

複素射影多様体の構造定理

岩井雅崇 (大阪大学大学院理学研究科 数学専攻)

1 複素射影多様体

$\mathbb{CP}^N$ の閉部分複素多様体を複素射影多様体という。Chow の定理によって複素射影多様体 X はいくつかの同次多項式 $\{f_i(t_0, \dots, t_N)\}_{i=1}^l$ を用いて

$$X = \{(x_0 : \dots : x_N) \in \mathbb{CP}^N \mid f_i(x_0, \dots, x_N) = 0 (i = 1, \dots, l)\}$$

と表せられる。例えば以下のものは複素射影多様体になる。

$$\{(x : y : z : w) \in \mathbb{CP}^3 \mid x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 0\}$$

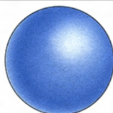
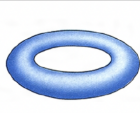
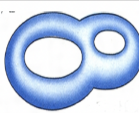
2 分類問題

複素射影多様体の基本的な問題の 1 つに次のものがある。

分類問題

複素射影多様体はリッチ曲率が正, 0, 負の 3 つの多様体から構成される。

例えば複素 1 次元の射影多様体は、下図のようにリッチ曲率が正, 0, 負の多様体に分類され、実 2 次元多様体としてみれば穴の数との対応がある。

			
リッチ曲率 (図形の曲がり具合)	正	0	負
穴の数	0	1	2 以上

2 次元に関しては小平邦彦らにより、3 次元に関しては森重文らによって分類問題は肯定的に解決している。4 次元以上に関しては分類問題は未解決である。

3 接ベクトル束が 0 以上の曲率を持つ場合

1 つ目の研究では (正則) 接ベクトル束 T_X が 0 以上の曲率を持つ場合の分類問題を調べた。先行研究として次のものがある。

定理. [Howard-Smyth-Wu 81]

T_X の曲率が 0 以上ならば、 X は次の 2 つに分解される。

- Fano 多様体 (リッチ曲率正な多様体)
- トーラス (リッチ曲率 0 の多様体)

私はこの結果を特異計量 (滑らかな計量の極限となる計量) の曲率が 0 以上の場合に拡張した。

定理 [Hosono-I.-Matsumura 21]

T_X の特異曲率が 0 以上ならば、 X は次の 2 つに分解される。

- 有理連結多様体 (リッチ曲率正の仲間)
- トーラス (リッチ曲率 0 の多様体)

Fano 多様体は有理連結多様体であるので、以下のような対応が得られる。

[HSW81] T_X の曲率が 0 以上 $\Rightarrow$ Fano 多様体 + トーラス

特異計量への一般化

[HIM21] T_X の特異曲率が 0 以上 $\Rightarrow$ 有理連結多様体 + トーラス

4 接ベクトル束が 0 以下の曲率を持つ場合

2 つ目の研究では (正則) 接ベクトル束 T_X が 0 以下の曲率を持つ場合の分類問題を調べた。1 つ目の研究と違いこの場合は未解決であり以下の予想がある。

予想

T_X の曲率が 0 以下ならば、 X は次の 2 つに分解される。

- リッチ曲率負な多様体
- トーラス (リッチ曲率 0 の多様体)

私はこの予想に関して部分的な解決を与えた。

定理 [I.-Matsumura 22]

T_X の曲率が 0 以下かつ $c_1(T_X)^2 = 0$ ならば、 X は次の 2 つに分解される。

- リッチ曲率負な複素 1 次元多様体
- トーラス (リッチ曲率 0 の多様体)

参考文献

- A. Howard, B. Smyth, H. Wu, *On compact Kähler manifolds of nonnegative bisectional curvature I and II*, Acta Math. **147** (1981)
- Genki Hosono, Masataka Iwai, Shin-ichi Matsumura. *On projective manifolds with pseudo-effective tangent bundles.*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu. (2021)
- Masataka Iwai, Shin-ichi Matsumura. *Abundance theorem for minimal compact Kähler manifolds with vanishing second Chern class.* arXiv:2205.10613