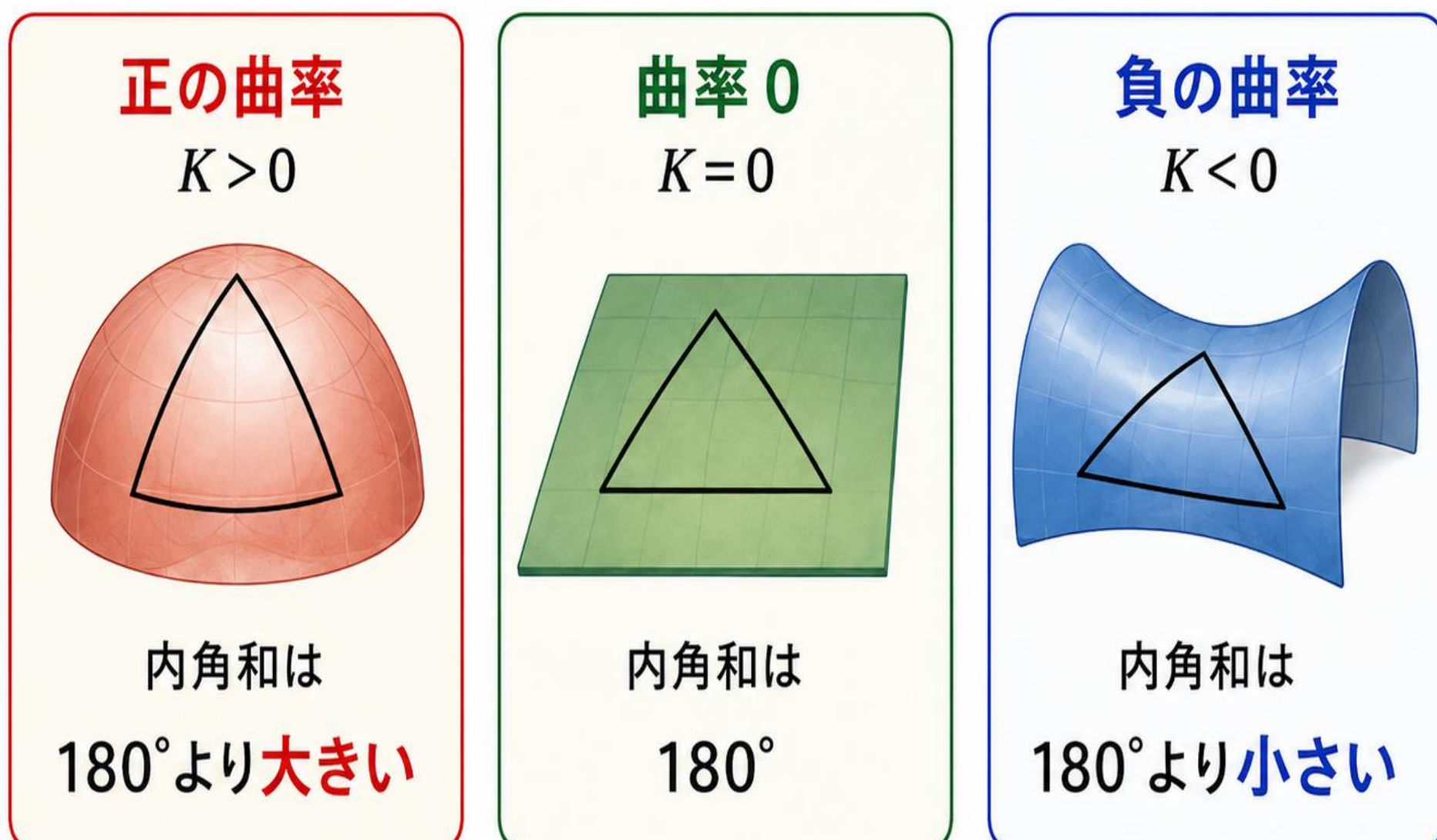


$$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$$

なぜ球面上では三角形の内角の和が180°を超えてしまうのでしょうか？

② 曲率と内角の和の関係

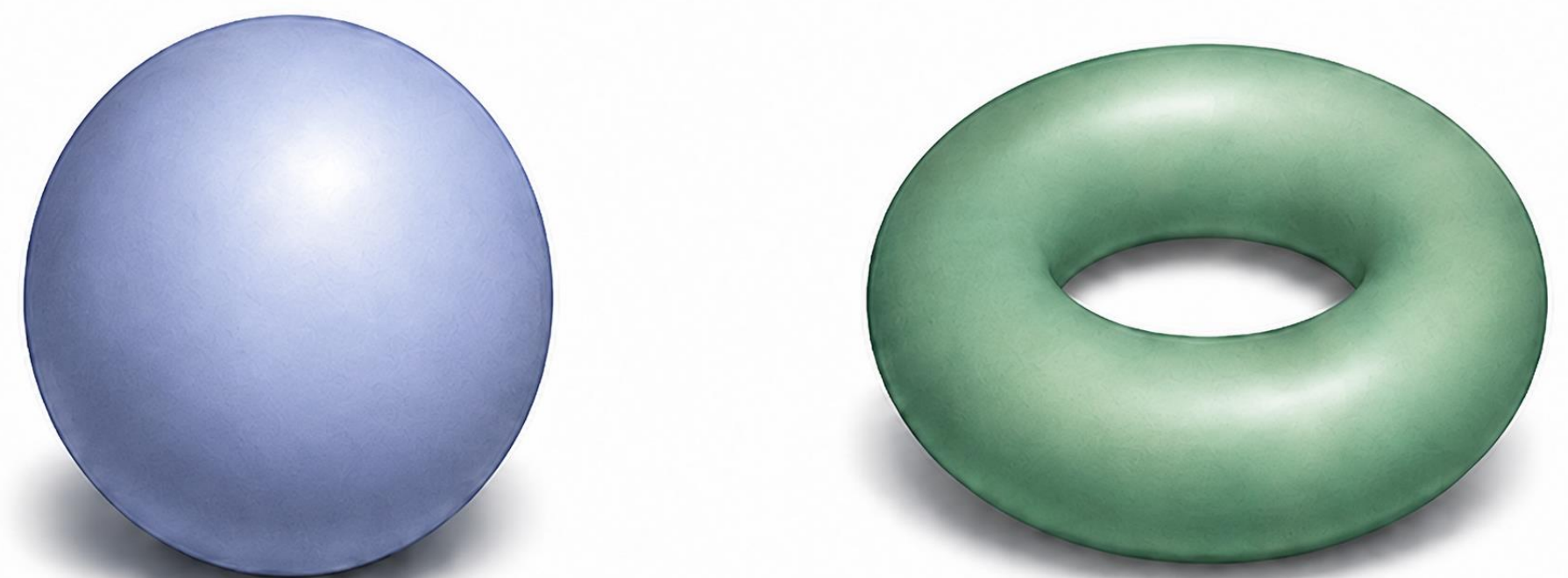
曲面の曲がり方を表す量を **Gauss曲率** といいます。このGauss曲率 K の違いが、曲面上の三角形の内角の和に現れます。



球面は正に曲がっているため、図の三角形の内角の和は180度を超えるのです。

③ 曲がり方から穴の数わかる？

球面やドーナツのような、端のない曲面を考えましょう。



球面には穴がなく、ドーナツには穴が1つあります。このような**穴の数**の違いはどこから来るのでしょうか？

④ 曲率が曲面の穴の数を決める

一つ一つの場所の曲がり方を、曲面全体で足し合わせると、穴の数が見えます。これが **Gauss-Bonnetの定理** です。

Gauss-Bonnet (ガウス-ボンネ) の定理

$$\underbrace{\int_S K dA}_{\text{曲率の総量}} = \underbrace{2\pi(2-2g)}_{\text{穴の数で決まる}}$$

Gauss曲率 K の総量から穴の数 g がわかり、端のない曲面の種類分けができます。

球面	トーラス	二重トーラス
		
$g = 0$ 穴の数 0 個	$g = 1$ 穴の数 1 個	$g = 2$ 穴の数 2 個
$\int_S K dA = 4\pi$	$\int_S K dA = 0$	$\int_S K dA = -4\pi$
曲率の総量は 正	曲率の総量は 0	曲率の総量は 負

数学的注釈： S は連結・コンパクト・向きづけ可能で境界のない曲面です。 g は穴の数です。 $g=0,1,2,\dots$ と穴の数だけで S が分類できます。

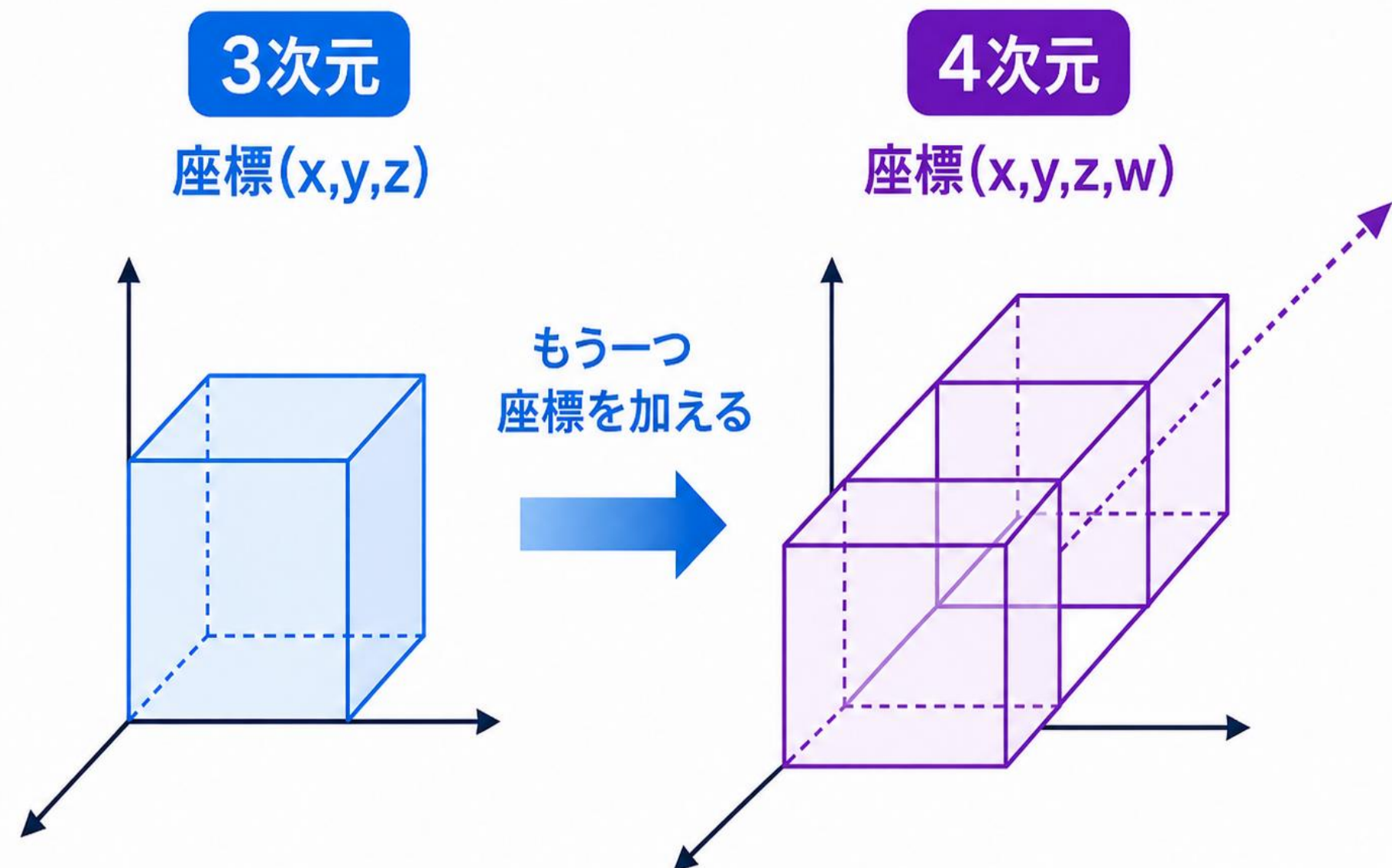
曲がりから、空間の正体へ

曲がり方を数にして、図形を見分ける数学

大阪大学大学院理学研究科 数学専攻 岩井雅崇

⑤ 2次元の図形から4次元の図形へ

今度は目には見えない実4次元の図形を考えましょう。次元とは点の位置を表すために必要な数字の数です。3次元では3つ、4次元では4つの数字で点の位置を表します。



数学的注釈：右の図は、4次元立方体を3次元に投影したイメージです。

⑥ 複素数2個 = 実数4個

私は複素数を使って作られる図形を研究しています。複素数1個は、2個の実数で表せます。複素数2個なら、実数は4個必要です。そのため**複素2次元は実4次元**に相当します。

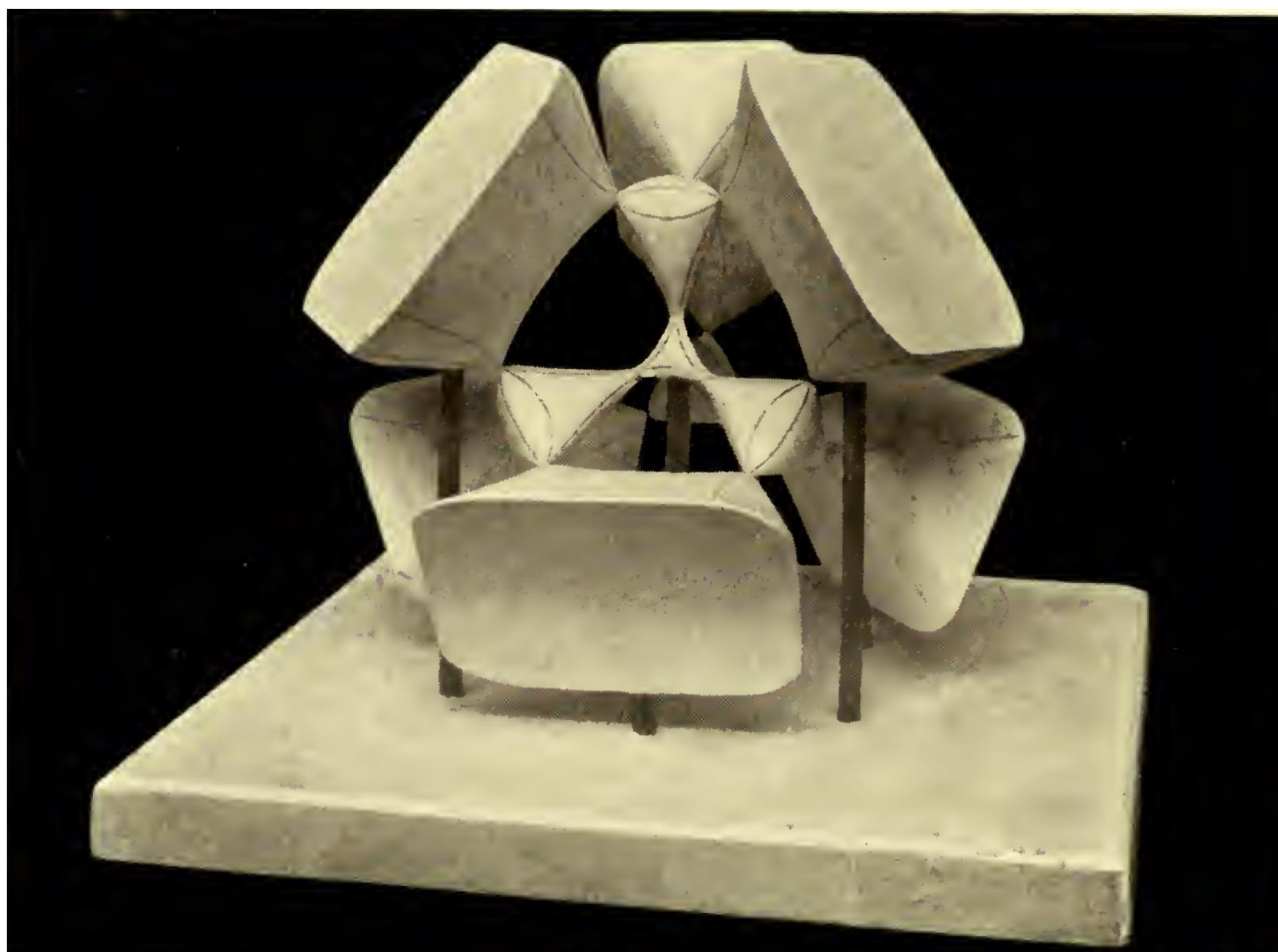
$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + iy_2$$

複素2次元 = 実4次元

二つの複素数 z_1, z_2 は、四つの実数 x_1, y_1, x_2, y_2 で表されます。

複素2次元の曲面も実4次元なので目には見えませんが、3次元に投影することで、下の写真のようにイメージすることができます。



R. W. H. T. Hudson, Kummer's Quartic Surface, Cambridge University Press, 1905, frontispiece.

Digitized by University of California Libraries / Internet Archive. Public domain.

⑦ Chern数が複素曲面を制限する

球面やドーナツのような実2次元の曲面はGauss曲率の総量で分類できました。複素2次元の曲面では図形全体の曲がり方を表す二つの**Chern(チャーン)数**が重要になります。

実2次元
曲率の総量

$$\int_S K dA$$

より高い次元でも、
曲率から空間全体の
特徴を取り出す

複素2次元 = 実4次元
二つのChern数

$$c_1(X)^2, c_2(X)$$

一般型と呼ばれる複素曲面は自由にChern数を取ることができません。

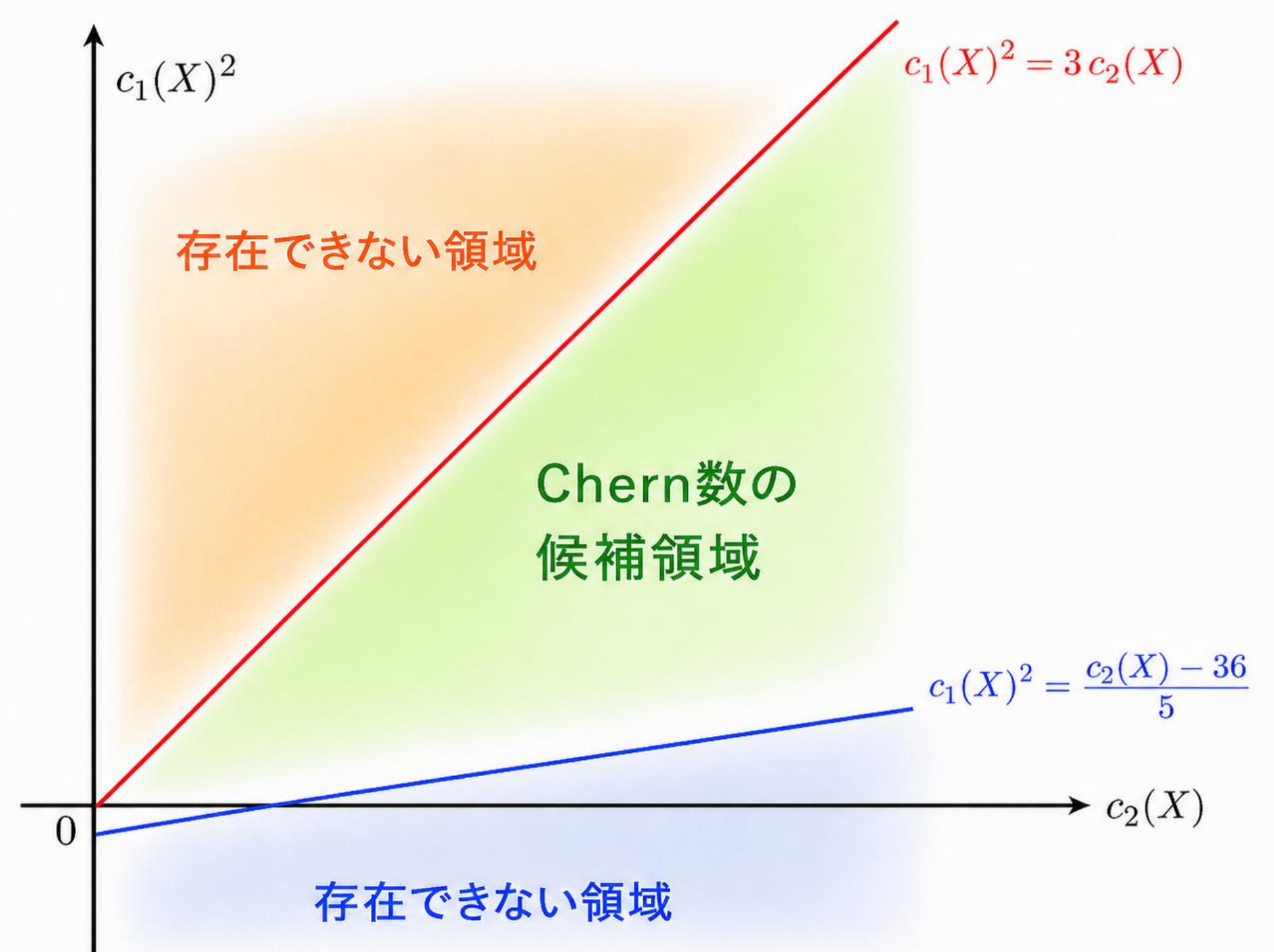
次の不等式を必ず満たす必要があります。

**Bogomolov-Miyaoka-Yau
(ボゴモロフ-宮岡-ヤウ) の不等式**

$$c_1(X)^2 \leq 3c_2(X)$$

⑧ Chern数の地図

縦軸に $c_1(X)^2$ 、横軸に $c_2(X)$ をかいた地図を考えると、Chern数の候補は下の緑色の部分に限られます。



このように、目には見えない複素数の図形も、曲率やChern数を使って調べることができます。