2026年度春夏学期 東北大学集中講義
(微分幾何学特選／数学総合講義H／多様体論特殊講義EⅠ)
Chern類と複素幾何学

Masataka IWAI

May 23, 2026, version 0.01

Abstract

Contents

0　この資料の構成と参考文献

1 章から 5 章は

- [Kob14] Shoshichi Kobayashi. Differential geometry of complex vector bundles.

の 1,2,4,5 章に基づきます．この本はネットで入手可能です．

6 章は

- [Miy87] Yoichi Miyaoka. The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety. In Algebraic geometry, Sendai, 1985

に基づきます．これは面白い論文なので是非とも読んでほしい!

他に参考にしたのは次のとおりです．

1 章と 2 章と 5 章のベクトル束の完全列と 2nd fundamental form の部分.

- 小林昭七 複素幾何
- 小平邦彦 複素多様体論
- Raymond O. Wells. Differential Analysis on Complex Manifolds

特に変換関数でベクトル束を理解するのは 2 番目と 3 番目の本に基づきます．

5 章の slope stability

- [Laz] Vladimir Lazic. Algebraic geometry: Foliations. https://www.uni-saarland.de/fileadmin/upload/lehrstuhl/lazic/Skripten/foliation.pdf
- [GKP16b] Daniel Greb, Stefan Kebekus, and Thomas Peternell. Movable curves and semistable sheaves. Int. Math. Res. Not. IMRN

[Laz] も是非とも読んでほしい! foliation に関してかなりわかりやすく書かれている．[GKP16b] も [Kob14] の 5 章の内容がコンパクトにまとまっている．

特異 Hermite 計量や多重劣調和函数

- [Dem12] Jean-Pierre Demailly. Analytic methods in algebraic geometry,
- [Dem] Jean-Pierre Demailly. Complex analytic and differential geometry.

代数幾何勢は Analytic methods in algebraic geometry の 5, 6 章を読むとためになるかも．

Kobayashi-Hitchin 対応および Donaldson-Uhlenbeck-Yau の定理

- 望月拓郎 Higgs 束や接続の Kobayashi-Hitchin 対応について https://www.nara-wu.ac.jp/omi/oka_symposium/16/mochizuki.pdf

かなり簡潔にまとまっていて勉強になる.

あとは chatGPT にかなりの文章を書いてもらいました. 証明も助けてもらいました.

0 Notation と Einstein 規約

0.1 Notation

添え字は以下の通り.

- $i, j, k, \ldots, z^i$ の添え字.
- α, β, γ. local frame e_α の添え字.
- U, V, W 開被覆の添え字
- gKähler 計量 $g_{i\bar{j}}$. 逆行列は $g^{\bar{j}i}$
- h Hermite 計量 $h_{\alpha\overline{\beta}}$. 逆行列は $h^{\overline{\beta}\alpha}$
- T_{UV} 変換関数 $T_{UV} : U \cap V \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$
- D 接続. D_hChern 接続, A: connection form. 関係としては

$$D(\mathbf{e}_U u_U) = \mathbf{e}_U(du_U + A_U u_U)$$

- F 接続 D の曲率. $F_{E,h}$, Chern 曲率. R curvature form. 関係としては

$$F_{E,h}(\mathbf{e}_U u_U) = \mathbf{e}_U(R u_U)$$

  ただし local に書く場合

$$F_{E,h} = R = R^{\alpha}_{\beta i\bar{j}} dz^i \wedge \overline{dz^j} \otimes e_\alpha \otimes e^{*,\beta} = \sum_{1\leq\alpha,\beta\leq r} \sum_{1\leq i,j\leq n} R^{\alpha}_{\beta i\bar{j}} dz^i \wedge \overline{dz^j} \otimes e_\alpha \otimes e^{*,\beta}$$

  と同一視をする.
- E^*. E の dual(双対)

0.2 Einstein 規約

Notation 0.1. 本講義では, 必要に応じて Einstein の総和規約を用いる. すなわち, 同じ添え字が一つの項の中で上付き添え字と下付き添え字として一度ずつ現れる場合, その添え字について総和をとるものと約束する. [1] 例えば,

$$a^\alpha e_\alpha \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\alpha=1}^{r} a^\alpha e_\alpha \quad A^\alpha{}_\beta v^\beta \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\beta=1}^{r} A^\alpha{}_\beta v^\beta$$

を表す. この記法を用いると, 座標表示や frame に関する式を簡潔に書くことができる.

[1] この資料ではできるだけ和の記号を書く予定であるが, 講義では板書を少なくするためにこの規約を用いる予定である. なお自己流で習得したので, 一般的なものと違う可能性がある.

上付き添え字の例

- 座標 $(z^1, \dots, z^n)$
- 微分形式 $dz^1, \dots, dz^n$

下付き添え字の例

- ベクトル場 $\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}$
- local frame $e_1, \dots, e_r$

両方

- 行列 $A^\alpha{}_\beta$
- 曲率 $R^\alpha_{\beta i \bar{j}}$

Example 0.2. $1 \le i, j \le n, 1 \le \alpha, \beta \le r$ について $R^\alpha_{\beta i \bar{j}} \in \mathbb{C}$ が与えられている時,

$$R^\alpha_{\beta i \bar{j}} dz^i \wedge d\overline{z^j} \otimes e_\alpha \otimes e^{*,\beta} = \sum_{1 \le \alpha, \beta \le r} \sum_{1 \le i, j \le n} R^\alpha_{\beta i \bar{j}} dz^i \wedge d\overline{z^j} \otimes e_\alpha \otimes e^{*,\beta} \tag{0.1}$$

行列 (特に計量)$g_{i\bar{j}}$ の逆行列を $g^{\bar{j}i}$ と書く. ([BG13, 3 章] に基づくが, この書き方はいろいろある.) このとき

$$g^{\bar{k}i} g_{j\bar{k}} = \delta^i_j \quad g_{j\bar{k}} g^{\bar{k}i} = \delta^i_j$$

である. δ^i_j は dirac delta($i = j$ の時 1, $i \ne j$ の時 0) とする

Example 0.3. n 次正方行列 $A = (a^i_j), B = (b^j_k)$ において, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ を Einstein 規約で示す.

$$(AB)^p_q = a^p_r b^r_q \quad (BA)^r_q = b^r_p a^p_q$$

なので

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{p=1}^n (AB)^p_p = \delta^q_p (AB)^p_q = \delta^q_p a^p_r b^r_q = a^p_r b^r_p \quad \mathrm{tr}(BA) = \sum_{r=1}^n (BA)^r_r = \delta^q_r (BA)^r_q = \delta^q_r b^r_p a^p_q = b^r_p a^p_r$$

よって等しい.

Example 0.4. Einstein 規約の例.

$$\begin{pmatrix} s^1_U \\ s^2_U \\ \vdots \\ s^r_U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{UV}{}^1{}_1 & T_{UV}{}^1{}_2 & \cdots & T_{UV}{}^1{}_r \\ T_{UV}{}^2{}_1 & T_{UV}{}^2{}_2 & \cdots & T_{UV}{}^2{}_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{UV}{}^r{}_1 & T_{UV}{}^r{}_2 & \cdots & T_{UV}{}^r{}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^1_V \\ s^2_V \\ \vdots \\ s^r_V \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

を Einstein 規約で書けば

$$s_U^\alpha = {T_{UV}}^\alpha{}_\beta s_V^\beta \quad \forall\alpha = 1, \ldots, r \tag{0.3}$$

同様にして

$$(e_{V,1}, e_{V,2}, \ldots, e_{V,r}) = (e_{U,1}, e_{U,2}, \ldots, e_{U,r}) \begin{pmatrix} {T_{UV}}^1{}_1 & {T_{UV}}^1{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^1{}_r \\ {T_{UV}}^2{}_1 & {T_{UV}}^2{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^2{}_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {T_{UV}}^r{}_1 & {T_{UV}}^r{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^r{}_r \end{pmatrix} \tag{0.4}$$

を Einstein 規約で書けば

$$e_{V,\alpha} = e_{U,\beta} {T_{UV}}^\alpha{}_\beta \quad \forall\alpha = 1, \ldots, r \tag{0.5}$$

1 複素多様体・ベクトル束

1.1 複素多様体とベクトル束

1.1.1 複素多様体とベクトル束の定義

Definition 1.1. X が n 次元複素多様体であるとは, X が第 2 可算 Hausdorff 空間であり, 次の条件を満たす開被覆 $\mathfrak{U}$ と写像 $\varphi_U \colon U \longrightarrow \mathbb{C}^n$ をもつことをいう.

(a) 各 $U \in \mathfrak{U}$ に対して, $\varphi_U(U)$ は $\mathbb{C}^n$ の開集合であり, φ_U は U から $\varphi_U(U)$ への同相写像である.

(b) $U \cap V \neq \emptyset$ のとき, 座標変換

$$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1} \colon \varphi_U(U \cap V) \longrightarrow \varphi_V(U \cap V)$$

は正則写像である.

$(z^1, \ldots, z^n)$ を $\mathbb{C}^n$ の自然な座標系とするとき, U 上の関数

$$z_U^1 = z^1 \circ \varphi_U, \quad \ldots, \quad z_U^n = z^n \circ \varphi_U$$

を U における局所座標系と呼ぶ. この局所座標系を $(U, z_U^1, \ldots, z_U^n)$ と表す.

要は C^∞ 級多様体の C^∞ を正則にしたものである. 以下断りがなければ X は複素多様体とする.

Definition 1.2. X を n 次元複素多様体とする. E を C^∞ 級の $2(n+r)$ 次元実多様体とする. C^∞ 級写像 $\pi \colon E \longrightarrow X$ が rank r の C^∞ 級複素ベクトル束であるとは, 次の条件を満たすことをいう.

(a) 各点 $p \in X$ に対して,

$$E_p := \pi^{-1}(p)$$

は r 次元の $\mathbb{C}$-ベクトル空間である. この E_p を p 上の fiber と呼ぶ.

(b) 任意の点 $p \in X$ に対して, p の開近傍 U と C^∞ 級微分同相写像

$$h \colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{C}^r$$

が存在し, 次の図式を可換にする.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{C}^r \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

ここで $\mathrm{pr}_1 \colon U \times \mathbb{C}^r \to U$ は第一射影である．特に $\mathrm{pr}_1 \circ h = \pi$ なので各 $p \in U$ に対して

$$h(E_p) \subset \{p\} \times \mathbb{C}^r$$

であり, 制限写像による写像

$$h^p \colon E_p \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathbb{C}^r$$

は $\mathbb{C}$-ベクトル空間の同型である．ここで $\mathrm{pr}_2 \colon \{p\} \times \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^r$ は第二射影とする.
また rank 1 のベクトル束を直線束という.

E を全空間, X を底空間, π を射影と呼ぶ. また, 組 (U, h) を局所自明化と呼ぶ.

Definition 1.3. 上の定義で, 写像 $\pi \colon E \longrightarrow X$ が rank r の正則複素ベクトル束であるとは, 次が成り立つこと

- E が $n + r$ 次元複素多様体で π が正則写像であり,
- (a) および (b) において, 任意の点 $p \in X$ に対して, p の開近傍 U と双正則写像

  $$h \colon \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{C}^r$$

  が存在し, 各 fiber 上で $\mathbb{C}$-ベクトル空間の同型を誘導する

Remark 1.4. C^∞ 級複素ベクトル束では, 局所自明化および変換関数は C^∞ 級である．一方, 正則複素ベクトル束では, 全空間 E も複素多様体であり, 局所自明化は正則である.

以下 1 章では, 写像などは C^∞ 級を扱う．正則にしたい場合は C^∞ 級を正則に置き換えればよい．またベクトル束は複素ベクトル束を仮定する.

Example 1.5. $E = X \times \mathbb{C}^r$ とし, $\pi : E \to X$ を第一射影とすれば, E は rank r のベクトル束になる．これを自明束といい $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ で表す．特に $\mathcal{O}_X = X \times \mathbb{C}$ となる[2]

[2] sheaf を知っている人は構造層 $\mathcal{O}_X$ が” $X \times \mathbb{C} \to X$ の section”(後述) と対応するので, 同一視をしている.

1.1.2　変換関数

二つの局所自明化 (U, h_U) と (V, h_V) をとる. $U \cap V$ 上で合成写像

$$h_U \circ h_V^{-1} \colon (U \cap V) \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{h_V^{-1}} \pi^{-1}(U \cap V) \xrightarrow{h_U} (U \cap V) \times \mathbb{C}^r$$

を考える. この写像は各点 $p \in U \cap V$ に対して fiber 方向の線形同型を定める. すなわち,

$$T_{UV}(p) = h_U \circ (h_V)^{-1}(p) \colon \mathbb{C}^r (= \pi^{-1}(p)) \longrightarrow \mathbb{C}^r (= \pi^{-1}(p))$$

とおくと, 写像

$$T_{UV} \colon U \cap V \longrightarrow GL(r, \mathbb{C}) \quad \text{ここで } T_{UV} = \begin{pmatrix} {T_{UV}}^1{}_1 & {T_{UV}}^1{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^1{}_r \\ {T_{UV}}^2{}_1 & {T_{UV}}^2{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^2{}_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {T_{UV}}^r{}_1 & {T_{UV}}^r{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^r{}_r \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

が得られる.

Definition 1.6. この T_{UV} を, 局所自明化 (U, h_U) と (V, h_V) に関する変換関数と呼ぶ.

変換関数 T_{UV} は次の両立条件を満たす.

(G-1) $T_{UV}\, T_{VW}\, T_{WU} = \mathrm{Id}_r$ on $U \cap V \cap W$,

(G-2) $T_{UU} = \mathrm{Id}_r$ on U.

Remark 1.7. 逆に, X 上の開被覆 $\mathfrak{U}$ が与えられ, 各空でない交わり $U \cap V$ 上に写像

$$T_{UV} \colon U \cap V \longrightarrow GL(r, \mathbb{C})$$

が与えられているとする. さらに, これらが両立条件

$$T_{UV}\, T_{VW}\, T_{WU} = \mathrm{Id}_r, \qquad T_{UU} = \mathrm{Id}_r$$

を満たすと仮定する. このとき, これらの変換関数をもつ rank r の複素ベクトル束を構成することができる. 構成は次の通りである. まず, 互いに交わらない和として

$$\widetilde{E} = \coprod_{U \in \mathfrak{U}} U \times \mathbb{C}^r$$

を考える. そして

$$(x,v)=(x,\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\\vdots\\v^r\end{pmatrix})\in V\times\mathbb{C}^r,\qquad (y,w)=(y,\begin{pmatrix}w^1\\w^2\\\vdots\\w^r\end{pmatrix})\in U\times\mathbb{C}^r$$

に対して[3], $(x,v)\sim(y,w)$ であることを

$$y=x,\quad \text{かつ}\quad w=T_{UV}(x)v\Leftrightarrow\begin{pmatrix}w^1\\w^2\\\vdots\\w^r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{T_{UV}}^1{}_1 & {T_{UV}}^1{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^1{}_r\\{T_{UV}}^2{}_1 & {T_{UV}}^2{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^2{}_r\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\{T_{UV}}^r{}_1 & {T_{UV}}^r{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^r{}_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\\vdots\\v^r\end{pmatrix}\tag{1.2}$$

によって定める. 両立条件により, これは同値関係になる. 商空間

$$E:=\widetilde{E}/\sim$$

は自然に X 上の rank r の複素ベクトル束になる.

Summary 1.8. rank r の C^∞ 級 (resp. 正則) ベクトル束は, 開被覆 $X=\bigcup_{U\in\mathfrak{U}}U$ と C^∞ 級 (resp. 正則) な変換関数 $T_{UV}:U\cap V\to GL(r,\mathbb{C})$ の組 $\{(U\cap V,T_{UV})\}$ で次の両立条件を満たすものと対応する.

(G-1) $T_{UV}T_{VW}T_{WU}=\mathrm{Id}_r$ on $U\cap V\cap W$,

(G-2) $T_{UU}=\mathrm{Id}_r$ on U.

resp. は respectively(それぞれ) の略. 論文でも同じことを何回も書くのが面倒なので, よく書かれる.

Remark 1.9. 実際には一対一対応でない. 簡単な例は自明束 $\mathcal{O}_X=X\times\mathbb{C}$ に対して開被覆 $X=\bigcup_{U\in\mathfrak{U}}U$ と変換関数

$$T_{UV}:U\cap V\to\mathbb{C}\setminus\{0\}\quad x\mapsto 1$$

とすれば, 開被覆 $\mathfrak{U}$ と変換関数 T_{UV} の組はいくらでも作れる.

しかし $\{(U\cap V,T_{UV})\}$ にしかるべき同値条件を入れたものと一対一に対応する. Čech cohomology の言葉を使えば

$$E\in\{\text{rank } r\ C^\infty \text{ 級 (or 正則) ベクトル束}\}/\cong\leftrightarrow H^1(X,\underbrace{\mathcal{E}}_{GL(r,\mathbb{C})\text{ 値 } C^\infty \text{ 級 (or 正則) 関数の sheaf}})\ni[\{(U\cap V,T_{UV})\}]$$

[3] 座標は縦に, そして v^1 のように上に書くと後々便利である.

となる. 特に

$$\{\text{rank 1 の正則ベクトル束}\}/\cong \leftrightarrow H^1(X, \underbrace{\mathcal{O}^*}_{\text{0 を値に取らない正則関数の sheaf}})$$

となる. 左は $\mathrm{Pic}(X)$ とも書かれる. この同型は実は Abel 群の準同型である.

1.1.3 Local frame

Definition 1.10. $\pi\colon E \to X$ を C^∞ 級 (resp. 正則) 複素ベクトル束とする. E の C^∞ (resp. 正則) section とは, C^∞ 写像 (resp. 正則写像)$s\colon X \longrightarrow E$ であって,

$$\pi \circ s = \mathrm{Id}_X$$

を満たすものとする.

$$C^\infty(X,E) := \{E \text{ の } C^\infty \text{ 級 section }\} \quad H^0(X,E) := \{E \text{ の 正則 section }\}$$

と書く.($H^0(X,E)$ は $\Gamma(X,E)$ とかくこともある.)

Definition 1.11. $E \to X$ を rank r の C^∞ 級 (resp. 正則) 複素ベクトル束とする. 開集合 $U \subset X$ 上の E の local frame とは, U 上の C^∞ (resp. 正則) section の組

$$e_1, \ldots, e_r \in C^\infty(U,E)$$

であって, 任意の点 $p \in U$ に対して

$$e_1(p), \ldots, e_r(p)$$

が fiber E_p の $\mathbb{C}$-基底になるものをいう.
以下開被覆 $\mathfrak{U}$ 上で local frame $e_{U,1}, \ldots, e_{U,r}$ をとる. [a] これを行ベクトルで書く. また記号として

$$\mathbf{e}_U = (e_{U,1}, \ldots, e_{U,r})$$

とまとめて書く.

[a] frame は横に, そして e_1 のように上に書くと後々便利である.

$U \cap V$ 上では, 二つの frame は同じ fiber の二つの基底を与えるので, 変換関数

$$T_{UV}\colon U \cap V \longrightarrow GL(r,\mathbb{C})$$

によって

$$e_V = e_U T_{UV} \Leftrightarrow (e_{V,1}, e_{V,2}, \dots, e_{V,r}) = (e_{U,1}, e_{U,2}, \dots, e_{U,r}) \begin{pmatrix} {T_{UV}}^1{}_1 & {T_{UV}}^1{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^1{}_r \\ {T_{UV}}^2{}_1 & {T_{UV}}^2{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^2{}_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {T_{UV}}^r{}_1 & {T_{UV}}^r{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^r{}_r \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

と書ける. つまり,

$$e_{V,\beta} = \sum_{\alpha=1}^{r} {T_{UV}}^\alpha{}_\beta e_{U,\alpha} \qquad (\beta = 1, \dots, r)$$

である. これは, V の frame で見た基底ベクトルを U の frame で表した式である.

frame e を固定する. section $s \in C^\infty(X, E)$ について,

$$s = e_U s_U = \sum_{\alpha=1}^{r} s_U^\alpha e_{U,\alpha}, \qquad s_U = \begin{pmatrix} s_U^1 \\ \vdots \\ s_U^r \end{pmatrix} \text{ on } U$$

となるような U 上の C^∞ 級関数 $s_U^1, \dots, s_U^r$ が存在する. 同じ section s を V 上の frame e_V で

$$s = e_V s_V = \sum_{\beta=1}^{r} s_V^\beta e_{V,\beta}, \qquad s_V = \begin{pmatrix} s_V^1 \\ \vdots \\ s_V^r \end{pmatrix} \text{ on } V$$

と書くと, $U \cap V$ 上で

$$e_U s_U = e_V s_V \underset{(1.3)}{=} e_U T_{UV} s_V$$

である. よって,

$$s_U = T_{UV} s_V \text{on } U \cap V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} s_U^1 \\ s_U^2 \\ \vdots \\ s_U^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {T_{UV}}^1{}_1 & {T_{UV}}^1{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^1{}_r \\ {T_{UV}}^2{}_1 & {T_{UV}}^2{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^2{}_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {T_{UV}}^r{}_1 & {T_{UV}}^r{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^r{}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_V^1 \\ s_V^2 \\ \vdots \\ s_V^r \end{pmatrix} \text{ on } U \cap V \tag{1.4}$$

が成り立つ. 成分で書けば,

$$s_U^\alpha = \sum_{\beta=1}^{r} {T_{UV}}^\alpha{}_\beta s_V^\beta \qquad (\alpha = 1, \dots, r)$$

である.

逆に U 上の C^∞ 級関数 $s_U^1, \dots, s_U^r$ で $U \cap V$ 上で $s_U = T_{UV} s_V$ を満たす (つまり (1.4)(=) を満

たす) ような関数たちは, global section $s \in C^\infty(X, E)$ を構成する.

Summary 1.12. rank r のベクトル束 E の C^∞ 級 (resp. 正則) な変換関数 $T_{UV} : U \cap V \to GL(r, \mathbb{C})$ とする.
local frame U 上の local frame $\mathbf{e}_U = (e_{U,1}, \ldots, e_{U,r})$ について

$$e_V = e_U T_{UV} \Leftrightarrow e_{V,\beta} = \sum_{\alpha=1}^{r} {T_{UV}}^{\alpha}{}_{\beta} e_{U,\alpha} \qquad (\beta = 1, \ldots, r) \text{on } U \cap V$$

global section $s \in C^\infty(X, E)$ (resp. $s \in H^0(X, E)$) は次のものと対応する.

(1) U 上の C^∞ 級関数 (resp. 正則関数) $s_U^1, \ldots, s_U^r$ で,

(2) 貼り合わせ条件

$$s_U = T_{UV} s_V \text{on } U \cap V \Leftrightarrow s_U^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{r} {T_{UV}}^{\alpha}{}_{\beta} s_V^{\beta} \qquad (\alpha = 1, \ldots, r) \text{on } U \cap V$$

を満たすもの.

Example 1.13. 直線束の場合は $\alpha = \beta = 1$ となるので, 変換関数 $T_{UV} : U \cap V \to \mathbb{C}$ は次の両立条件を満たすものと対応する.

(G-1) $T_{UV} T_{VW} T_{WU} = 1$ on $U \cap V \cap W$,

(G-2) $T_{UU} = 1$ on U.

これらの掛け算は行列の掛け算ではなく複素数の掛け算なので交換可能である. また

- local frame e_U の変換則 $e_V = e_U T_{UV}$.
- global section. U 上の C^∞ 級関数 s_U が

$$s_U = T_{UV} s_V \quad \text{on} U \cap V$$

を満たす (つまり (1.4)(=) を満たす) ならば, これらが global section $s \in C^\infty(X, E)$ を構成する.

1.2 Hermite 内積

Definition 1.14 (Hermite 計量)**.** $E \to X$ を複素多様体 X 上の C^∞ 級複素ベクトル束とする. E の Hermite 計量 $h = \{h_x\}_{x \in X}$ とは次を満たすものとする.

- 各ファイバー E_x 上の Hermite 内積 h_x である．つまり $\xi, \eta \in E_x$ に対して

$$\text{第一変数について } \mathbb{C} \text{ 線形} \quad h(\xi,\eta) = \overline{h(\eta,\xi)}, \qquad h(\xi,\xi) > 0 \quad (\xi \neq 0)$$

  である．
- h_x が x に関して C^∞ に変化する．つまり ξ, η が E の C^∞ 級 section であるとき，$h(\xi,\eta)$ は X 上の C^∞ 級関数である．

このとき (E,h) を Hermite ベクトル束 と呼ぶ.

正則なベクトル束を考えていても計量は C^∞ 級である．

開被覆 $\mathfrak{U}$ をとり，U 上の E の local frame を

$$\mathbf{e}_U = (e_{U,1}, \dots, e_{U,r})$$

とする．重なり $U \cap V$ 上で

$$\mathbf{e}_V = \mathbf{e}_U T_{UV}$$

と書く．ここで

$$T_{UV} \colon U \cap V \longrightarrow GL(r,\mathbb{C})$$

は E の変換関数である．

すると Hermite 計量 h は，各 U 上で行列値関数

$$h_U = (h_{U,\alpha\overline{\beta}}) = \begin{pmatrix} h_{U,1\overline{1}} & h_{U,1\overline{2}} & \cdots & h_{U,1\overline{r}} \\ h_{U,2\overline{1}} & h_{U,2\overline{2}} & \cdots & h_{U,2\overline{r}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{U,r\overline{1}} & h_{U,r\overline{2}} & \cdots & h_{U,r\overline{r}} \end{pmatrix} : U \to \mathrm{GL}(r,\mathbb{C}), \qquad \text{ここで } h_{U,\alpha\overline{\beta}} := h(e_{U,\alpha}, e_{U,\beta}) \tag{1.5}$$

により表される．各点で h_U は正定値 Hermite 行列であり，定義 1 から $\overline{h_{\alpha\overline{\beta}}} = h_{\beta\overline{\alpha}}$，定義 2 から C^∞ 級である．

貼り合わせ条件を見る．

$$h_{V\,\alpha\overline{\beta}} = h(e_{V,\alpha}, e_{V,\beta}) = h\left(\sum_{\gamma=1}^{r} {T_{UV}}^{\gamma}{}_{\alpha} e_{U,\gamma}, \sum_{\delta=1}^{r} {T_{UV}}^{\delta}{}_{\beta} e_{U,\delta}\right) = \sum_{\gamma=1}^{r}\sum_{\delta=1}^{r} {T_{UV}}^{\gamma}{}_{\alpha} \overline{{T_{UV}}^{\delta}{}_{\beta}}\, \underbrace{h(e_{U,\gamma}, e_{U,\delta})}_{=:h_{U,\gamma\overline{\delta}}} \tag{1.6}$$

であるので

$$h_V = {}^tT_{UV}\, h_U\, \overline{T_{UV}} \Leftrightarrow h_{V\,\alpha\overline{\beta}} = {T_{UV}}^{\gamma}{}_{\alpha} h_{U,\gamma\overline{\delta}} \overline{{T_{UV}}^{\delta}{}_{\beta}} \tag{1.7}$$

が成り立つ. 行列で書くと

$$
\begin{pmatrix} h_{V,1\bar{1}} & h_{V,1\bar{2}} & \cdots & h_{V,1\bar{r}} \\ h_{V,2\bar{1}} & h_{V,2\bar{2}} & \cdots & h_{V,2\bar{r}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{V,r\bar{1}} & h_{V,r\bar{2}} & \cdots & h_{V,r\bar{r}} \end{pmatrix}
= {}^t\begin{pmatrix} {T_{UV}}^1{}_1 & {T_{UV}}^1{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^1{}_r \\ {T_{UV}}^2{}_1 & {T_{UV}}^2{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^2{}_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {T_{UV}}^r{}_1 & {T_{UV}}^r{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^r{}_r \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} h_{U,1\bar{1}} & h_{U,1\bar{2}} & \cdots & h_{U,1\bar{r}} \\ h_{U,2\bar{1}} & h_{U,2\bar{2}} & \cdots & h_{U,2\bar{r}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{U,r\bar{1}} & h_{U,r\bar{2}} & \cdots & h_{U,r\bar{r}} \end{pmatrix}
\overline{\begin{pmatrix} {T_{UV}}^1{}_1 & {T_{UV}}^1{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^1{}_r \\ {T_{UV}}^2{}_1 & {T_{UV}}^2{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^2{}_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {T_{UV}}^r{}_1 & {T_{UV}}^r{}_2 & \cdots & {T_{UV}}^r{}_r \end{pmatrix}}
\tag{1.8}
$$

逆に, 各 U 上の正定値 Hermite 行列値 C^∞ 関数 h_U が貼り合わせ条件 (1.7) を満たすと, それらは大域的な Hermite 計量 を定める.

Summary 1.15. rank r のベクトル束 E の変換関数 $T_{UV} : U \cap V \to GL(r, \mathbb{C})$ とする時, E の Hermite 計量 h は, C^∞ 級写像

$$h_U : U \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}),$$

で, 各点で $\overline{h_{\alpha\bar{\beta}}} = h_{\beta\bar{\alpha}}$ となる正定値 Hermite 行列であり, 貼り合わせ条件

$$h_V = {}^tT_{UV}\, h_U\, \overline{T_{UV}} \Leftrightarrow h_{V\,\alpha\bar{\beta}} = {T_{UV}}^\gamma{}_\alpha h_{U,\gamma\bar{\delta}} \overline{{T_{UV}}^\delta{}_\beta} \text{on } U \cap V$$

を満たすものと対応する

Example 1.16 (直線束の場合)**.** $r = 1$ の場合は $T_{UV} = {T_{UV}}^1{}_1$ なので, 添え字 α, β を無視することができる. また

$$h(e_U, e_U) > 0$$

という条件より次が言える.

直線束 E に計量 h を与えることは, U 上の C^∞ 級関数 $h_U : U \to \mathbb{R}_{>0}$ で貼り合わせ条件

$$h_V \underset{(1.7)}{=} T_{UV} h_U \overline{T_{UV}} = |T_{UV}|^2 h_U$$

を満たすものの集まりを与えることに同じである.

1.3 双対束, 直和束, テンソル積束, 複素共役束, 自己準同型束

ベクトル束の双対束をまとめておく. 大事なのは双対束, テンソル積束, 自己準同型束, 行列式束である. 直和束は Chern 類を定めるときに出てくる. 複素共役束は微分形式の定義に必要なだけで重要でない.

Definition 1.17 (双対束, 直和束, テンソル積束, 複素共役束, 自己準同型束)**.** X を複素多様体とし, $E_1 \to X$, $E_2 \to X$ をそれぞれ rank r, s の複素ベクトル束とする. 開被覆 $\mathfrak{U}$ 上で E_1, E_2 の local frame を

$$\mathbf{e}_U = (e_{U,1}, \dots, e_{U,r}), \qquad \mathbf{f}_U = (f_{U,1}, \dots, f_{U,s})$$

と書き, 重なり $U \cap V$ 上で

$$\mathbf{e}_V = \mathbf{e}_U T^{E_1}_{UV}, \qquad \mathbf{f}_V = \mathbf{f}_U T^{E_2}_{UV}$$

とする. ここで

$$T^{E_1}_{UV} \colon U \cap V \to GL(r, \mathbb{C}), \qquad T^{E_2}_{UV} \colon U \cap V \to GL(s, \mathbb{C})$$

はそれぞれ E_1, E_2 の変換関数である. この規約のもとで, 以下のベクトル束は変換関数によって自然に定義する.

1. 双対束**.** E_1 の双対束 $E_1^* \to X$ は $(E_1^*)_p := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}((E_1)_p, \mathbb{C})$ をファイバーにもつベクトル束である.
   - local frame. $\mathbf{e}^*_U = (e^1_U, \dots, e^r_U)$ ただし $e^\alpha_U(e_{U,\beta}) = \delta^\alpha_\beta$ として定義する.
   - 変換関数 $T^{E_1^*}_{UV} = {}^t(T^{E_1}_{UV})^{-1}$. つまり双対をとると変換関数は逆行列の転置になり,
   $$\mathbf{e}^*_V = \mathbf{e}^*_U \, {}^t(T^{E_1}_{UV})^{-1}.$$
   - 計量 E_1^* には
   $$h^*(e^\alpha_U, e^\beta_U) = h^{-1}(e^\alpha_U, e^\beta_U) = h^{\overline{\beta}\alpha}$$
   という計量が入る. h の局所表示を
   $$h_U = (h_{U,\alpha\overline{\beta}}), \qquad h_{U,\alpha\overline{\beta}} := h(e_{U,\alpha}, e_{U,\beta})$$
   とすると
   $$H^*_U(e^\alpha_U, e^\beta_U) = h^{\overline{\beta}\alpha}$$
   という計量が入る.
2. 直和束**.** E_1 と E_2 の直和束 $E_1 \oplus E_2 \to X$ は $(E_1 \oplus E_2)_p := (E_1)_p \oplus (E_2)_p$ をファイ

バーにもつベクトル束である.

- local frame.$(\mathbf{e}_U, \mathbf{f}_U) = (e_{U,1}, \dots, e_{U,r}, f_{U,1}, \dots, f_{U,s})$
- 変換関数
$$T_{UV}^{E_1 \oplus E_2} = \begin{pmatrix} T_{UV}^{E_1} & 0 \\ 0 & T_{UV}^{E_2} \end{pmatrix}.$$
直和束では, E_1 成分と E_2 成分がそれぞれ独立に変換する. つまり
$$(\mathbf{e}_V, \mathbf{f}_V) = (\mathbf{e}_U, \mathbf{f}_U) \begin{pmatrix} T_{UV}^{E_1} & 0 \\ 0 & T_{UV}^{E_2} \end{pmatrix}.$$
- 計量 $E_1 \oplus E_2$ には
$$h^{E_1 \oplus E_2} := \begin{pmatrix} h^{E_1} & 0 \\ 0 & h^{E_2} \end{pmatrix}$$
という計量が入る.

3. **テンソル積束.** E_1 と E_2 のテンソル積束 $E_1 \otimes E_2 \to X$ は $(E_1 \otimes E_2)_p := (E_1)_p \otimes_{\mathbb{C}} (E_2)_p$ をファイバーにもつベクトル束である.
   - local frame. $\mathbf{e}_U \otimes \mathbf{f}_U = (e_{U,\alpha} \otimes f_{U,\gamma})_{1 \le \alpha \le r,\ 1 \le \gamma \le s}$
   - 変換関数 $T_{UV}^{E_1 \otimes E_2} = T_{UV}^{E_1} \otimes T_{UV}^{E_2}$. 右辺は行列の Kronecker 積である. 一般にこれを書くのは難しい.
   - 計量 $E_1 \otimes E_2$ には
   $$h^{E_1 \otimes E_2}(e_{U,\alpha} \otimes f_{U,\gamma}, e_{U,\beta} \otimes f_{U,\delta}) = h^{E_1}(e_{U,\alpha}, e_{U,\beta}) h^{E_2}(f_{U,\gamma}, f_{U,\delta})$$
   という計量が入る.
4. **直線束とのテンソル積.** 特に $E_2 = L$ が直線束である場合, L の local frame を $\mathbf{l}_U$ とすると, テンソル積 $E_1 \otimes L$ は簡単に書ける.
   - local frame. $\mathbf{e}_U \otimes \mathbf{l}_U = (e_{U,1} \otimes \mathbf{l}_U, \dots, e_{U,r} \otimes \mathbf{l}_U)$
   - 変換関数 $T_{UV}^{E_1 \otimes L} = T_{UV}^{L} T_{UV}^{E_1}$. 右辺は行列 $T_{UV}^{E_1}$ のスカラー T_{UV}^{L} 倍である. 特に変換則は
   $$\mathbf{e}_V \otimes \mathbf{l}_V = \mathbf{e}_U \otimes \mathbf{l}_U (T_{UV}^{E_1} T_{UV}^{L}).$$
   - 計量 $E_1 \otimes L$ には
   $$h^{E_1 \otimes L}(e_{U,\alpha} \otimes \mathbf{l}_U, e_{U,\beta} \otimes \mathbf{l}_U) = h^{E_1}(e_{U,\alpha}, e_{U,\beta}) h^{L}(\mathbf{l}_U, \mathbf{l}_U)$$
   という計量が入る.
5. **外積束.** E_1 の k 次外積束 $\bigwedge^k E_1 \to X$ は $(\bigwedge^k E_1)_p := \bigwedge^k (E_1)_p$ をファイバーにもつ

ベクトル束である．ここで E_1 は $0 \le k \le r$ とする．

- local frame. $\bigwedge^k \mathbf{e}_U = (e_{U,\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{U,\alpha_k})_{1\le\alpha_1<\cdots<\alpha_k\le r}$ で与えられる．特に $\mathrm{rank}\big(\bigwedge^k E_1\big) = \binom{r}{k}$ である．
- 変換関数. $T_{UV}^{\bigwedge^k E_1} = \bigwedge^k T_{UV}^{E_1}$ である．右辺は行列 $T_{UV}^{E_1}$ から誘導される外積表示である．一般にこれを書くのはやや複雑である．
- 計量: 多重添字 $I = (\alpha_1 < \cdots < \alpha_k)$ に対して

$$e_{U,I} := e_{U,\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{U,\alpha_k}$$

と書く．$h_U = (h_{U,\alpha\overline{\beta}})$, $h_{U,\alpha\overline{\beta}} := h(e_{U,\alpha}, e_{U,\beta})$ とすると, $\bigwedge^k h$ の行列 $h_U^{\wedge k}$ は

$$(h_U^{\wedge k})_{I\overline{J}} = (\bigwedge^k h)(e_{U,I}, e_{U,J}) = \det\big(h_{U,\alpha_a\overline{\beta}_b}\big)_{1\le a,b\le k}$$

で与えられる．

6. 行列式束**.** E_1 の r 次外積束 $\det E_1 \to X$ は $(\det E_1)_p := \bigwedge^r (E_1)_p$ をファイバーにもつ rank 1 のベクトル束である．
   - local frame. $\bigwedge^r \mathbf{e}_U = (e_{U,1} \wedge \cdots \wedge e_{U,r})$
   - 変換関数. $T_{UV}^{\det E_1} = \det T_{UV}^{E_1}$
   - $\det E_1$ には

$$h^{\det E_1}(e_{U,1} \wedge \cdots \wedge e_{U,r}, e_{U,1} \wedge \cdots \wedge e_{U,r}) = \det\big(h_{U,\alpha\overline{\beta}}\big)_{1\le\alpha,\beta\le r}$$

という計量が入る

7. 複素共役ベクトル束**.** E_1 の複素共役ベクトル束 $\overline{E_1} \to X$ は, 各点 $p \in X$ において集合としては $(E_1)_p$ と同じファイバーをもち, スカラー倍を

$$\lambda \cdot_{(\overline{E_1})_p} v := \overline{\lambda} \cdot_{(E_1)_p} v \qquad (\lambda \in \mathbb{C},\ v \in (E_1)_p)$$

で定めたベクトル束である．
   - local frame. $\overline{\mathbf{e}}_U = (\overline{e}_{U,1}, \ldots, \overline{e}_{U,r})$
   - 変換関数 $T_{UV}^{\overline{E_1}} = \overline{T_{UV}^{E_1}}$ で, 変換則は

$$\overline{\mathbf{e}}_V = \overline{\mathbf{e}}_U\, \overline{T_{UV}^{E_1}}.$$

   - $\overline{E_1}$ には

$$h^{\overline{E_1}}(\overline{e}_{U,\alpha}, \overline{e}_{U,\beta}) = \overline{h_{U,\alpha\overline{\beta}}} = h_{U,\beta\overline{\alpha}}$$

という計量が入る．

8. 自己準同型束. E_1 の自己準同型束を $\mathrm{End}(E_1) := \mathrm{Hom}(E_1, E_1)$ とする．これは

$$\mathrm{End}(E_1)_p := \mathrm{End}_{\mathbb{C}}((E_1)_p) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}((E_1)_p, (E_1)_p)$$

をファイバーにもつ rank r^2 の複素ベクトル束である．自然な同型により $\mathrm{End}(E_1)$ は $E_1^* \otimes E_1$ ともみなせるので, 次が言える.

- local frame. $e_U^\alpha \otimes e_{U,\beta}$ $1 \leq \alpha, \beta \leq r$
- 変換関数 $T_{UV}^{E_1^*} \otimes T_{UV}^{E_1} = {}^t(T_{UV}^{E_1})^{-1} \otimes T_{UV}^{E_1}$. 右辺は行列の Kronecker 積である. 一般にこれを書くのは難しい.
- 計量: $\mathrm{End}(E_1) = E_1^* \otimes E_1$ には

$$h^{\mathrm{End}(E_1)}(e_{U,\alpha} \otimes e_U^\gamma, e_{U,\beta} \otimes e_U^\delta) = h^{E_1}(e_{U,\alpha}, e_{U,\beta}) h^{E_1^*}(e_U^\gamma, e_U^\delta) = h_{U,\alpha\overline{\beta}} h^{\overline{\delta}\gamma}$$

  という計量が入る

9. 引き戻し **(Pull-back).** $f : Y \to X$ を C^∞ 級写像とする. Y 上のベクトル束 $f^* E_1 \to Y$ は

$$(f^* E_1)_y := (E_1)_{f(y)}$$

をファイバーにもつベクトル束である.

- local frame. $f^{-1}(U)$ 上の local frame $f^* \mathbf{e}_U = (f^* e_{U,1}, \ldots, f^* e_{U,r})$
- 変換関数.

$$T_{UV}^{f^* E_1} = (f^* T_{UV}^{E_1}) := (T_{UV}^{E_1} \circ f) : f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}).$$

- $f^*(E_1)$ には

$$h^{f^*}(f^* e_{U,\alpha}, f^* e_{U,\beta}) = f^*(h^{E_1}(e_{U,\alpha}, e_{U,\beta})) := h^{E_1}(e_{U,\alpha}, e_{U,\beta}) \circ f$$

  という計量が入る.

Example 1.18. E_1, E_2 の rank が 1 の場合 (つまり直線束の場合) はもっと簡単になる.

- 双対 E_1^* は変換関数 $(T_{UV}^{E_1})^{-1}$ の直線束である.
- 直和束 $E_1 \oplus E_2$ は変換関数

$$T_{UV}^{E_1 \oplus E_2} = \begin{pmatrix} T_{UV}^{E_1} & 0 \\ 0 & T_{UV}^{E_2} \end{pmatrix}$$

  のランク 2 のベクトル束である.
- 直線束たちのテンソル積 $E_1 \otimes E_2$ は変換関数 $T_{UV}^{E_1} T_{UV}^{E_2}$ の直線束である．特に $E_1 = E_2$ の場合は変換関数 $(T_{UV}^{E_1})^2$ の直線束である．これを $E_1^{\otimes 2}$ とも書く.
- 複素共役ベクトル束 $\overline{E_1}$ は変換関数 $\overline{T_{UV}^{E_1}}$ となる直線束である.

- 自己準同型束 $\mathrm{End}(E_1)$ は変換関数 $T^{E_1^*}_{UV} \otimes T^{E_1}_{UV} = {}^t(T^{E_1}_{UV})^{-1} \otimes T^{E_1}_{UV} = 1$ となる直線束である. つまり自明束 $\mathcal{O}_X$ である.

1.4 ベクトル束の例

Example 1.19. X を n 次元複素多様体とする. $(U, z_U^1, \ldots, z_U^n)$ に対して, U 上の正則ベクトル束 Ω_X で $\Omega_X|_U$ の local frame は

$$e_U = \left(dz_U^1, \ldots, dz_U^n\right)$$

となるものがある. これは

$$T_{UV} \colon U \cap V \longrightarrow GL(n, \mathbb{C}) \quad p \mapsto T_{UV}(p) := \left(\frac{\partial z_V^j}{\partial z_U^i}(p)\right)_{1 \le i, j \le n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_V^1}{\partial z_U^1} & \frac{\partial z_V^2}{\partial z_U^1} & \cdots & \frac{\partial z_V^n}{\partial z_U^1} \\ \frac{\partial z_V^1}{\partial z_U^2} & \frac{\partial z_V^2}{\partial z_U^2} & \cdots & \frac{\partial z_V^n}{\partial z_U^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_V^1}{\partial z_U^n} & \frac{\partial z_V^2}{\partial z_U^n} & \cdots & \frac{\partial z_V^n}{\partial z_U^n} \end{pmatrix}(p) \tag{1.9}$$

を変換関数として

$$\Omega_X := \coprod_{U \in \mathfrak{U}} U \times \mathbb{C}^n / \sim \quad (x, v) \sim (y, w) \Leftrightarrow y = x, \quad \text{かつ} \quad w = T_{UV}(x)v$$

と定義すればよい. 二つの局所座標系 $(U, z_U^1, \ldots, z_U^n), (V, z_V^1, \ldots, z_V^n)$ を考える. $U \cap V$ 上では, chain rule により

$$e_V = e_U T_{UV} \Leftrightarrow \left(dz_V^1, \ldots, dz_V^n\right) = \left(dz_U^1, \ldots, dz_U^n\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial z_V^1}{\partial z_U^1} & \frac{\partial z_V^2}{\partial z_U^1} & \cdots & \frac{\partial z_V^n}{\partial z_U^1} \\ \frac{\partial z_V^1}{\partial z_U^2} & \frac{\partial z_V^2}{\partial z_U^2} & \cdots & \frac{\partial z_V^n}{\partial z_U^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_V^1}{\partial z_U^n} & \frac{\partial z_V^2}{\partial z_U^n} & \cdots & \frac{\partial z_V^n}{\partial z_U^n} \end{pmatrix} \Leftrightarrow dz_V^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_V^j}{\partial z_U^i} dz_U^i \quad \forall j \tag{1.10}$$

が成り立つ.

Definition 1.20. このように定義された Ω_X を正則余接ベクトル束という. (Ω_X^1, T^*X とも書く.) 変換関数 T_{UV} が正則なので, これは正則ベクトル束である.
その C^∞ (resp. 正則)section は, 局所的には C^∞ (resp. 正則) 1-形式

$$f_{1,U} dz_U^1 + \cdots + f_{n,U} dz_U^n$$

として表される.

Ω_X 上の C^∞ 級 (正則)global section $C^\infty(X,\Omega_X)$ は, U 上の C^∞ 級 (正則) 関数 $s_U^1,\dots,s_U^n$ で

$$s_U = T_{UV}s_V \text{on } U\cap V \Leftrightarrow \begin{pmatrix} s_U^1 \\ s_U^2 \\ \vdots \\ s_U^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_V^1}{\partial z_U^1} & \frac{\partial z_V^2}{\partial z_U^1} & \cdots & \frac{\partial z_V^n}{\partial z_U^1} \\ \frac{\partial z_V^1}{\partial z_U^2} & \frac{\partial z_V^2}{\partial z_U^2} & \cdots & \frac{\partial z_V^n}{\partial z_U^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_V^1}{\partial z_U^n} & \frac{\partial z_V^2}{\partial z_U^n} & \cdots & \frac{\partial z_V^n}{\partial z_U^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_V^1 \\ s_V^2 \\ \vdots \\ s_V^n \end{pmatrix}$$

を満たすものとして与えられる. $U\cap V$ 上で $s_U = T_{UV}s_V$ を満たす (つまり (1.4)(=) を満たす) ような関数たちは, global section $s\in C^\infty(X,E)$ を構成する.

Definition 1.21. Ω_X の双対ベクトル束 T_X を正則接ベクトル束といい, T_X で表す

T_X の local frame は

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_U^1},\dots,\frac{\partial}{\partial z_U^n}\right)$$

で与えられる.

Example 1.22 (標準束)**.** X を n 次元複素多様体とする. 局所座標系 $(U,z_U^1,\dots,z_U^n)$ に対して, U 上の正則直線束で, $K_X|_U$ の local frame が

$$e_U = dz_U^1\wedge\cdots\wedge dz_U^n$$

で与えられるものを考える. これは正則余接ベクトル束 Ω_X の最高外積

$$K_X := \det\Omega_X = \bigwedge^n \Omega_X$$

として定義される. したがって K_X は rank 1 の正則ベクトル束, すなわち正則直線束である.

二つの局所座標系 $(U,z_U^1,\dots,z_U^n),(V,z_V^1,\dots,z_V^n)$ を考える. $U\cap V$ 上では, chain rule により

$$dz_V^1\wedge\cdots\wedge dz_V^n = \det\left(\frac{\partial z_V^j}{\partial z_U^i}\right)_{1\le i,j\le n} dz_U^1\wedge\cdots\wedge dz_U^n \tag{1.11}$$

となる. つまり

$$e_V = e_U\, T_{UV}^{K_X}$$

が成り立つ. ここで K_X の変換関数は $T_{UV}^{K_X}: U \cap V \longrightarrow \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ であり,

$$T_{UV}^{K_X}(p) := \det \left(\frac{\partial z_V^j}{\partial z_U^i}(p) \right)_{1 \leq i,j \leq n} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial z_V^1}{\partial z_U^1} & \frac{\partial z_V^2}{\partial z_U^1} & \cdots & \frac{\partial z_V^n}{\partial z_U^1} \\ \frac{\partial z_V^1}{\partial z_U^2} & \frac{\partial z_V^2}{\partial z_U^2} & \cdots & \frac{\partial z_V^n}{\partial z_U^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_V^1}{\partial z_U^n} & \frac{\partial z_V^2}{\partial z_U^n} & \cdots & \frac{\partial z_V^n}{\partial z_U^n} \end{pmatrix} (p)$$

である. したがって

$$K_X := \coprod_{U \in \mathfrak{U}} U \times \mathbb{C} / \sim$$

とおき,

$$(x, v)_U \sim (y, w)_V \Longleftrightarrow y = x, \quad \text{かつ} \quad w = T_{UV}^{K_X}(x) v$$

と定義すれば, K_X は正則直線束になる.

Definition 1.23. このように定義された正則直線束

$$K_X = \det \Omega_X = \bigwedge^n \Omega_X$$

を X の標準束という. また K_X は Ω_X^n とも書く. 変換関数 T_{UV} が正則なので, これは正則直線束である.
その C^∞ (resp. 正則)section は, 局所的には C^∞ (resp. 正則) n-形式

$$f_U dz_U^1 \wedge \cdots \wedge dz_U^n$$

として表される.

K_X 上の C^∞ 級, あるいは正則 global section は, 各 U 上の C^∞ 級, あるいは正則関数 f_U によって

$$s|_U = f_U e_U = f_U dz_U^1 \wedge \cdots \wedge dz_U^n$$

と表される. これらが global section を定めるための貼り合わせ条件は

$$f_U = T_{UV}^{K_X} f_V \Leftrightarrow f_U = \det \left(\frac{\partial z_V^j}{\partial z_U^i} \right)_{1 \leq i,j \leq n} f_V \qquad \text{on } U \cap V$$

である. したがって, この条件を満たす局所関数 f_U たちは global section $s \in C^\infty(X, K_X)$ を構成する.

2 微分形式・接続と曲率

2.1 微分形式

(p,q)-form を定義する前に, まずは簡単な $(1,1)$-form を定義する.

Definition 2.1 ($(1,1)$-form)**.** X を n 次元複素多様体とし, 局所正則座標を $(U, z_U^1, \ldots, z_U^n)$ とする. 局所的に

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{i\bar{j}}\, dz_U^i \wedge d\bar{z}_U^j$$

と書ける微分形式を $(1,1)$-form という. ここで $f_{i\bar{j}}$ は U 上の C^∞ 級関数である. $(1,1)$-form 全体の空間を $A^{1,1}(X)$ と表す.
ベクトル束の言葉で言うと,

- 正則余接ベクトル束を $\Omega_X^1 = \Omega_X^{1,0}$ とする. local frame は $(dz_U^1, \ldots, dz_U^n)$ である.
- その複素共役ベクトル束を $\overline{\Omega_X^1} = \Omega_X^{0,1}$ とする. local frame は $(d\bar{z}_U^1, \ldots, d\bar{z}_U^n)$ となる.

$$\Omega_X^{1,1} := \Omega_X^{1,0} \otimes \Omega_X^{0,1}$$

として, $\Omega_X^{1,1}$ の C^∞ 級 global section を $(1,1)$-form といい,

$$A^{1,1}(X) := C^\infty(X, \Omega_X^{1,1})$$

と定義する. ただし, 自然な写像

$$\Omega_X^{1,0} \otimes \Omega_X^{0,1} \longrightarrow \bigwedge^2 (T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$

によって, $dz_U^i \otimes d\bar{z}_U^j$を $dz_U^i \wedge d\bar{z}_U^j$とみなす.

$A^{1,1}(X)$ を局所的に書いてみよう. $(1,1)$-form は $\Omega_X^{1,1}$ の C^∞ 級 globalsection のことである. 局所座標 $(U, z_U^1, \ldots, z_U^n)$ 上では, $\varphi \in A^{1,1}(X)$ は

$$\varphi|_U = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{U,i\bar{j}}\, dz_U^i \wedge d\bar{z}_U^j$$

と書ける. ここで $\varphi_{U,i\bar{j}}$ は U 上の C^∞ 級関数である. 重なり $U \cap V$ 上では

$$dz_V^k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z_V^k}{\partial z_U^i} dz_U^i, \qquad d\bar{z}_V^\ell = \sum_{j=1}^{n} \overline{\frac{\partial z_V^\ell}{\partial z_U^j}}\, d\bar{z}_U^j$$

なので, 貼り合わせ条件は

$$\varphi_{U,i\bar{j}} = \sum_{k,\ell=1}^{n} \frac{\partial z_V^k}{\partial z_U^i} \overline{\frac{\partial z_V^\ell}{\partial z_U^j}} \varphi_{V,k\bar{\ell}} \qquad (1 \leq i, j \leq n) \tag{2.1}$$

である. すなわち, 局所的に

$$\sum_{i,j} \varphi_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge \overline{dz^j}$$

と書け, 座標変換に対して上の変換法則 (2.1) を満たすものが $(1,1)$-form である.
例えば $f \in C^\infty(X)$ に対して,

$$\partial\overline{\partial} f|_U := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_U^i \partial \bar{z}_U^j} dz_U^i \wedge d\bar{z}_U^j$$

は $(1,1)$-form である.

Definition 2.2 ((p,q)-form)**.** X を n 次元複素多様体とし, 局所正則座標を $(U, z_U^1, \ldots, z_U^n)$ とする.

$$dz_U^I = dz_U^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_U^{i_p}, \quad d\bar{z}_U^J = d\bar{z}_U^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_U^{j_q}$$

と書く. ここで $I = (i_1 < \cdots < i_p)$, $J = (j_1 < \cdots < j_q)$ である. 局所的に

$$\sum_{|I|=p,\ |J|=q} f_{I\bar{J}}\, dz_U^I \wedge d\bar{z}_U^J$$

と書ける微分形式を (p,q)-form といい, $A^{p,q}(X)$ と表す.
ベクトル束の言葉で言うと

- 正則余接ベクトル束を $\Omega_X^1 = \Omega_X^{1,0}$ とする. local frame は $(dz_U^1, \ldots, dz_U^n)$ である.
- その複素共役ベクトル束を $\overline{\Omega_X^1} = \Omega_X^{0,1}$ とする. local frame は $(d\bar{z}_U^1, \ldots, d\bar{z}_U^n)$ となる.

$$\Omega_X^{p,q} := \bigwedge^p \Omega_X^{1,0} \otimes \bigwedge^q \Omega_X^{0,1}$$

として, $\Omega_X^{p,q}$ の C^∞ 級 globalsection を (p,q)-form といい,

$$A^{p,q}(X) := C^\infty(X, \Omega_X^{p,q})$$

と定義する.
ただし, 自然な写像

$$\bigwedge^p \Omega_X^{1,0} \otimes \bigwedge^q \Omega_X^{0,1} \longrightarrow \bigwedge^{p+q} (T_X^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$$

によって, $dz_U^I \otimes d\bar{z}_U^J$を $dz_U^I \wedge d\bar{z}_U^J$とみなす.

Example 2.3 ($(1,0)$-form の場合)**.** 上の定義で $p=1,\ q=0$ とすると,

$$\Omega_X^{1,0} = \bigwedge^1 \Omega_X^{1,0} \otimes \bigwedge^0 \Omega_X^{0,1} = \Omega_X^{1,0} = \Omega_X^1$$

である. したがって $(1,0)$-form とは, 正則余接ベクトル束 Ω_X^1 の C^∞ 級 globalsection のことである. 局所座標 $(U, z_U^1, \ldots, z_U^n)$ 上では, $\varphi \in A^{1,0}(X)$ は

$$\varphi|_U = \sum_{i=1}^n \varphi_{U,i}\, dz_U^i$$

と書ける. ここで $\varphi_{U,i}$ は U 上の C^∞ 級関数である. 重なり $U \cap V$ 上では

$$dz_V^k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_V^k}{\partial z_U^i} dz_U^i$$

なので, 貼り合わせ条件は

$$\varphi_{U,i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial z_V^k}{\partial z_U^i} \varphi_{V,k} \qquad (1 \le i \le n)$$

である. すなわち, 局所的に

$$\sum_i \varphi_i dz^i$$

と書け, 座標変換に対して上の変換法則を満たすものが $(1,0)$-form である.

例えば $f \in C^\infty(X)$ に対して,

$$\partial f|_U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_U^i} dz_U^i$$

は $(1,0)$-form である. もし f が正則関数ならば, $\partial f = df$ となる.

2.1.1 実数値微分形式との対応

Proposition 2.4. X を n 次元複素多様体とする. $A^k(X)$ を複素数値の k-*form* の空間とする. このとき

$$A^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}(X)$$

証明の概略. きちんと証明するなら概複素構造の部分の話が必要なので, あらすじだけを述べる. $A^k(X)$ の元は, 局所正則座標 $(U, z_U^1, \ldots, z_U^n)$ に対して

$$z_U^j = x_U^j + \sqrt{-1} y_U^j$$

と書くと, $\eta \in A^k_{\mathbb{R}}(X)$ は局所的に

$$\eta|_U = \sum_{|I|+|J|=k} f_{U,IJ}\, dx^I_U \wedge dy^J_U$$

と書ける. そこで

$$dz^j_U = dx^j_U + \sqrt{-1}dy^j_U, \qquad d\overline{z}^j_U = dx^j_U - \sqrt{-1}dy^j_U$$

となることを用いて代入すれば,[4] local frame は複素数値微分形式は dz^j_U と $d\overline{z}^j_U$ を用いて書くことができる. □

Example 2.5. $\eta \in A^1(X)$ は局所的に

$$\eta|_U = \sum_{i=1}^n f_{U,i}(x,y)\, dx^i_U + \sum_{i=1}^n g_{U,i}(x,y)\, dy^i_U$$

と書ける. これに

$$dz^j_U = dx^j_U + \sqrt{-1}dy^j_U, \qquad d\overline{z}^j_U = dx^j_U - \sqrt{-1}dy^j_U$$

を代入すれば,

$$\eta|_U = \underbrace{\sum_{i=1}^n F_{U,i}(z)\, dz^i_U}_{\text{(1,0)form}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n G_{U,i}(z,\overline{z})\, d\overline{z}^i_U}_{\text{(0,1)-form}}$$

2.1.2 外微分と $\partial, \overline{\partial}$.

まず $k=0$ の場合の外微分に関して述べる.

Definition 2.6.

$$\partial : A^0(X) \to A^{1,0}(X) \quad \overline{\partial} : A^0(X) \to A^{0,1}(X)$$

を次のように定義する.
局所正則座標 $(z^1,\ldots,z^n)$ をとり, 関数 $f \in C^\infty(U) = A^0(U)$ に対して

$$\partial f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z^i} dz^i, \qquad \overline{\partial} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \overline{z}^i} d\overline{z}^i$$

と定義する. ここで ∂f は $(1,0)$-form であり, $\overline{\partial} f$ は $(0,1)$-form である.

[4] この部分に gap がある. この部分を正当化するのに外複素構造 J の話がいる. 私はこの部分の議論が苦手なので, 授業ではやらない.

この時外微分とは $d : A^0(X) \to A^1(X)$ とは

$$df = \partial f + \overline{\partial} f$$

のように対応する

最後の $df = \partial f + \overline{\partial} f$ に関してはきちんと証明するなら概複素構造の部分の話が必要なので省略

一般に関しては次のように定義する．

Definition 2.7. (p, q)-form α が局所的に

$$\alpha = \sum_{|I|=p,\ |J|=q} \alpha_{I\overline{J}}\, dz^I \wedge d\overline{z^J}$$

と書かれているとする．ここで $I = (i_1 < \cdots < i_p)$, $J = (j_1 < \cdots < j_q)$ とし,

$$dz^I = dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p}, \qquad d\overline{z^J} = d\overline{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}^{j_q}$$

と書く．このとき

$$\partial\alpha = \sum_{|I|=p,\ |J|=q} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{I\overline{J}}}{\partial z^i} dz^i \wedge dz^I \wedge d\overline{z^J} \in A^{p+1,q}(X)$$

$$\overline{\partial}\alpha = \sum_{|I|=p,\ |J|=q} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{I\overline{J}}}{\partial \overline{z}^i} d\overline{z}^i \wedge dz^I \wedge d\overline{z^J} \in A^{p,q+1}(X)$$

である．この作用素は global に定まり

$$\partial\colon A^{p,q}(X) \longrightarrow A^{p+1,q}(X), \qquad \overline{\partial}\colon A^{p,q}(X) \longrightarrow A^{p,q+1}(X)$$

を定める．

X を複素多様体とする．C^∞ 級微分形式全体には外微分

$$d\colon A^k(X) \longrightarrow A^{k+1}(X)$$

が定まる．複素多様体上では微分形式を (p, q)-型に分解できるので,

$$A^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}(X)$$

と書ける．この分解に関して, 外微分 d は

$$d = \partial + \overline{\partial}$$

$$\partial : \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}(X) \to \bigoplus_{p+q=k} A^{p+1,q}(X) \quad \overline{\partial} : \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}(X) \to \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q+1}(X)$$

と分解される．つまり, ∂ は正則方向の次数を 1 つ上げる微分作用素であり, $\overline{\partial}$ は反正則方向の次数を 1 つ上げる微分作用素である．

外微分は $d^2 = 0$ を満たす．$d = \partial + \overline{\partial}$ と型の分解を用いると,

$$\partial^2 = 0, \qquad \overline{\partial}^2 = 0, \qquad \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$$

が従う．特に $\overline{\partial}$ は

$$A^{p,0}(X) \xrightarrow{\overline{\partial}} A^{p,1}(X) \xrightarrow{\overline{\partial}} A^{p,2}(X) \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots$$

という複体を定める．また, $f \in C^\infty(U)$ が正則であることは

$$\overline{\partial} f = 0$$

と同値である．この意味で, $\overline{\partial}$ は正則性を測る基本的な微分作用素である．

2.1.3 E-値微分形式

Definition 2.8 (E-値微分形式)**.** X を n 次元複素多様体とし, $E \to X$ を複素ベクトル束とする．E-値 (p,q)-form の空間を

$$A^{p,q}(E) := C^\infty(X, \Omega_X^{p,q} \otimes E)$$

と定義する．局所的に書けば, E の local frame を $(e_1, \ldots, e_r)$ とすると, $\varphi \in A^{p,q}(E)$ は

$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^{r} \varphi^\alpha \otimes e_\alpha, \qquad \varphi^\alpha \in A^{p,q}(U)$$

と書ける．さらに局所座標 $(z^1, \ldots, z^n)$ を用いると,

$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \varphi^\alpha_{I\overline{J}}\, dz^I \wedge d\overline{z^J} \otimes e_\alpha$$

と書ける．ここで $\varphi^{\alpha}_{I\overline{J}}$ は C^{∞} 級関数である．
また X 上の E に値をもつ k-form の空間を

$$A^k(E) = \bigoplus_{p+q=k} A^{p,q}(E)$$

と定義する．
微分形式の時と同様に $\varphi \in A^{p,q}(E)$ について

$$\partial\varphi = \sum_{\alpha=1}^{r} \partial\varphi^{\alpha} \otimes e_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{r} \left(\sum_{|I|=p,\ |J|=q} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi^{\alpha}_{I\overline{J}}}{\partial z^i} dz^i \wedge dz^I \wedge d\overline{z^J} \right) \otimes e_{\alpha} \in A^{p+1,q}(E)$$

$$\overline{\partial}\varphi = \sum_{\alpha=1}^{r} \overline{\partial}\varphi^{\alpha} \otimes e_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{r} \left(\sum_{|I|=p,\ |J|=q} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi^{\alpha}_{I\overline{J}}}{\partial \overline{z}^i} d\overline{z}^i \wedge dz^I \wedge d\overline{z^J} \right) \otimes e_{\alpha} \in A^{p,q+1}(E)$$

である．この作用素は global に定まり

$$\partial \colon A^{p,q}(E) \longrightarrow A^{p+1,q}(E), \qquad \overline{\partial} \colon A^{p,q}(E) \longrightarrow A^{p,q+1}(E)$$

を定める．そして

$$d := \partial + \overline{\partial} \colon A^k(E) \longrightarrow A^{k+1}(E)$$

と定める．∂ は正則方向の次数を 1 つ上げる微分作用素であり，$\overline{\partial}$ は反正則方向の次数を 1 つ上げる微分作用素である．

例えば $p = q = 1$ の時，$\varphi \in A^{p,q}(E)$ は局所座標 $(U, z_U^1, \ldots, z_U^n)$ ，E の local frame を $(e_1, \ldots, e_r)$ として，U 上で

$$\varphi|_U = \sum_{\alpha=1}^{r} \underbrace{\varphi^{\alpha}}_{\in A^{1,1}(X)} \otimes e_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{r} \left(\sum_{i,j=1}^{n} {\varphi_{U,i\overline{j}}}^{\alpha} dz_U^i \wedge d\overline{z}_U^j \right) \otimes e_{\alpha}$$

と書ける．ここで ${\varphi_{U,i\overline{j}}}^{\alpha}$ は U 上の C^{∞} 級関数であり，しかるべき貼り合わせ条件を満たす．

2.2　接続と曲率の定義

2.2.1　接続

Definition 2.9 (接続)**.** C^∞ 級の複素ベクトル束 E 上の接続とは, $\mathbb{C}$-線形写像

$$D\colon A^0(E) \longrightarrow A^1(E)$$

であって, 任意の $f \in A^0(X)$ と $\sigma \in A^0(E)$ に対して Leibniz 則

$$D(f\sigma) = df \otimes \sigma + fD\sigma$$

を満たすものをいう.

Example 2.10. E が自明束 $\mathcal{O}_X$ のとき,

$$d\colon A^0(\mathcal{O}_X) = A^0(X) \longrightarrow A^1(\mathcal{O}_X) = A^1(X), \quad f \mapsto df$$

が接続を与える.

次に, 接続を local frame と変換関数を用いて書く. 開被覆 $\mathfrak{U} = \{U\}$ をとる. U 上で E の local frame を $\mathbf{e}_U = (e_{U,1}, \ldots, e_{U,r})$ とし, 重なり $U \cap V$ 上で

$$\mathbf{e}_V = \mathbf{e}_U T_{UV}$$

とする. ここで $T_{UV}\colon U \cap V \longrightarrow GL(r, \mathbb{C})$ は E の変換関数である. すると

$$D(e_{U,\alpha}) = \underbrace{De_{U,\alpha}}_{\in A^1(E)} = \sum_{\beta=1}^{r} {A_U}^\beta_\alpha e_{U,\beta} \tag{2.2}$$

となる 1 次微分形式たち ${A_U}^\beta_\alpha$ がある.

Definition 2.11. U 上の $r \times r$ 行列値 1-form

$$A_U := \begin{pmatrix} {A_U}^1{}_1 & {A_U}^1{}_2 & \cdots & {A_U}^1{}_r \\ {A_U}^2{}_1 & {A_U}^2{}_2 & \cdots & {A_U}^2{}_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {A_U}^r{}_1 & {A_U}^r{}_2 & \cdots & {A_U}^r{}_r \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

を接続 D の $\mathbf{e}_U$ に関する connection form という.

定義から $D(e_{U,\alpha}) = \sum_{\beta=1}^{r} {A_U}^{\beta}_{\alpha} e_{U,\beta}$ であり, 行列でかくと

$$
D\mathbf{e}_U = \mathbf{e}_U A_U \Leftrightarrow (De_{U,1}, \ldots, De_{U,r}) = (e_{U,1}, \ldots, e_{U,r}) \begin{pmatrix} {A_U}^1{}_1 & {A_U}^1{}_2 & \cdots & {A_U}^1{}_r \\ {A_U}^2{}_1 & {A_U}^2{}_2 & \cdots & {A_U}^2{}_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {A_U}^r{}_1 & {A_U}^r{}_2 & \cdots & {A_U}^r{}_r \end{pmatrix} \tag{2.4}
$$

が成り立つ.

さて, section $\sigma \in A^0(E|_U)$ を

$$
\sigma = \mathbf{e}_U u_U = \sum_{\alpha=1}^{r} u^\alpha e_{U,\alpha}
$$

と書くと,

$$
D\sigma \underset{\text{Leibniz 則}}{=} \mathbf{e}_U(du_U + A_U u_U) = \sum_{\alpha=1}^{r} \left(du^\alpha + \sum_{\beta=1}^{r} u^\beta {A_U}^\alpha_\beta \right) e_{U,\alpha}
$$

である. つまり local frame $\mathbf{e}_U$ では,

$$
D = d + A_U : u \mapsto du_U + A_U u_U
$$

と書ける.

重なり $U \cap V$ 上で $\mathbf{e}_V = \mathbf{e}_U T_{UV}$ であることから, connection form は

$$
A_V = T_{UV}^{-1} A_U T_{UV} + T_{UV}^{-1} dT_{UV} \tag{2.5}
$$

と変換する.

計量と同じく次が言える.

Summary 2.12. 接続 D を与えることは, U 上の $r \times r$ 行列値 1-form A_U であって, 貼り合わせ条件 (2.5) を満たすものと対応する.

複素多様体上で $d: A^0(X) \to A^1(X)$ が

$$
d = \partial + \overline{\partial}, \qquad \partial\colon A^{0,0}(X) \longrightarrow A^{1,0}(X), \qquad \overline{\partial}\colon A^{0,0}(X) \longrightarrow A^{0,1}(X)
$$

と分解できる. これと同様に, 接続も型に従って

$$
D = D' + D'', \quad D'\colon A^{0,0}(E) \longrightarrow A^{1,0}(E), \qquad D''\colon A^{0,0}(E) \longrightarrow A^{0,1}(E)
$$

と分解できる. したがって, Leibniz 則を bidegree に従って分解すると,

$$\begin{aligned} D'(\sigma\varphi) &= D'\sigma\wedge\varphi+\sigma\,\partial\varphi, \\ D''(\sigma\varphi) &= D''\sigma\wedge\varphi+\sigma\,\overline{\partial}\varphi \end{aligned} \qquad \sigma\in A^0(E),\ \varphi\in A^0(X)$$

を得る. 型分解

$$A_U = A_U^{1,0}+A_U^{0,1}$$

を用いると,

$$A_V^{1,0} = T_{UV}^{-1}A_U^{1,0}T_{UV}+T_{UV}^{-1}\partial T_{UV}, \qquad A_V^{0,1} = T_{UV}^{-1}A_U^{0,1}T_{UV}+T_{UV}^{-1}\overline{\partial}T_{UV}$$

である. したがって, local frame $\mathbf{e}_U$ に関して

$$D' = \partial + A_U^{1,0}, \qquad D'' = \overline{\partial}+A_U^{0,1}$$

と書ける.

2.2.2 曲率

接続 D は E-値微分形式全体に自然に拡張される. $\sigma\in A^0(E)$, $\varphi\in A^k$ に対して

$$D(\sigma\varphi) := \underbrace{D\sigma}_{\in A^1(E)} \wedge \underbrace{\varphi}_{\in A^k(X)} + \underbrace{\sigma}_{\in A^0(E)}\ \underbrace{d\varphi}_{\in A^{k+1}(X)} = (-1)^k\varphi\wedge D\sigma + d\varphi\sigma \in A^{k+1}(E)$$

と定め, 線形性により

$$D\colon A^k(E)\longrightarrow A^{k+1}(E)$$

を得る.

Definition 2.13 (曲率)**.** End(E)-値 2-form

$$F = D\circ D : A^0(E)\to A^2(E)$$

を D の曲率という.

次に, 接続を local frame と変換関数を用いて書く. 開被覆 $\mathfrak{U}=\{U\}$ とする. U 上で E の local frame を $\mathbf{e}_U=(e_{U,1},\dots,e_{U,r})$ とし, 重なり $U\cap V$ 上で

$$\mathbf{e}_V = \mathbf{e}_U T_{UV}$$

とする．ここで $T_{UV}: U \cap V \longrightarrow GL(r, \mathbb{C})$ は E の変換関数である．すると

$$
\begin{aligned}
F(e_{U,\alpha}) &\underset{\text{定義}}{=} D(De_{U,\alpha}) \underset{(2.2)}{=} D\left(\sum_{\beta=1}^{r} A_{U\alpha}^{\beta} e_{U,\beta}\right) \\
&\underset{\text{定義}}{=} -\sum_{\beta=1}^{r} A_{U\alpha}^{\beta} \wedge \underbrace{De_{U,\beta}}_{=\sum_{\gamma=1}^{r} A_{U\beta}^{\gamma} e_{U,\gamma}} + \sum_{\beta=1}^{r} dA_{U\alpha}^{\beta} e_{U,\beta} \\
&\underset{(2.2)}{=} -\sum_{\beta,\gamma=1}^{r} A_{U\alpha}^{\beta} \wedge A_{U\beta}^{\gamma} e_{U,\gamma} + \sum_{\beta=1}^{r} dA_{U\alpha}^{\beta} e_{U,\beta} \\
&\underset{\text{添え字変更}}{=} \sum_{\beta=1}^{r} \left(-\sum_{\gamma=1}^{r} A_{U\alpha}^{\gamma} \wedge A_{U\gamma}^{\beta} + dA_{U\alpha}^{\beta}\right) e_{U,\beta} \\
&\underset{\text{外積}}{=} \sum_{\beta=1}^{r} \left(\underbrace{\sum_{\gamma=1}^{r} A_{U\gamma}^{\beta} \wedge A_{U\alpha}^{\gamma}}_{=(A\wedge A)_{\alpha}^{\beta}} + dA_{U\alpha}^{\beta}\right) e_{U,\beta} = \sum_{\beta=1}^{r} (dA_U + A_U \wedge A_U)_{\alpha}^{\beta} e_{U,\beta}
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

まとめると以下の補題を得る．

Lemma 2.14. $\mathbf{e}_U$ に関する *curvature form* R_U を

$$F(e_{U,\alpha}) = \sum_{\beta=1}^{r} R_{U\alpha}^{\beta} e_{U,\beta}$$

で定めるとき，R_U は $r \times r$ 行列値 2-*form* であり，

$$R_U = dA_U + A_U \wedge A_U \Leftrightarrow R_{U\alpha}^{\beta} = dA_{U\alpha}^{\beta} + \sum_{\gamma=1}^{r} A_{U\gamma}^{\beta} \wedge A_{U\alpha}^{\gamma}$$

を満たす．

Lemma 2.15. *$F \in C^{\infty}(A^2(\mathrm{End}(E)))$ つまり曲率は $\mathrm{End}(E)$ 値微分 2 形式である．*

Proof. F は U 上で表すと

$$F(e_{U,\alpha}) = \sum_{\beta=1}^{r} R_{U\alpha}^{\beta} e_{U,\beta} \Leftrightarrow F = \sum_{\alpha,\beta} R_{U\alpha}^{\beta} e_U^{*,\alpha} \otimes e_{U,\beta}$$

である．${R_U}^\beta_\alpha$ は U 上の C^∞ 関数である．よって示すべきことは貼り合わせ条件

$$\sum_{\alpha,\beta} {R_V}^\beta_\alpha e_V^{*,\alpha} \otimes e_{V,\beta} = \sum_{\alpha,\beta} {R_U}^\beta_\alpha e_U^{*,\alpha} \otimes e_{U,\beta}$$

を満たすこと，同値的に E の変換関数は T_{UV}^E として

$$\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{r} {T_{UV}}^b_\beta {R_V}^\beta_\alpha (T_{UV}^{-1})^\alpha_a \right) = {R_U}^b_a \Leftrightarrow T_{UV} R_V T_{UV}^{-1} = R_U$$

を満たすことである．$R_U = dA_U + A_U \wedge A_U$ と (2.5) を用いて計算すると

$$R_U = T_{UV} R_V T_{UV}^{-1}$$

が導ける． □

計量と同じく次が言える．

Summary 2.16. 接続 D を与えることは，U 上の $r \times r$ 行列値 1-form A_U であって，貼り合わせ条件 (2.5) を満たすものと対応する．

同様にして

$$D = D' + D'' \quad D' \colon A^{p,q}(E) \longrightarrow A^{p+1,q}(E), \qquad D'' \colon A^{p,q}(E) \longrightarrow A^{p,q+1}(E)$$

と分解できる．したがって，Leibniz 則を bidegree に従って分解すると，

$$\begin{aligned} D'(\sigma\varphi) &= D'\sigma \wedge \varphi + \sigma\, \partial\varphi, \\ D''(\sigma\varphi) &= D''\sigma \wedge \varphi + \sigma\, \overline{\partial}\varphi \end{aligned} \qquad \sigma \in A^0(E),\ \varphi \in A^{p,q}(X)$$

を得る．

型に従って分解すると，

$$R = \underbrace{D' \circ D'}_{A^{0,0}(E) \to A^{2,0}(\mathrm{End}(E))} + \underbrace{(D' \circ D'' + D'' \circ D')}_{A^{0,0}(E) \to A^{1,1}(\mathrm{End}(E))} + \underbrace{D'' \circ D''}_{A^{0,0}(E) \to A^{0,2}(\mathrm{End}(E))}$$

となる．ここで

$$D' \circ D' \in A^{2,0}(\mathrm{End}(E)), \qquad D' \circ D'' + D'' \circ D' \in A^{1,1}(\mathrm{End}(E)), \qquad D'' \circ D'' \in A^{0,2}(\mathrm{End}(E))$$

である．また

$$R_U = R_U^{2,0} + R_U^{1,1} + R_U^{0,2}$$

と分解される.

2.3 Chern 接続・Chern 曲率

ここから正則性が必要になるので, ベクトル束は正則ベクトル束とする.

理由は正則な変換関数と local frame $\mathbf{e}_U$ の存在が下の一つ目の条件に必要だから.

Proposition 2.17 (Chern 接続 の存在と一意性)**.** *$E \to X$ を正則ベクトル束とし, h を E 上の Hermite 計量 とする. このとき次を満たす接続 D_h がただ一つ存在する.*

1. *$D_h = D'_h + D''_h$ と分解するとき*

$$D''_h = \overline{\partial}\colon A^0(E) \to A^{0,1}(E)$$

である. つまり $\sigma \in A^0(E)$ とし,"正則"な local frame $\mathbf{e}_U$ を用いて $\sigma|_U = \mathbf{e}_U u_U$ で与えられるとき

$$D''_h(\mathbf{e}_U u_U) = \mathbf{e}_U(\overline{\partial} u_U)$$

となる.

2. *D_h が h を保存すること, すなわち任意の $\xi, \eta \in A^0(E)$ に対して*

$$d(h(\xi,\eta)) = h(D_h\xi,\eta) + h(\xi, D_h\eta)$$

を満たすことをいう.

この接続を (E,h) の Chern 接続 と呼ぶ.

Proof. 存在証明の概略のみ述べる. h を Hermite 計量 として, h_U を U の表示とする.

$$A_U := {}^t\!\left(\partial h_U \cdot h_U^{-1}\right) \Leftrightarrow \underbrace{{A_U}^{\alpha}{}_{\beta}}_{(1,0)\text{ 微分形式}} = \sum_{\gamma=1}^{r} \underbrace{h^{\overline{\gamma}\alpha}\frac{\partial h_{\beta\overline{\gamma}}}{\partial z^i}}_{=:{A_U}^{\alpha}{}_{\beta,i}} dz^i \tag{2.7}$$

これは行列値の 1 次微分形式である.[5] ここで

$$\partial h_U = \begin{pmatrix} \partial h_{U,1\overline{1}} & \partial h_{U,1\overline{2}} & \cdots & \partial h_{U,1\overline{r}} \\ \partial h_{U,2\overline{1}} & \partial h_{U,2\overline{2}} & \cdots & \partial h_{U,2\overline{r}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial h_{U,r\overline{1}} & \partial h_{U,r\overline{2}} & \cdots & \partial h_{U,r\overline{r}} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

[5] これに関しては転置を取るか取らないか教科書によって表記が微妙に異なる. Demailly の定義 [Dem12] とずれていた気がする.

で定義する. 変換関数を T_{UV} とすると A_U は

$$A_V = T_{UV}^{-1} A_U T_{UV} + T_{UV}^{-1} dT_{UV}$$

と変換することがわかる. よってこのとき $D_h(\mathbf{e}_U u_U) \in A^1(E|_U)$ について

$$D_h(\mathbf{e}_U u_U) := \mathbf{e}_U(du_U + A_U u_U) = \underbrace{\mathbf{e}_U(\partial u_U + A_U u_U)}_{=:D'_h(\mathbf{e}_U u_U)} + \underbrace{\mathbf{e}_U(\overline{\partial} u_U)}_{=D''_h(\mathbf{e}_U u_U)}$$

と定義すればこれは接続になり, これが欲しいものである. □

Definition 2.18. h の Chern 曲率 $F_{E,h}$ を D_h を Chern 接続として

$$F_{E,h} = D_h \circ D_h : A^0(E) \to A^2(E)$$

として定義する.

Lemma 2.19. *h を E の Hermite 計量とする. $F_{E,h} \in A^{1,1}(\mathrm{End}(E))$ であり, local には curvature form は*

$$R_U := \overline{\partial} A_U = \overline{\partial}\left({}^t\left(\partial h_U \cdot h_U^{-1}\right)\right)$$

と書ける. ここで curvature form は

$$F_{E,h}\mathbf{e}_U = \mathbf{e}_U(R_U)$$

となる行列値 $(1,1)$-form である.

Proof. $B_U := \partial h_U \cdot h_U^{-1}$ とおく. $\partial(h_U^{-1}) = -h_U^{-1}(\partial h_U)h_U^{-1}$ を用いれば,

$$\begin{aligned}\partial B_U &= \partial\left(\partial h_U \cdot h_U^{-1}\right) = -\partial h_U \wedge \partial(h_U^{-1}) = -\partial h_U \wedge \left(-h_U^{-1}(\partial h_U)h_U^{-1}\right)\\ &= \partial h_U h_U^{-1} \wedge \partial h_U h_U^{-1} = B_U \wedge B_U.\end{aligned}$$

よって, $A_U = {}^tB_U$ であることを用いれば, ${}^t(B_U \wedge B_U) = -{}^tB_U \wedge {}^tB_U$ より

$$\partial A_U = -A_U \wedge A_U.$$

以上より

$$R_U \underset{\text{Lem. 2.14}}{=} dA_U + A_U \wedge A_U = \partial A_U + \overline{\partial} A_U + A_U \wedge A_U = \overline{\partial} A_U.$$

□

Remark 2.20. curvature form R_U は $F_{E,h}$ を local に見たものだが, 今後同一視されることもある.

局所正則座標 $(z^1,\dots,z^n)$ とする. E の local frame を $\mathbf{e}=(e_1,\dots,e_r)$ とすると, E^* の frame は $\mathbf{e}^*=(e^{*,1},\dots,e^{*,r})$ となる.

$$\underbrace{{A_U}^{\alpha}{}_{\beta}}_{(1,0)\ \text{微分形式}} = \sum_{\gamma=1}^{r} \underbrace{h^{\overline{\gamma}\alpha}\frac{\partial h_{\beta\overline{\gamma}}}{\partial z^i}}_{=:{A_U}^{\alpha}{}_{\beta,i}} dz^i \quad \text{かつ} \quad R_U = \overline{\partial} A_U \tag{2.9}$$

から

$$F_{E,h} = \sum_{\alpha,\beta} \underbrace{R^{\alpha}_{\beta}}_{(1,1)\ \text{微分形式}} \otimes e_\beta \otimes e^{*,\alpha} = \sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j} \underbrace{R^{\alpha}_{\beta i\overline{j}}}_{\text{複素数}} dz^i \wedge d\overline{z^j} \otimes e_\beta \otimes e^{*,\alpha}$$

とかいた時

$$R^{\alpha}{}_{\beta} \underset{R_U=\overline{\partial}A_U}{=} \overline{\partial} A^{\alpha}{}_{\beta} = -\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z^j}} A^{\alpha}{}_{\beta,i}\right) dz^i\wedge d\overline{z^j} = -\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{r}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z^j}}\left(h^{\overline{\gamma}\alpha}\frac{\partial h_{\beta\overline{\gamma}}}{\partial z^i}\right)\right) dz^i\wedge d\overline{z^j} \tag{2.10}$$

今

$$R_{\beta\overline{\gamma}i\overline{j}} := \sum_{\alpha} h_{\overline{\gamma}\alpha} R^{\alpha}_{\beta i\overline{j}}$$

と定義する. ここでまた $H=(h_{\alpha\overline{\beta}})$, $H^{-1}=(h^{\overline{\beta}\alpha})$ とする.

$$R_{\beta\overline{\gamma}i\overline{j}} = -\frac{\partial}{\partial\overline{z^j}}\frac{\partial}{\partial z^i} h_{\beta\overline{\gamma}} + \sum_{\delta,\epsilon} h^{\overline{\epsilon}\delta}\left(\frac{\partial h_{\beta\overline{\epsilon}}}{\partial z^i}\right)\left(\frac{\partial h_{\delta\overline{\gamma}}}{\partial\overline{z^j}}\right) \tag{2.11}$$

である.

Remark 2.21. 接続や曲率がわからない場合でも, 今後の議論に差し支えない. と言うのも

$$R_{\beta\overline{\gamma}i\overline{j}} = -\frac{\partial}{\partial\overline{z^j}}\frac{\partial}{\partial z^i} h_{\beta\overline{\gamma}} + \sum_{\delta,\epsilon} h^{\overline{\epsilon}\delta}\left(\frac{\partial h_{\beta\overline{\epsilon}}}{\partial z^i}\right)\left(\frac{\partial h_{\delta\overline{\gamma}}}{\partial\overline{z^j}}\right)$$

を定義にしてしまって

$$R^{\alpha}_{\beta i\overline{j}} := h^{\overline{\gamma}\alpha} R_{\beta\overline{\gamma}i\overline{j}}$$

と定義し, Chern 曲率 $F_{E,h}$ を $\mathrm{End}(E)$ 値 $(1,1)$-form で

$$F_{E,h} = \sum_{\alpha,\beta}\sum_{i,j} R^{\alpha}_{\beta i\overline{j}} dz^i\wedge d\overline{z^j} \otimes e_\beta \otimes e^{*,\alpha}$$

とかけるものと定義すれば良い. 正直曲率はよく使うが接続はあんまり使わないので, これでも事足りる. (というか正直この授業をするまで接続はあんまり理解してなかった). なお Griffith positivity などは $R_{\beta\overline{\gamma}i\overline{j}}$ で定義する.

Lemma 2.22.

$$F_{E,h} = \sum_{\alpha,\beta} R^\alpha_\beta e_\beta \otimes e^{*,\alpha} = \sum_{\alpha,\beta} \sum_{i,j} R^\alpha_{\beta i \bar{j}}\, dz^i \wedge d\overline{z^j} e_\beta \otimes e^{*,\alpha}$$

について, $(1,1)$-*form* を

$$\mathrm{tr}(F_{E,h}) := \underbrace{\sum_{\alpha=1}^r R^\alpha_\alpha}_{=\delta^\beta_\alpha R^\alpha_\beta} = \sum_{\alpha=1}^r \sum_{i,j} R^\alpha_{\alpha i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\overline{z^j}$$

と定義するとき,

$$\mathrm{tr}(F_{E,h}) = \sum_{i,j} \left(-\frac{\partial}{\partial z^i} \frac{\partial}{\partial \overline{z^j}} \log\det\left(h_{\alpha\bar{\beta}}\right)\right) dz^i \wedge d\overline{z^j}$$

特に直線束 L の *Hermite* 計量の h の *Chern* 曲率 $F_{L,h}$ は, *local* に h を $\mathbb{R}_{>0}$ 値の C^∞ 級関数と見れば,

$$F_{L,h} = \sum_{i,j} \left(-\frac{\partial}{\partial z^i} \frac{\partial}{\partial \overline{z^j}} \log h \right) dz^i \wedge d\overline{z^j} = -\partial\overline{\partial} \log h$$

Proof. 次の公式が成り立つ.

Claim 2.23. 以下が成り立つ

$$\frac{\partial}{\partial z^i} \log\det\left(h_{\alpha\bar{\beta}}\right) = \sum_{\alpha,\beta=1}^r h^{\bar{\beta}\alpha} \frac{\partial h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial z^i}$$

これを用いると

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(F_{E,h}) \quad := \quad \sum_{\alpha=1}^r R^\alpha_\alpha \underset{(2.10)}{=} & -\sum_{i,j=1}^n \sum_{\gamma,\alpha=1}^r \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z^j}} \left(h^{\bar{\gamma}\alpha} \frac{\partial h_{\alpha\bar{\gamma}}}{\partial z^i} \right) \right) dz^i \wedge d\overline{z^j} \\
\underset{\text{Claim. } 2.23}{=} & -\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z^j}} \left(\frac{\partial}{\partial z^i} \log\det\left(h_{\alpha\bar{\beta}}\right) \right) \right) dz^i \wedge d\overline{z^j} \\
= & -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \overline{z^j} \partial z^i} \log\det\left(h_{\alpha\bar{\beta}}\right) dz^i \wedge d\overline{z^j}.
\end{aligned}$$

□

Proof of Claim 2.23. 行列式を余因子を用いて微分する．$C_{\alpha\overline{\beta}}$ を $h_{\alpha\overline{\beta}}$ に対応する余因子とする．すると

$$h^{-1} = \frac{1}{\det h} {}^t(C_{\alpha\overline{\beta}}) \Rightarrow h^{\overline{\beta}\alpha} = \frac{C_{\alpha\overline{\beta}}}{\det h}$$

今 $\det h = \det(R_1, \dots, R_r)$ とおいて微分すると

$$\frac{\partial}{\partial z^i}(\det h) \underset{\det \text{ の多重線形性}}{=} \sum_{\alpha=1}^{r} \det\left(R_1, \dots, \frac{\partial}{\partial z^i}R_\alpha, \dots, R_r\right) \underset{\alpha \text{ 列で余因子展開}}{=} \sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta=1}^{r} C_{\alpha\overline{\beta}} \frac{\partial h_{\alpha\overline{\beta}}}{\partial z^i}$$

以上より

$$\frac{\partial}{\partial z^i} \log\det h = \frac{1}{\det h}\frac{\partial}{\partial z^i}(\det h) = \frac{1}{\det h}\sum_{\alpha,\beta=1}^{r} C_{\alpha\overline{\beta}}\frac{\partial h_{\alpha\overline{\beta}}}{\partial z^i} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} h^{\overline{\beta}\alpha}\frac{\partial h_{\alpha\overline{\beta}}}{\partial z^i}$$

□

2.4 双対束, 直和束などの Chern 接続と Chern 曲率

Definition 2.24 (双対束, 直和束, テンソル積束, 複素共役束, 自己準同型束)**.** X を複素多様体とし, $E_1 \to X$, $E_2 \to X$ をそれぞれ rank r, s の正則ベクトル束とする．E_1, E_2 の正則な local frame を

$$\mathbf{e}_U = (e_{U,1}, \dots, e_{U,r}), \qquad \mathbf{f}_U = (f_{U,1}, \dots, f_{U,s})$$

とし, h^{E_1}, h^{E_2} を計量とする．

1. 双対束． E_1 の双対束 $E_1^* \to X$ には, local frame $\mathbf{e}_U^* = (e_U^1, \dots, e_U^r)$．ただし $e_U^\alpha(e_{U,\beta}) = \delta_\beta^\alpha$ となるので, E_1^* には

$$h^*(e_U^\alpha, e_U^\beta) = h^{-1}(e_U^\alpha, e_U^\beta) = h^{\overline{\beta}\alpha}$$

という計量が入る．h の局所表示を

$$h_U = (h_{U,\alpha\overline{\beta}}), \qquad h_{U,\alpha\overline{\beta}} := h(e_{U,\alpha}, e_{U,\beta})$$

とすると

$$H_U^*(e_U^\alpha, e_U^\beta) = h^{\overline{\beta}\alpha}$$

という計量が入る．接続などは以下のようになる．

- connection form $A_U^* = -{}^tA_U$.
- curvature form $R_U^* = -\overline{\partial}({}^tA_U) = -{}^t(\overline{\partial}A_U) = -{}^tR_U$.

2. 直和束. E_1 と E_2 の直和束 $E_1 \oplus E_2$ の local frame は $(\mathbf{e}_U, \mathbf{f}_U) = (e_{U,1}, \ldots, e_{U,r}, f_{U,1}, \ldots, f_{U,s})$ となるので, $E_1 \oplus E_2$ には

$$h^{E_1 \oplus E_2} := \begin{pmatrix} h^{E_1} & 0 \\ 0 & h^{E_2} \end{pmatrix}$$

という計量が入る. 接続などは以下のようになる.

   - connection form $A^{E_1 \oplus E_2} := \begin{pmatrix} A^{E_1} & 0 \\ 0 & A^{E_2} \end{pmatrix}$. ちなみに Chern 接続 は $D^{E_1 \oplus E_2} := \begin{pmatrix} D^{E_1} & 0 \\ 0 & D^{E_2} \end{pmatrix}$ となる.
   - curvature form $R^{E_1 \oplus E_2} := \begin{pmatrix} R^{E_1} & 0 \\ 0 & R^{E_2} \end{pmatrix}$. ちなみに Chern 曲率 は $F^{E_1 \oplus E_2} := \begin{pmatrix} F^{E_1} & 0 \\ 0 & F^{E_2} \end{pmatrix}$ となる.

3. テンソル束. E_1 と E_2 のテンソル積 $E_1 \otimes E_2$ の local frame は $\mathbf{e}_U \otimes \mathbf{f}_U = (e_{U,\alpha} \otimes f_{U,\gamma})_{1 \leq \alpha \leq r,\ 1 \leq \gamma \leq s}$ となるので, $E_1 \otimes E_2$ には

$$h^{E_1 \otimes E_2}(e_{U,\alpha} \otimes f_{U,\gamma}, e_{U,\beta} \otimes f_{U,\delta}) = h^{E_1}(e_{U,\alpha}, e_{U,\beta}) h^{E_2}(f_{U,\gamma}, f_{U,\delta})$$

という計量が入る. 接続などは以下のようになる.

   - connection form $A_{E_1} \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes A_{E_2}$. ちなみに Chern 接続 は $D_{E_1 \otimes E_2} = D_{E_1} \otimes \mathrm{Id}_{E_2} + \mathrm{Id}_{E_1} \otimes D_{E_2}$ となる.
   - curvature form $R_{E_1} \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes R_{E_2}$. ちなみに Chern 曲率 は $F_{E_1 \otimes E_2} = F_{E_1} \otimes \mathrm{Id}_{E_2} + \mathrm{Id}_{E_1} \otimes F_{E_2}$.

4. 外積束. E_1 の k 次外積束 $\bigwedge^k E_1 \to X$ は local frame

$$\bigwedge^k \mathbf{e}_U = (e_{U,\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{U,\alpha_k})_{1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leq r}$$

をもつ. 多重添字 $I = (\alpha_1 < \cdots < \alpha_k)$ に対して

$$e_{U,I} := e_{U,\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{U,\alpha_k}$$

と書く. $h_U = (h_{U,\alpha\overline{\beta}})$, $h_{U,\alpha\overline{\beta}} := h(e_{U,\alpha}, e_{U,\beta})$ とすると, $\bigwedge^k h$ の行列 $H_U^{\wedge k}$ は

$$(H_U^{\wedge k})_{I\overline{J}} = (\bigwedge^k h)(e_{U,I}, e_{U,J}) = \det\bigl(h_{U,\alpha_a\overline{\beta}_b}\bigr)_{1 \leq a,b \leq k}$$

で与えられる．つまり，外積束の計量は，元の計量行列 h_U の k 次小行列式を成分にもつ Hermite 行列である．接続などは複雑なので省略する．

5. **行列式束．** E_1 の r 次外積束 $\det E_1 \to X$ の local frame は

$$\bigwedge^r \mathbf{e}_U = (e_{U,1} \wedge \cdots \wedge e_{U,r})$$

となるので，$\det E_1$ には

$$h^{\det E_1}(e_{U,1} \wedge \cdots \wedge e_{U,r}, e_{U,1} \wedge \cdots \wedge e_{U,r}) = \det\big(h_{U,\alpha\overline{\beta}}\big)_{1\leq\alpha,\beta\leq r}$$

という計量が入る．接続などは以下のようになる．

- connection form
$$A_{\det E_1} = \mathrm{tr}\, A := \sum_\alpha A^\alpha_\alpha.$$
- curvature form
$$R_{\det E_1} = \mathrm{tr}\, R = \sum_\alpha R^\alpha_\alpha.$$

補題 2.22 より

$$R_{\det E_1} = \sum_{i,j} R_{i\overline{j}}\, dz^i \wedge d\overline{z^j} \quad R_{i\overline{j}} = -\frac{\partial}{\partial z^i}\frac{\partial}{\partial \overline{z^j}} \log\det\Big(h_{\alpha\overline{\beta}}\Big)$$

と書ける．

6. **複素共役ベクトル束．** E_1 の複素共役ベクトル束 $\overline{E_1}$ には local frame

$$\overline{\mathbf{e}}_U = (\overline{e}_{U,1}, \ldots, \overline{e}_{U,r})$$

があるので，$\overline{E_1}$ には

$$h^{\overline{E_1}}(\overline{e}_{U,\alpha}, \overline{e}_{U,\beta}) = \overline{h_{U,\alpha\overline{\beta}}} = h_{U,\beta\overline{\alpha}}$$

という計量が入る．接続などは以下のようになる．

- connection form $A_{\overline{E_1}} = \overline{A}$.
- curvature form $R_{\overline{E_1}} = \overline{R}$.

7. **自己準同型束．** E_1 の自己準同型束 $\mathrm{End}(E_1) = E_1 \otimes E_1^*$ には local frame

$$\mathbf{e}_U \otimes \mathbf{e}_U^* = (e_{U,\alpha} \otimes e_U^\beta)_{1\leq\alpha,\beta\leq r}$$

があるので, $\mathrm{End}(E_1) = E_1 \otimes E_1^*$ には

$$h^{\mathrm{End}(E_1)}(e_{U,\alpha} \otimes e_U^{\gamma}, e_{U,\beta} \otimes e_U^{\delta}) = h^{E_1}(e_{U,\alpha}, e_{U,\beta}) h^{E_1^*}(e_U^{\gamma}, e_U^{\delta}) = h_{U,\alpha\overline{\beta}} h^{\overline{\delta}\gamma}$$

という計量が入る. 接続などは以下のようになる.

- connection form $A_{\mathrm{End}(E_1)} = A_{E_1} \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes A_{E_1^*} = A_{E_1} \otimes \mathrm{Id} - \mathrm{Id} \otimes {}^t A_{E_1}$.
- curvature form $R_{\mathrm{End}(E_1)} = R_{E_1} \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes R_{E_1^*} = R_{E_1} \otimes \mathrm{Id} - \mathrm{Id} \otimes {}^t R_{E_1}$.

8. 引き戻し **(Pull-back).** $f : Y \to X$ を C^∞ 級写像とする. E_1 の引き戻し $f^* E_1 \to Y$ には $f^{-1}(U)$ 上の local frame

$$f^* \mathbf{e}_U = (f^* e_{U,1}, \ldots, f^* e_{U,r})$$

があるので, $f^*(E_1)$ には

$$h^{f^*}(f^* e_{U,\alpha}, f^* e_{U,\beta}) = f^*(h^{E_1}(e_{U,\alpha}, e_{U,\beta})) := h^{E_1}(e_{U,\alpha}, e_{U,\beta}) \circ f$$

という計量が入る. 接続などは以下のようになる.

- connection form $A_{f^*(E_1)} = f^* A_{E_1}$. ちなみに Chern connection $D_{f^*(E_1)} = f^* D_{E_1}$
- curvature form $R_{f^*(E_1)} = f^* R_{E_1}$. ちなみに Chern 曲率 $F_{f^*(E_1)} = f^* F_{E_1}$.

2.5 Hermite 計量と Kähler 計量

Definition 2.25 (Hermite 計量と Kähler 計量)**.** X を n 次元複素多様体とし, T_X を正則接ベクトル束とする. X の Hermite 計量 g を T_X の Hermite 計量 h と定義する.
つまり $(U, z_U^1, \ldots, z_U^n)$ について local frame を

$$\mathbf{e}_U = \left(\frac{\partial}{\partial z_U^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_U^n} \right)$$

とったとき,

$$g_{i\overline{j}} = h\left(\frac{\partial}{\partial z_U^i}, \frac{\partial}{\partial z_U^j} \right)$$

とする.

X 上の Hermite 計量 h に対して, それに付随する実 $(1,1)$-form を

$$\omega = \sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^{n} g_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\overline{z^j}$$

と定める. この ω を h の Hermitian form と呼ぶ.
Hermite 計量 h が Kähler 計量 であるとは,

$$d\omega = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g_{j\bar{k}}}{\partial z^i} = \frac{\partial g_{i\bar{k}}}{\partial z^j}$$

を満たすことをいう. このとき ω を Kähler form と呼び, (X,ω) または (X,h) を Kähler 多様体 と呼ぶ.

Remark 2.26. X の計量と見るときは g と書き, T_X の Hermite 計量 と見るときは h を使うことが多い. もちろん $g = h$ である.

局所正則座標 $(U, z_U^1, \ldots, z_U^n)$, $(V, z_V^1, \ldots, z_V^n)$ に対して local frame

$$\mathbf{e}_U = \left(\frac{\partial}{\partial z_U^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_U^n} \right), \qquad \mathbf{e}_V = \left(\frac{\partial}{\partial z_V^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_V^n} \right)$$

とすると, $\mathbf{e}_V = \mathbf{e}_U T_{UV}$ では,

$$T_{UV} = \left(\frac{\partial z_U^i}{\partial z_V^j} \right)_{1 \le i,j \le n}$$

である. したがって, $h_U = (h_{U,i\bar{j}})$, $h_V = (h_{V,i\bar{j}})$ は

$$h_V = {}^t T_{UV}\, h_U\, \overline{T_{UV}}$$

を満たす.

局所正則座標 $(U, z^1, \ldots, z^n)$ とする. このときの (T_X, g) の Chern 接続, Chern 曲率 は以下のようになる.

- Chern 接続. $G = (g_{i\bar{j}})$, $G^{-1} = (g^{\bar{j}i})$ とおくと,

$${}^t A = (\partial G) G^{-1}$$

  である. 成分で書けば

$$A_j^i = \sum_{l=1}^{n} g^{\bar{l}i}\, \partial g_{j\bar{l}} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{kj}^i\, dz^k \quad \text{where} \quad \Gamma_{kj}^i = \sum_{l=1}^{n} g^{\bar{l}i} \frac{\partial g_{j\bar{l}}}{\partial z^k}.$$

- D_h の曲率を $\Theta_h := D_h \circ D_h \in A^{1,1}(\mathrm{End}(T_X))$ と書く. T_X の Chern 曲率 の成分表示では

$$R^i_j = \sum_{k,l=1}^n R^i_{jk\bar{l}}\, dz^k \wedge d\overline{z^l} = \sum_{k,l=1}^n \left(-\frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial \overline{z^l}} \right) dz^k \wedge d\overline{z^l} \quad \text{where} \quad R^i_{jk\bar{l}} = -\frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial \overline{z^l}}$$

と書く.

- $$R_{jk\bar{l}\overline{m}} := \sum_i g_{i\overline{m}} R^i_{jk\bar{l}}$$

とおくと,

$$R_{jk\bar{l}\overline{m}} = -\partial_{\bar{l}} \partial_k g_{j\overline{m}} + \sum_{a,b=1}^n g^{\bar{b}a}\, \partial_k g_{j\bar{b}}\, \partial_{\bar{l}} g_{a\overline{m}}.$$

である.[6] ただし $\partial_i := \frac{\partial}{\partial z^i}, \partial_{\bar{j}} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}$ と略記する.

次の Corollary はその後の補足の Corollary である.

Corollary 2.27 (Kähler 曲率の対称性)**.** h が *Kähler* 計量 であるとき,

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = R_{k\bar{j}i\bar{l}} = R_{i\bar{l}k\bar{j}}$$

Remark 2.28 (Riemann 幾何の Riemann 曲率との対応). 微分幾何勢が見ると Chern 曲率は Riemann curvature tensor に似ている. 実は Kähler 計量の場合は

$$\text{Chern 曲率} = \text{Riemann 曲率}$$

になる.[7]

Definition 2.29 (Levi-Civita 接続 と Riemann curvature tensor)*.* h を T_X の Hermite 計量 とする. h の実部は X の実接束 $T_{X,\mathbb{R}}$ 上の Riemannian 計量

$$g_{\mathbb{R}} := \mathrm{Re}\, h$$

を定める. この Riemannian 計量 $g_{\mathbb{R}}$ に対して, Levi-Civita 接続 とは, $T_{X,\mathbb{R}}$ 上の接続 ∇ であって,

$$\nabla g_{\mathbb{R}} = 0$$

[6] 実はこの定義も 80 年代の定義 (例えば Siu-Yau[SY80] など) と異なっている. 最近の人はこの定義だが, それについて 10 年前に二木先生の授業を受けた際に何か言っていた気がする.

[7] この辺りは授業でもさらっというだけである. なので chatGPT に書いていただいた文章をそのままにしておく.

かつ torsion-free, すなわち任意の実ベクトル場 U, V に対して

$$\nabla_U V - \nabla_V U = [U, V]$$

を満たすものである．Levi-Civita 接続 は一意的に存在する．その Riemann curvature tensor を

$$R^{\nabla}(U, V)W := \nabla_U \nabla_V W - \nabla_V \nabla_U W - \nabla_{[U,V]} W$$

で定義する．また

$$R^{\nabla}(U, V, W, Z) := g_{\mathbb{R}}(R^{\nabla}(U, V)W, Z)$$

とも書く．

Proposition 2.30 (Kähler 計量における Chern 曲率と Riemann 曲率). *h を X 上の Kähler 計量 とする．このとき h から定まる Levi-Civita 接続 ∇ を複素化し, $T_{X,\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T_X \oplus \overline{T_X}$ に拡張すると, ∇ は T_X を保つ.*
さらに, T_X 上に誘導される接続は T_X の Chern 接続 D_h と一致する.
したがって, Kähler 計量の場合には, Riemann curvature tensor の $(1,0)$-接ベクトル方向の成分は Chern 曲率 と一致する．具体的には,

$$R^{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial \overline{z^j}}\right)\frac{\partial}{\partial z^k} = \sum_l R^l_{k i \bar{j}} \frac{\partial}{\partial z^l}$$

と書ける.

なので

$$\text{Chern 曲率} = \text{Riemann 曲率}$$

である．私は Riemann 幾何学を全然知らないので, Levi-Civita 接続などは全く知らない．(Riemann 幾何学的にはこっちの方がわかりやすいらしい) 基本的に Kähler 多様体しか扱わないので, Chern 接続と同一視して理解している．

2.6 射影空間と Kähler 計量

この節では以下を示す．

Corollary 2.31. *$\mathbb{CP}^n$ は Kähler 多様体．特に射影複素多様体 ($\mathbb{CP}^n$ の複素部分多様体) は Kähler 多様体.*

以下その理由を書く．[8]

Definition 2.32 (複素射影空間)**.** 複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ とは，$\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ に同値関係

$$(Z_0, \dots, Z_n) \sim (\lambda Z_0, \dots, \lambda Z_n) \qquad (\lambda \in \mathbb{C}^*)$$

を入れて得られる商空間

$$\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$$

のことである．点は同次座標 $[Z_0 : \cdots : Z_n]$ で表す．ここで $[Z_0 : \cdots : Z_n]$ は，$(Z_0, \dots, Z_n)$ が張る $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の複素直線を表している．

標準開集合を

$$U_i := \{[Z_0 : \cdots : Z_n] \in \mathbb{CP}^n \mid Z_i \neq 0\}$$

で定める．例えば U_0 上では

$$z_j = \frac{Z_j}{Z_0} \qquad (j = 1, \dots, n)$$

が局所正則座標を与える．したがって

$$[Z_0 : \cdots : Z_n] = [1 : z_1 : \cdots : z_n]$$

と書ける．このような標準開集合によって $\mathbb{CP}^n$ は n 次元複素多様体になる．

Definition 2.33 (Fubini–Study 形式)**.** $\mathbb{CP}^n$ 上の Fubini–Study 形式とは，U_0 上で

$$\omega_{\mathrm{FS}} = \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\log\bigl(1 + |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2\bigr)$$

と局所的に定義される実 $(1,1)$-形式である．より一般に U_i 上では，$Z_i \neq 0$ として

$$\omega_{\mathrm{FS}} = \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}\log\left(\frac{|Z_0|^2 + \cdots + |Z_n|^2}{|Z_i|^2}\right)$$

で与えられる．

この定義が座標の取り方によらず貼り合うことを確認する．$U_i \cap U_j$ 上では

$$\log\left(\frac{|Z_0|^2 + \cdots + |Z_n|^2}{|Z_i|^2}\right) - \log\left(\frac{|Z_0|^2 + \cdots + |Z_n|^2}{|Z_j|^2}\right) = \log\left|\frac{Z_j}{Z_i}\right|^2$$

[8] この辺りは授業でもさらっというだけである．なので chatGPT に書いていただいた文章をそのままにしておく．

である．右辺は

$$\log\left|\frac{Z_j}{Z_i}\right|^2 = \log\frac{Z_j}{Z_i} + \log\overline{\frac{Z_j}{Z_i}}$$

という形をしているので,

$$\partial\overline{\partial}\log\left|\frac{Z_j}{Z_i}\right|^2 = 0$$

である．したがって各標準開集合上で定義した $(1,1)$-形式は重なりで一致し, $\mathbb{CP}^n$ 上の大域的な $(1,1)$-形式を定める.

局所座標 $z=(z_1,\dots,z_n)$ を用いて

$$\rho = 1+\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2$$

とおくと,

$$\omega_{\mathrm{FS}} = \sqrt{-1}\sum_{i,j=1}^{n} g_{i\bar{j}}\,dz^i\wedge d\overline{z^j}$$

と書ける．ここで

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2}{\partial z^i\partial\overline{z^j}}\log\rho = \frac{\rho\delta_{ij}-\overline{z}_iz_j}{\rho^2}$$

である．すなわち

$$(g_{i\bar{j}}) = \frac{1}{\rho}I_n - \frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix}\overline{z}_1\\ \vdots\\ \overline{z}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1 & \cdots & z_n\end{pmatrix}.$$

これが Fubini–Study 計量である.

Proposition 2.34. *Fubini–Study* 形式 ω_{FS} は $\mathbb{CP}^n$ 上の *Kähler* 形式である．したがって $\mathbb{CP}^n$ は *Kähler* 多様体である.

Proof. Kähler 形式であることを示すには, ω_{FS} が正の実 $(1,1)$-形式であり, かつ閉形式であることを示せば十分である．まず ω_{FS} は局所的に

$$\omega_{\mathrm{FS}} = \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log\rho$$

と書かれているので, 実 $(1,1)$-形式である.

次に正値性を確認する．任意の $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{C}^n$ に対して

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{i\bar{j}}\xi_i\overline{\xi_j} = \frac{\rho\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2 - \left|\sum_{i=1}^{n}\overline{z}_i\xi_i\right|^2}{\rho^2}$$

である．Cauchy–Schwarz の不等式より

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\overline{z}_i\xi_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)$$

であるため,

$$\rho\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2 - \left|\sum_{i=1}^{n}\overline{z}_i\xi_i\right|^2 \geq \left(\rho - \sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2.$$

したがって $\xi \neq 0$ ならば

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{i\bar{j}}\xi_i\overline{\xi_j} > 0$$

となり, ω_{FS} は正である．

最後に閉性を示す．局所的に

$$\omega_{\mathrm{FS}} = \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log\rho$$

であるから,

$$d\omega_{\mathrm{FS}} = (\partial + \overline{\partial})\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log\rho = \sqrt{-1}\,\partial^2\overline{\partial}\log\rho + \sqrt{-1}\,\overline{\partial}\partial\overline{\partial}\log\rho = 0$$

である．ここで $\partial^2 = 0$, $\overline{\partial}^2 = 0$, および $\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$ を用いた．よって ω_{FS} は閉な正の実 $(1,1)$-形式であり, Kähler 形式である． □

2.7 直線束 (rank1) の場合

rank1 の場合, つまり直線束の場合簡単になる．以下まとめておこう．

E_1, E_2 を直線束とする．E_1 の変換関数 $T_{UV}^{E_1}$ で計量は h_{E_1} とし, E_2 の変換関数 $T_{UV}^{E_2}$ で計量は h_{E_2} とする

- 双対 E_1^* は変換関数 $(T_{UV}^{E_1})^{-1}$ の直線束である．計量 $(h_U^{E_1})^{-1}$ の直線束である．つまり

  双対は逆数を取ることに同じ

- テンソル積 $E_1 \otimes E_2$ は変換関数 $T_{UV}^{E_1}T_{UV}^{E_2}$ で，計量 $h_U^{E_1}h_U^{E_2}$ の直線束である．つまり

  テンソル積は掛け算と同じ

なので直線束の集合には自明束を単位元とする群演算が入る．実際

$$\left(\{\text{ 直線束の集合 }\}/\cong\right) \cong H^1(X, \mathcal{O}^*)$$

という Abel 群の同型がある.

L を直線束とし, 変換関数を $T_{UV} : U \cap V \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ とする.

- Hermite 計量 h は, U 上の C^∞ 級関数 $h_U : U \to \mathbb{R}_{>0}$ で貼り合わせ条件

$$h_V = |T_{UV}|^2 h_U$$

  を満たすものの集まり.
- Chern 接続 D_h の U 上の connection form

$$A_U := \partial h_U \cdot h_U^{-1} = \partial \log h_U$$

- Chern 接続 D_h は

$$D_h(\mathbf{e}_U u_U) := \mathbf{e}_U(du_U + A_U u_U) = \underbrace{\mathbf{e}_U(\partial u_U + (\partial \log h) u_U)}_{=:D'_h(\mathbf{e}_U u_U)} + \underbrace{\mathbf{e}_U(\overline{\partial} u_U)}_{=D''_h(\mathbf{e}_U u_U)}$$

- Chern 曲率 $F_{L,h}$ の U 上の curvature form

$$R_U = \overline{\partial}\left((\partial h_U \cdot h_U^{-1})\right) = \overline{\partial}\partial \log h_U$$

- Chern 曲率 $F_{L,h}$ も local に見ると (R_U と同じく)

$$F_{L,h} = \overline{\partial}\partial \log h_U$$

実はもっと簡単になる. U 上の C^∞ 級関数 $h_U : U \to \mathbb{R}_{>0}$ に関して

$$h_U = e^{-\varphi_U} \Leftrightarrow \varphi_U := -\log h_U$$

となる C^∞ 級関数 $\varphi_U : U \to \mathbb{R}$ をとると以下のようになる.

L を直線束とし, 変換関数を $T_{UV} : U \cap V \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ とする.

- Hermite 計量 h は, U 上の C^∞ 級関数 $\varphi_U : U \to \mathbb{R}$ で貼り合わせ条件

$$e^{-\varphi_V} = |T_{UV}|^2 e^{-\varphi_U}$$

  を満たすものの集まり.
- Chern 接続 D_h の U 上の connection form

$$A_U = -\partial \varphi_U$$

- Chern 接続 D_h は

$$D_h(\mathbf{e}_U u_U) = \underbrace{\mathbf{e}_U(\partial u_U - \partial\varphi_U u_U)}_{=:D'_h(\mathbf{e}_U u_U)} + \underbrace{\mathbf{e}_U(\overline{\partial} u_U)}_{=D''_h(\mathbf{e}_U u_U)}$$

- Chern 曲率 $F_{L,h}$, curvature form R_h ともに同じく

$$F_{L,h} = -\overline{\partial}\partial\varphi_U = \partial\overline{\partial}\varphi_U = \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi_U}{\partial z^i\partial\overline{z^j}}\right) dz^i \wedge d\overline{z^j}$$

Definition 2.35 (positive, semipositive)**.** 直線束 L が positive であるとは, ある計量 $h = (h_U) = (e^{-\varphi_U})$ があって

$$\left(\frac{\partial^2\varphi_U}{\partial z^i\partial\overline{z^j}}\right) \text{がどの点でも正定値 Hermite 行列になる.}$$

として定義する. 同様に semipositive を半正定値として定義する.

Remark 2.36. 微分形式の positive form を認めると以下の対応がある.

- $\sqrt{-1}F_{L,h} = \left(\frac{\partial^2\varphi_U}{\partial z^i\partial\overline{z^j}}\right)\sqrt{-1}dz^i \wedge d\overline{z^j}$ が positive form
- $\frac{\partial^2\varphi_U}{\partial z^i\partial\overline{z^j}}$ がどの点でも正定値 Hermite 行列になる.

本当は前者を用いて定義すべきだが, この定義は時間がかかるので後者を採用した.

今回 ample を定義しない. しかしながら以下の定理があるので, "ample=positive"だと思って良い

Theorem 2.37 (小平埋め込み定理)**.** *X をコンパクト複素多様体とする. L が ample であることは positive であることと同値. 特にこの場合 X は射影複素多様体 (($\mathbb{CP}^n$ の複素部分多様体)) である.*

2.8 代数幾何学の positivity と特異 Hermite 計量・多変数複素解析とのつながり

これは代数幾何に詳しい人向けである. 授業でも扱わない予定. 気になる人は [Dem12, Section 5] を参照のこと.

Definition 2.38. $\omega = \sqrt{-1}g_{i\overline{j}}dz^i \wedge d\overline{z^j}$ を Hermitian form とする. 直線束 L と C^∞ 計量

$h = (h_U) = (e^{-\varphi_U})$, $c \in \mathbb{R}$ について

$$\sqrt{-1}F_{L,h} \geq c\omega \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \left(\frac{\partial^2 \varphi_U}{\partial z^i \partial \overline{z^j}} - c g_{i\bar{j}}\right) \text{がどの点でも半正定値 Hermite 行列になる.}$$

として定義する.

すると代数幾何学の nef は次のように対応する

Lemma 2.39. *X を $\mathbb{C}$ 上の smooth projective variety とする. X 上の 直線束 L に関して以下は同値*

- *L は nef. つまり任意の既約曲線 $C \subset X$ に対して $L \cdot C \geq 0$*
- *任意の $\varepsilon > 0$ に対して, L の C^∞ Hermite 計量 h_ε が存在して,*

$$\sqrt{-1}F_{L,h_\varepsilon} \geq -\varepsilon\omega$$

を満たす.

なので

$$\text{ample} = \text{positive} \Rightarrow \text{semiample} \Rightarrow \text{semipositive} \Rightarrow \text{nef}$$

である. 逆は成り立たない.

アバンダンス予想は標準束 K_X に関して nef $\Rightarrow$ semiample を問うものである .

Conjecture 2.40 (アバンダンス予想)**.** *K_X が nef ならば, semiample か?*

代数幾何学には他にも big, pseudo-effective というものがある. これも実は計量を使って対応できる.

Definition 2.41. L を直線束とし, 変換関数を $T_{UV} : U \cap V \to \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ とする.

- h が L の特異 Hermite 計量とは U 上の L^1_{loc} 関数 $\varphi_U : U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ で貼り合わせ条件

$$e^{-\varphi_V} = |T_{UV}|^2 e^{-\varphi_U}$$

を満たすものの集まり.

- Chern 曲率 $F_{L,h}$ を
$$F_{L,h} = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \varphi_U}{\partial z^i \partial \overline{z^j}} \right) dz^i \wedge d\overline{z^j}$$
として定める．ただし $\left(\frac{\partial^2 \varphi_U}{\partial z^i \partial \overline{z^j}} \right)$ は超関数である．

カレント (超関数付きの微分形式) を用いてうまく

$$\sqrt{-1} F_{L,h} \geq c\omega$$

を定義する．(この議論は [Dem12] にあるがかなり面倒な議論である！)

Lemma 2.42. *X を $\mathbb{C}$ 上の smooth projective variety とする．X 上の 直線束 L に関して以下は同値*

- *L は big. つまり $\mathrm{vol}(L) := \lim_{k\to\infty} \frac{n!}{k^n} \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, L^{\otimes k}) > 0$ である．*
- *ある特異 Hermite 計量 h と $c > 0$ があって，カレントの意味で*
$$\sqrt{-1} F_{L,h} \geq c\omega$$
を満たす．

Lemma 2.43. *X を $\mathbb{C}$ 上の smooth projective variety とする．X 上の 直線束 L に関して以下は同値*

- *L は pseudo-effective.*
- *ある特異 Hermite 計量 h があって，カレントの意味で*
$$\sqrt{-1} F_{L,h} \geq 0$$
を満たす．

$$\text{big} \Rightarrow \text{effective} \Rightarrow \text{pseudo-effective}$$

である．逆は成り立たない．

nonvanishing 予想は pseudo-effective $\Rightarrow$ effective を問うものである．

Conjecture 2.44 (nonvanishing 予想)**.** K_X が *pseudo-effective* ならば *effective(*ある $m \in \mathbb{Z}_+$ があって $H^0(X, K_X^{\otimes m}) \neq 0$*)* か？

この予想が X が smooth projective variety に対して解けると, [Has18] によって極小モデル理論の存在が言える．3 次元の K_X が nef である場合の nonvanishing 予想に関しては 6 章で証明を与える．(これは Miyaoka[Miy87] に基づく)

X を $\mathbb{C}$ 上の smooth projective variety とする．代数的な手法だけでは解けないが解析的な手法 (特異 Hermite 計量など) を使って解ける定理は以下のものが挙げられる．

- Invariance of Plurigenera．$f : \mathcal{X} \to \Delta$ と言う smooth な変形に関して $h^0(\mathcal{X}_t, K_{\mathcal{X}_t}^{\otimes m})$ が不変である定理．Siu によって解決．[Pa07] が読みやすい．$K_{\mathcal{X}_t}$ が big の時は Lazarsfeld の教科書 [Laz04] に代数的な証明がある．が一般の場合は代数的な証明が知られていない．
- 底空間がアーベル多様体の Iitaka 予想．Cao-Paun[CP17] によって解決．Hacon の証明には gap があったようで, 真に代数的な証明は知られていない．[HPS18] 参照．この論文は (Schnell 先生が書いたため) 代数幾何勢も読めるように書かれている．
- $-K_X$ が nef の構造定理．Cao-Horing[CH19] によって解決．[MW21] によって KLT 多様体に拡張．代数的な証明はまだないと思う．ただこれは Patakfalvi が近しいことをやっている．

私としては上の代数的な証明をちょっと見てみたい．特に正標数でどうなるのかが気になるところである．

最後にこの特異 Hermite 計量と多変数複素解析の繋がりを書いておく．

$$\frac{\partial^2 \varphi_U}{\partial z^i \partial \overline{z^j}} \text{がどの点でも半正定値 Hermite 行列になる．}$$

となる関数は多重劣調和函数 (plurisubharmonic function, psh) と呼ばれる．これは擬凸性などを定義する際に用いられ, 古典的な多変数複素解析であった概念である．

有名な岡潔の定理は以下のものである．まず用語を定義しておく．

Definition 2.45 (擬凸領域)**.** 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ が擬凸であるとは, Ω 上の連続多重劣調和関数 $\rho \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ であって, 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{z \in \Omega \mid \rho(z) < c\} \Subset \Omega$$

を満たすものが存在することをいう．

Definition 2.46 (正則凸)**.** $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を領域とする．コンパクト集合 $K \Subset \Omega$ に対して, Ω

における正則凸包を

$$\widehat{K}_\Omega := \{z \in \Omega \mid |f(z)| \leq \sup_{w \in K} |f(w)| \text{ for all } f \in \mathcal{O}(\Omega)\}$$

で定める．任意のコンパクト集合 $K \Subset \Omega$ に対して $\widehat{K}_\Omega \Subset \Omega$ が成り立つとき，Ω は正則凸であるという．

Definition 2.47 (正則領域)**.** 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ が正則領域であるとは，任意の境界点 $p \in \partial\Omega$ と p の任意の近傍 U に対して，ある $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ が存在して，$f|_{U \cap \Omega}$ は U 上の正則関数に延長できないこと．

Theorem 2.48 (岡の定理, Levi 問題の解)**.** 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ に対して以下は同値である．

- Ω は擬凸である．
- Ω は正則凸である．
- Ω は正則領域である．

これは大沢先生や野口先生の本などに証明が載っていると思う．私もこの証明を全て追っているわけではない．現代的には以下のように示すらしい．

- 領域だと古典的な議論で次が言える．[Dem] が詳しい．

$$\text{正則領域} \underset{[\mathrm{Dem}, Ch.1 Thm 6.11]}{\Leftrightarrow} \text{正則凸} \underset{[\mathrm{Dem}, Ch.1 Thm 6.14]}{\Rightarrow} \text{擬凸}$$

- 擬凸 $\Rightarrow$ 正則領域 は [Dem, Ch.8 Thm 9.11] 参照．これは Skoda の L^2 割算定理の Corollary である．ここは L^2-estimate の内容なのでわかりやすい．

3 Chern 類の定義

3.1 複素射影空間 $\mathbb{CP}^1$ と tautological line bundle

複素射影空間 $\mathbb{CP}^1 = \{[Z_0 : Z_1]\}$ を考える. 標準開集合

$$U_0 := \{Z_0 \neq 0\}, \quad U_1 := \{Z_1 \neq 0\}$$

上では

$$z = \frac{Z_1}{Z_0} \text{ on } U_0, \quad w = \frac{Z_0}{Z_1} \text{ on } U_1$$

が局所正則座標を与える.

次に, $\mathbb{CP}^1$ 上の tautological line bundle $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(-1)$ を考える. これは

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(-1) &= \{([Z_0 : Z_1], v) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2 \mid v \in \mathbb{C}(Z_0, Z_1)\} \\ &= \{([Z_0 : Z_1], v_0, v_1) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2 \mid v_0 = \lambda Z_0, v_1 = \lambda Z_1, \exists \lambda \in \mathbb{C}\}\end{aligned}$$

で定義される正則直線束である. つまり, 点 $[Z_0 : Z_1]$ の上のファイバーは, $\mathbb{C}^2$ の中でベクトル (Z_0, Z_1) が張る直線である. 各標準開集合上では, 次の局所正則枠を取る.

$$e_0([1 : z]) = ([1 : z], (1, z)) \in U_0 \times \mathbb{C} = \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(-1)|_{U_0} \quad [1 : z] \in U_0,$$

$$e_1([w : 1]) = ([w : 1], (w, 1)) \in U_1 \times \mathbb{C} = \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(-1)|_{U_1} \quad [w : 1] \in U_1,$$

重なり $[1 : z] = [w : 1] \in U_0 \cap U_1$ では $w = 1/z$ なので,

$$\begin{aligned}e_0([1 : z]) = ([1 : z], (1, z)) &\underset{w=1/z}{=} ([1 : \frac{1}{w}], (1, \frac{1}{w})) = ([w : 1], (1, \frac{1}{w})) \\ &\underset{\frac{1}{w}\text{ 倍}}{=} \frac{1}{w} \cdot ([w : 1], (w : 1)) = \underbrace{z}_{=:T_{U_1U_0}} \cdot e_1([w : 1])\end{aligned}$$

したがって, $e_1 = e_0 T_{U_0U_1}$ と書く規約では, $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(-1)$ の変換関数は

$$T_{U_0U_1} = w = \frac{1}{z}, \qquad T_{U_1U_0} = z$$

である.

Lemma 3.1.

$$h_0(e_0([1 : z]), e_0([1 : z])) = 1 + |z|^2 \quad \textit{on } U_0, \quad h_1(e_1([w : 1]), e_1([w : 1])) = 1 + |w|^2 \quad \textit{on } U_1 \tag{3.1}$$

で定めると, h_{U_i} たちは $\mathcal{O}(-1)$ の *Hermite* 計量を定める.

Proof. 示すべきことは貼り合わせ条件

$$h_1 = |T_{U_0U_1}|^2 h_0$$

である. 今 $T_{U_0U_1} = w = \frac{1}{z}$ より

$$|T_{U_0U_1}|^2 h_0 \underset{(3.1)}{=} |w|^2(1+|z|^2) \underset{\text{by } w=\frac{1}{z}}{=} (|w|^2+1) \underset{(3.1)}{=} h_1$$

である. □

直線束の Hermite 計量 h に対して, Chern 曲率は局所的に $F_{L,h} = \overline{\partial}\partial \log h(e,e)$ で与えられるので,

$$F_{\mathcal{O}(-1),h} = \overline{\partial}\partial \log\bigl(1+|z|^2\bigr) \quad \text{on } U_0$$

である. 実際に計算すると,

$$\partial \log\bigl(1+|z|^2\bigr) = \frac{\overline{z}}{1+|z|^2}\,dz \quad F_{\mathcal{O}(-1),h} = \overline{\partial}\partial \log\bigl(1+|z|^2\bigr) = -\frac{dz\wedge d\overline{z}}{(1+|z|^2)^2}. \quad \text{on } U_0 \tag{3.2}$$

3.2 Chern 類の定義

実多様体 M に対して singular cohomology を $H^i(M,\mathbb{R})$ で表す. de Rham の定理から

$$H^i(M,\mathbb{R}) \cong \frac{\{d\text{-closed } i\text{-form}\}}{\{d\text{-exact } i\text{-form}\}}$$

である. ここで

- i-form φ が d-closed とは $d\varphi = 0$ となること,
- i-form φ が d-exact とは $\varphi = d\psi$ となる $i-1$-form ψ が存在すること

である.

Chern 類を公理的定義で定義する. おそらく Hirzebruch の本 (Topological Methods in Algebraic Geometry) にあると思う.

Theorem-Definition 3.2 (Chern 類の公理的定義)**.**

1. **Axiom 1 (Existence)** 実多様体 M の C^∞ 級複素ベクトル束 E, 各整数 $i \geq 0$ に対

して i-th Chern 類

$$c_i(E) \in H^{2i}(M; \mathbf{R})$$

が与えられ, さらに $c_0(E) = 1$ である.

$$c(E) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(E)$$

とおき, これを E の 全 Chern 類 と呼ぶ.

2. **Axiom 2 (Naturality)** E を M 上の 複素ベクトル束 とし, $f : N \to M$ を C^∞ map とする. このとき

$$c(f^*E) = f^*(c(E)) \in H^*(N; \mathbf{R}),$$

ただし f^*E は N 上の pull-back bundle である.

3. **Axiom 3 (Whitney sum formula)** $E_1, \dots, E_q$ を M 上の複素直線束とする. $E_1 \oplus \cdots \oplus E_q$ をそれらの 直和 (Whitney sum) とする. このとき

$$c(E_1 \oplus \cdots \oplus E_q) = c(E_1) \cdots c(E_q).$$

4. **Axiom 4 (Normalization)** $\mathbb{CP}^1$ 上の tautological line bundle $\mathcal{O}(-1)$ について

$$\underbrace{c_1(\mathcal{O}(-1)) \cap [\mathbb{CP}^1]}_{\text{de Rham 理論から } \int_{\mathbb{P}^1} c_1(\mathcal{O}(-1)) \text{ に等しい}} = -1.$$

すると上の公理を満たす Chern 類が一意に存在し, さらに $c_i(E) \in H^{2i}(M, \mathbb{Z})$ である.

Remark 3.3. 代数幾何勢だと, この後に述べる Chern–Weil Theory よりも E の projective bundle $\mathbb{P}(E^*)$ を用いて定義する方が楽かもしれない. (Segre class を定義するか, Leray–Hirsch を使うか.) Segre class を用いるならば, $A_k(X)$ を X の k-cycle の集合として, $\pi : \mathbb{P}(E^*) \to X$ として

$$s_i(E) : A_k(X) \to A_{k-i}(X), \quad \alpha \mapsto \pi_*(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E^*)}(1))^{r+i-1} \cap \pi^*\alpha)$$

に移す写像を考え, $i = 0, 1, \dots, n$ について

$$s_i + s_{i-1}c_1 + \cdots + s_1 c_{i-1} + c_i = 0$$

が成り立つように Chern 類 c_i を定める方法である. これから $c_0 = s_0 = 1$, $c_1 = -s_1$ となる. これは X が scheme であっても E が locally free なら定義ができる. 詳しくは [Ful84, Ch.3] 参照. ただ X が smooth なら $A^i(X)$ は簡単に定義ができるが, singular だと $A^i(X)$ の定義が非常に難しくなる. [Ful84, Ch.17] 参照.

Definition 3.4. X を複素多様体とする．正則接ベクトル束 T_X の Chern 類を $c_i(X)$ とする．つまり

$$c_i(X) := c_i(T_X) \in H^{2i}(X, \mathbb{R})$$

とする．

Remark 3.5. 微分幾何勢は T_X や $-K_X$ をメインに扱い, 代数幾何勢は Ω_X や K_X をメインで扱う．ただ

$$c_1(X) = c_1(-K_X) = -c_1(K_X)$$

なので, 混乱しやすい．例えば

$$\underbrace{\text{Positive Ricci curvature}}_{\text{微分幾何}} = \underbrace{-K_X \text{ ample}}_{\text{代数幾何}} \quad \underbrace{\text{Negative Ricci curvature}}_{\text{微分幾何}} = \underbrace{K_X \text{ ample}}_{\text{代数幾何}}$$

が挙げられる．なので $c_i(X)$ は混乱が出るので論文のイントロ以外ではあまり使わないようにしている．

3.3 Chern–Weil Theory

複素多様体を X とし, 正則ベクトル束を E とする. これは Chern 曲率を使うためである.

E の Hermite 計量 h をとって, Chern 曲率を $\mathrm{End}(E)$-値 $(1,1)$-form $F_{E,h}$ とする.

$$F_{E,h} = \sum_{\alpha,\beta} R^\alpha_\beta e_\alpha \otimes e^{*,\beta} \Leftrightarrow F_{E,h} = \begin{pmatrix} R^1_1 & R^1_2 & \cdots & R^1_r \\ R^2_1 & R^2_2 & \cdots & R^2_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R^r_1 & R^r_2 & \cdots & R^r_r \end{pmatrix}$$

となる．R^α_β は $(1,1)$ 微分形式である．そこで

$$\begin{aligned} \det\left(\mathrm{Id}_r + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E,h}\right) &= \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^1_1 & \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^1_2 & \cdots & \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^1_r \\ \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^2_1 & 1 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^2_2 & \cdots & \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^2_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^r_1 & \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^r_2 & \cdots & 1 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^r_r \end{pmatrix} \\ &:= 1 + \underbrace{c_1(E,h)}_{(1,1)\text{-form}} + \underbrace{c_2(E,h)}_{(2,2)\text{-form}} + \cdots + \underbrace{c_r(E,h)}_{(r,r)\text{-form}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

と分解できる．de Rham の定理から

$$H^i(M,\mathbb{R}) \cong \frac{\{d\text{-closed } i\text{-form}\}}{\{d\text{-exact } i\text{-form}\}}$$

であるので，

$$[c_i(E,h)] \in H^{2i}(X,\mathbb{R})$$

を考えることができる

Theorem 3.6. $[c_i(E,h)]$ は h の取り方によらない．つまり h' を E の別の計量とするとき

$$[c_i(E,h)] = [c_i(E,h')] \in H^{2i}(X,\mathbb{R})$$

h が変わった分を d-exact の分が吸収してくれる．これは少し面倒なので認める．詳しくは [Kob14, Ch.2 (2.2.5)] を参照．

Theorem 3.7. 計量を用いて，

$$c_i(E) := [c_i(E,h)] \in H^{2i}(X,\mathbb{R})$$

としたとき，定理定義 *3.2* を満たす．*(ただし Axiom2 において* $f: N \to M$ *は正則写像とする.)*

実際にはこの定理から $c_i(E)$ が本当に Chern 類を定めていることは導けない．なぜなら C^∞ 級ベクトル束を取り扱っていないからである．しかしながら証明はほぼ同じなので，わかりやすさのため，ここでは正則ベクトル束の Hermite 計量の Chern 曲率の場合を考える (一般の場合は補足 3.8 参照)

Proof. 公理の 1–4 を確かめればよい．

[Axiom 1] 定義から明らかである．

$$c(E) := \underbrace{\left[\det\left(\mathrm{Id}_r + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h}\right)\right]}_{[\bullet]\text{ は de Rham コホモロジーの同値類の意味}} \underset{\text{展開}}{=} \sum_{i=0}^{r}[c_i(E,h)] \in \bigoplus_{i=0}^{n} H^{2i}(X,\mathbb{R}).$$

[Axiom 2] $f: N \to M$ を正則写像とする．E に計量 h を入れると，2.24 から f^*E に f^*h という計量が入り

$$F_{f^*E,f^*h} = f^*F_{E,h}$$

である．よって $\det\left(\mathrm{Id}_r + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{f^*E,f^*h}\right)$ を展開すれば $c_i(f^*E) = f^*c_i(E)$ を得る．

[Axiom 3] $c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1)c(E_2)$ を示せばよい．E_1 に計量 h_1, E_2 に計量 h_2 を入れると, 2.24 から $E_1 \oplus E_2$ に $h_1 \oplus h_2$ という計量が入り

$$F_{E_1 \oplus E_2, h_1 \oplus h_2} = \begin{pmatrix} F_{E_1,h_1} & 0 \\ 0 & F_{E_2,h_2} \end{pmatrix}.$$

よって $E_1 \oplus E_2$ の Chern 類は

$$\begin{aligned}
c(E_1 \oplus E_2) &\underset{\text{定義}}{=} \left[\det\left(\mathrm{Id}_{r_1+r_2} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E_1 \oplus E_2, h_1 \oplus h_2}\right)\right] \\
&\underset{\text{上の式}}{=} \left[\det\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{r_1} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E_1,h_1} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{r_2} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E_2,h_2} \end{pmatrix}\right] \\
&\underset{\text{行列式の性質}}{=} \left[\det\left(\mathrm{Id}_{r_1} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E_1,h_1}\right)\right] \cdot \left[\det\left(\mathrm{Id}_{r_2} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E_2,h_2}\right)\right] \underset{\text{定義}}{=} c(E_1)c(E_2).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

[Axiom 4] 3.1 節で行ったことを認めると, $\mathcal{O}(-1)$ には計量 h で座標近傍 (U_0, z) 上で

$$F_{\mathcal{O}(-1), h_{\mathrm{FS}}} \underset{(3.2)}{=} -\frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}$$

となるものがある．

$$\det\left(1 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{\mathcal{O}(-1), h_{\mathrm{FS}}}\right) = 1 + \underbrace{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{\mathcal{O}(-1), h_{\mathrm{FS}}}}_{=c_1(E,h)}$$

なので

$$c_1(\mathcal{O}(-1)) = \left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{\mathcal{O}(-1), h_{\mathrm{FS}}}\right]$$

となる．よって

$$\int_{\mathbb{CP}^1} c_1(\mathcal{O}(-1)) = \int_{U_0} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{\mathcal{O}(-1), h_{\mathrm{FS}}} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} -\frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2} = -1.$$

□

Remark 3.8. ”実”多様体上の C^∞ 級複素ベクトル束についても接続 D をとり, 曲率 F_D として

$$\det\left(\mathrm{Id}_r + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_D\right) = \det\begin{pmatrix} 1+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_1^1 & \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_2^1 & \cdots & \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_r^1 \\ \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_1^2 & 1+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_2^2 & \cdots & \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_r^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_1^r & \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_2^r & \cdots & 1+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_r^r \end{pmatrix}$$
$$:= 1 + \underbrace{c_1(E,D)}_{\text{2-form}} + \underbrace{c_2(E,D)}_{\text{4-form}} + \cdots + \underbrace{c_r(E,D)}_{2r\text{-form}}$$

と定義する. そして

$$c_i(E) := [c_i(E,D)] \in H^{2i}(X,\mathbb{R})$$

とすれば, これが接続 D の取り方によらず, 定義 3.2 を満たすことが上と同様に示せる. よってこの方法で Chern 類が定まる.

上の定理から次を得る. [Kob14, Ch.2] ではこれで計算していたが, これはかなり使いづらいと思われる.

Corollary 3.9.

$$c_k(E,h) = \frac{(\sqrt{-1})^k}{(2\pi)^k k!}\sum \delta^{\beta_1\cdots\beta_k}_{\alpha_1\cdots\alpha_k} R^{\alpha_1}_{\beta_1}\wedge\cdots\wedge R^{\alpha_k}_{\beta_k}$$

となる. 特に

$$c_1(E,h) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_\alpha R^\alpha_\alpha = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mathrm{tr}F_{E,h}, \quad c_1(E) = c_1(\det E) = \left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mathrm{tr}F_{E,h}\right]$$

$$c_2(E,h) = -\frac{1}{8\pi^2}\sum_{\alpha,\beta}\left(R^\alpha_\alpha\wedge R^\beta_\beta - R^\alpha_\beta\wedge R^\beta_\alpha\right), \quad c_2(E) = [c_2(E,h)].$$

Proof. 示すべきことは $c_1(E) = c_1(\det E)$ のみである. ここで E の計量を h とすると, 2.24 から $\det E$ には $\det h$ という計量が入って,

$$F_{\det E,\det h} = \mathrm{tr}F_{E,h} = \sum_\alpha R^\alpha_\alpha$$

である. よって $c_1(E) = c_1(\det E)$ である. □

3.4 Chern 類の性質

以下 X を n 次元多様体, E を rank r の 正則複素ベクトル束とする.

定義から

$$c(E) := \underbrace{[\det\left(\mathrm{Id}_r + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h}\right)]}_{[\bullet]\text{ は de Rham コホモロジーの同値類の意味}} \underset{\text{展開}}{=} \sum_{i=0}^{r}[c_i(E,h)] \in \bigoplus_{i=0}^{n} H^{2i}(X,\mathbb{R}) \tag{3.5}$$

である. (3.5) より次がわかる.

Proposition 3.10 (vanishing)**.**

$$c_i(E) = 0 \qquad (i > \min\{r,n\})$$

Proposition 3.11 (双対束の Chern 類)**.**

$$c_i(E^*) = (-1)^i c_i(E)$$

が成り立つ. 特に

$$c_1(E^*) = -c_1(E), \qquad c_2(E^*) = c_2(E)$$

である.

Proof. 定義 2.24 より E^* には双対計量 h^* が入り

$$F_{E^*,h^*} = -{}^tF_{E,h}$$

となる. よって

$$\begin{aligned}
\underbrace{c(E^*)}_{:=\sum_{i=0}^{n} c_i(E^*)} &= \underbrace{[\det\left(\mathrm{Id}_r + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E^*,h^*}\right)]}_{[\bullet]\text{ は de Rham コホモロジーの同値類の意味}} \\
&\underset{\text{代入}}{=} [\det\left(\mathrm{Id}_r - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}{}^tF_{E,h}\right)] = [\det\{\}^t\left(\mathrm{Id}_r - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h}\right)] \\
&\underset{\det\text{ の性質}}{=} [\det\left(\mathrm{Id}_r - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h}\right)] \underset{\text{展開}}{=} \sum_{i=0}^{r}[(-1)^i c_i(E,h)] = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i c_i(E) \in \bigoplus_{i=0}^{n} H^{2i}(X,\mathbb{R}).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

よって両辺を見比べればよい. □

Whitney の和公式より次がわかる.

Proposition 3.12 (直線束への分解)**.** $E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$ と直線束の直和に分解している場合

$$c(E) = \prod_{\alpha=1}^{r} c(L_\alpha) = \prod_{\alpha=1}^{r} (1 + c_1(L_\alpha))$$

である. $x_\alpha = c_1(L_\alpha)$ とすると, 特に

$$c_1(E) = x_1 + \cdots + x_r, \quad c_2(E) = \sum_{1 \le \alpha < \beta \le r} x_\alpha x_\beta, \quad c_k(E) = \sum_{1 \le \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \le r} x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_k}$$

実は Chern 類の公式はこれを用いて構成できる (splitting Theorem を用いる).

次に完全列での振る舞いを示す. その前に完全列の定義をする.

Definition 3.13. X を n 次元複素多様体とし, $E_1, E_2 \to X$ を rank r, s の正則ベクトル束とする.

- 正則写像 $f : E_1 \to E_2$ が束写像 (bundle map) であるとは, 任意の $x \in X$ について

  $$f((E_1)_x) \subset (E_2)_x \quad \text{and} \quad f_x : (E_1)_x \to (E_2)_x \text{ の rank が } x \text{ によらず一定}$$

  となることをいう.
- 上の状況で

  $$\mathrm{Ker}(f) := \bigcup_{x \in X} \mathrm{Ker}(f_x) \subset E_1 \quad \mathrm{Im}(f) := \bigcup_{x \in X} \mathrm{Im}(f_x) \subset E_2$$

  とおく. f が単射であることを $\mathrm{Ker}(f) = 0$ であること, f が全射であることを $\mathrm{Im}(f) = E_2$ であることとして定義する.
- $S \subset E$ が E の部分束とは包含正則写像 $i : S \hookrightarrow E$ が単射束写像となることをいう.
- $\pi : E \to Q$ が商束とは $\pi : E \to Q$ が全射正則束写像となることをいう.
- 正則ベクトル束 S, E, Q と正則束写像 i, π の系列

  $$0 \longrightarrow S \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$$

  が完全であるとは

  $$i \text{ が単射} \quad \& \quad \mathrm{Ker}(\pi) = \mathrm{Im}(i) \quad \& \quad \pi \text{ が全射}$$

  となることをいう.

Lemma 3.14 (完全列に対する Chern 類の公式)**.** 正則ベクトル束の短完全列

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

について　全 *Chern* 類 の等式

$$c(E) = c(S)c(Q)$$

が成り立つ. 特に低次の *Chern* 類について

$$c_1(E) = c_1(S) + c_1(Q), \quad c_2(E) = c_2(S) + c_1(S)c_1(Q) + c_2(Q)$$

が成り立つ.

Proof. 完全列が C^∞ 級の同型を用いて $E \underset{C^\infty}{\cong} S \oplus Q$ と直和分解できる. これを示せば Whitney 公式より明らかである. これは $\pi : E \to Q$ について, $\rho : Q \to E$ という C^∞ 級束写像で $\pi \circ \rho = \mathrm{Id}_Q$ となるものの存在を言えばよい.

まず局所開集合 U 上は存在する. 実際, 適当に正則な local frame をとることで

$$E|_U \cong U \times \mathbb{C}^r \overset{\pi}{\to} U \times \mathbb{C}^q \cong Q|_U, \quad (x, \xi^1, \dots, \xi^r) \mapsto (x, \xi^1, \dots, \xi^q)$$

という射影にできる. よって 正則な束写像 $\rho_U : Q|_U \to E|_U$ で $\pi|_U \circ \rho_U = \mathrm{Id}_{Q|_U}$ となるものがある. あとは 1 の分割を用いて, ρ_U を全体に伸ばすことができる.　(1 の分割は正則では絶対に取れないので, C^∞ 級の分裂しか言えない) □

Remark 3.15. この分解 $E \underset{C^\infty}{\cong} S \oplus Q$ は C^∞ 級であることに注意する. 完全列 $0 \longrightarrow S \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ が正則であっても, $E \cong S \oplus Q$ という正則同型は得られない. このズレが second fundamental form として出てくる. 5.7 参照.

3.5 Chern character

Chern 類の定義は計算で使いづらい. そこで次を定義する.

Definition 3.16. E を正則ベクトル束, h を Hermite 計量とする. D_h を Chern 接続 $F_{E,h} = D_h^2$ を Chern 曲率 とする.

$$\mathrm{ch}(E) = \left[\underbrace{\mathrm{tr}\left(\exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E,h} \right) \right)}_{\text{偶数次数の微分形式}} \right] = r + \mathrm{ch}_1(E) + \mathrm{ch}_2(E) + \cdots \mathrm{ch}_n(E) \in \oplus_{i=0}^n H^{2i}(X, \mathbb{R})$$

として定義する．特に次が言える．

$$\mathrm{ch}_1(E) = \left[\mathrm{tr}\Big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h}\Big)\right] \in H^2(X,\mathbb{R}) \quad \mathrm{ch}_2(E) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}\Big(-\frac{1}{4\pi^2}F_{E,h}\wedge F_{E,h}\Big)\right] \in H^4(X,\mathbb{R})$$

Chern–Weil Theory と同じく h の取り方によらない．また Chern 類と同じく $\mathrm{ch}_k(E)$ は

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\right)^k \sum R^{\alpha_1}_{\alpha_2}\wedge R^{\alpha_2}_{\alpha_3}\wedge\cdots\wedge R^{\alpha_k}_{\alpha_1}$$

で代表される (が，これは使いづらい)．次がわかっている．

Proposition 3.17. $\mathrm{ch}_i(E) \in H^{2i}(X,\mathbb{Q})$ であり，$c_1(E),\dots,c_i(E)$ と有理数を用いて表せられる．低次数においては

$$\mathrm{ch}_1(E) = c_1(E), \quad \mathrm{ch}_2(E) = \frac{1}{2}\big(c_1^2(E) - 2c_2(E)\big).$$

Chern 類と同じく次が成り立つ．

Proposition 3.18.

$$\mathrm{ch}_i(E) = 0 \qquad (i > \min\{r,n\}), \quad \mathrm{ch}_i(E^*) = (-1)^i\mathrm{ch}_i(E)$$

が成り立つ．特に

$$\mathrm{ch}_1(E^*) = -\mathrm{ch}_1(E), \qquad \mathrm{ch}_2(E^*) = \mathrm{ch}_2(E)$$

次がかなり使いやすい．

Proposition 3.19.

$$\mathrm{ch}(E_1\oplus E_2) = \mathrm{ch}(E_1) + \mathrm{ch}(E_2), \quad \mathrm{ch}(E_1\otimes E_2) = \mathrm{ch}(E_1)\mathrm{ch}(E_2).$$

特に 正則ベクトル束の短完全列

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

について

$$\mathrm{ch}(E) = \mathrm{ch}(S) + \mathrm{ch}(Q)$$

Proof. $\mathrm{ch}(E_1\oplus E_2) = \mathrm{ch}(E_1) + \mathrm{ch}(E_2)$ を示せばよい．E_1 に計量 h_1，E_2 に計量 h_2 を入れると，

2.24 から $E_1 \oplus E_2$ に $h_1 \oplus h_2$ という計量が入り

$$F_{E_1 \oplus E_2, h_1 \oplus h_2} = \begin{pmatrix} F_{E_1,h_1} & 0 \\ 0 & F_{E_2,h_2} \end{pmatrix}$$

である．ここで線形代数によって

$$\exp\Big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E_1 \oplus E_2, h_1 \oplus h_2}\Big) = \exp\Big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \begin{pmatrix} F_{E_1,h_1} & 0 \\ 0 & F_{E_2,h_2} \end{pmatrix}\Big) \underset{\text{線形代数}}{=} \begin{pmatrix} \exp\Big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E_1,h_1}\Big) & 0 \\ 0 & \exp\Big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E_2,h_2}\Big) \end{pmatrix}$$

である．以上より $E_1 \oplus E_2$ の Chern character は

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(E_1 \oplus E_2) &\underset{\text{定義}}{=} \Big[\mathrm{tr}\Big(\exp\Big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E_1 \oplus E_2, h_1 \oplus h_2}\Big)\Big)\Big] \\ &\underset{\text{上の式}}{=} \left[\mathrm{tr} \begin{pmatrix} \exp\Big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E_1,h_1}\Big) & 0 \\ 0 & \exp\Big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E_2,h_2}\Big) \end{pmatrix}\right] \\ &\underset{\text{trace の性質}}{=} \Big[\mathrm{tr} \exp\Big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E_1,h_1}\Big)\Big] + \Big[\mathrm{tr} \exp\Big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E_2,h_2}\Big)\Big] \underset{\text{定義}}{=} \mathrm{ch}(E_1) + \mathrm{ch}(E_2). \end{aligned}$$

$E_1 \otimes E_2$ については，2.24 から計量 $h_1 \otimes h_2$ が入り

$$F_{E_1 \otimes E_2, h_1 \otimes h_2} = F_{E_1,h_1} \otimes \mathrm{Id}_{E_2} + \mathrm{Id}_{E_1} \otimes F_{E_2,h_2}$$

となる．$F_{E_1,h_1} \otimes \mathrm{Id}_{E_2}$ と $\mathrm{Id}_{E_1} \otimes F_{E_2,h_2}$ は $\wedge$ しても可換なので，線形代数より[9]

$$\begin{aligned} \exp\Big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E_1 \otimes E_2, h_1 \otimes h_2}\Big) &= \exp\Big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} (F_{E_1,h_1} \otimes \mathrm{Id}_{E_2} + \mathrm{Id}_{E_1} \otimes F_{E_2,h_2})\Big) \\ &\underset{\text{線形代数+可換性}}{=} \exp\Big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E_1,h_1}\Big) \exp\Big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E_2,h_2}\Big). \end{aligned}$$

後の議論は同じである． □

Corollary 3.20.

$$c_1(\mathrm{End}(E)) = 0, \qquad c_2(\mathrm{End}(E)) = \mathrm{ch}_1(E)^2 - 2r\mathrm{ch}_2(E) = 2rc_2(E) - (r-1)c_1(E)^2.$$

[9] $AB = BA$ ならば $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ を用いる．

Proof.

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(\mathrm{End}(E)) &\underset{\text{定義}}{=} \mathrm{ch}(E\otimes E^*) \underset{\text{Prop. 3.19}}{=} \mathrm{ch}(E)\mathrm{ch}(E^*) \\
&\underset{\text{Prop. 3.18}}{=} (r+\mathrm{ch}_1(E)+\mathrm{ch}_2(E)+\cdots)(r-\mathrm{ch}_1(E)+\mathrm{ch}_2(E)-\cdots) \\
&= r^2 + \underbrace{0}_{=\mathrm{ch}_1(\mathrm{End}(E))} + \underbrace{2r\cdot\mathrm{ch}_2(E)-(\mathrm{ch}_1(E))^2}_{=\mathrm{ch}_2(\mathrm{End}(E))} + \cdots .
\end{aligned}$$

あとは Prop. 3.17 を用いて計算すればよい. □

Definition 3.21 (Bogomolov discriminant)**.** $\mathrm{End}(E)$ の c_2 を Bogomolov discriminant と呼び $\Delta(E)$ で表す. つまり

$$\Delta(E) := c_2(\mathrm{End}(E)) \underset{\text{Cor. 3.20}}{=} \mathrm{ch}_1(E)^2 - 2r\mathrm{ch}_2(E) = 2rc_2(E)-(r-1)c_1(E)^2 \in H^4(X,\mathbb{R}).$$

Proposition 3.22. *E を rank r の C^∞ 級複素ベクトル束とする. $F_{E,h}$ の trace free part を次で定義する.*

$$F^\circ_{E,h} := F_{E,h} - \underbrace{\frac{1}{r}\mathrm{tr}_E(F_{E,h})}_{(1,1)\text{ 微分形式}}\cdot\mathrm{Id}_E \quad \mathrm{End}(E)\text{ 値 }(1,1)\text{-}form.$$

このとき

$$\Delta(E) = \left[\frac{r}{4\pi^2}\mathrm{tr}_E(F^\circ_{E,h}\wedge F^\circ_{E,h})\right] \in H^4(X,\mathbb{R})$$

Proof.

$$\Delta(E) \underset{\text{定義 3.21}}{=} \mathrm{ch}_1(E)^2 - 2r\mathrm{ch}_2(E) \underset{\text{定義 3.16}}{=} \frac{-1}{4\pi^2}\left[\mathrm{tr}_E(F_{E,h})\wedge\mathrm{tr}_E(F_{E,h}) - r\cdot\mathrm{tr}_E(F_{E,h}\wedge F_{E,h})\right].$$

trace free part の定義から $\mathrm{tr}_E(F^\circ_{E,h}) = 0$ である．$\alpha := \frac{1}{r}\mathrm{tr}_E(F_{E,h})$ を $(1,1)$ 微分形式とする．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}_E(F_{E,h}) \wedge \mathrm{tr}_E(F_{E,h}) - r \cdot \mathrm{tr}_E(F_{E,h} \wedge F_{E,h}) \\
\underset{\text{定義}}{=}\ & \mathrm{tr}_E(F^\circ_{E,h} - \alpha \mathrm{Id}_E) \wedge \mathrm{tr}_E(F^\circ_{E,h} - \alpha \mathrm{Id}_E) - r \cdot \mathrm{tr}_E((F^\circ_{E,h} - \alpha \mathrm{Id}_E) \wedge (F^\circ_{E,h} - \alpha \mathrm{Id}_E)) \\
\underset{\text{展開}+\mathrm{tr}_E(F^\circ_{E,h})=0}{=}\ & \mathrm{tr}_E(-\alpha \mathrm{Id}_E) \wedge \mathrm{tr}_E(-\alpha \mathrm{Id}_E) - r \cdot \mathrm{tr}_E(F^\circ_{E,h} \wedge F^\circ_{E,h} + \alpha \wedge \alpha \mathrm{Id}_E) \\
\underset{\text{打ち消し}}{=}\ & -r \cdot \mathrm{tr}_E(F^\circ_{E,h} \wedge F^\circ_{E,h}).
\end{aligned}
$$

□

次の事実はあまり有名ではないが有用である．証明はただの計算なのでレポート問題にする．

Proposition 3.23 (cf. [Lan04], [Nak04])**.** ベクトル束の *filtration*

$$0 =: E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_l := E$$

で各 $G_i := E_i/E_{i-1}$ が *rank* r_i のベクトル束になるものが存在すると仮定する．
このとき次の等式が成り立つ．

$$\frac{\Delta(E)}{r} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\Delta(G_i)}{r_i} - \frac{1}{r} \sum_{1 \le i < j \le l} r_i r_j \left(\frac{c_1(G_i)}{r_i} - \frac{c_1(G_j)}{r_j} \right)^2 \in H^4(X, \mathbb{R}). \tag{3.7}$$

特に短完全列

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

を考え，

$$s := \mathrm{rank}(S), \qquad q := \mathrm{rank}(Q), \qquad r := \mathrm{rank}(E) = s + q$$

とするとき

$$\frac{\Delta(E)}{r} = \frac{\Delta(S)}{s} + \frac{\Delta(Q)}{q} - \frac{sq}{r} \left(\frac{c_1(S)}{s} - \frac{c_1(Q)}{q} \right)^2.$$

3.6 Riemann–Roch

これに関しては概説に留める.(あまり詳しく知らないので.)

$E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$ と直線束の直和に分解していて $x_\alpha = c_1(L_\alpha)$ とする．すると

$$c(E) = \prod_{\alpha=1}^{r} (1 + c_1(L_\alpha)) = \prod_{\alpha=1}^{r} (1 + x_\alpha) \quad \mathrm{ch}(E) = \sum_{\alpha=1}^{r} \mathrm{ch}(L_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{r} e^{x_\alpha}$$

が成り立つ. 上の元, Todd 類 $\mathrm{td}(E)$ を

$$\mathrm{td}(E) := \prod_{\alpha=1}^{r} \frac{x_\alpha}{1-e^{-x_\alpha}}$$

と定める. 低い次数は次の通りになる. ($c_i := c_i(E)$ と略記している.)

$$\mathrm{ch}(E) = r + c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2) + \frac{1}{6}(c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3) + \frac{1}{24}(c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4) + \cdots$$
$$\mathrm{td}(E) = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{24}(c_1c_2) + \frac{1}{720}(-c_1^4 + 4c_1^2c_2 + c_1c_3 + 3c_2^2 - c_4) + \cdots .$$

Theorem 3.24. *E を コンパクト 複素多様体 X 上の 正則ベクトル束 とする. $H^i(X,E)$ で, E の 正則 section の層 $\mathcal{O}(E)$ を係数にもつ X の i-th cohomology を表す. Euler characteristic*

$$\chi(X,E) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(X,E)$$

とするとき, 次の Riemann–Roch が成り立つ:

$$\chi(X,E) = \int_X \mathrm{td}(T_X)\mathrm{ch}(E).$$

Remark 3.25. [Kob14] にこう書いていた. X が代数多様体 のとき Hirzebruch により証明された. その後, X が コンパクト 複素多様体 の場合へ Atiyah と Singer によって一般化された. Chern 類および Chern character は coherent analytic sheaves に対しても定義できる. Riemann–Roch の公式は任意の coherent analytic sheaf $\mathcal{F}$ でも成り立つ.(O'Brian–Toledo–Tong.) これらすべてについては Hirzebruch を見よ.

この形ならば Hirzebruch–Riemann–Roch もしくは Atiyah–Singer の指数定理の方がよいかもしれない.

低い次数を見るとこうなる. これは ChatGPT に展開してもらった (まあこの資料 ChatGPT がかなり書いている.)

1. $n = 1$ **の場合.**

$$\chi(X,E) = \int_X \left(c_1(E) + \frac{r}{2} c_1(T_X) \right).$$

特に X が種数 g の滑らかな射影曲線なら, $\int_X c_1(T_X) = 2 - 2g$ なので,

$$\chi(X,E) = \deg E + r(1-g).$$

これは曲線の場合の Riemann–Roch という.

2. $n = 2$ **の場合.**

$$\chi(X,E)=\int_X\left\{\frac{1}{2}\big(c_1(E)^2-2c_2(E)\big)+\frac{1}{2}c_1(T_X)c_1(E)+\frac{r}{12}\big(c_1(T_X)^2+c_2(T_X)\big)\right\}.$$

特に $E=L$ が直線束なら, $r=1$, $c_2(L)=0$ なので, 標準束 K_X を用いると $c_1(T_X)=-c_1(K_X)$ であるから,

$$\chi(X,L)=\frac{1}{2}L\cdot(L-K_X)+\chi(X,\mathcal{O}_X)\quad \text{ただし}\chi(X,\mathcal{O}_X)=\frac{1}{12}\int_X\big(c_1(T_X)^2+c_2(T_X)\big)$$

これは Noether formula である[10]

3. $n=3$ **の場合.**

$$\begin{aligned}\chi(X,E)=\int_X\Bigg\{&\frac{1}{6}\big(c_1(E)^3-3c_1(E)c_2(E)+3c_3(E)\big)+\frac{1}{4}c_1(T_X)\big(c_1(E)^2-2c_2(E)\big)\\&+\frac{1}{12}\big(c_1(T_X)^2+c_2(T_X)\big)c_1(E)+\frac{r}{24}c_1(T_X)c_2(T_X)\Bigg\}.\end{aligned}$$

$E=L$ が直線束なら,

$$\mathrm{ch}(L)=1+c_1(L)+\frac{1}{2}c_1(L)^2+\frac{1}{6}c_1(L)^3$$

なので,

$$\chi(X,L)=\int_X\left\{\frac{1}{6}L^3-\frac{1}{4}K_XL^2+\frac{1}{12}\big(K_X^2+c_2(T_X)\big)L-\frac{1}{24}K_Xc_2(T_X)\right\}.$$

特に

$$\chi(X,\mathcal{O}_X)=-\frac{1}{24}\int_X c_1(K_X)c_2(T_X)=\frac{1}{24}\int_X c_1(T_X)c_2(T_X).$$

これは後で使うので定理で書いておく.

Theorem 3.26. $n=3$ のとき

$$\chi(X,\mathcal{O}_X)=-\frac{1}{24}\int_X c_1(K_X)c_2(T_X)=\frac{1}{24}\int_X c_1(-K_X)c_2(T_X).$$

4. $n=4$ **の場合.**

[10] この Noether は Max Noether で, Noetherian ring や Noether's theorem の Emmy Noether の父親である.

$$
\begin{aligned}
\chi(X,E) = \int_X \Bigg\{ & \frac{1}{24}\big(c_1(E)^4 - 4c_1(E)^2c_2(E) + 2c_2(E)^2 + 4c_1(E)c_3(E) - 4c_4(E)\big) \\
& + \frac{1}{12}c_1(T_X)\big(c_1(E)^3 - 3c_1(E)c_2(E) + 3c_3(E)\big) \\
& + \frac{1}{24}\big(c_1(T_X)^2 + c_2(T_X)\big)\big(c_1(E)^2 - 2c_2(E)\big) \\
& + \frac{1}{24}c_1(T_X)c_2(T_X)c_1(E) \\
& + \frac{r}{720}\big(-c_1(T_X)^4 + 4c_1(T_X)^2c_2(T_X) + 3c_2(T_X)^2 + c_1(T_X)c_3(T_X) - c_4(T_X)\big)\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

特に $E = L$ が直線束なら,

$$
\mathrm{ch}(L) = 1 + c_1(L) + \frac{1}{2}c_1(L)^2 + \frac{1}{6}c_1(L)^3 + \frac{1}{24}c_1(L)^4
$$

なので,

$$
\begin{aligned}
\chi(X,L) = \int_X \Bigg\{ & \frac{1}{24}L^4 - \frac{1}{12}K_XL^3 + \frac{1}{24}\big(K_X^2 + c_2(T_X)\big)L^2 - \frac{1}{24}K_Xc_2(T_X)L \\
& + \frac{1}{720}\big(-K_X^4 + 4K_X^2c_2(T_X) + 3c_2(T_X)^2 - K_Xc_3(T_X) - c_4(T_X)\big)\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

また

$$
\chi(X,\mathcal{O}_X) = \frac{1}{720}\int_X \big(-c_1(T_X)^4 + 4c_1(T_X)^2c_2(T_X) + 3c_2(T_X)^2 + c_1(T_X)c_3(T_X) - c_4(T_X)\big).
$$

3.7 交点数と特異エルミート計量

Definition 3.27. X をコンパクト複素多様体とする. $L_1, \ldots, L_n$ を正則直線束として, 交点数を

$$
L_1 \cdots L_n := c_1(L_1) \cdots c_1(L_n) \in H^{2n}(X,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}
$$

として定義する. これは h_i を L_i の Hermite 計量とすれば

$$
L_1 \cdots L_n := \int_X \Big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{L_1,h_1}\Big) \wedge \cdots \wedge \Big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{L_n,h_n}\Big)
$$

となる.

同様にして E を正則ベクトル束, ω を X の Kähler 形式として

$$c_i(E)\cdot[\omega]^{n-i} := \int c_i(E,h)\wedge\omega^{n-i}$$

と定める. h は E の Hermite 計量である. 特に

$$c_1(E)\cdot[\omega]^{n-1} = \int \mathrm{tr}\Big(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h}\Big)\wedge\omega^{n-1}$$

$[\omega]$ と鉤括弧をつけている理由について軽く説明する. 簡単のため X をコンパクト Kähler とする. Bott-Chern cohomology group

$$H^{1,1}(X,\mathbb{R}) := \frac{d\text{-closed } (1,1)\text{-form}}{\partial\bar{\partial} \text{ exact } (1,1) \text{ form}} \underset{X \text{ Kähler}}{=} \frac{d\text{-closed } (1,1)\text{-form}}{d \text{ exact } (1,1) \text{ form}}$$

として定義する. すると X Kähler より

$$H^{1,1}(X,\mathbb{R})\subset H^2(X,\mathbb{R}) \quad c_1(E)\in H^{1,1}(X,\mathbb{R})$$

である. したがって Kähler 形式を ω について, $[\omega]\in H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ をその同値類とすれば $c_i(E)$ と交点数が考えられる.

4.20 で使う補題を示しておく

Lemma 3.28. X をコンパクト *Kähler* 多様体とし, L を X 上の正則直線束とする. ω を *Kähler* 形式とし,

$$c_1(L) = [\omega]\in H^{1,1}(X,\mathbb{R})$$

が成り立つと仮定する. このとき L は *positive* である. 特に, *Kodaira* の埋め込み定理により, L は *ample* である.

Proof. 任意に L 上の Hermite 計量 h_0 を一つ取る. Chern–Weil 理論より

$$[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{L,h_0}] = c_1(L)\in H^{1,1}(X,\mathbb{R})$$

である. 仮定より $c_1(L)=[\omega]$ なので,

$$[\omega - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{L,h_0}] = 0$$

が成り立つ.

X はコンパクト Kähler であるから，$\partial\overline{\partial}$-lemma (下) により，ある実数値の滑らかな関数 $\varphi \in C^\infty(X,\mathbb{R})$ が存在して

$$\omega - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{L,h_0} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi$$

と書ける．そこで L 上の新しい Hermite 計量 h を

$$h := h_0 e^{-\varphi}$$

によって定めると

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{L,h} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{L,h_0} + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi = \omega$$

となり positive 計量 である． □

Lemma 3.29. *X が Kähler で α が d-exact ならば，$\alpha = \partial\overline{\partial}\psi$ となる ψ が存在する．*

これの証明はどこかに載っていると思われるので省略する．

交点数の定義からわかることを示しておく．

Lemma 3.30. *$L_1,\ldots,L_n$ が positive(ample) ならば，$L_1\cdots L_n > 0$.*

Proof. ω を Kähler 形式とする．これは h_i を L_i の positive な計量とすれば，コンパクト性よりある $c>0$ があって

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{L_i,h_i} > c\omega$$

となる．よって

$$L_1\cdots L_n := \int_X \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{L_1,h_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{L_n,h_n}\right) > c^n\int_X \omega^n > 0.$$

□

この証明は L_i が nef の場合でも有効である．つまり

Lemma 3.31. *$L_1,\ldots,L_n$ が nef ならば，$L_1\cdots L_n \geq 0$.*

じゃあ特異 Hermite 計量を用いて定義される big や pseudo-effective でも成り立つと思われるが，それは間違いである．曲面上の Exceptional divisor E は pseudo-effective だが $E^2 = -1$ であるためである．これは

カレントの意味で外積 $\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{L_1,h_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{L_n,h_n}\right)$ が定義ができない

に基づく.

これに関してはいろんな回避法がある. [BEGZ10] では non-pluripolar product $\langle T_1 \cdots T_p \rangle$ というカレントの新たな積を定義した. もちろん直線束の交点数とは対応しないが, 次が知られている.

Theorem 3.32 (Fujita 近似定理 [BEGZ10, section 2])**.** *L を big な直線束とし h を L の特異 Hermite 計量で, minimal singularity を持つとする. この時*

$$\left\langle \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{L,h} \right)^n \right\rangle = \mathrm{vol}(L) := \lim_{k\to\infty} \frac{n!}{k^n} \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, L^{\otimes k})$$

minimal singularity に関しては [Dem12, Section 6] 参照

4 Hermite–Einstein 計量

4.1 Notation

以下, X は n 次元コンパクト Kähler 多様体 とする.[11] g を Kähler 計量, ω を g に付随する Kähler form とする.

E を rank r の正則ベクトル束とする. また局所的な話をするとき, $(U, z^1, \ldots, z^n)$ を X の座標近傍とし, e_α $(\alpha = 1, \ldots, r)$ を local frame とする. すると E^* の local frame は $e^{*,\alpha}$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ となり, $\mathrm{End}(E) = E^* \otimes E$ の local frame は

$$e^{*,\alpha} \otimes e_\beta \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, r$$

となる.

h を E の Hermite 計量とする. Chern 曲率を $F_{E,h}$ とする. $F_{E,h}$ は $\mathrm{End}(E)$ 値 $(1,1)$-form であり, 局所的に書くと

$$F_{E,h} = R_{i\bar{j}\alpha}^{\beta} \underbrace{e^{*,\alpha} \otimes e_\beta}_{\mathrm{End}(E)\text{ 値}} \otimes \underbrace{dz^i \wedge d\overline{z^j}}_{(1,1)\text{-form}}$$

と書けるのであった.

$h_{\alpha\bar{\beta}} = h(e_\alpha, e_\beta)$ とし, 逆行列を $h^{\bar{\beta}\alpha}$ とすると

$$R_{i\bar{j}\alpha\bar{\beta}} := h_{\gamma\bar{\beta}} R_{i\bar{j}\alpha}{}^{\gamma} = -\partial_i \partial_{\bar{j}} h_{\alpha\bar{\beta}} + \sum_{\gamma,\delta} h^{\bar{\delta}\gamma}\, \partial_i h_{\alpha\bar{\delta}}\, \partial_{\bar{j}} h_{\gamma\bar{\beta}}$$

である. ここで

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial z^i}, \qquad \partial_{\bar{j}} := \frac{\partial}{\partial \overline{z^j}}$$

である.

4.2 Λ_ω-operator

Definition 4.1. g を X の Kähler 計量とする. Kähler form を local に

$$\omega := \sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^{n} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\overline{z^j}$$

[11] [Kob14] も Kähler でやっているのでそれに合わせた. Hermitian でどれくらいできるかは確かに気になるところではある. おそらく基本的な部分は問題ない. [ZZZ25] を見た感じ, Orbifold Gauduchon で Donaldson-Uhlenbeck-Yau はできている. ただ Bogomolov-Gieseker を言うのに astheno-Kähler($\partial\bar{\partial}\omega^{n-2} = 0$) が必要らしい. コンパクトは積分をするために必要. 複素多様体は向きづけ可能なので積分できる.

とかくとき, real $(1,1)$-form α について,

$$\Lambda_\omega(\alpha) = \Lambda_\omega\Big(\sum_{i,j=1}^{n} \sqrt{-1}\alpha_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\overline{z^j}\Big) := g^{\bar{j}i}\alpha_{i\bar{j}} \quad \text{where } \alpha \underset{\text{local}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \sqrt{-1}\alpha_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\overline{z^j}$$

と定義する. $g^{\bar{j}i}$ は $g_{i\bar{j}}$ の逆行列とする.

α が real とは $\alpha_{j\bar{i}} = \overline{\alpha_{i\bar{j}}}$ なることである.

Remark 4.2. 微分幾何で tr_ω というものがある. これは

$$\mathrm{tr}_\omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} \sqrt{-1}\alpha_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\overline{z^j} \right) = g^{\bar{j}i}\alpha_{i\bar{j}}$$

である. したがって $\mathrm{tr}_\omega = \Lambda_\omega$ である. ちなみに微分幾何の論文によっては $\frac{1}{2\pi}$ をかけていたりするので, 注意が必要である. [12]

Remark 4.3. 調和積分論を知っている人は Λ_ω は $\omega\wedge$ の formal adjoint である.

Proposition 4.4. *real* $(1,1)$*-form* α, β *について次が成り立つ.*

$$\begin{aligned} n\,\alpha \wedge \omega^{n-1} &= \Lambda_\omega \alpha \cdot \omega^n \\ n(n-1)\alpha \wedge \beta \wedge \omega^{n-2} &= (\Lambda_\omega\alpha\Lambda_\omega\beta - \langle \alpha, \beta \rangle_\omega)\,\omega^n \end{aligned}$$

ここで $(1,1)$-形式 α, β の内積を以下で定める

$$\langle \alpha, \beta \rangle_\omega := g^{\bar{j}i} g^{\bar{\ell}k} \alpha_{i\bar{\ell}} \beta_{k\bar{j}} \quad \textit{where } \alpha = \sqrt{-1}\,\alpha_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\overline{z^j}, \beta = \sqrt{-1}\,\beta_{i\bar{j}}\, dz^i \wedge d\overline{z^j}$$

Proof. 証明の概略を述べる. この等式は点ごとの線形代数の等式である. 点 $p \in X$ を固定してよい. うまく座標変換をすることで, 点 p では

$$\omega = \sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n} dz^i \wedge d\overline{z^i} \quad \alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i\bar{i}}\sqrt{-1}\, dz^i \wedge d\overline{z^i} \quad \beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_{i\bar{i}}\sqrt{-1}\, dz^i \wedge d\overline{z^i}$$

とかくことができる. [13] ここで

$$dV := \sqrt{-1}\, dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge \sqrt{-1}\, dz^n \wedge d\bar{z}^n$$

[12] 最近微分幾何の研究をして論文によって定数倍の定義が異なるのでかなりストレスだった. 代数幾何勢からすると「論文によって交点数が定数倍の $\frac{1}{2\pi}$ 異なる」ことがあるのはなんか違和感がある. (ただ結果が変わっていないのは流石である)

[13] Hermitian 行列が unitary 行列で対角化できることを用いる. ただし点 p で成り立つ式で, p の近傍では成り立たないことに注意! (正則性が強すぎるため)

とすると計算すれば

$$\omega^n = n!dV \quad \alpha \wedge \omega^{n-1} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i\bar{i}}\right)(n-1)!dV \quad \alpha \wedge \beta \wedge \omega^{n-2} = \left(\sum_{i \neq j} \alpha_{i\bar{i}}\beta_{j\bar{j}}\right)(n-2)!dV$$

$$\Lambda_\omega \alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i\bar{i}}, \quad \langle \alpha, \beta \rangle_\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i\bar{i}}\beta_{i\bar{i}} \quad \Lambda_\omega \alpha \, \Lambda_\omega \beta - \langle \alpha, \beta \rangle_\omega = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i\bar{i}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{j\bar{j}}\right) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i\bar{i}}\beta_{i\bar{i}} = \sum_{i \neq j} \alpha_{i\bar{i}}\beta_{j\bar{j}}.$$

となるので, 係数を調整すれば欲しい式が得られる. □

もちろん上は End(E)-値 $(1,1)$-form に対しても成り立つ. 以下の形で使うのでまとめておく.

Corollary 4.5.

$$n \, \mathrm{tr}_E \left(\sqrt{-1}F_{E,h}\right) \wedge \omega^{n-1} = \mathrm{tr}_E \left(\Lambda_\omega \sqrt{-1}F_{E,h}\right) \omega^n.$$

$$\begin{aligned} &n(n-1) \, \mathrm{tr}_E \left((\sqrt{-1}F_{E,h}) \wedge (\sqrt{-1}F_{E,h})\right) \wedge \omega^{n-2} \\ &= \left\{ \mathrm{tr}_E \left(\left(\Lambda_\omega \sqrt{-1}F_{E,h}\right)^2 \right) - \mathrm{tr}_E \left(\left\langle \sqrt{-1}F_{E,h}, \sqrt{-1}F_{E,h} \right\rangle_\omega \right) \right\} \omega^n. \end{aligned}$$

4.3 Hermite–Einstein 計量の定義と性質

Definition 4.6. h が E の Hermite–Einstein 計量であるとは, ある定数 c があって

$$\Lambda_\omega \left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E,h}\right) = c \mathrm{Id}_E \quad \mathrm{End}(E) \text{ 値} \tag{4.1}$$

となること. ここで $F_{E,h}$ は h の Chern 曲率とする.
local な座標で書けば (4.1) は次の方程式と同じである.

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} g^{\bar{j}i} R^{\beta}_{i\bar{j}\alpha} e^{*,\alpha} \otimes e_\beta = c\delta^\beta_\alpha e^{*,\alpha} \otimes e_\beta \Leftrightarrow g^{\bar{j}i} R^{\beta}_{i\bar{j}\alpha} = c\delta^\beta_\alpha \quad \forall \alpha, \beta = 1, \ldots, r$$

[Kob14, Chapter 4] と定数倍 (2π 倍) ずれていることに注意! また [Kob14, Chapter 4] は非常に見づらいので, 上のように定義した.

Proposition 4.7. *Hermite–Einstein* 計量の式 (4.1) における c について

$$c = \frac{n \int_X \mathrm{tr} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E,h} \wedge \omega^{n-1}}{r \int_X \omega^n} = \frac{n c_1(E) \cdot [\omega]^{n-1}}{r[\omega]^n}$$

特に c は位相不変量である.

Proof. (4.1) から関数としての等式

$$cr = \mathrm{tr}(c\mathrm{Id}_E) \underset{(4.1)}{=} \mathrm{tr}\left(\Lambda_\omega(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h})\right) \tag{4.2}$$

を得る. よって $\wedge^n$ して X 上で積分して

$$\begin{aligned} cr\left(\int_X \omega^n\right) = \int_X cr\omega^n &\underset{(4.2)}{=} \int_X \mathrm{tr}\left(\Lambda_\omega(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h})\right)\omega^n \\ &\underset{\text{Cor. } 4.5}{=} \int_X n\,\mathrm{tr}_E\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h}\right)\wedge\omega^{n-1} = nc_1(E)\cdot[\omega]^{n-1} \end{aligned}$$

最後の等式は以下の事実から.

$$c_1(E) \underset{\text{Cor. } 3.9}{=} [\mathrm{tr}_E\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h}\right)] \in H^2(X,\mathbb{R})$$

□

Remark 4.8. [Kob14] では次の定義もある:

Definition 4.9. φ は M 上で定義された実関数として, h が factor φ をもつ weak Hermite–Einstein であるとは

$$\Lambda_\omega(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h}) = \varphi\mathrm{Id}_E \quad \mathrm{End}(E) \text{ 値}$$

となること.

次が知られている.

Proposition 4.10 ([Kob14, Prop 4.2.4]). コンパクト *Kähler* 多様体 (M,g) 上の *Hermite* ベクトル束 (E,h) が *factor* φ をもつ *weak Hermite–Einstein* を満たすとする. このとき, ある *conformal change*

$$h \longrightarrow h' = ah$$

が存在して, (E,h') は定数 c をもつ *Hermite–Einstein* を満たす. このような *conformal change* は *homothety* を除いて一意である.

つまり weak Hermite–Einstein を持てば Hermite–Einstein である.

上の事実を用いると次が言える.

Proposition 4.11. *(1)* 直線束 (L,h) は *weak Hermite–Einstein.* 特に *Hermite–Einstein* である.

(2) (E,h) が定数 c を持つ *Hermite–Einstein* ならば, 双対 (E^*,h^*) は定数 $-c$ を持つ *Hermite–Einstein* である.

(3) (E_1,h_1) と (E_2,h_2) がそれぞれ定数 c_1 と c_2 をもつ *Hermite–Einstein* ならば, $(E_1\otimes E_2, h_1\otimes h_2)$ も定数 c_1+c_2 をもつ *Hermite–Einstein* である.

(4) $(E_1\oplus E_2, h_1\oplus h_2)$ が定数 c をもつ *Hermite–Einstein* であることは, (E_1,h_1) と (E_2,h_2) がともに同じ定数 c をもつ *Hermite–Einstein* であることと同値である.

Proof. (1). $\mathrm{End}(L)$ は自明なので, 関数 $\varphi := \Lambda_\omega(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{L,h})$ と定義すれば,

$$\Lambda_\omega(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{L,h}) \underset{\varphi\text{ の定義}}{=} \varphi \underset{L\text{ は直線束}}{=} \varphi\mathrm{Id}_L$$

よって weak Hermite–Einstein である.

(2). 2.24 から $(R_\lambda^*)_\alpha{}^\beta = -(R_\lambda)_\beta{}^\alpha$ である. つまり

$$(R_{h^*})^\beta_{i\bar{j}\alpha} = -(R_h)^\alpha_{i\bar{j}\beta}$$

が成り立つので,

$$g^{\bar{j}i}(R_{h^*})^\beta_{i\bar{j}\alpha} \underset{\text{上の式}}{=} -g^{\bar{j}i}(R_h)^\alpha_{i\bar{j}\beta} \underset{(4.1)}{=} -c\delta^\alpha_\beta$$

これは定数 $-c$ を持つ Hermite–Einstein であることを意味する.

(3). 2.24 から $F_{E_1\otimes E_2,h_1\otimes h_2} = F_{E_1,h_1}\otimes\mathrm{Id}_{E_2} + \mathrm{Id}_{E_1}\otimes F_{E_2,h_2}$ であるので

$$\begin{aligned}\Lambda_\omega(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E_1\otimes E_2,h_1\otimes h_2}) &\underset{\text{Def. }2.24}{=} \Lambda_\omega(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E_1,h_1}\otimes\mathrm{Id}_{E_2}) + \Lambda_\omega(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mathrm{Id}_{E_1}\otimes F_{E_2,h_2}) \\ &\underset{(4.1)}{=} c_1(\mathrm{Id}_{E_1}\otimes\mathrm{Id}_{E_2}) + c_2(\mathrm{Id}_{E_1}\otimes\mathrm{Id}_{E_2}) = (c_1+c_2)\mathrm{Id}_{E_1\otimes E_2}\end{aligned}$$

(4). 2.24 から

$$\Lambda_\omega(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E_1\oplus E_2,h_1\oplus h_2}) = c\mathrm{Id}_{E_1\oplus E_2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\Lambda_\omega(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E_1,h_1}) & 0 \\ 0 & \Lambda_\omega(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E_2,h_2})\end{pmatrix} \underset{\text{Def. }2.24}{=} \begin{pmatrix}c\mathrm{Id}_{E_1} & 0 \\ 0 & c\mathrm{Id}_{E_2}\end{pmatrix}$$

□

4.4 Hermite–Einstein 計量と Bogomolov-Gieseker 不等式

次の定理は [Kob14] によると, Lübke が示したものであるらしい.

Theorem 4.12 (Bogomolov-Gieseker 不等式)**.** *E が Hermite–Einstein 計量を持つとき, 次の不等式が成り立つ.*

$$\Delta(E)[\omega]^{n-2} \underset{\text{Def. 3.21}}{=} \left(2rc_2(E) - (r-1)c_1(E)^2\right)[\omega]^{n-2} \geq 0$$

この不等式を Bogomolov-Gieseker 不等式という.
さらに上の不等式の等号が成立するとき

$$F_{E,h} = \underbrace{\frac{1}{r}\mathrm{tr}_E(F_{E,h})}_{(1,1)\text{ 微分形式}} \cdot \mathrm{Id}_E \quad \mathrm{End}(E) \text{ 値 } (1,1)\text{-form.}$$

となる. (この時 E は projectively Hermitian flat という)

Remark 4.13. 後にやる Kobayashi-Hitchin 対応を認めれば, 次を得る.

Theorem 4.14. *E が stable(もっと強く semistable) ならば Bogomolov-Gieseker 不等式が成り立つ*

今回やる証明は微分幾何学的だが, X が projective ならば代数幾何学的な (しかもかなり elementary!) な証明が Miyaoka [Miy87] で知られている. 正標数でやるなら多分こっちだと思う.

今回この証明をしなかったのは後にやる Higgs 束に関しては代数的な証明がないからである. Miyaoka-Yau など Chern 類に関する不等式に関して, 代数幾何学だけの証明はまだない. (つまり何かしらの微分幾何学の手法を裏で用いている.)

Proof of Theorem 4.12. $(1,1)$ 微分形式 $\alpha := \frac{1}{r}\mathrm{tr}_E(F_{E,h})$ とし, trace free part $F^{\circ}_{E,h} := F_{E,h} - \alpha \cdot \mathrm{Id}_E$ とする. 今 (E,h) は定数 c を持つ Hermite–Einstein 計量なので

$$\Lambda_\omega \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h} = c\mathrm{Id}_E \Rightarrow \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Lambda_\omega\alpha = \frac{1}{r}\mathrm{tr}_E(\Lambda_\omega\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h}) = \frac{1}{r}\mathrm{tr}_E(c\mathrm{Id}_E) = c \tag{4.3}$$

これより

$$\Lambda_\omega(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F^{\circ}_{E,h}) = \underbrace{\Lambda_\omega\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h}}_{=c\mathrm{Id}_E} - \underbrace{\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Lambda_\omega\alpha}_{=c \text{ by } (4.3)} \cdot \mathrm{Id}_E \quad = \quad 0 \tag{4.4}$$

3.22 から

$$\Delta(E)[\omega]^{n-2} = \int_X \frac{r}{4\pi^2}\mathrm{tr}_E(F^\circ_{E,h}\wedge F^\circ_{E,h})\wedge\omega^{n-2} = -\frac{r}{4\pi^2}\int_X \mathrm{tr}_E((\sqrt{-1}F^\circ_{E,h})\wedge(\sqrt{-1}F^\circ_{E,h}))\wedge\omega^{n-2}$$

$$\underset{\text{Cor. 4.5}}{=} -\frac{r}{4\pi^2 n(n-1)}\int_X \underbrace{\mathrm{tr}_E\left((\Lambda_\omega\sqrt{-1}F^\circ_{E,h})^2\right)}_{=0 \text{ by } (4.4)}\omega^n + \frac{r}{4\pi^2 n(n-1)}\int_X \underbrace{\mathrm{tr}_E\left(\langle\sqrt{-1}F^\circ_{E,h},\sqrt{-1}F^\circ_{E,h}\rangle_\omega\right)}_{\geq 0 \text{ by Prop. } 4.4}\omega^n$$

$$\underset{\text{Cor. 4.5}}{\geq} 0$$

等号が成立するときは $\langle\sqrt{-1}F^\circ_{E,h},\sqrt{-1}F^\circ_{E,h}\rangle_\omega = 0$ となるが, 内積の性質から,

$$0 = F^\circ_{E,h} := F_{E,h} - \alpha\cdot\mathrm{Id}_E := F_{E,h} - \frac{1}{r}\mathrm{tr}_E(F_{E,h})$$

□

Corollary 4.15. $c_1(E)=0$ かつ E が *Hermite–Einstein* 計量を持つとき, 次の不等式が成り立つ.

$$c_2(E)\cdot[\omega]^{n-2}\geq 0$$

上の不等式の等号が成立するとき, 別の計量 $h' = he^{-\varphi}$ と取り替えると

$$F_{E,h'} = 0$$

となる. このとき E は *Hermitian flat* という.

Proof. 前半は明らかである. 等号成立に関してのみ示す.

h が定数 c の Hermite–Einstein 計量とするとき, $c_1(E)=0$ なので命題 4.7 から $c=0$ である. よって $\alpha := \frac{1}{r}\mathrm{tr}_E(F_{E,h})$ とすると等号成立条件から

$$F_{E,h} - \alpha\cdot\mathrm{Id}_E = 0 \Rightarrow [\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\alpha] = [\frac{1}{r}\mathrm{tr}_E(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h})] = \frac{1}{r}c_1(E) = 0\in H^2(X,\mathbb{R})$$

よって下の補題 ($\partial\overline{\partial}$ 補題)4.16 より

$$\alpha = -\partial\overline{\partial}\varphi$$

となる C^∞ 級関数がある. そこで $h' = e^{-\varphi}h$ とすれば

$$F_{E,h'} = \partial\overline{\partial}\varphi\mathrm{Id}_E + F_{E,h} = -\alpha\cdot\mathrm{Id}_E + \alpha\cdot\mathrm{Id}_E = 0$$

□

Lemma 4.16. *X が Kähler で α が d-exact ならば, $\alpha = \partial\overline{\partial}\psi$ となる ψ が存在する.*

これの証明はどこかに載っていると思われるので省略する.

4.5 Miyaoka–Yau 不等式と Chen-Ogiue の定理・Kähler-Einstein 計量・Yau の定理

この Miyaoka–Yau 不等式の証明はあまり好きではない. 私は Higgs 束を用いた証明 (6 章) の方が好きだが, 現時点でできるし私の勉強のために書いておく.

4.5.1 Chen-Ogiue の定理

2 章の内容 $(+\alpha)$ をまとめておこう

$\partial_i := \frac{\partial}{\partial z^i}, \partial_{\bar{j}} := \frac{\partial}{\partial \overline{z^j}}$ と略記する. $\omega = \sqrt{-1}g_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\overline{z^j}$ を Kähler 計量とするとき

- Christoffel 記号. $\Gamma^i_{jk} = g^{\bar{l}i}\partial_j g_{k\bar{l}}$. $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$
- ω によって T_X に Hermite 計量 h を入れる時 ($h = g$ である), Chern 接続

  $$D_h : A^0(T_X) \to A^1(T_X)$$

  について, $e_i := \frac{\partial}{\partial z^i}$, s^i を C^∞ 関数とすると, connection form θ は $(1,0)$-form で $\theta = g^{-1}\partial g$ で与えられる. これはつまり

  $$D_h(s^i e_i) = (\partial + \overline{\partial})s^i \otimes e_i + s^j\theta^i_j \otimes e_i \quad \theta^i_j = g^{\bar{l}i}\partial_j g_{k\bar{l}}dz^k = \Gamma^i_{jk}dz^k$$

  となる.
- curvature tensor を

  $$R^j_{ik\bar{l}} := -\partial_{\bar{l}}\Gamma^j_{ik}$$

  と定める.
- D_h を Chern 接続 として, Chern 曲率は

  $$F_{T_X,h} := D_h^2 = \overline{\partial}(h^{-1}\partial h) \quad \mathrm{End}(T_X) \text{ 値 } (1,1)\text{-form}$$

  とおく.

  $$F_{T_X,h} = R^j_{ik\bar{l}}\frac{\partial}{\partial z^j} \otimes dz^i \otimes dz^k \wedge d\overline{z^l}$$

  である.

- Riemann curvature tensor (??) を

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} := g_{p\bar{j}} R^p_{ik\bar{l}}$$

とすると次が成り立つ

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = -\partial_i \partial_{\bar{j}} g_{k\bar{l}} + g^{\bar{q}p} (\partial_i g_{k\bar{q}})(\partial_{\bar{j}} g_{p\bar{l}})$$

Kähler condition より

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = R_{k\bar{j}i\bar{l}} = R_{i\bar{l}k\bar{j}}$$

i, k や $\bar{j}, \bar{l}$ は入れ替えてもよい. また Griffith positivity や Nakano positivity はこれでわかる.

- Ricci curvature tensor を

$$R_{i\bar{j}} := g^{\bar{l}k} R_{i\bar{j}k\bar{l}}$$

とすると次が成り立つ

$$R_{i\bar{j}} = -\partial_i \partial_{\bar{j}} \log \det(g)$$

Ricci 曲率は以下のように定める.

$$Ric(\omega) := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\overline{z^j}$$

これによって実 $(1,1)$-form になり, $[Ric(\omega)] = c_1(X) \in H^2(X, \mathbb{R})$ である.

- scalar 曲率を

$$R(\omega) := \Lambda_\omega Ric(\omega) = \frac{1}{2\pi} g^{\bar{j}i} R_{i\bar{j}} = \frac{1}{2\pi} g^{\bar{j}i} g^{\bar{l}k} R_{i\bar{j}k\bar{l}}$$

として定義する.

$Ric(\omega)$ の定義は $\frac{1}{2\pi}$ ズレることがあるので注意.

以下の等式は Chen–Ogiue [CO75] による. 今回は [His24] を参照した.

Proposition 4.17. *[CO75][His24]* (X, ω) を n 次元 コンパクト *Kähler* 多様体 とする.

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}(\omega) := \mathrm{Ric}(\omega) - \frac{R(\omega)}{n}\omega \quad \widetilde{\mathrm{Rm}}_{i\bar{j}k\bar{l}}(\omega) := \frac{1}{2\pi} \mathrm{R}_{i\bar{j}k\bar{l}}(\omega) - \frac{R(\omega)}{n(n+1)} \left(g_{i\bar{j}} g_{k\bar{l}} + g_{i\bar{l}} g_{k\bar{j}} \right)$$

と定義する．このとき

$$
\begin{aligned}
&\left\{2(n+1)c_2(X) - nc_1^2(X)\right\}[\omega]^{n-2} \\
&= \left\{c_1^2(X) - 2(n+1)\operatorname{ch}_2(X)\right\}[\omega]^{n-2} \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\int_X \left\{(n+1)\left|\widetilde{\mathrm{Rm}}(\omega)\right|_\omega^2 - (n+2)\left|\widetilde{\mathrm{Ric}}(\omega)\right|_\omega^2\right\}\omega^n.
\end{aligned}
$$

Proof. 前半の等号は Prop. 3.17 から

$$
\operatorname{ch}_1(X) = c_1(X) = c_1, \quad \operatorname{ch}_2(X) = \frac{1}{2}\big(c_1^2(X) - 2c_2(X)\big).
$$

より計算すればよい．後半の等号に関して簡単のため

$$
\Theta = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{T_X,h}
$$

とおく．3.16 より

$$
c_1(X,\omega) = [\operatorname{tr}\Theta] \quad \operatorname{ch}_2(X,\omega) = [\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\Theta\wedge\Theta)]
$$

であるので

$$
\left\{c_1^2(X) - 2(n+1)\operatorname{ch}_2(X)\right\}[\omega]^{n-2} = \int_X \{(\operatorname{tr}\Theta)\wedge(\operatorname{tr}\Theta) - (n+1)\operatorname{tr}(\Theta\wedge\Theta)\}\wedge\omega^{n-2}. \tag{4.5}
$$

Claim 4.18. 次が成り立つ

- $\operatorname{tr}\Theta = \mathrm{Ric}(\omega)$
- $\Lambda_\omega \mathrm{tr}\Theta = R(\omega)$
- $\langle \mathrm{tr}\Theta, \mathrm{tr}\Theta\rangle_\omega = |\mathrm{Ric}(\omega)|_\omega^2$
- $\operatorname{tr}\left((\Lambda_\omega\Theta)^2\right) = |\mathrm{Ric}(\omega)|_\omega^2$
- $\operatorname{tr}(\langle\Theta,\Theta\rangle_\omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2|\mathrm{Rm}(\omega)|_\omega^2$ ここで $|\mathrm{Rm}(\omega)|_\omega^2 := g^{\bar{q}i}g^{\bar{j}p}g^{\bar{s}k}g^{\bar{l}r}R_{i\bar{j}k\bar{l}}R_{p\bar{q}r\bar{s}}$
- $\left|\widetilde{\mathrm{Ric}}(\omega)\right|_\omega^2 = |\mathrm{Ric}(\omega)|_\omega^2 - \frac{R(\omega)^2}{n}$.
- $\left|\widetilde{\mathrm{Rm}}(\omega)\right|_\omega^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2|\mathrm{Rm}(\omega)|_\omega^2 - \frac{2R(\omega)^2}{n(n+1)}$.

この claim を認めると

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{tr}\Theta)\wedge(\operatorname{tr}\Theta)\wedge\omega^{n-2} &\underset{\text{Prop. 4.4}}{=} \frac{1}{n(n-1)}\left\{(\Lambda_\omega \operatorname{tr}\Theta)^2 - \langle \operatorname{tr}\Theta, \operatorname{tr}\Theta\rangle_\omega\right\}\omega^n \\
&\underset{\text{Claim. 4.18}}{=} \frac{1}{n(n-1)}\left\{R(\omega)^2 - |\operatorname{Ric}(\omega)|^2\right\}\omega^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\Theta\wedge\Theta)\wedge\omega^{n-2} &\underset{\text{Cor. 4.5}}{=} \frac{1}{n(n-1)}\left\{\operatorname{tr}\left((\Lambda_\omega\Theta)^2\right) - \operatorname{tr}\left(\langle\Theta,\Theta\rangle_\omega\right)\right\}\omega^n \\
&\underset{\text{Claim. 4.18}}{=} \frac{1}{n(n-1)}\left\{|\operatorname{Ric}(\omega)|^2 - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2|\operatorname{Rm}(\omega)|^2\right\}\omega^n.
\end{aligned}
$$

以上より

$$
\begin{aligned}
&\left\{c_1^2(X) - 2(n+1)\operatorname{ch}_2(X)\right\}[\omega]^{n-2} \\
&\underset{(4.5)}{=} \int_X \left\{(\operatorname{tr}\Theta)\wedge(\operatorname{tr}\Theta) - (n+1)\operatorname{tr}(\Theta\wedge\Theta)\right\}\wedge\omega^{n-2}. \\
&\underset{\text{上二つ}}{=} \frac{1}{n(n-1)}\int_X \left\{(n+1)\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2|\operatorname{Rm}(\omega)|^2 - (n+2)\,|\operatorname{Ric}(\omega)|^2 + R(\omega)^2\right\}\omega^n. \qquad (4.6) \\
&\underset{\text{Claim. 4.18}}{=} \frac{1}{n(n-1)}\int_X \left\{(n+1)\left|\widetilde{\operatorname{Rm}(\omega)}\right|_\omega^2 - (n+2)\left|\widetilde{\operatorname{Ric}(\omega)}\right|_\omega^2\right\}\omega^n.
\end{aligned}
$$

□

Proof of Claim 4.18. 一つずつ計算していく. δ を Kronecker delta とする.

$$
F_{T_X,h} = R_{ik\bar{l}}^{j}\frac{\partial}{\partial z^j}\otimes dz^i\otimes dz^k\wedge d\overline{z^l} = g^{\bar{p}j}R_{i\bar{p}k\bar{l}}\frac{\partial}{\partial z^j}\otimes dz^i\otimes dz^k\wedge d\overline{z^l}
$$

であることに注意すれば

$$
\operatorname{tr}\Theta \underset{\text{定義}}{=} \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\delta_j^i g^{\bar{p}j}R_{i\bar{p}k\bar{l}}dz^k\wedge d\overline{z^l} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}g^{\bar{p}i}R_{i\bar{p}k\bar{l}}dz^k\wedge d\overline{z^l} \underset{\text{定義}}{=} \operatorname{Ric}(\omega)
$$

特に $\Lambda_\omega \mathrm{tr}\Theta = \Lambda_\omega \operatorname{Ric}(\omega) = R(\omega)$ となり, $\langle \mathrm{tr}\Theta, \mathrm{tr}\Theta\rangle_\omega = \langle \operatorname{Ric}(\omega), \operatorname{Ric}(\omega)\rangle_\omega = |\operatorname{Ric}(\omega)|_\omega^2$ も言える. 次に $\Lambda_\omega\Theta$ を計算すると

$$
\Lambda_\omega\Theta \underset{\text{定義}}{=} \frac{1}{2\pi}g^{\bar{l}k}g^{\bar{p}j}R_{i\bar{p}k\bar{l}}\frac{\partial}{\partial z^j}\otimes dz^i \underset{\text{Kähler 条件}}{=} \frac{1}{2\pi}g^{\bar{l}k}g^{\bar{p}j}R_{k\bar{l}i\bar{p}}\frac{\partial}{\partial z^j}\otimes dz^i \underset{\text{定義}}{=} \frac{1}{2\pi}g^{\bar{p}j}R_{i\bar{p}}\frac{\partial}{\partial z^j}\otimes dz^i
$$

以上より

$$\operatorname{tr}\left((\Lambda_\omega\Theta)^2\right) \underset{\text{上の式}}{=} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \delta_j^k\delta_l^i g^{\overline{p}j}R_{i\overline{p}}g^{\overline{q}l}R_{k\overline{q}} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 g^{\overline{p}j}g^{\overline{q}i}R_{i\overline{p}}R_{j\overline{q}} = |\operatorname{Ric}(\omega)|_\omega^2$$

ここで $Ric(\omega) := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\overline{z^j}$ を用いた

$$\langle\Theta,\Theta\rangle_\omega \underset{\text{定義}}{=} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \underbrace{g^{\bar{l}c}g^{\bar{d}k}}_{\langle\bullet,\bullet\rangle_\omega\text{ の項.}} g^{\overline{p}j}R_{i\overline{p}k\bar{l}}g^{\overline{q}b}R_{a\overline{q}c\bar{d}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial z^j}\otimes dz^i(\frac{\partial}{\partial z^b})\otimes dz^a}_{\mathrm{End}(E)\text{ 値}}$$

なので

$$\operatorname{tr}\left(\langle\Theta,\Theta\rangle_\omega\right) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \delta_b^i\delta_a^j g^{\bar{l}c}g^{\bar{d}k}g^{\overline{p}j}R_{i\overline{p}k\bar{l}}g^{\overline{q}b}R_{a\overline{q}c\bar{d}} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 g^{\overline{q}i}g^{\overline{p}j}g^{\bar{d}k}g^{\bar{l}c}R_{i\overline{p}k\bar{l}}R_{j\overline{q}c\bar{d}} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 |\operatorname{Rm}(\omega)|^2$$

$\langle\operatorname{Ric}(\omega),\omega\rangle_\omega = R(\omega), |\omega|_\omega^2 = n$ であるので

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{\operatorname{Ric}}(\omega)\right|^2 &= \left|\operatorname{Ric}(\omega) - \frac{R(\omega)}{n}\omega\right|^2 = |\operatorname{Ric}(\omega)|^2 - 2\frac{R(\omega)}{n}\langle\operatorname{Ric}(\omega),\omega\rangle_\omega + \frac{R(\omega)^2}{n^2}|\omega|_\omega^2 \\ &= |\operatorname{Ric}(\omega)|^2 - \frac{R(\omega)^2}{n}.\end{aligned}$$

次に $B_{i\bar{j}k\bar{l}} := g_{i\bar{j}}g_{k\bar{l}} + g_{i\bar{l}}g_{k\bar{j}}$ とおく. 各点で unitary frame を取れば,

$$|B|^2 = 2n(n+1), \qquad \langle\frac{\operatorname{Rm}(\omega)}{2\pi}, B\rangle = 2R(\omega)$$

が成り立つ. よって

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{\operatorname{Rm}}(\omega)\right|^2 &= \left|\frac{\operatorname{Rm}(\omega)}{2\pi} - \frac{R(\omega)}{n(n+1)}B\right|^2 = \left|\frac{\operatorname{Rm}(\omega)}{2\pi}\right|^2 - 2\frac{R(\omega)}{n(n+1)}\langle\frac{\operatorname{Rm}(\omega)}{2\pi}, B\rangle + \frac{R(\omega)^2}{n^2(n+1)^2}|B|^2 \\ &= \left|\frac{\operatorname{Rm}(\omega)}{2\pi}\right|^2 - 2\frac{R(\omega)}{n(n+1)}\cdot 2R(\omega) + \frac{R(\omega)^2}{n^2(n+1)^2}\cdot 2n(n+1) \\ &= \left|\frac{\operatorname{Rm}(\omega)}{2\pi}\right|^2 - \frac{4R(\omega)^2}{n(n+1)} + \frac{2R(\omega)^2}{n(n+1)} = \left|\frac{\operatorname{Rm}(\omega)}{2\pi}\right|^2 - \frac{2R(\omega)^2}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

□

4.5.2 Kähler-Einstein 計量・Miyaoka-Yau 不等式

Definition 4.19 (Kähler–Einstein 計量)**.** X の Kähler 計量 g について, ある定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ があって

$$\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial_i\partial_{\bar{j}}\log\det(g)}_{=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}R_{i\bar{j}}} = \sqrt{-1}\lambda g_{i\bar{j}} \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}R_{i\bar{j}} = \lambda g_{i\bar{j}}$$

となる時 g を Kähler–Einstein 計量という.

Proposition 4.20. g を定数 λ を持つ *Kähler–Einstein* 計量とする.

1. $\lambda > 0$ の時, $c_1(X) = c_1(-K_X)$ は *positive*. 特に *Fano* 多様体である.
2. $\lambda = 0$ の時, $c_1(X) = 0$. 特に (弱い意味での) *Calabi–Yau* 多様体である.
3. $\lambda < 0$ の時, $-c_1(X) = c_1(K_X)$ は *positive*. 特に *canonically polarized* 多様体である.
4. g によって T_X に *Hermite* 計量 h を入れると, h は定数 λ を持つ *Hermite–Einstein* 計量である.

Proof. (1). $\lambda > 0$ より

$$c_1(X) = [\mathrm{Ric}(\omega)] = \lambda[\omega] > 0$$

となるため補題 3.28 より従う. (2), (3) も同様である.

(4) は $\mathrm{End}(T_X)$ 値の等式変形をすると

$$\begin{aligned}
\Lambda_\omega\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{T_X,h}\right) &\underset{\text{定義}}{=} \Lambda_\omega\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}g^{\bar{p}j}R_{i\bar{p}k\bar{l}}\frac{\partial}{\partial z^j}\otimes dz^i\otimes dz^k\wedge d\overline{z^l}\right)\\
&\underset{\Lambda_\omega\text{ の定義}}{=} \frac{1}{2\pi}g^{\bar{l}k}g^{\bar{p}j}R_{i\bar{p}k\bar{l}}\frac{\partial}{\partial z^j}\otimes dz^i \underset{\text{Kähler 条件}}{=} \frac{1}{2\pi}g^{\bar{p}j}\underbrace{g^{\bar{l}k}R_{k\bar{l}i\bar{p}}}_{=:R_{i\bar{p}}}\frac{\partial}{\partial z^j}\otimes dz^i\\
&= g^{\bar{p}j}\underbrace{\frac{1}{2\pi}R_{i\bar{p}}}_{=\lambda g_{i\bar{p}}}\frac{\partial}{\partial z^j}\otimes dz^i \underset{\text{KE 条件}}{=} \lambda\underbrace{g^{\bar{p}j}g_{i\bar{p}}}_{=\delta_i^j}\frac{\partial}{\partial z^j}\otimes dz^i = \lambda\mathrm{Id}_{T_X}
\end{aligned}$$

よって (4.1) の式を満たすので Hermite–Einstein 計量である. □

さて X が Kähler–Einstein 計量を持てば, T_X が Hermite–Einstein 計量を持つので定理 4.12 より

$$\left(2nc_2(X) - (n-1)c_1(X)^2\right)[\omega]^{n-2} \geq 0$$

が成り立つ. 例えば曲面の場合は

$$4c_2 \geq c_1(X)^2$$

と同値である. 次の Miyaoka–Yau 不等式はこれよりも良い係数であることを言っている.

Theorem 4.21 (Miyaoka–Yau 不等式 [CO75, Yau77]). *X が Kähler–Einstein 計量 ω を持つ時, 次の Miyaoka–Yau 不等式が成り立つ.*

$$\left\{2(n+1)c_2(X) - nc_1^2(X)\right\}[\omega]^{n-2} \geq 0$$

さらに等号が成立するときは X の普遍被覆が $\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n$ の unit ball の三つに限られる.

例えば曲面の場合の Miyaoka–Yau は

$$3c_2 \geq c_1(X)^2$$

と同値である. 明らかに $4c_2 \geq c_1(X)^2$ よりも良い不等式である.

歴史的には以下の通り.

- 上の定理は Chen–Ogiue [CO75] で示されたので, 厳密的には Chen–Ogiue の定理である.
- [Miy77] が曲面の場合に $3c_2 \geq c_1(X)^2$ を示した. この場合は $K_X$big でもよい.
- [Yau77] で Yau が Kähler–Einstein 計量の存在を示して, $K_X$ample の場合の不等式

  $$\left(2(n+1)c_2(X) - nc_1(X)^2\right)c_1(K_X)^{n-2} \geq 0$$

  を示した.

なので Chen–Ogiue を引用すべきな気もするが, それは忘れられたらしく, Miyaoka–Yau 不等式と呼ばれる.

Proof. $\mathrm{Ric}(\omega) = \lambda\omega$ ならば $R(\omega) = n\lambda$ なので,

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}(\omega) \underset{\text{定義}}{=} \mathrm{Ric}(\omega) - \frac{R(\omega)}{n}\omega = \lambda\omega - \lambda\omega = 0$$

よって Prop 4.17 より

$$\begin{aligned}
&\left\{2(n+1)c_2(X) - nc_1^2(X)\right\}[\omega]^{n-2} \\
&\underset{\text{Prop } 4.17}{=} \frac{1}{n(n-1)}\int_X \left\{(n+1)\left|\widetilde{\mathrm{Rm}}(\omega)\right|_\omega^2 - (n+2)\left|\widetilde{\mathrm{Ric}}(\omega)\right|_\omega^2\right\}\omega^n \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\int_X \left\{(n+1)\left|\widetilde{\mathrm{Rm}}(\omega)\right|_\omega^2\right\}\omega^n \geq 0
\end{aligned}$$

等号成立するときは $\widetilde{\mathrm{Rm}}(\omega)=0$ である．よって

$$\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{R}_{i\bar{j}k\bar{l}}(\omega)=\frac{R(\omega)}{n(n+1)}\left(g_{i\bar{j}}g_{k\bar{l}}+g_{i\bar{l}}g_{k\bar{j}}\right)$$

となり，定数 holomorphic sectional curvature をもつ．古典的な結果[14]によって X の普遍被覆が $\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n$ の unit ball の三つに限られる． □

4.5.3 Yau の定理

Yau の定理 [Yau77] を述べておく．

Theorem 4.22. *X をコンパクト Kähler 多様体とする．K_X が ample または $c_1(K_X)=0$ ならば，Kähler-Einstein 計量が存在する．*

これを使えば次がわかる．

Theorem 4.23. *[Yau77] K_X ample ならば*

$$\left\{2(n+1)c_2(X)-nc_1^2(X)\right\}c_1(K_X)^{n-2}\geq 0$$

であり，等号が成立するときは X の普遍被覆が $\mathbb{C}^n$ の unit ball になる．

Proof. Yau の定理より Kähler–Einstein 計量が存在するため，定理 4.21 より従う． □

Theorem 4.24. *[Yau77] $c_1(K_X)=0$ ならば，任意の Kähler 形式 ω について*

$$\{c_2(X)\}\,[\omega]^{n-2}\geq 0$$

であり，等号が成立するとき，X の有限不分岐被覆が複素トーラスになる．

Proof. Yau の定理より Kähler–Einstein 計量が存在するため，定理 4.21 より従う．等号が成立するとき X の普遍被覆が $\mathbb{C}^n$ になるが，Bieberbach の古典的定理により，複素トーラスによって被覆される． □

$-K_X$ample の時は Kähler–Einstein 計量を持つとは限らないので次の形でしか書けない．

[14] かの有名な微分幾何の本 “Kobayashi–Nomizu” によると Hawley と Igusa が独立に示したとのことである．

Theorem 4.25 (=定理 4.21)**.** *$-K_X$ ample かつ Kähler–Einstein 計量を持てば*

$$\left\{2(n+1)c_2(X) - nc_1^2(X)\right\} c_1(X)^{n-2} \geq 0$$

であり，等号が成立するときは $X \cong \mathbb{CP}^n$ となる．

実際 Miyaoka–Yau が成り立たない Fano の例が [GKP22] により知られている．[GKP22, DGP24] より次がわかっている．[15]

Theorem 4.26 ([GKP22, DGP24])**.** *$-K_X$ ample かつ，K-semistable ならば*

$$\left\{2(n+1)c_2(X) - nc_1^2(X)\right\} c_1(X)^{n-2} \geq 0$$

であり，等号が成立するときは $X \cong \mathbb{CP}^n$ となる．

[15] もしかすると X が smooth な場合はこの結果よりも前に知られていたかもしれない．なお [GKP22, DGP24] は KLT 多様体で示している．

5 Slope-stability・Kobayashi–Hitchin 対応および Donaldson–Uhlenbeck–Yau の定理

4 章と同じく (X, ω, g) をコンパクト Kähler 多様体とする.

以下次の同一視をする.

$$\text{locally free sheaf} \underset{\text{同一視}}{=} \text{ベクトル束}$$

また torsion free sheaf を扱うが, わからなければ torsion free sheaf を locally free sheaf(ベクトル束) と思い込んでもよい. 実際 torsion free sheaf は余次元 2 以上を除いて locally free(ベクトル束) なので本質的な議論には余り差し支えがない.

以下 sheaf は coherent sheaf のみ扱う. また sheaf を今回あまり取り扱っていないので, 証明は概略のみを行う.

5.1 Slope-stability

Definition 5.1. E を torsion-free sheaf とする.

- E の slope を次で定める.
$$\mu(E) := \frac{c_1(E) \cdot [\omega]^{n-1}}{\mathrm{rank}(E)}$$
とする. E がベクトル束ならば
$$\mu(E) := \frac{c_1(E) \cdot [\omega]^{n-1}}{\mathrm{rank}(E)} = \frac{\int_X \mathrm{tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_{E,h}\right) \wedge \omega^{n-1}}{\mathrm{rank}(E)}$$
- E が (Mumford–Takemoto の意味で)stable(resp. semistable) であるとは, 任意の torsion free subsheaf $0 \neq F \subsetneq E$ について
$$\mu(F) < \mu(E) \quad (\text{resp. } \mu(F) \leq \mu(E)\ )$$
を満たすこと.

Remark 5.2. Mumford–Takemoto は曲線上のベクトル束のモジュライを作るために slope stability を作った (らしい). どうも GIT の stability と対応する (はず) である.(が私は知らない). 曲面上の安定束のモジュライを作るためには Gieseker stability が必要である. 詳しくは [HL10] 参照 (詳しい人は教えてください.)

Remark 5.3. 実は X が smooth projective ならば, locally free sheaf の finite projective resolution

が取れるので任意の coherent sheaf について Chern 類が定められる．ただコンパクト Kähler だとこの resolution が取れるとは限らない．しかしながら coherent sheaf について Chern 類が定められる．これは Grothendieck–Riemann–Roch を使って定める．[Gri10] 参照．ただ first Chern 類だけであれば [Kob14, Chapter 5] で定められる (が, まあまあ難しい.)

計算により次がわかる．レポート問題にする．

Lemma 5.4.

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

を *torsion free sheaf* の完全系列であるならば，

$$\operatorname{rank} S(\mu(E) - \mu(S)) + \operatorname{rank} Q(\mu(E) - \mu(Q)) = 0$$

Corollary 5.5. E が *(Mumford–Takemoto* の意味で*)stable(resp. semistable)* であることは，任意の *torsion free quotient* $E \twoheadrightarrow Q \neq 0$ かつ $E \neq Q$ について

$$\mu(Q) > \mu(E) \quad (resp.\ \mu(Q) \geq \mu(E)\ )$$

を満たすことと同値である．

命題 4.11 との対応して次がわかる．

Proposition 5.6. *(1)* 直線束 L は *stable* である．

(2) ベクトル束 E が *stable(resp. semistable)* ならば，(E^*, h^*) も *stable(resp. semistable)* である．

(3) E_1, E_2 が *semistable* なら $E_1 \otimes E_2$ も *semistable.* 特に直線束 L について $L^{\otimes m}$ は *semistable* である．

(4) $E_1 \oplus E_2$ が *semistable* であることは，E_1, E_2 が *semistable* かつ $\mu(E_1) = \mu(E_2)$ が成り立つことと同値である．

stable の直和は stable にならないことに注意！

Proof. 証明の概略だけ述べる (完全に証明を埋めるにはちょっと難しい&面倒であり, 未定義語を使うため).

(1). まず任意の reflexive subsheaf $S \subset \mathcal{O}$ についてある effective divisor D があって $S \cong \mathcal{O}(-D)$

となる.[16] よって任意の reflexive sheaf$F \subset L$ について,

$$F \cong L \otimes \mathcal{O}(-D)$$

となる. $c_1(\mathcal{O}(-D))[\omega]^{n-1} \leq 0$ かつ $= 0$ になるときは $D = 0$ に限る. $F \subsetneq L$ ならば $\mu(F) < \mu(L)$ となる. [17]

(2). E をベクトル束と仮定して示す. [18] Cor. 5.5 より任意の torsion free quotient $E^* \twoheadrightarrow Q$ について

$$\mu(Q) > \mu(E^*) \Leftrightarrow \mu(Q^*) = -\mu(Q) < -\mu(E^*) = \mu(E^{**}) \underset{E \text{ locally free}}{=} \mu(E)$$

であることから従う. (3). 後で述べる内容 (Prop 5.8) を用いると

$$\mu^{\max}(E_1 \otimes E_2) = \mu^{\max}(E_1) + \mu^{\max}(E_2) \quad \mu(E_1 \otimes E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$$

からわかる. ただし左の等式の証明はすごく難しい![Laz, 2 章] 参照.

(4). [Kob14, Proposition 5.7.9] 参照. elementary だが面倒なので割愛する. □

5.2 Harder–Narasimhan filtration

任意の torsion-free sheaf は semistable sheaf の filtration でかける Harder–Narasimhan filtration について紹介する. その前に次の用語を定義しておく.

Definition 5.7. [Laz, 2 章] torsion-free sheaf$E$ について maximum slope, minimal slope を次で定義する.

$$\mu^{\max}(E) := \sup \{\mu(F) \mid 0 \neq F \subseteq E,\ F \text{ torsion-free}\}.$$

$$\mu^{\min}(E) := \inf \{\mu(Q) \mid E \twoheadrightarrow Q,\ Q \text{ torsion-free}\}.$$

ここで $F = E$, $Q = E$ も含めることに注意する.

次のことがわかっている. 証明は [Laz, 2 章] 参照

Proposition 5.8. *[Laz, 2 章] torsion-free sheaf E について次が成り立つ.*

1. $\mu^{\max}(E) < +\infty$

[16] torsion free sheaf F について $F^{**} = F$ である時, F を reflexive という. この事実は normal variety だと rank 1 reflexive sheaf は Weil divisor と対応するからである. [Har80] 参照.

[17] F が torsion free ならば F の saturationF_{sat} があって, F_{sat} reflexive, $F \subset F_{sat}$, $\mu(F) \leq \mu(F_{sat})$ となるからである. [Laz, 2 章] 参照.

[18] E が torsion free sheaf の時は $\mu(E^{**}) = \mu(E)$ を用いる.

2. $\mu^{\max}(E) = \mu(E_{\max})$ となる *subsheaf* $E_{\max}$ が存在し，$E_{\max}$ は $\mu^{\max}(E) = \mu(F)$ となる *subsheaf* の中で包含関係に関して一番大きい．この *sheaf* を *maximal destabilizing sheaf* という．
3. *E-semistable* は $\mu^{\max}(E) = \mu(E)$ と同値．また $\mu^{\min}(E) = \mu(E)$ と同値．
4. $\mu^{\max}(E) = \mu^{\max}(E^{**}) = -\mu^{\min}(E)$
5. $\mu^{\max}((E \otimes F)^{**}) = \mu^{\max}(E) + \mu^{\max}(F)$

E が reflexive ならば $E_{\max}$ は reflexive になる[19]

Theorem 5.9 ([Kob14, Proposition 5.7.15], [Laz, 2 章])**.** 任意の *torsion-free coherent sheaf* E に対して，*torsion free sheaf* による *filtration*

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_{l-1} \subset E_l = E$$

が存在し，次を満たす．

- $1 \leq i \leq l$ に対して $G_i := E_i/E_{i-1}$ は *rank* r_i *semistable sheaf* である．もっと強く G_i は E/E_{i-1} の *maximal destabilizing sheaf* となる．
- 次の不等式と等式が成り立つ．

$$\mu^{\max}(E) = \mu(G_1) > \mu(G_2) > \cdots > \mu(G_l) = \mu^{\min}(E)$$

この *filtration* を *Harder–Narasimhan filtration* という．

Proof. 前の Prop 5.8 と合わせた証明の概略．ただし簡単のため X を smooth projective とする．(コンパクト Kähler の場合は [Kob14, 5 章] 参照．normal variety の場合は [GKP16b] 参照.)

まず $E \subset L^r$ となる ample 直線束をとると

$$\mu^{\max}(E) \leq \mu^{\max}(L^r) \underset{L^r \text{ semistable}}{=} \mu(L^r) = r\mu(L) < +\infty$$

$\mu^{\max}(E) = \mu(F)$ となる subsheaf の存在は背理法による．もし存在しないとすると $F_i \subset E$ かつ $\mu(F_i) \to \mu(E)$ となるもので rank r が最大なものが取れる．ここからうまく H_i で $H_i \subset E$ かつ $\mu(H_i) \to \mu(E)$ となるもので rank $> r$ となるものが作れて r の取り方に矛盾させる．maximal destabilizing sheaf$E_{\max}$ は $\mu^{\max}(E) = \mu(F)$ の中で最大なものをとればよい．

Harder–Narasimhan filtration の構成は帰納法である．$E_1 = E_{\max} \subset E$ とする．$G_2 \subset E/E_1$ の maximal destabilizing sheaf として $E_2 \subset E$ を G_2 の引き戻しとする．これを繰り返すと filtration

[19] もっと強く $E_{\max}$ は E において saturated である．

が得られる．(ランクは有限なので，有限回のステップでこれは終了する．) Harder–Narasimhan filtration の性質は maximal destabilizing sheaf の性質から従う． □

もう一つ Jordan–Hölder filtration というものがある．これは semistable sheaf は stable sheaf に分解できるというものである．

Theorem 5.10. *[Kob14] 任意の torsion-free coherent sheaf E に対して，torsion free sheaf による filtration*

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_{l-1} \subset E_l = E$$

が存在し，次を満たす．

- *$1 \leq i \leq l$ に対して $G_i := E_i/E_{i-1}$ は rank r_i stable sheaf である．*
- *次の等式が成り立つ．*

$$\mu(E) = \mu(G_1) = \mu(G_2) = \cdots = \mu(G_l)$$

この filtration を Jordan–Hölder filtration という．

5.3 Kobayashi–Hitchin 対応および Donaldson–Uhlenbeck–Yau の定理

slope stability と Hermite–Einstein 計量は次のように対応する．

Theorem 5.11 (Kobayashi–Hitchin 対応・Donaldson–Uhlenbeck–Yau の定理)**.** *ベクトル束 E について次は同値*

1. *E が Hermite–Einstein 計量を持つ．*
2. *E が同じ slope を持つ stable なベクトル束 $E_1, \ldots, E_l$ の直和になる (これを polystable という)．*

Remark 5.12. 歴史に関しては次の通りだと思われる．詳しくは望月 (拓郎) 先生の `https://www.nara-wu.ac.jp/omi/oka_symposium/16/mochizuki.pdf` を参照．

- Kobayashi–Lübke により Hermite–Einstein ならば polystable が示された．
- Donaldson により polystable ならば Hermite–Einstein が smooth projective の場合に示された．これは曲面に問題を押し付け，実 4 次元多様体の理論を用いたはずである．
- Uhlenbeck–Yau によりコンパクト Kähler の時に解決．これは L_1^2 subsystem を用いる方法
- Simpson によりコンパクト Kähler の Higgs 束 (E, θ) に拡張．これは Simpson 対応，non-abelian Hodge 対応と呼ばれる．

- 望月拓郎先生により準射影的の Higgs 束に拡張．(おそらく一連の対応を)Simpson–Mochizuki 対応と呼ぶ (と思う)

なぜ"Hitchin"が出てくるのはよくわからないので誰か教えてください．なお"Kobayashi–Hitchin 対応"よりも"Donaldson–Uhlenbeck–Yau の定理"の方がメジャーである．これは (数学界における) 政治的な影響である．

Simpson–Mochizuki 対応を用いて準射影的多様体を調べることに関してはかなり流行っていて Cadorel, Deng, Yamanoi (最近では Cao, Deng, Paun, Hacon) あたりが面白い結果を出している．

5.4 Semistable ベクトル束の BG 不等式

Kobayashi–Hitchin 対応・Donaldson–Uhlenbeck–Yau の定理により次がわかる．

Corollary 5.13 (stable ベクトル束の Bogomolov–Gieseker 不等式)**.** *E が stable ならば Bogomolov–Gieseker 不等式が成り立つ．*

$$\Delta(E)[\omega]^{n-2} \underset{Def.\ 3.21}{=} \left(2rc_2(E) - (r-1)c_1(E)^2\right)[\omega]^{n-2} \geq 0$$

さらに上の不等式の等号が成立するとき，ある計量 h があって

$$F_{E,h} = \underbrace{\frac{1}{r}\mathrm{tr}_E(F_{E,h})}_{(1,1)\text{ 微分形式}} \cdot \mathrm{Id}_E \quad \mathrm{End}(E) \text{ 値 } (1,1)\text{-form.}$$

となる．(この時 E は projectively Hermitian flat という)

Proof. E が stable ならば，Kobayashi–Hitchin 対応・Donaldson–Uhlenbeck–Yau の定理より Hermite–Einstein 計量がある．よって定理 4.12 から言える． □

Remark 5.14. 実は E がベクトル束でなくても reflexive sheaf でも言える．そして等号成立する時，(驚くべきことに!)E がベクトル束になる! これは Bando-Siu [BS94] の結果である．もちろんこの"Bando"は坂東先生 (東北大学) である．

実は semistable の場合でも言える．これはいろんな方法があるが，今回は計算だけで言える簡単な方法を紹介する．[20] これは Nakayama [Nak04] や Langer[Lan04] によるものである．

次の Hodge index Theorem を思い出す．

[20] 別の方法は semistable ならば approximate Hermite Einstein 計量が存在することを用いたものである．多分極限操作が面倒だと思う．

Theorem 5.15 (Hodge index theorem)**.** E, E_1, E_2 を *torsion free sheaf* とする.

1.
$$\left(c_1(E)^2[\omega]^{n-2}\right)\left([\omega]^n\right) \leq \left(c_1(E)[\omega]^{n-1}\right)^2$$
等号成立するとき, ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して $c_1(E) = c[\omega]$

2. $c_1(E_1)^2[\omega]^{n-2} > 0$ ならば
$$\left(c_1(E_1)^2[\omega]^{n-2}\right)\left(c_1(E_2)^2[\omega]^{n-2}\right) \leq \left(c_1(E_1)c_1(E_2)[\omega]^{n-2}\right)^2$$
等号成立するとき, ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して $c_1(E_2) = cc_1(E_1)$

3. $c_1(E_1) \neq 0$, $c_1(E_1)c_1(E_2)[\omega]^{n-2} = c_1(E_1)^2[\omega]^{n-2} = 0$ ならば,
$$c_1(E_2)^2[\omega]^{n-2} \leq 0$$
等号成立するとき, ある $c \in \mathbb{R}$ が存在して $c_1(E_2) = cc_1(E_1)$

Theorem 5.16. *E が semistable ならば BG 不等式が成り立つ.*

Proof. 命題 5.10 より Jordan–Hölder filtration をとる.
$$0 = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_{l-1} \subset E_l = E$$
ここで $G_i := E_i/E_{i-1}$ は rank r_i stable sheaf で,
$$\mu(E) = \mu(G_1) = \mu(G_2) = \cdots = \mu(G_l)$$
である.

Hodge index Theorem より
$$\begin{aligned} \left(\frac{c_1(G_i)}{r_i} - \frac{c_1(G_j)}{r_j}\right)^2 \cdot [\omega]^{n-2} &\underset{\text{Thm. 5.15}}{\leq} \frac{1}{[\omega]^n}\left(\left(\frac{c_1(G_i)}{r_i} - \frac{c_1(G_j)}{r_j}\right)\cdot[\omega]^{n-1}\right)^2 \\ &\underset{\text{定義}}{=} \frac{1}{[\omega]^n}(\mu(G_i) - \mu(G_j))^2 \underset{\text{JH filtration}}{=} 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

補題 3.23 と系 5.13 より

$$\frac{\Delta(E)}{r}\cdot[\omega]^{n-2} \underset{\text{Lem. 3.23}}{=} \sum_{i=1}^{l}\frac{\Delta(G_i)}{r_i}[\omega]^{n-2} - \frac{1}{r}\sum_{1\le i<j\le l} r_i r_j\left(\frac{c_1(G_i)}{r_i}-\frac{c_1(G_j)}{r_j}\right)^2\cdot[\omega]^{n-2}$$
$$\underset{(5.1)}{\geq} \sum_{i=1}^{l}\frac{\Delta(G_i)}{r_i}[\omega]^{n-2} \underset{\text{Cor. 5.13}}{\geq} 0$$

□

Remark 5.17. semistable sheaf で Bogomolov–Gieseker 不等式の等号が成立する時, numerically projectively flat と呼ぶ. この場合 $\mathbb{Q}$-twisted sheaf $E\left\langle\frac{\det(E)^*}{r}\right\rangle$ が nef になることが [LOY24] によってわかっている. [LOY24] により numerically flat ならば projectively projectively flat(計量とは限らない接続 D があって $R_D=\alpha \mathrm{Id}_E$ となること) がわかっている. [21]

5.5 Hermite–Einstein ならば polystable

Kobayashi–Lübke の定理を示す.

Theorem 5.18. *[Kob14, 5 章]* ベクトル束 E が *Hermite–Einstein* を持つならば *polystable* である. つまり E が同じ *slope* を持つ *stable* なベクトル束 $E_1,\dots,E_l$ の直和になる.

Proof. 証明の概略. stability を考える際の torsion free sheaf $S\subset E$ に関して, S が E の部分ベクトル束であるとして仮定して示す. [22]

次の定理を用いる.

Theorem 5.19. (E,h) を *Hermite* 計量をもつ正則ベクトル束とする. $S\subset E$ を *rank* p の正則部分束とし, $Q:=E/S$ を商束とする. このとき Q は *rank* $r-p$ の正則ベクトル束であり,

$$0\longrightarrow S\longrightarrow E\longrightarrow Q\longrightarrow 0$$

は正則ベクトル束の完全列である.
この時 *second fundamental form* $A\in A^{1,0}(\mathrm{Hom}(S,Q))$ で次の性質を満たすものがある.

- $$F_{E,h_E}|_S = F_{S,h_S} - A^*\wedge A \quad \mathrm{End}(S)\text{ 値 }(1,1)\text{-}form \tag{5.2}$$

[21] どうも Ya Deng の [Den21b] の方法を用いる. Deng さんに 2023 年に会った時「[Den21b] は論文で出す予定がなかったが, [LOY24] の著者にこの手法を用いるから書いてくれと頼まれた」と言っていた気がする.
[22] きちんと示すなら F は torsion free sheaf を考えないといけない. この場合 blowup などをすれば示せる. がかなり面倒な議論である. この仮定でも証明の本質は余り変わらない.

となる．ここで F_{S,h_S} を S に h の制限による計量 h_S による曲率とし，*Hermite* 随伴 A^* を

$$h(A\xi,\eta)=h(\xi,A^*\eta)$$

で定める．$A^*\in A^{0,1}(\mathrm{Hom}(Q,S))$ である．

- $A=0$ ならば $E\cong S\oplus Q$ という正則同型が存在する．

これは少々証明が面倒なので 5.7 節に回す．

h が E の Hermite–Einstein 計量であるとする．つまりある定数 c があって

$$\Lambda_\omega(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h})=c\mathrm{Id}_E\quad \mathrm{End}(E)\text{ 値}\quad \text{where } c\underset{\text{Prop. 4.7}}{=}\frac{nc_1(E)\cdot[\omega]^{n-1}}{r[\omega]^n}\underset{\text{定義}}{=}\frac{n}{\int_X\omega^n}\mu(E)\tag{5.3}$$

であると仮定する．

$$\begin{aligned}\mu(S)&\underset{\text{定義}}{=}\frac{1}{p}c_1(S)\wedge[\omega]^{n-1}\underset{\text{Cor. 3.9}}{=}\frac{1}{p}\int_X\mathrm{tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{S,h_S}\right)\wedge\omega^{n-1}\\&\underset{(5.2)}{=}\frac{1}{p}\int_X\mathrm{tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h_E}|_S\right)\wedge\omega^{n-1}+\frac{1}{p}\int_X\mathrm{tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}A^*\wedge A\right)\wedge\omega^{n-1}\end{aligned}\tag{5.4}$$

Claim 5.20. 次が成り立つ．

$$\frac{1}{p}\int_X\mathrm{tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h_E}|_S\right)\wedge\omega^{n-1}=\mu(E)$$

$$\frac{1}{p}\int_X\mathrm{tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}A^*\wedge A\right)\wedge\omega^{n-1}=-\frac{1}{2\pi pn}\int_X|A|^2_{\omega,h}\omega^n\le 0$$

これを認めると

$$\mu(S)\underset{(5.4)}{=}\underbrace{\frac{1}{p}\int_X\mathrm{tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h_E}|_S\right)\wedge\omega^{n-1}}_{=\mu(E)}+\underbrace{\frac{1}{p}\int_X\mathrm{tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}A^*\wedge A\right)\wedge\omega^{n-1}}_{\le 0}\underset{\text{Claim. 5.20}}{\le}\mu(E)$$

また $\mu(S)=\mu(E)$ であるとき，$A=0$ である．よって

$$E\cong S\oplus E/S$$

と直和分解する．(この同型は正則同型である.) E は定数 c を持つ Hermite–Einstein 計量を持つので，4.11 から S, E/S もまた定数 c を持つ Hermite–Einstein 計量を持つ．

ここまできたら証明は容易である．E が stable であれば定義から polystable である．そうでない場合は $\mu(E_1) = \mu(E)$ となる $E_1 \subset E$ が存在する．上の議論から $E = E_1 \oplus G_1$ と分解し，命題 4.11 より E_1, G_1 も Hermite–Einstein 計量を持つ．よって E_1, G_1 に同じことを繰り返せば (ランクは有限なので，この操作は有限回で終わる)，E が同じ slope を持つ stable なベクトル束 $E_1, \ldots, E_l$ の直和になる． □

Proof of Claim 5.20. 一つ目の式は

$$\frac{1}{p}\int_X \mathrm{tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h_E}|_S\right)\wedge\omega^{n-1} \underset{\text{Cor. 4.5}}{=} \frac{1}{pn}\int_X \mathrm{tr}\left(\underbrace{\Lambda_\omega\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_{E,h_E}|_S\right)}_{=c\mathrm{Id}_E|_S = c\mathrm{Id}_S}\right)\omega^n$$

$$\underset{(5.3)}{=} \frac{c}{pn}\int_X \underbrace{\mathrm{tr}\,(\mathrm{Id}_S)}_{=p}\,\omega^n \underset{(5.3)}{=} \frac{n}{\int_X\omega^n}\mu(E)\cdot\frac{p}{pn}\int_X\omega^n = \mu(E)$$

後半に関しては，局所座標 $(z^1, \ldots, z^n)$，$\omega = \sqrt{-1}\,g_{i\bar{j}}\,dz^i\wedge d\overline{z^j}$ とする．S の local frame e_α ($\alpha = 1, \ldots, p$) とし，C^∞ 級の同型 $E \underset{C^\infty}{\cong} S\oplus Q$ をとって Q の local frame を u_λ ($\lambda = 1, \ldots, r-p$) とする．S と Q の Hermitian 計量をそれぞれ

$$h^S_{\alpha\bar{\beta}} = h_S(e_\alpha, e_\beta), \qquad h^Q_{\lambda\bar{\mu}} = h_Q(u_\lambda, u_\mu)$$

としておく．

second fundamental form A を成分で

$$A = A^\lambda_{i\alpha}\,dz^i\otimes u_\lambda\otimes e^{*,\alpha}.$$

と書くと，A^* は A の Hermitian 随伴なので，各 i に対して

$$A^*_i(u_\mu) = (A^*_i)^\beta{}_\mu e_\beta \quad \text{where } (A^*_i)^\beta{}_\mu = h_S^{\overline{\alpha}\beta}\,h^Q_{\mu\overline{\lambda}}\,\overline{A^\lambda_{i\alpha}}$$

を満たす．したがって

$$A^* = h_S^{\overline{\alpha}\beta}h^Q_{\mu\overline{\lambda}}\overline{A^\lambda_{j\alpha}}\,d\overline{z^j}\otimes e_\beta\otimes u^{*,\mu}.$$

ここで $A^*\wedge A$ は微分形式の外積と束写像の合成を同時に行う．したがって

$$A^*\wedge A = \left(h_S^{\overline{\gamma}\beta}h^Q_{\mu\overline{\lambda}}\overline{A^\lambda_{j\gamma}}A^\mu_{i\alpha}\right)d\overline{z^j}\wedge dz^i\otimes e_\beta\otimes e^{*,\alpha} = -\left(h_S^{\overline{\gamma}\beta}h^Q_{\mu\overline{\lambda}}\overline{A^\lambda_{j\gamma}}A^\mu_{i\alpha}\right)dz^i\wedge d\overline{z^j}\otimes e_\beta\otimes e^{*,\alpha}.$$

$\mathrm{End}(S)$ 上の trace を取ると，

$$\mathrm{tr}(A^*\wedge A) = -\delta^\alpha_\beta\left(h_S^{\overline{\gamma}\beta}h^Q_{\mu\overline{\lambda}}\overline{A^\lambda_{j\gamma}}A^\mu_{i\alpha}\right)dz^i\wedge d\overline{z^j} = -\left(h_S^{\overline{\gamma}\alpha}h^Q_{\mu\overline{\lambda}}\overline{A^\lambda_{j\gamma}}A^\mu_{i\alpha}\right)dz^i\wedge d\overline{z^j}.$$

以上より

$$\Lambda_\omega\left(\sqrt{-1}\,\mathrm{tr}(A^*\wedge A)\right) \underset{\text{定義}}{=} -g^{\bar{j}i}\left(h_S^{\overline{\gamma}\alpha}h^Q_{\mu\overline{\lambda}}\overline{A^\lambda_{j\gamma}}A^\mu_{i\alpha}\right) = -\left(\underbrace{g^{\bar{j}i}h_S^{\overline{\gamma}\alpha}h^Q_{\mu\overline{\lambda}}\overline{A^\lambda_{j\gamma}}A^\mu_{i\alpha}}_{=:|A|^2_{\omega,h}}\right)$$

以上より

$$\frac{1}{p}\int_X \mathrm{tr}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}A^*\wedge A\right)\wedge\omega^{n-1} \underset{\text{Cor. 4.5}}{=} \frac{1}{pn}\int_X \frac{1}{2\pi}\underbrace{\mathrm{tr}\left(\Lambda_\omega\left(\sqrt{-1}A^*\wedge A\right)\right)}_{=-|A|^2_{\omega,h}}\omega^n = -\frac{1}{2\pi pn}\int_X |A|^2_{\omega,h}\omega^n \le 0.$$

□

5.6 stable ならば Hermite–Einstein 計量を持つ

この証明は難しいし私も細部を知らない．なので望月 (拓郎) 先生の pdf https://www.nara-wu.ac.jp/omi/oka_symposium/16/mochizuki.pdf を参照してほしい．Simpson の証明 [Sim88] が一番わかりやすいと思う．

最近では変分法を用いた方法が [JMS22] にある．ただこれは後藤先生に聞くと「[BBGZ13] のように完全に変分法で示しているわけではなく，Donaldson や Uhlenbeck–Yau の熱方程式の議論を一部用いている」らしい．それでも新しい視点を与えてくれる論文にあることは間違いない．

5.7 Subbundles, Quotient bundles, 2nd fundamental form

以下は [Kob14, 1 章][Dem12, 11 章] に基づく．この内容は研究でも度々よく使う．

Setup 5.21. X を n 次元複素多様体とし，$E\to X$ を rank r の正則ベクトル束とする．$S\subset E$ を rank p の正則部分束とし，$Q:=E/S$ を商束とする．このとき Q は rank $r-p$ の正則ベクトル束であり，

$$0\longrightarrow S\longrightarrow E\longrightarrow Q\longrightarrow 0$$

は正則ベクトル束の完全列である．
E に Hermite 計量 h を入れ，S には制限計量 $h_S:=h|_S$ を入れる．また h に関する直交補空間を

$$S^\perp\subset E$$

と書く．つまり

$$h(\xi,\eta)=0 \quad \forall\xi\in A^0(S),\ \eta\in A^0(S^\perp) \tag{5.5}$$

となるものとする．一般に $S^\perp$ は正則部分束とは限らないが，C^∞ 級複素ベクトル束として

$$E = S \oplus S^\perp$$

と直交分解される．さらに C^∞ 級複素ベクトル束として $Q \underset{C^\infty}{\simeq} S^\perp$ という C^∞ 級同型があるので，Q には h から誘導される Hermite 計量 h_Q が入る．

Lemma 5.22. D_h を (E, h) の *Chern* 接続 とする．$\xi \in A^0(S)$ に対して $D_h\xi \in A^1(E)$ を直交分解

$$D_h\xi = \underbrace{D_S\xi}_{A^1(S)} + \underbrace{A\xi}_{A^1(S^\perp)} \in A^1(E) = A^1(S) \oplus A^1(S^\perp) \tag{5.6}$$

すると

- $D_S : A^0(S) \to A^1(S)$ は (S, h_S) の *Chern* 接続 である．
- $A \in A^{1,0}(\mathrm{Hom}(S, S^\perp))$ である．

Proof. まず Leibniz 則から，任意の $f \in A^0(X)$ と $\xi \in A^0(S)$ に対して

$$D_h(f\xi) = df \cdot \xi + f \underbrace{D_h\xi}_{=D_S\xi + A\xi} = \underbrace{df \cdot \xi + fD_S\xi}_{\in A^1(S)} + \underbrace{fA\xi}_{\in A^1(S^\perp)}$$

が成り立つ． したがって定義から D_S は S 上の接続である． $A : A^0(S) \to A^1(S^\perp)$ なので $\mathrm{Hom}(S, S^\perp)$-値 1-form となる．

また $S \subset E$ は正則部分束なので，$\overline{\partial}_S, \overline{\partial}_E$ を S, E の $\overline{\partial}$ とするとき，i が正則なので

$$i \circ \overline{\partial}_S = \overline{\partial}_E \circ i$$

である．よって $\overline{\partial}_E(A^0(S)) \subset A^{0,1}(S)$ となる．これより

$$(D_E\xi)^{0,1} = \overline{\partial}_E\xi \in A^{0,1}(S) \underset{(5.6)}{\Rightarrow} (D_E\xi)^{0,1} = \underbrace{\overline{\partial}_E\xi}_{\in A^{0,1}(S)} + \underbrace{0}_{\in A^{0,1}(S^\perp)} \underset{(5.6)}{\Rightarrow} (A\xi)^{0,1} = 0 \Rightarrow A \in A^{1,0}(\mathrm{Hom}(S, S^\perp))$$

となる．最後に，$\xi, \xi' \in A^0(S)$ に対して D_h が h を保存することと $A\xi, A\xi' \in A^1(S^\perp)$ であること

から

$$\begin{aligned} d(h(\xi,\xi')) &\underset{D_h \text{ が } h \text{ を保存}}{=} h(\underbrace{D_h\xi}_{=D_S\xi+A\xi},\xi')+h(\xi,\underbrace{D_h\xi'}_{=D_S\xi'+A\xi'}) \\ &= h(D_S\xi,\xi')+h(\xi,D_S\xi')+\underbrace{h(A\xi,\xi')}_{=0 \text{ by } (5.5)}+\underbrace{h(\xi,A\xi')}_{=0 \text{ by } (5.5)} \\ &= h(D_S\xi,\xi')+h(\xi,D_S\xi') \end{aligned}$$

である．したがって D_S は h_S を保存する．また $D_S''=\bar{\partial}_S$ であるため，D_S は (S,h_S) の Chern 接続 である． □

そこで $Q\simeq S^\perp$ と同一視して，

$$D_h\xi = \underbrace{D_S\xi}_{A^1(S)} + \underbrace{A\xi}_{A^1(Q)} \in A^1(E) = A^1(S)\oplus A^1(Q) \tag{5.7}$$

とし，

- $D_S : A^0(S)\to A^1(S)$ は (S,h_S) の Chern 接続 である．
- $A\in A^{1,0}(\mathrm{Hom}(S,Q))$ である．

ともみなす．

Definition 5.23 (2nd fundamental form)**.** $A\in A^{1,0}(\mathrm{Hom}(S,Q))$ を (E,h) における S の second fundamental form と呼ぶ．

同様に，$\eta\in A^0(S^\perp)$ に対して

$$D_h\eta = \underbrace{B\eta}_{A^1(S)} + \underbrace{D_{S^\perp}\eta}_{A^1(S^\perp)} \in A^1(E) = A^1(S)\oplus A^1(S^\perp)$$

と分解する．C^∞ 級同型 $Q\underset{C^\infty}{\simeq} S^\perp$ の同一視のもとで $D_{S^\perp}$ を D_Q と書く．補題 5.22 より，このとき D_Q は (Q,h_Q) の Chern 接続 である．

Lemma 5.24.

$$B\in A^{0,1}(\mathrm{Hom}(S^\perp,S)) \quad h(A\xi,\eta)+h(\xi,B\eta)=0 \qquad (\xi\in A^0(S),\ \eta\in A^0(S^\perp))$$

を満たす．したがって，A^* を $h(A\xi,\eta)=h(\xi,A^*\eta)$ で定めれば，

$$B=-A^*$$

Proof. また $\xi \in A^0(S)$, $\eta \in A^0(S^\perp)$ に対して $D_S\xi \in A^1(S)$, $\eta \in A^0(S^\perp)$ に注意して

$$\begin{aligned} 0 \underset{(5.5)}{=} d\,h(\xi,\eta) &\underset{D_h\text{ は }h\text{ を保つ}}{=} h(\underbrace{D_h\xi}_{=D_S\xi+A\xi},\eta)+h(\xi,\underbrace{D_h\eta}_{=B\eta+D_Q\eta}) \\ &= \underbrace{h(D_S\xi,\eta)}_{=0\text{ by }(5.5)}+\underbrace{h(\xi,D_Q\eta)}_{=0\text{ by }(5.5)}+h(A\xi,\eta)+h(\xi,B\eta)=h(A\xi,\eta)+h(\xi,B\eta) \end{aligned}$$

となる. よって $B=-A^*$ が従い, 特に A が $(1,0)$-form であることから B は $(0,1)$-form である. □

局所的に, E の C^∞ 級の local frame

$$\mathbf{e}=(\underbrace{e_1,\ldots,e_p}_{S\text{ の local frame}},\underbrace{e_{p+1},\ldots,e_r}_{S^\perp\underset{C^\infty}{\simeq}Q\text{ の local frame}})$$

とする. 今 A_E を (E,h) の Chern connection form とする. 定義から A_E は $r\times r$ の $(1,0)$ 微分形式を値とする行列で

$$D_h\mathbf{e}=\mathbf{e}A_E \Leftrightarrow D_h(e_1,\ldots,e_p,e_{p+1},\ldots,e_r)=(e_1,\ldots,e_p,e_{p+1},\ldots,e_r)\begin{pmatrix} {A_E}^1{}_1 & {A_E}^1{}_2 & \cdots & {A_E}^1{}_r \\ {A_E}^2{}_1 & {A_E}^2{}_2 & \cdots & {A_E}^2{}_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {A_E}^r{}_1 & {A_E}^r{}_2 & \cdots & {A_E}^r{}_r \end{pmatrix}$$

となる. ${A_E}^\alpha{}_\beta$ は $(1,0)$ 微分形式である.

以下添え字の範囲を

$$1\le\lambda,\mu,\nu\le p,\qquad p+1\le\rho,\sigma,\tau\le r,\qquad 1\le\alpha,\beta,\gamma\le r$$

とする. $\lambda=1,\ldots,p$ について,

$$D_he_\lambda=\underbrace{\sum_{\mu=1}^p e_\mu\,{A_E}^\mu{}_\lambda}_{\in A^1(S)}+\underbrace{\sum_{\rho=p+1}^r e_\rho\,{A_E}^\rho{}_\lambda}_{\in A^1(Q)} \Rightarrow D_Se_\lambda=\sum_{\mu=1}^p e_\mu\,{A_E}^\mu{}_\lambda\in A^1(S)\qquad Ae_\lambda=\sum_{\rho=p+1}^r e_\rho\,{A_E}^\rho{}_\lambda\in A^1(Q)$$

である. $\rho=p+1,\ldots,r$ について

$$D_he_\rho=\underbrace{\sum_{\lambda=1}^p e_\lambda\,{A_E}^\lambda{}_\rho}_{A^1(S)}+\underbrace{\sum_{\sigma=p+1}^r e_\sigma\,{A_E}^\sigma{}_\rho}_{A^1(Q)} \Rightarrow Be_\rho=\sum_{\lambda=1}^p e_\lambda\,{A_E}^\lambda{}_\rho\in A^1(S)\qquad D_Qe_\rho=\sum_{\sigma=p+1}^r e_\sigma\,{A_E}^\sigma{}_\rho\in A^1(Q).$$

上の分解によって connection form はブロック行列で

$$A_E = \begin{pmatrix} {A_E}^1{}_1 & {A_E}^1{}_2 & \cdots & {A_E}^1{}_r \\ {A_E}^2{}_1 & {A_E}^2{}_2 & \cdots & {A_E}^2{}_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {A_E}^r{}_1 & {A_E}^r{}_2 & \cdots & {A_E}^r{}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{A_S}_{\mathrm{End}(S)\text{ 値 1-form}} & \underbrace{B}_{\mathrm{Hom}(Q,S)\text{ 値 1-form}} \\ \underbrace{A}_{\mathrm{Hom}(S,Q)\text{ 値 1-form}} & \underbrace{A_Q}_{\mathrm{End}(Q)\text{ 値 1-form}} \end{pmatrix}$$

と書ける．ここで

$$A_S = ({A_E}^\mu{}_\lambda), \qquad A_Q = ({A_E}^\sigma{}_\rho), \qquad A = ({A_E}^\rho{}_\lambda), \qquad B = ({A_E}^\lambda{}_\rho)$$

である．

Lemma 5.25. E の曲率をブロック表示すると

$$R_E = \begin{pmatrix} R_S - A^* \wedge A & D'_{\mathrm{Hom}(Q,S)}B \\ D''_{\mathrm{Hom}(S,Q)}A & R_Q - A \wedge A^* \end{pmatrix}$$

となる．特に $E \underset{C^\infty}{\simeq} S \oplus Q$ によって制限すると

$$R_{E,h_E}|_S = R_S - A^* \wedge A \quad R_{E,h_E}|_Q = R_Q - A \wedge A^*$$

Proof. 曲率形式

$$R_E = dA_E + A_E \wedge A_E$$

も同じ分解に従ってブロック表示される．この $(1,1)$-成分を取ると

$$
\begin{aligned}
R_E^{1,1} &\underset{\text{上の式}}{=} (dA_E + A_E \wedge A_E)^{1,1} = \begin{pmatrix} dA_S & dB \\ dA & dA_Q \end{pmatrix}^{1,1} + \left(\begin{pmatrix} A_S & B \\ A & A_Q \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_S & B \\ A & A_Q \end{pmatrix} \right)^{1,1} \\
&= \begin{pmatrix} dA_S & dB \\ dA & dA_Q \end{pmatrix}^{1,1} + \begin{pmatrix} A_S \wedge A_S + B \wedge A & A_S \wedge B + B \wedge A_Q \\ A \wedge A_S + A_Q \wedge A & A \wedge B + A_Q \wedge A_Q \end{pmatrix}^{1,1} \\
&= \begin{pmatrix} \underbrace{(dA_S + A_S \wedge A_S)}_{=R_S} + B \wedge A & \underbrace{dB + A_S \wedge B + B \wedge A_Q}_{=DB\text{ 補足 5.26 参照}} \\ \underbrace{\bar{\partial} A + A \wedge A_S + A_Q \wedge A}_{=D''A} & A \wedge B + \underbrace{dA_Q + A_Q \wedge A_Q}_{=R_Q} \end{pmatrix}^{1,1} \\
&= \begin{pmatrix} R_S + B \wedge A & DB \\ DA & A \wedge B + R_Q \end{pmatrix}^{1,1} \underset{A \in A^{1,0}, B \in A^{0,1}}{=} \begin{pmatrix} R_S + B \wedge A & D'B \\ D''A & R_Q + A \wedge B \end{pmatrix} \\
&\underset{B=-A^*}{=} \begin{pmatrix} R_S - A^* \wedge A & D'B \\ D''A & R_Q - A \wedge A^* \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となり言えた．ここで R_S, R_Q はそれぞれ S, Q の Chern 曲率 とする． □

Remark 5.26. (F, h_F) をベクトル束と Hermite 計量の組とし，(F^*, h_{F^*}) を h_F から定義 2.24 によって誘導される計量とする．2.24 を用いると

$$
d\lambda(\xi) = (D^{F^*}\lambda)(\xi) + \lambda(D^F \xi) \quad \lambda \in A^0(F^*),\ \xi \in A^0(F)
$$

が成り立つ．

同様にして，$T = \lambda \otimes s \in A^0(Q^* \otimes S)$, $q \in A^0(Q)$ について

$$
\begin{aligned}
D_S(Tq) = D_S(\lambda(q)s) = d\lambda(q) \cdot s + D_S s \wedge \lambda(q) &= \big((D_{Q^*}\lambda)(q) + \lambda(D_Q q)\big)s + D_S s \wedge \lambda(q) \\
&= \big((D^{Q^*}\lambda) \otimes s + \lambda \otimes D^S s\big)(q) + (\lambda \otimes s)(D^Q q) \\
&= (D_{\mathrm{Hom}(Q,S)}T)(q) + T(D_Q q).
\end{aligned}
$$

となる．

今 $B = \beta \otimes T \in A^k(Q^* \otimes S)$ のときは $T \in A^0(Q^* \otimes S)$, $\beta \in A^k(X)$ として

$$
\begin{aligned}
D_S(B(q)) = D_S(\beta \otimes Tq) = D_S(T(q)\beta) &= (-1)^k \beta \wedge D_S(T(q)) + d\beta T(q) \\
&= (-1)^k \beta \wedge (D_{\mathrm{Hom}(Q,S)}T)(q) + (-1)^k \beta \wedge T(D_Q q) + d\beta T(q) \\
&= (D_{\mathrm{Hom}(Q,S)}\beta \otimes T)(q) + (-1)^k \beta \wedge T(D_Q q) = (D_{\mathrm{Hom}(Q,S)}B)(q) + (-1)^k B(D_Q q)
\end{aligned}
$$

である．今
$$d(Bq) = dB \cdot q - B \wedge dq, \quad B(D^Q q) = B \wedge dq + B \wedge A_Q q.$$
なので
$$\begin{aligned}(D_{\mathrm{Hom}(Q,S)}B)(q) = D^S(Bq) + B(D^Q q) &= (dB \cdot q - B \wedge dq + A_S \wedge Bq) \\ &\quad + (B \wedge dq + B \wedge A_Q q) \\ &= dB \cdot q + A_S \wedge Bq + B \wedge A_Q q.\end{aligned}$$
となり $D_{\mathrm{Hom}(Q,S)}B = dB + A_S \wedge B + B \wedge A_Q$ が言える．

Theorem 5.27. *Hermite* 正則ベクトル束 (E, h) の正則部分ベクトル束 S の *2nd fundamental form* A が恒等的に 0 ならば，直交補束 $S^\perp$ も正則部分ベクトル束で，直交分解
$$E = S \oplus S^\perp$$
は正則である．特に $E \cong S \oplus Q$ という正則同型を得る．

Proof. s を E の正則 local section とし，直交分解 $E = S \oplus S^\perp$ に応じて $s = s' + s''$ と書く．$A = 0$ ならば $B = 0$ より，分解
$$D_h s = D_h s' + D_h s''$$
において，$D_h s'$ は S に，$D_h s''$ は $S^\perp$ に入っていることがわかる．$D_h s$ の次数が $(1,0)$ だから，$D_h s'$ と $D_h s''$ の次数も $(1,0)$ である．したがって s' も s'' も正則である．

今 h による C^∞ 直交分解を $E = S \oplus S^\perp$ と書く．(この時点では $S^\perp$ は C^∞ 部分ベクトル束であって，正則部分束とは限らない) この直交分解に対応する C^∞ 束射を
$$\pi_S : E \longrightarrow S \subset E, \qquad \pi^\perp : E \longrightarrow S^\perp \subset E$$
と書く．任意の正則 local section $u \in H^0(U, E)$ に対して
$$u' = \pi_S(u), \qquad u'' = \pi^\perp(u)$$
はいずれも E の正則 local section である．よって，$\pi^\perp$ も正則となり，$S^\perp$ も正則となる． $\square$

Theorem 5.28. (E, h) を *Hermite* 正則ベクトル束，(S, h_S) を 正則部分束，$Q = (E/S, h_Q)$ を商束とすると

(i) 部分束 S の曲率は E の曲率より大きくはならない．すなわち
$$h_S\big(R_S(v, \overline{v})\xi, \xi\big) \le h\big(R(v, \overline{v})\xi, \xi\big), \qquad v \in T_x X,\ \xi \in S_x.$$

しかも, ここで等号が成り立つのは

$$|A(v)\xi|_{h_Q} = 0$$

のとき, そのときに限る.

(ii) 商束 Q の曲率は E の曲率より小さくはならない. すなわち

$$h_Q\big(R_Q(v,\overline{v})\xi_Q, \xi_Q\big) \geq h\big(R(v,\overline{v})\xi, \xi\big), \qquad v \in T_xX,\ \xi \in E_x.$$

ただし, ここで $\xi_Q \in Q_x = E_x/S_x$ は $\xi \in E_x$ で代表される元を表す. 上で等号が成り立つのは

$$|A^*(\overline{v})\xi_Q|_{h_S} = 0$$

のとき, そのときに限る.

Proof. 曲率の分解公式

$$R_S = R_{E,h_E}|_S + A^* \wedge A$$

を用いると,

$$\begin{aligned} h_S\big(R_S(v,\overline{v})\xi, \xi\big) &= h_E\big(R_{E,h_E}(v,\overline{v})\xi, \xi\big) + h_S\big((A^* \wedge A)(v,\overline{v})\xi, \xi\big) \\ &= h_E\big(R_{E,h_E}(v,\overline{v})\xi, \xi\big) - h_Q(A(v)\xi, A(v)\xi). \end{aligned}$$

すなわち,

$$h_S\big(R_S(v,\overline{v})\xi, \xi\big) = h_E\big(R_{E,h_E}(v,\overline{v})\xi, \xi\big) - |A(v)\xi|^2_{h_Q}.$$

特に,

$$h_S\big(R_S(v,\overline{v})\xi, \xi\big) \leq h_E\big(R_{E,h_E}(v,\overline{v})\xi, \xi\big)$$

等号が成立するときは (点 x で)$A = 0$ の時である. □

5.8 Griffith semipositivity と構造定理

さて局所的に

$$R = R^{\alpha}_{\beta i\overline{j}}\, dz^i \wedge d\overline{z^j} \otimes e_\alpha \otimes e^{*,\beta}$$

と書けば,

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial z^i} \in T_xX, \qquad \xi = \xi^\alpha e_\alpha \in S_x$$

について

$$R(v,\overline{v}) = R^{\alpha}_{\beta i\overline{j}} v^i \overline{v}^j e_\alpha \otimes e^{*,\beta}$$

である．したがって，

$$R(v,\overline{v})(\xi) = R^{\alpha}{}_{\beta i \overline{j}} v^i \overline{v}^j \xi^\beta e_\alpha$$

であり，

$$h\big(R(v,\overline{v})\xi,\xi\big) = h_{\alpha\overline{\gamma}} R^{\alpha}{}_{\beta i \overline{j}} v^i \overline{v}^j \xi^\beta \overline{\xi}^\gamma \underset{\text{定義}}{=} R_{\beta\overline{\gamma} i \overline{j}} v^i \overline{v}^j \xi^\beta \overline{\xi}^\gamma.$$

Definition 5.29. ベクトル束 E が Griffith semipositive とはある計量 h があって

$$h\big(R(v,\overline{v})\xi,\xi\big) \geq 0 \qquad v \in T_xX,\ \xi \in E_x.$$

となること．これは

$$\sum_{\beta,\gamma}\sum_{i,j} R_{\beta\overline{\gamma} i \overline{j}} v^i \overline{v}^j \xi^\beta \overline{\xi}^\gamma \geq 0 \qquad \forall (v^1,\dots,v^n) \in \mathbb{C}^n, \forall (\xi^1,\dots,\xi^r) \in \mathbb{C}^r$$

であることと同値である．

同様に Griffith positive は不等号の部分を >0 にして定める． Griffith seminegative, Griffith negative も同様に定める．

Remark 5.30. ベクトル束の positivity に ample や nef などがある．以下がわかっている．

- Griffith positive ならば ample. 逆は未解決問題 (Griffith 予想)
- Griffith semipositive ならば nef. 逆は成り立たない．

また Griffith semipositive は特異計量に対しても定義ができる．[PT18, HPS18] 参照．

5.28 の corollary として次がわかる．

Corollary 5.31. (E,h) を *Hermite* 正則ベクトル束, (S,h_S) を 正則部分束, $Q=(E/S,h_Q)$ を商束とすると

(i) E が *Griffith seminegative* ならば, S も *Griffith seminegative* である．

(ii) E が *Griffith semipositive* ならば, Q も *Griffith semipositive* である．

等号成立条件も同じようなことが成り立つはずである．(特異計量の場合も含めて)[HIM22] 参照のこと．

さて $f: X \to Y$ という正則写像によって $f^*\Omega_Y \subset \Omega_X$ という部分束を得る．また $Z \subset X$ という部分多様体について, $T_Z \subset T_X$ を得る．上の Corollary から次が観察できる．

Observation 5.32.

- T_X が semipositive ならば, Ω_X が seminegative なので, 正則写像 $f : X \to Y$ について, $f^*\Omega_Y \subset \Omega_X$ も seminegative. 特に T_Y は semipositive である.
- Ω_X が semipositive ならば, T_Z が seminegative なので, 部分多様体 $Z \subset X$ について, $T_Z$seminegative である. 特に Ω_Z は semipositive である.

実際次のことがわかっている.

Theorem 5.33. *[FG12] $f : X \to Y$ を smooth morphism とする.*

- *$-K_X$ が ample(X が Fano) ならば, $-K_Y$ が ample.(Y も Fano)*
- *$-K_X$ が nef and big (X が weak Fano) ならば, $-K_Y$ が nef and big.(Y も weak Fano)*

Fujino–Gongyo の証明は代数的でかなり難しいが, 後に Ya Deng[Den21a] によって Ohsawa–Takegoshi L^2 拡張定理を用いて再証明・拡張された. この証明は (Demailly の本を読んでいれば) かなり簡単で面白い証明である.

似たようなノリで次も示せる. これもいろんな証明があるが [Den21a] が一番わかりやすいと思う.

Theorem 5.34. *$-K_X$ が nef and big (X が weak Fano) ならば, X は有理連結. 特に X は単連結.*

Proof. 証明の概略のみいう. $f : X \dashrightarrow Y$ を MRC fibration とする. $\dim Y > 0$ と仮定すると K_Y が pseudo effective であることがわかっている. 一方 $-K_X$ が nef and big なので, (上と同じノリで positivity が移って)$-K_Y$ は big になる. これは矛盾である. よって $\dim Y = 0$ で X は有理連結である. □

T_X が nef や Griffith semipositive, $-K_X$ が nef や Gsemipositive の場合の構造定理も上のように MRC fibration や Albanese map をとって上の議論より T_Y や $-K_Y$ が"flat(=semipositive + seminegative)"であることを示すことから始まる. 詳しくは [CP91, DPS94, CH19, MW21, MWWZ25] などを参照のこと. ただ松村先生の方が詳しいので松村先生に聞いてほしい.

6 Miyaoka–Yau 不等式の別証明と Miyaoka の不等式

[Miy87, Cao13, Ou23, IM22, IMM24] の内容を扱う．以下 (X, ω, g) をコンパクト Kähler 多様体とする．

6.1 Miyaoka–Yau 不等式の別証明

Definition 6.1 (Higgs ベクトル束)**.** X 上の Higgs 束とは，ベクトル束 E とベクトル束の準同型

$$\theta\colon E \longrightarrow E \otimes \Omega_X$$

の組 (E, θ) であって，θ によって誘導される射

$$\theta \wedge \theta\colon E \xrightarrow{\theta} E \otimes \Omega_X \xrightarrow{\theta\otimes \mathrm{Id}} E \otimes \Omega_X \otimes \Omega_X \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\wedge} E \otimes \Omega_X^2$$

が 0 となるものをいう．この θ を Higgs field と呼ぶ．

1. 部分束 $S \subset E$ が θ-不変であるとは，$\theta(S) \subset S \otimes \Omega_X$ となること．
2. Higgs 束 (E, θ) が stable であるとは，任意の θ-不変な部分束 $0 \subsetneq S \subsetneq E$ に対して

$$\underbrace{\frac{c_1(S)\cdot[\omega]^{n-1}}{\mathrm{rank} S}}_{=:\mu(S)} < \underbrace{\frac{c_1(E)\cdot[\omega]^{n-1}}{\mathrm{rank} E}}_{=:\mu(E)}$$

が成り立つこと．semistable も同様に定まる．

Remark 6.2. 後々使うので次の slope も定義しておく．L を X 上の nef divisor とする．$c_1(L)\cdot\omega^{n-2}$ に関する (E, θ) の slope を

$$\mu_{c_1(L)\cdot[\omega]^{n-2}}(E) := \frac{c_1(E)\cdot c_1(L)\cdot[\omega]^{n-2}}{\mathrm{rank} E}$$

で定義する．

Simpson 対応 (Kobayashi–Hitchin 対応・Donaldson–Uhlenbeck–Yau の定理の Higgs 束版) により次がわかる．

Theorem 6.3. *[Sim88] Higgs 束 (E, θ) が stable ならば Bogomolov–Gieseker 不等式が成り立つ．*

$$\Delta(E)[\omega]^{n-2} \underset{\text{Def. 3.21}}{=} \left(2rc_2(E) - (r-1)c_1(E)^2\right)[\omega]^{n-2} \geq 0$$

Remark 6.4. この証明の代数的な証明は知られていない．ただ宮岡先生の岡シンポジウムの講演 https://www.nara-wu.ac.jp/omi/oka_symposium/13/miyaoka.pdf によるといくつかはできているようである．

Proposition 6.5. *[GKPT19a][IMM24]* 部分束 $E \subset \Omega_X$ に対して，

$$H := E \oplus \mathcal{O}_X$$

とおき，*Higgs field*

$$\theta \colon H = E \oplus \mathcal{O}_X \longrightarrow H \otimes \Omega_X = (E \oplus \mathcal{O}_X) \otimes \Omega_X \quad (a, b) \longmapsto (0, a)$$

で定義する．E が *semistable* であり，$\mu(E) > 0$ を満たすならば，*Higgs* 束 (H, θ) は *stable* である．

これは $\mu_{c_1(L)\cdot[\omega]^{n-2}}$ による slope でも同様である．

Proof. (H, θ) が stable でないと仮定する．このとき，非自明な θ-不変 subsheaf $S \subset H$ で

$$\mu(S) \geq \mu(H)$$

を満たすものが存在する．$r := \mathrm{rank} E$, $l := \mathrm{rank} S$ とおく．定義により，

$$\mu(S) \geq \mu(H) = \frac{r}{r+1}\mu(E) > 0$$

である．第二射影によって誘導される射

$$\gamma : S \subset H = E \oplus \mathcal{O}_X \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathcal{O}_X$$

を考える．S は θ-不変であるから，$\gamma : S \to \mathcal{O}_X$ は零写像ではないことに注意する．

まず，$\mathrm{Ker}(\gamma)$ が H の零でない subsheaf であることを確認する．実際，もし γ が単射ならば，

$$S \simeq \mathrm{Im}(\gamma) \subset \mathcal{O}_X$$

は $\mathcal{O}_X$ の ideal sheaf となる．これは

$$0 \geq \mu(\mathrm{Im}(\gamma)) = \mu(S)$$

を導き，矛盾である．

次に完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\gamma) \longrightarrow S \longrightarrow \mathrm{Im}(\gamma) \longrightarrow 0$$

を考える．$\mathrm{Ker}(\gamma) \subset S$ かつ $\mathrm{Im}(\gamma) \subset \mathcal{O}_X$ であるから，両方の sheaf は torsion-free である．したがって

$$c_1(S) \cdot \alpha = c_1(\mathrm{Ker}(\gamma)) \cdot \alpha + c_1(\mathrm{Im}(\gamma)) \cdot \alpha \leq c_1(\mathrm{Ker}(\gamma)) \cdot \alpha \tag{2.3}$$

が従う．$\mathrm{rank}(\mathrm{Ker}(\gamma)) = l - 1$ に注意し，(2.3) を用いると，

$$\mu(\mathrm{Ker}(\gamma)) = \frac{1}{l-1} c_1(\mathrm{Ker}(\gamma)) \cdot \alpha \geq \frac{l}{l-1} \mu(S) \geq \frac{rl}{(r+1)(l-1)} \mu(E)$$

を得る．

$$\frac{rl}{(r+1)(l-1)} > 1$$

が成り立つことに注意すると，

$$\mu(\mathrm{Ker}(\gamma)) > \mu(E)$$

を得る．これは E の semistability に矛盾する． □

Theorem 6.6. K_X が *ample* ならば，*Miyaoka–Yau* 不等式

$$\big(2(n+1)c_2(\Omega_X) - nc_1(\Omega_X)^2\big)c_1(K_X)^{n-2} \geq 0$$

が成り立つ．

Proof. K_X が ample なので Yau の定理から

$$\mathrm{Ric}(\omega) = -\omega$$

となる Kähler–Einstein 計量が存在する．よって命題 4.20 よりこれは T_X の Hermite–Einstein 計量である．定理 5.18 より T_X は polystable である．(特に semistable である) 今 $[\mathrm{Ric}(\omega)] = c_1(X) = -c_1(K_X)$ なので，$[\omega] = c_1(K_X)$ となり，

$$\mu(\Omega_X) = \frac{1}{n} c_1(\Omega_X) \cdot [\omega]^{n-1} = \frac{1}{n} c_1(K_X)^n > 0$$

が成り立つので，命題 6.5 より Higgs 束 $(\Omega_X \oplus \mathcal{O}_X, \theta)$ は stable である．よって Bogomolov–Gieseker 不等式を適応すれば，$(\Omega_X \oplus \mathcal{O}_X,$ のランクは $n+1$ に注意して)

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad \Delta(\Omega_X \oplus \mathcal{O}_X)[\omega]^{n-2} &\underset{\text{Def. 3.21}}{=} \big(2(n+1)c_2(\Omega_X \oplus \mathcal{O}_X) - nc_1(\Omega_X \oplus \mathcal{O}_X,)^2\big)\, c_1(K_X)^{n-2} \\ &= \big(2(n+1)c_2(\Omega_X) - nc_1(\Omega_X)^2\big)c_1(K_X)^{n-2} \end{aligned}$$

□

Remark 6.7. [IJZ25] では, K_X が big である場合 MIyaoka-Yau 不等式

$$\big(2(n+1)c_2(\Omega_X) - nc_1(\Omega_X)^2\big)\langle c_1(K_X)^{n-2}\rangle \geq 0$$

が成り立つことを示した. ここで $\langle c_1(K_X)^{n-2}\rangle$ は [BEGZ10] での nonpluripolar-product である. この証明もほぼ上に同じである.

- $\langle K_X^{n-1}\rangle$-stability を定義する.
- K_X が big ならば Ω_X が $\langle K_X^{n-1}\rangle$-semistable であることを示す.
- $\Omega_X \oplus \mathcal{O}_X$ が Higgs ベクトル束として $\langle K_X^{n-1}\rangle$-stable であることを示す.
- Bogomolov–Gieseker 不等式を確立して, $\Omega_X \oplus \mathcal{O}_X$ に用いる. これは $\langle K_X^{n-1}\rangle$ が blow up と Kähler form で近似できることを用いる.

ただ singular の場合は $\langle K_X^{n-1}\rangle$-stability や交点数を定義するのが難しくなる. 実際 smooth な場合は 4-5 ページで終わっていた証明が, singular にした途端に膨大に膨れ上がり, ページ数が 60 ページにもなった.

6.2 Generic nefness Theorem

Theorem 6.8. *[Miy87, Eno88, Cao13, Gue16, Ou23, Ou25, CP25, MWWZ25, IJZ25] 次が成り立つ.*

1. K_X が *nef* であるならば, 任意の *Kähler form* $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ と任意の *quotient torsion-free sheaf* $\Omega_X \twoheadrightarrow Q$ について
$$c_1(Q)[\omega_1]\cdots[\omega_{n-1}] \geq 0$$
2. $-K_X$ が *nef* であるならば, 任意の *Kähler form* $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ と任意の *quotient torsion-free sheaf* $T_X \twoheadrightarrow Q$ について
$$c_1(Q)[\omega_1]\cdots[\omega_{n-1}] \geq 0$$

Remark 6.9. 歴史的には以下の通り.

- K_X が nef で X が smooth projective の場合は [Miy87] による. これは foliation を使う証明である.
- K_X が nef で X コンパクト Kähler の場合は長年の未解決問題 (の系) であった.[23] これが最近 Wenhao Ou[Ou25](+Cao-Paun[CP25]) によって示された. コンパクト Kähler でも foliation の議論が回るというブレイクスルーである.

[23]「コンパクト Kähler でも K_X pseudo-effective は X が non-uniruled と同値」と言う未解決問題. Wenhao Ou[Ou25] によって示された. これにより多くの未解決問題が解決されたので, 界隈は騒然となった. 私もかなり焦って, [IJZ25] も一時期なくなるのではと思った.

- $-K_X$ が nef で X が smooth projective の場合は [Ou23] による.
- $-K_X$ が nef で X がコンパクト Kähler の場合は Wenhao Ou[Ou25] の結果を使って, [MWWZ25, IJZ25] によって示された.[24]
- X がコンパクト Kähler で, $\omega_1 = \cdots = \omega_{n-1}$ の場合は, 榎先生による解析的な (そして時代を先取りした面白い) 証明もある. [Eno88, Cao13, Gue16] 参照.

6.3 Miyaoka 不等式 1

Miyaoka [Miy87] による天才的で elementary な証明を紹介する.

Theorem 6.10. *$-K_X$ が nef ならば, 任意の Kähler form ω について*

$$c_2(T_X)[\omega]^{n-2} \geq 0$$

まず以下の簡単な補題を示す. これはレポート問題とする.

Lemma 6.11. *1 以上の整数 $r_1, \ldots, r_l, n$ と, 実数 $\mu_1, \ldots, \mu_l, d$ が*

$$\mu_1 > \cdots > \mu_l \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{l} r_i\mu_i = d \quad \sum_{i=1}^{l} r_i\mu_i = n$$

を満たしているとする. この時次が成り立つ.

1. *$d - \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{l} r_i\mu_i^2 \geq 0$.*
2. *$l \geq 2$ かつ上の等号が成立する時, $l = 2, \mu_1 = d, \mu_2 = 0, r_1 = 1, r_2 = n-1$ が成り立つ*

Proof of Theorem 6.10. (1). $c_1(-K_X)^2[\omega]^{n-2} > 0$ の場合. 余接束 T_X の $(c_1(-K_X)\cdot[\omega]^{n-2})$ に関する Harder–Narasimhan filtration

$$0 =: E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_l := T_X$$

を考える. ここで各商 $G_i := E_i/E_{i-1}$ は rank r_i の $(c_1(-K_X)\cdot[\omega]^{n-2})$-semistable torsion-free sheaf で,

$$\mu_{c_1(-K_X)\cdot[\omega]^{n-2}}(G_1) > \mu_{c_1(-K_X)\cdot[\omega]^{n-2}}(G_2) > \cdots > \mu_{c_1(-K_X)\cdot[\omega]^{n-2}}(G_l) = \mu^{\min}_{c_1(-K_X)\cdot[\omega]^{n-2}}(T_X) \underset{\text{Thm. 6.8}}{\geq} 0$$

[24]少なくとも私は「[Ou23] の手法を [CP25] の解析的な手法に変えただけ」なので, そこまですごいと思っていない

以下では, 定数 μ_i, μ, d を

$$\mu_i := \mu_{c_1(-K_X)\cdot[\omega]^{n-2}}(G_i), \qquad d := c_1(T_X)^2 \cdot [\omega]^{n-2}$$

でさだめると $\mu_1 > \cdots > \mu_l \geq 0$ かつ

$$\sum_{i=1}^{l} r_i\mu_i = \sum_{i=1}^{l} c_1(G_i)c_1(-K_X)[\omega]^{n-2} = c_1(-K_X)c_1(-K_X)[\omega]^{n-2} = d > 0$$

となる. 特に補題 6.11 の仮定を満たす. さて Hodge index theorem 5.15 より

$$c_1(G_i)^2[\omega]^{n-2} \underset{\text{Thm. 5.15}}{\leq} \frac{1}{c_1(-K_X)^2[\omega]^{n-2}}\left(c_1(G_i)c_1(-K_X)[\omega]^{n-2}\right)^2 = \frac{r_i^2\mu_i^2}{d} \tag{6.1}$$

である. よってさらに,

$$\begin{aligned}
2c_2(T_X)[\omega]^{n-2} &\underset{\text{Lem. 3.14}}{=} \left(2\sum_{i=1}^{l} c_2(G_i) + 2\sum_{i\neq j} c_1(G_i)c_1(G_j)\right) \\
&\underset{\text{計算}}{=} \left(2\sum_{i=1}^{l} c_2(G_i) - \sum_{i=1}^{l} c_1(G_i)^2\right)[\omega]^{n-2} + \underbrace{c_1(T_X)^2[\omega]^{n-2}}_{=d} \\
&\underset{\text{BG 不等式 Thm.5.16}}{\geq} -\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{1}{r_i}c_1(G_i)^2[\omega]^{n-2}\right) + d \\
&\underset{(6.1)}{\geq} -\sum_{i=1}^{l}\frac{r_i\mu_i^2}{d} + d \underset{\text{Lem. 6.11}}{\geq} 0
\end{aligned} \tag{6.2}$$

(2).$c_1(-K_X)^2[\omega]^{n-2} = 0, c_1(-K_X)[\omega]^{n-1} = 0$ の場合. この場合

$$\sum_{i=1}^{l} r_i\mu_i = \sum_{i=1}^{l} c_1(G_i)c_1(-K_X)[\omega]^{n-2} = c_1(-K_X)c_1(-K_X)[\omega]^{n-2} = 0$$

今 $\mu_i \geq 0$ を仮定しているので, $\mu_i = c_1(G_i)c_1(-K_X)[\omega]^{n-2} = 0$ がいえる. よって Hodge index 定理 5.15 より

$$c_1(G_i)^2[\omega]^{n-2} \leq 0$$

である. 以上より

$$2c_2(T_X)[\omega]^{n-2} \underset{(6.2)}{\geq} -\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{1}{r_i}c_1(G_i)^2[\omega]^{n-2}\right) \underset{\text{上の式}}{\geq} 0$$

(3).$c_1(-K_X)[\omega]^{n-1} = 0$ の場合．この場合 $c_1(-K_X) = 0$ である．よって Yau の定理より，T_X に Hermite–Einstein 計量が入るので，Bogomolov–Gieseker 不等式から $2c_2(T_X)[\omega]^{n-2} \geq 0$ である $\square$

6.4 Miyaoka 不等式 2

Theorem 6.12 ([Miy87, Chapter 7])**.** K_X が *nef* ならば

$$\left(3c_2(\Omega_X) - c_1(X)^2\right)H^{n-2} \geq 0$$

が成り立つ．

まず以下の簡単な補題を示す．これはレポート問題とする．

Lemma 6.13. *1* 以上の整数 $r_1, \ldots, r_l, n$ と，実数 $\mu_1, \ldots, \mu_l, d$ が

$$\mu_1 > \cdots > \mu_l \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{l} r_i\mu_i = d \quad \sum_{i=1}^{l} r_i\mu_i = n$$

を満たしているとする．
この時次が成り立つ．

1. $l \geq 2$ を仮定するとき，$\frac{1}{d}\sum_{i=2}^{l} r_i\mu_i^2 \leq \mu_1 - \frac{r_1\mu_1^2}{d}$.
2. $l, r_1 \geq 2$ を仮定する時

$$\begin{aligned} -\frac{r_1^2}{d(r_1+1)}\mu_1^2 - \frac{1}{d}\sum_{i=2}^{l} r_i\mu_i^2 + d &\geq \frac{1}{d}\left(\frac{r_1}{r_1+1}\mu_1^2 - d\mu_1\right) + d \\ &\geq \left(\frac{1}{r_1(r_1+1)} - \frac{1}{r_1} + 1\right)d \geq \frac{2}{3}d \end{aligned}$$

   という不等式が成り立つ

3. $l, r_1 \geq 2$ かつ *2* の等号が全て成立する時，$l = 2, \mu_1 = \frac{d}{2}, \mu_2 = 0, r_1 = 2, r_2 = n-2$ が成り立つ．
4. $l \geq 2$ かつ $r_1 = 1$ を仮定する時

$$d - \frac{1}{d}\sum_{i=2}^{l} r_i\mu_i^2 \geq d - \mu_1 + \frac{\mu_1^2}{d} \geq \frac{3}{4}d.$$

   という不等式が成り立つ．

5. $l \geq 2$ かつ $r_1 = 1$ を仮定する時, $d - \frac{1}{d}\sum_{i=2}^{l} r_i\mu_i^2 > \frac{3}{4}d$ である.(つまり等号は成立しない)

以下の証明は [Miy87] によるもの. ただし一部議論は [IMM24] で簡略化した.

Proof. $c_1(K_X)^2[\omega]^{n-2} > 0$ の場合を示す. (そうでない場合は示すべき不等式は $\big(c_2(\Omega_X)\big)H^{n-2} \geq 0$ と同値で, 定理 6.10 の証明と同じである.)

余接束 Ω_X の $(c_1(K_X) \cdot [\omega]^{n-2})$ に関する Harder–Narasimhan filtration

$$0 =: E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_l := \Omega_X$$

を考える. ここで各商 $G_i := E_i/E_{i-1}$ は rank r_i の $(c_1(K_X) \cdot [\omega]^{n-2})$-semistable torsion-free sheaf で,

$$\mu_{c_1(K_X)\cdot[\omega]^{n-2}}(G_1) > \mu_{c_1(K_X)\cdot[\omega]^{n-2}}(G_2) > \cdots > \mu_{c_1(K_X)\cdot[\omega]^{n-2}}(G_l) = \mu^{\min}_{c_1(K_X)\cdot[\omega]^{n-2}}(\Omega_X) \underset{\text{Thm. 6.8}}{\geq} 0$$

以下では, 定数 μ_i, μ, d を

$$\mu_i := \mu_{c_1(K_X)\cdot[\omega]^{n-2}}(G_i), \qquad d := c_1(\Omega_X)^2 \cdot [\omega]^{n-2}$$

でさだめると $\mu_1 > \cdots > \mu_l \geq 0$ かつ

$$\sum_{i=1}^{l} r_i\mu_i = \sum_{i=1}^{l} c_1(G_i)c_1(K_X)[\omega]^{n-2} = c_1(K_X)c_1(K_X)[\omega]^{n-2} = d > 0$$

となる. 特に補題 6.13 の仮定を満たす. さて Hodge index theorem 5.15 より

$$c_1(G_i)^2[\omega]^{n-2} \underset{\text{Thm. 5.15}}{\leq} \frac{1}{c_1(K_X)^2[\omega]^{n-2}}\left(c_1(G_i)c_1(-K_X)[\omega]^{n-2}\right)^2 = \frac{r_i^2\mu_i^2}{d} \tag{6.3}$$

である.

ここまでは同じだが, ここから違うことをする. $G_1 \subset \Omega_X$ に関して, Prop. 6.5 のように, Higgs field θ を定めることにより,

$$(G_1 \oplus \mathcal{O}_X, \theta)$$

は $c_1(K_X) \cdot [\omega]^{n-2}$-stable Higgs ベクトル束になる. よって Bogomolov–Gieseker 不等式より

$$c_2(G_1)[\omega]^{n-2} \geq \frac{r_1}{2(r_1+1)}c_1(G_1)^2[\omega]^{n-2} \tag{6.4}$$

となる.

あとは場合分けをしていく.

[1. $l=1$ の時] この場合は $\Omega_X \oplus \mathcal{O}_X$ が stable Higgs ベクトル束の構造を持つので, 示したい不等式よりも強い不等式

$$\big(2(n+1)c_2(\Omega_X) - nc_1(\Omega_X)^2\big)[\omega]^{n-2} \geq 0$$

が成り立つ.

[2. $l, r_1 \geq 2$ の時]

$$\begin{aligned}
&2c_2(\Omega_X)[\omega]^{n-2} \\
&\underset{(6.2)}{=} \left(2c_2(G_1) - c_1(G_1)^2\right)[\omega]^{n-2} + \left(2\sum_{i=2}^{l} c_2(G_i) - \sum_{i=2}^{l} c_1(G_i)^2\right)[\omega]^{n-2} + \underbrace{c_1(\Omega_X)^2[\omega]^{n-2}}_{=d} \\
&\underset{\text{Thm.5.16 \&(6.4)}}{\geq} -\frac{1}{r_1+1}c_1(G_1)^2[\omega]^{n-2} - \sum_{i=2}^{l}\frac{1}{r_i}c_1(G_i)^2[\omega]^{n-2} + d \underset{(6.3)}{\geq} -\frac{r_1^2}{d(r_1+1)}\mu_1^2 - \sum_{i=2}^{l}\frac{r_i\mu_i^2}{d} + d \\
&\underset{\text{Lem. (6.13)}}{\geq} \frac{2}{3}d = \frac{2}{3}c_1(\Omega_X)^2[\omega]^{n-2}
\end{aligned}$$

[2. $l \geq 2$ かつ $r_1 = 1$ の時] (6.4) より,

$$0 \underset{\mathrm{rank}(G_1)=1}{=} c_2(G_1)[\omega]^{n-2} \underset{(6.4)}{\geq} \frac{1}{4}c_1(G_1)^2[\omega]^{n-2} \Rightarrow 0 \geq c_1(G_1)^2[\omega]^{n-2} \tag{6.5}$$

以上より上と同じ計算で

$$\begin{aligned}
&2c_2(\Omega_X)[\omega]^{n-2} \\
&\underset{(6.2)}{=} \left(-c_1(G_1)^2\right)[\omega]^{n-2} + \left(2\sum_{i=2}^{l} c_2(G_i) - \sum_{i=2}^{l} c_1(G_i)^2\right)[\omega]^{n-2} + \underbrace{c_1(\Omega_X)^2[\omega]^{n-2}}_{=d} \\
&\underset{\text{Thm.5.16 \&(6.5)}}{\geq} -\sum_{i=2}^{l}\frac{1}{r_i}c_1(G_i)^2[\omega]^{n-2} + d \underset{(6.3)}{\geq} -\sum_{i=2}^{l}\frac{r_i\mu_i^2}{d} + d \\
&\underset{\text{Lem. (6.13)}}{>} \frac{3}{4}d = \frac{3}{4}c_1(\Omega_X)^2[\omega]^{n-2}
\end{aligned}$$

これは示したい方程式よりも強い方程式である. □

6.5 Miyaoka の不等式の応用 -nonvanishing 予想-

Theorem 6.14. *[Miy87][Miy88b] X が 3 次元多様体で K_X nef ならば $H^0(X, mK_X) \neq 0$ となる $m \in\in$ が存在する.*

Proof. 以下

$$\kappa(X) = \kappa(K_X) := \limsup_{m\to\infty} \frac{\log \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, K_X^{\otimes m})}{\log m} \in \{-\infty, 0, 1, \ldots, \dim X\}$$

を X の小平次元とする. ($\log 0 = -\infty$ とする.)

K_X nef ならば Miyaoka の不等式から $c_2(X)c_1(K_X) \geq 0$ である. よって Riemann–Roch から

$$0 \geq -\frac{1}{24}\int_X c_1(K_X)c_2(T_X) \underset{\text{Thm. 3.26}}{=} \chi(X, \mathcal{O}_X) \geq 1 - h^1(X, \mathcal{O}_X) - h^3(X, \mathcal{O}_X)$$

よって $h^1(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ または $h^3(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ である. $h^3(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ ならば Serre duality より

$$H^3(X, \mathcal{O}_X) \cong H^0(X, K_X) \neq 0$$

より nonvanishing が言える.

$h^1(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ ならば非自明な Albanese map $\alpha : X \to A$ が取れる. $\alpha(X) \subset A$ なので [Uen75, Theorem 10.9] から $\kappa(\alpha(X)) \geq 0$[25] よって Stein Factorization をとって

$$\alpha : X \to Z \quad \text{かつ} \quad \dim Z > 0 \quad \text{かつ} \quad \kappa(Z) \geq 0$$

となるものがある.

あとは $\dim Z$ による場合分け. $\dim Z = \dim X$ ならば明らか. $0 < \dim Z < \dim X = 3$ の場合, α のファイバーは F に関して, K_F nef である. よって曲面の nonvanishing theorem より $\kappa(F) \geq 0$ Iitaka $C_{3,m}$ 予想が (Viehweg, Ueno, Kawamata より) 解決しているので

$$\underbrace{\kappa(X) \geq \kappa(Z) + \kappa(F)}_{\text{Iitaka } C_{3,m} \text{ 予想}} \geq 0$$

□

この証明はかなり気に入っていて, 少なくとも Iitaka 予想が MMP で利用されている感じがして好きである. Iitaka 予想に関しては藤野先生のサーベイ https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~fujino/Nagoya-Iitaka.pdf 参照のこと

[25] より強く $W \subset A$ 既約部分多様体について, $W \to W/B$ となるトーラス fibration で W/B が一般型になる.

[Miy88b] もおそらく terminal variety でこの議論が成り立つかを調べているはずである．この方向性を強めたのが Lazic-Peternell [LP18] である．Lazic のノート `https://www.uni-saarland.de/fileadmin/upload/lehrstuhl/lazic/Skripten/foliation.pdf` がかなりわかりやすい．

Remark 6.15. 上の定理を用いて, Miyaoka は 3 次元 多様体の $\nu(K_X) = 1$ のアバンダンス予想を解決した [Miy88a]．後に Kawamata[Kaw92] によって 3 次元多様体の $\nu(K_X) = 2$ のアバンダンス予想を解決した．

なので 3 次元 コンパクト Kähler 多様体のアバンダンスを示すには, 次のコンパクト KLT Kähler の Chern 類の不等式が必要である． [26]

Theorem 6.16. *X コンパクト KLT Kähler* 多様体として, *E* を *reflexive sheaf* とする．*E* が *stable* ならば *Bogomolov–Gieseker* 不等式が成り立つ．

$$\left(2r\hat{c}_2(E) - (r-1)c_1(E)^2\right)[\omega]^{n-2} \geq 0$$

さらに上の不等式の等号が成立するとき, X_{reg} 上にある計量 h があって

$$F_{E,h} = \underbrace{\frac{1}{r}\mathrm{tr}_E(F_{E,h})}_{(1,1)\text{ 微分形式}} \cdot \mathrm{Id}_E \quad \mathrm{End}(E) \text{ 値 } (1,1)\text{-}form\ on\ X_{\mathrm{reg}}.$$

となる．ここで $\hat{c}$ を *Orbifold Chern* 類とする．

近年これは解決された．多くの人が関わっているので, 以下にまとめておく．

- Bogomolov-Gieseker 不等式が Ou [Ou24] により解決した．具体的に言うと KLT 多様体が Orbifold modification を持つことを示した．[27]
- 上を用いて 3 次元のコンパクト Kähler log canonical pair のアバンダンス予想を Das-Ou [DO23] が解決．
- 3 次元の場合の Bogomolov-Gieseker 不等式は Guenancia-Paun[GP24] が別証明を与えた．
- 高次元で等号成立の場合も含めたもの (Donaldson–Uhlenbeck–Yau 定理) は Fu-Ou[FO25] や Guenancia-Paun[GP26] が互いに独立して解決．高次元での Simpson 対応を Zhang-Zhang-Zhang[ZZZ26] が解決した． [28]

ここ 3 年でコンパクト KLT Kähler での理論が一気に進んだ感じである．主に Wenhao Ou 先生が大定理を毎年毎年出しているためである．3 年前は未解決問題だったが, 今や定理になり, 分野の発展が早いと思った．

[26] [CHP16] でコンパクト Kähler の 3 次元のアバンダンス予想が解決されたが, 後に Chern 類の不等式関連で gap があることが判明した．これは後に [GP24] の Appendix で解決している

[27] Orbifold 上の Kobayashi–Hitchin 対応・Donaldson–Uhlenbeck–Yau の定理はその前に確立されている．

[28] Chuanjing Zhang and Xi Zhang and Shiyu Zhang である．Shiyu Zhang さんとは [IJZ25] で陣内さんと一緒に共同研究した．

7 Outlook

7.1 80 から 90 年代の Chern 類の研究

私はその時代に生きていないのでわからないが, Chern 類の研究は 80 年から 90 年代前後に流行っていたと思う. Chen-Ogiue の定理 [CO75], Miyaoka-Yau 不等式 [Miy77][Yau77] に始まり, open variety や曲面の Miyaoka-Yau など多くある. 日本でも辻先生, 小林亮一先生による open variety $X \setminus D$ の Miyaoka–Yau や. 坂東先生と Siu 先生の Bando-Siu [BS94] などが挙げられる.

この辺りは宮岡先生の概説「主題と変奏 Chern 類に関する不等式をめぐって」https://www.jstage.jst.go.jp/article/sugaku1947/41/3/41_3_193/_article/-char/ja/ に詳しく書かれている. これは面白いので読んでほしい.

7.2 Projective KLT variety の Chern 類の研究

近年になって注目された (?) のは, KLT 多様体の研究と orbifold chern 類 $\widehat{c}_2$ が Greb-Kebekus-Peternell あたりによって確立されたからである. [29] Miyaoka-Yau 不等式や Yau の定理の KLT 版が

- K_X ample の場合 [GKPT20, GKPT19a, GKPT19b]
- $K_X \equiv 0$ の場合 [GKP16a, LT18]
- $-K_X$ ample の場合 [GKP22, DGP24]

とできたからである. [IM22, IMM24] はその延長で K_X が nef の場合を扱ったものである. その後 Niklas Müller さんが [Mül26] で [IMM24] を大きく拡張した.

Projective KLT variety においての Kobayashi–Hitchin 対応•Simpson 対応も [GKPT20, GKPT19a, GKPT19b] で確立された.

7.3 コンパクト KLT Kähler 多様体の Chern 類の研究

この辺りがこの 3 年で一気に発展した.

- Bogomolov-Gieseker 不等式が Ou [Ou24] により解決した. 具体的に言うと KLT 多様体が Orbifold modification を持つことを示した. また Orbifold modification の存在によって Orbifold chern 類がかなり簡単に理解できるようになった.
- 高次元での Kobayashi–Hitchin 対応・Donaldson–Uhlenbeck–Yau 定理は Fu-Ou[FO25] や Guenancia-Paun[GP26] が互いに独立して解決.
- 高次元での Simpson 対応を Zhang-Zhang-Zhang[ZZZ26] が解決した.

[29] orbifold chern 類自体は Mumford が定義していた. 川又先生が [Kaw92] でアバンダンス予想の解決のために KLT 多様体に $\widehat{c}_2$ を定義した. 時代を先取りしすぎである.

7.4 3 次元 Fano の Chern 類

3 次元 canonical weak Fano が

$$3c_2(X)c_1(X) \geq c_1(X)^3$$

を満たすか？ と言う予想による.[30]この辺りは Haidong Liu さんたちがやっている. [IJL23, LL23, LL24] などを参照. この辺りは"Fano" って感じなので, 代数幾何学っぽくて近年の研究には私はついていけていない.

7.5 じゃあ何が残っているのか？

どれも簡単にはとっつきづらいのでお勧めしづらい. 最近だと関連分野として以下のものがある

- Projective/コンパクト Kähler klt variety の orbifold Chern 類に対する Miyaoka–Yau とその周辺. これは多分もう問題が残っていないと思う.
- orbifold pair(X, D) の orbifold Chern 類に対する Miyaoka–Yau とその周辺. [CGG24] に詳しい.
- 3 次元 Fano の Chern 類. これはかなり代数幾何学力が問われる.
- Kobayashi–Hitchin 対応・Simpson 対応周辺. これも Projective/コンパクト Kähler klt などは難しいがちょっと外したものならまだなんとかなるかもしれない.(と陣内さんの研究を見てると思う) この辺りは Higgs 束も含めて流行っているので, 何かやることいっぱいあると思う. (が Chern 類の研究じゃない気もする).
- 高次 Chern 類など考える. 高次 Chern 類は Ping Li 先生が何かやっているようだがちょっとついていけてない.
- 組み合わせ論的研究. https://arxiv.org/abs/2411.09573 が気になっている. 超平面配置と Chern 類が組み合わさるらしい. 読んで教えてほしい.

もしかしたら今私がやっていることは今後広がるかもしれないので, 論文を出してからお知らせします.

[30] これは 3 次元 canonical weak Fano が $(-K_X)^3 \leq 72$ を満たすか？ という予想に基づく. がこれは近年 Chen Jiang さんたちによって解決された

References

[BBGZ13] Robert J. Berman, Sébastien Boucksom, Vincent Guedj, and Ahmed Zeriahi. A variational approach to complex Monge-Ampère equations. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 117:179–245, 2013.

[BEGZ10] Sébastien Boucksom, Philippe Eyssidieux, Vincent Guedj, and Ahmed Zeriahi. Monge-Ampère equations in big cohomology classes. *Acta Math.*, 205(2):199–262, 2010.

[BG13] Sébastien Boucksom and Vincent Guedj. Regularizing properties of the Kähler-Ricci flow. In *An introduction to the Kähler-Ricci flow*, volume 2086 of *Lecture Notes in Math.*, pages 189–237. Springer, Cham, 2013.

[BS94] Shigetoshi Bando and Yum-Tong Siu. Stable sheaves and Einstein-Hermitian metrics. In *Geometry and analysis on complex manifolds. Festschrift for Professor S. Kobayashi's 60th birthday*, pages 39–59. Singapore: World Scientific, 1994.

[Cao13] Junyan Cao. A remark on compact Kähler manifolds with nef anticanonical bundles and its applications, 2013. Preprint. arXiv:1305.4397.

[CGG24] Benoît Claudon, Patrick Graf, and Henri Guenancia. Equality in the Miyaoka-Yau inequality and uniformization of non-positively curved klt pairs. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 362:55–81, 2024.

[CH19] Junyan Cao and Andreas Höring. A decomposition theorem for projective manifolds with nef anticanonical bundle. *J. Algebraic Geom.*, 28(3):567–597, 2019.

[CHP16] Frédéric Campana, Andreas Höring, and Thomas Peternell. Abundance for Kähler threefolds. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 49(4):971–1025, 2016.

[CO75] Bang-yen Chen and Koichi Ogiue. Some characterizations of complex space forms in terms of Chern classes. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 26(104):459–464, 1975.

[CP91] Frédéric Campana and Thomas Peternell. Projective manifolds whose tangent bundles are numerically effective. *Math. Ann.*, 289(1):169–187, 1991.

[CP17] Junyan Cao and Mihai Păun. Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over abelian varieties. *Invent. Math.*, 207(1):345–387, 2017.

[CP25] Junyan Cao and Mihai Păun. Remarks on relative canonical bundles and algebraicity criteria for foliations in Kähler context, 2025. Preprint. arXiv:2502.02183.

[Dem] Jean-Pierre Demailly. Complex analytic and di ff erential geometry. Preprint. Available from the author's web site https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf.

[Dem12] Jean-Pierre Demailly. *Analytic methods in algebraic geometry*, volume 1 of *Surveys of Modern Mathematics*. International Press, Somerville, MA; Higher Education Press, Beijing, 2012.

[Den21a] Ya Deng. Applications of the Ohsawa-Takegoshi extension theorem to direct image problems. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (23):17611–17633, 2021.

[Den21b] Ya Deng. A note on the Simpson correspondence for semistable Higgs bundles. *Pure Appl. Math. Q.*, 17(5):1899–1911, 2021.

[DGP24] Stéphane Druel, Henri Guenancia, and Mihai Păun. A decomposition theorem for $\mathbb{Q}$-Fano Kähler-Einstein varieties. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 362(S1):93–118, 2024.

[DO23] Omprokash Das and Wenhao Ou. On the log abundance for compact Kähler threefolds ii, 2023. Preprint. arXiv:2306.00671.

[DPS94] Jean-Pierre Demailly, Thomas Peternell, and Michael Schneider. Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles. *J. Algebraic Geom.*, 3(2):295–345, 1994.

[Eno88] Ichiro Enoki. Stability and negativity for tangent sheaves of minimal Kähler spaces. In *Geometry and analysis on manifolds (Katata/Kyoto, 1987)*, volume 1339 of *Lecture Notes in Math.*, pages 118–126. Springer, Berlin, 1988.

[FG12] Osamu Fujino and Yoshinori Gongyo. On canonical bundle formulas and subadjunctions. *Michigan Math. J.*, 61(2):255–264, 2012.

[FO25] Xin Fu and Wenhao Ou. Orbifold bogomolov-gieseker inequalities on compact kähler varieties, 2025. Preprint. arXiv:2511.03530.

[Ful84] William Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[GKP16a] Daniel Greb, Stefan Kebekus, and Thomas Peternell. Étale fundamental groups of Kawamata log terminal spaces, flat sheaves, and quotients of abelian varieties. *Duke Math. J.*, 165(10):1965–2004, 2016.

[GKP16b] Daniel Greb, Stefan Kebekus, and Thomas Peternell. Movable curves and semistable sheaves. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2016(2):536–570, 2016.

[GKP22] Daniel Greb, Stefan Kebekus, and Thomas Peternell. Projective flatness over klt spaces and uniformisation of varieties with nef anti-canonical divisor. *J. Algebraic Geom.*, 31(3):467–496, 2022.

[GKPT19a] Daniel Greb, Stefan Kebekus, Thomas Peternell, and Behrouz Taji. The Miyaoka-Yau inequality and uniformisation of canonical models. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 52(6):1487–1535, 2019.

[GKPT19b] Daniel Greb, Stefan Kebekus, Thomas Peternell, and Behrouz Taji. Nonabelian Hodge theory for klt spaces and descent theorems for vector bundles. *Compos. Math.*, 155(2):289–323, 2019.

[GKPT20] Daniel Greb, Stefan Kebekus, Thomas Peternell, and Behrouz Taji. Harmonic metrics on Higgs sheaves and uniformization of varieties of general type. *Math. Ann.*, 378(3-4):1061–1094, 2020.

[GP24] Henri Guenancia and Mihai Păun. Bogomolov-Gieseker inequality for log terminal Kähler threefolds, 2024. Preprint. arXiv:2405.10003.

[GP26] Henri Guenancia and Mihai Păun. A complex analytic approach to orbifold chern classes on singular varieties and its applications, 2026. Preprint. arXiv:2601.08627.

[Gri10] Julien Grivaux. Chern classes in deligne cohomology for coherent analytic sheaves. *Mathematische Annalen*, 347:249–284, 2010.

[Gue16] Henri Guenancia. Semistability of the tangent sheaf of singular varieties. *Algebr. Geom.*, 3(5):508–542, 2016.

[Har80] Robin Hartshorne. Stable reflexive sheaves. *Math. Ann.*, 254(2):121–176, 1980.

[Has18] Kenta Hashizume. On the non-vanishing conjecture and existence of log minimal models. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 54(1):89–104, 2018.

[HIM22] Genki Hosono, Masataka Iwai, and Shin-ichi Matsumura. On projective manifolds with pseudo-effective tangent bundle. *J. Inst. Math. Jussieu*, 21(5):1801–1830, 2022.

[His24] Tomoyuki Hisamoto. On the Miyaoka-Yau inequality for manifolds with nef anti-canonical line bundle, 2024. Preprint. arXiv:2403.09120.

[HL10] Daniel Huybrechts and Manfred Lehn. *The geometry of moduli spaces of sheaves.* Cambridge: Cambridge University Press, 2nd ed. edition, 2010.

[HPS18] Christopher Hacon, Mihnea Popa, and Christian Schnell. Algebraic fiber spaces over abelian varieties: around a recent theorem by Cao and Păun. In *Local and global methods in algebraic geometry*, volume 712 of *Contemp. Math.*, pages 143–195. Amer. Math. Soc., [Providence], RI, [2018] ©2018.

[IJL23] Masataka Iwai, Chen Jiang, and Haidong Liu. Miyaoka type inequality for terminal threefolds with nef anti-canonical divisors, 2023. Preprint. arXiv:2303.00268. to appear in Sci.China Math.

[IJZ25] Masataka Iwai, Satoshi Jinnouchi, and Shiyu Zhang. The miyaoka-yau inequality for singular varieties with big canonical or anticanonical divisors, 2025. Preprint. arXiv:2507.08522.

[IM22] Masataka Iwai and Shin-ichi Matsumura. Abundance theorem for minimal compact Kähler manifolds with vanishing second Chern class, 2022. Preprint. arXiv:2205.10613.

[IMM24] Masataka Iwai, Shin-ichi Matsumura, and Niklas Müller. Minimal projective varieties satisfying Miyaoka's equality, 2024. Preprint. arXiv:2404.07568.

[JMS22] Mattias Jonsson, Nicholas McCleerey, and Sanal Shivaprasad. Geodesic rays in the donaldson–uhlenbeck–yau theorem, 2022. Preprint. arXiv:2210.09246.

[Kaw92] Yujiro Kawamata. Abundance theorem for minimal threefolds. *Invent. Math.*, 108(2):229–246, 1992.

[Kob14] Shoshichi Kobayashi. *Differential geometry of complex vector bundles*. Princeton Legacy Library. Princeton University Press, Princeton, NJ, [2014]. Reprint of the 1987 edition [MR0909698].

[Lan04] Adrian Langer. Semistable sheaves in positive characteristic. *Ann. of Math. (2)*, 159(1):251–276, 2004.

[Laz] Vladimir Lazić. Algebraic geometry: Foliations. Preprint. Available from the author's web site `https://www.uni-saarland.de/fileadmin/upload/lehrstuhl/lazic/Skripten/foliation.pdf`.

[Laz04] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. II*, volume 49 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Positivity for vector bundles, and multiplier ideals.

[LL23] Haidong Liu and Jie Liu. Kawamata–Miyaoka type inequality for canonical $\mathbb{Q}$-Fano varieties, 2023. Preprint. arXiv:2308.10440. to appear J. Reine Angew. Math.

[LL24] Haidong Liu and Jie Liu. Kawamata–Miyaoka type inequality for canonical $\mathbb{Q}$-Fano varieties ii: terminal $\mathbb{Q}$-fano threefolds, 2024. Preprint. arXiv:2401.04391. to appear in Épijournal Géom. Algébrique.

[LOY24] Jie Liu, Wenhao Ou, and Xiaokui Yang. Projective manifolds whose tangent bundle contains a strictly nef subsheaf. *J. Algebr. Geom.*, 33(1):1–53, 2024.

[LP18] Vladimir Lazić and Thomas Peternell. Abundance for varieties with many differential forms. *Épijournal Géom. Algébrique*, 2:Art. 1, 35, 2018.

[LT18] Steven Lu and Behrouz Taji. A characterization of finite quotients of abelian varieties. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2018(1):292–319, 2018.

[Miy77] Yoichi Miyaoka. On the Chern numbers of surfaces of general type. *Invent. Math.*, 42:225–237, 1977.

[Miy87] Yoichi Miyaoka. The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety. In *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, volume 10 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 449–476. North-Holland, Amsterdam, 1987.

[Miy88a] Yoichi Miyaoka. Abundance conjecture for 3-folds: case $\nu = 1$. *Compositio Math.*, 68(2):203–220, 1988.

[Miy88b] Yoichi Miyaoka. On the Kodaira dimension of minimal threefolds. *Math. Ann.*, 281(2):325–332, 1988.

[Mül26] Niklas Müller. Inequalities of miyaoka-yau type and uniformisation of varieties of intermediate kodaira dimension, 2026. Preprint. arXiv:2601.15138.

[MW21] Shin-ichi Matsumura and Juanyong Wang. Structure theorem for projective klt pairs with nef anti-canonical divisor., 2021. Preprint. arXiv: 2105.14308.

[MWWZ25] Shin-ichi Matsumura, Juanyong Wang, Xiaojun Wu, and Qimin Zhang. Compact Kähler manifolds with nef anti-canonical bundle, 2025. Preprint. arXiv: 2506.23218.

[Nak04] Noboru Nakayama. *Zariski-decomposition and abundance*, volume 14 of *MSJ Memoirs*. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.

[Ou23] Wenhao Ou. On generic nefness of tangent sheaves. *Math. Z.*, 304(4):58, 2023.

[Ou24] Wenhao Ou. Orbifold modifications of complex analytic varieties, 2024. Preprint. arXiv:2401.07273.

[Ou25] Wenhao Ou. A characterization of uniruled compact Kähler manifolds, 2025. Preprint. arXiv:2501.18088.

[Pa07] Mihai P˘ aun. Siu's invariance of plurigenera: a one-tower proof. *J. Differential Geom.*, 76(3):485–493, 2007.

[PT18] Mihai Păun and Shigeharu Takayama. Positivity of twisted relative pluricanonical bundles and their direct images. *J. Algebraic Geom.*, 27(2):211–272, 2018.

[Sim88] Carlos T. Simpson. Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization. *J. Amer. Math. Soc.*, 1(4):867–918, 1988.

[SY80] Yum Tong Siu and Shing Tung Yau. Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature. *Invent. Math.*, 59(2):189–204, 1980.

[Uen75] Kenji Ueno. *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. Notes written in collaboration with P. Cherenack.

[Yau77] Shing Tung Yau. Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 74(5):1798–1799, 1977.

[ZZZ25] Chuangjing Zhang, Shiyu Zhang, and Xi Zhang. The Miyaoka-Yau inequality for minimal Kähler klt spaces", 2025. Preprint. arXiv:2503.13365.

[ZZZ26] Chuangjing Zhang, Shiyu Zhang, and Xi Zhang. Non-abelian hodge correspondence over singular kähler spaces, 2026. Preprint. arXiv:2601.13071.

A　ガイダンス資料

2026 年度春夏学期 東北大学集中講義
(微分幾何学特選／数学総合講義Ｈ／多様体論特殊講義ＥⅠ)
Chern 類と複素幾何学
5 月 26 日 (火)〜5 月 29 日 (金) 15:00〜18:00 川井ホール

岩井雅崇 (いわいまさたか)

基本的事項

- この授業は<u>対面授業</u>である.
- ???や授業ホームページ (https://masataka123.github.io/2026_tohoku_Chern_class/) にて「授業の資料・授業の板書」などをアップロードしていく. QR コードは下にある.

授業に関して

今回松村先生から「今回の講義では, 専門的な予備知識をあまり仮定せず, 初学者にも分かるように話すように」と依頼がありました.

おそらく集中講義をしている人全員が思うことだが

複素幾何学や代数幾何学を初学者にわかりやすく
かつ最新のことを言うのは 12 時間では足りない！！

そのため以下の方法を考えました.

- 授業の資料を作成しました. まずこれを入手してください.
- 授業は資料の中から大事そうな部分をピックアップして話します. 板書量が多くなる部分は資料に投げます.
- 岩井の板書スピードは早いです. 私にはこれを止める方法はないので, 皆さんの板書の量を少なくするようにしてください. (例えば資料にメモ書きするとか). なお後で授業の板書を上のホームページなどにアップロードします.

- 授業前半は初学者にわかりやすいものを心がけている予定です．すでに知っている人は内職をするか, 3 時間板書しながら動き回って苦労している岩井を見ててください.
- 資料はかなり詳しく書きました．正直に言うと岩井の授業を聞かなくても授業の資料 (+chatGPT) で理解することは可能です．この資料の作成し終えた時点で私の仕事は 8 割終わったと思ってます.

成績に関して

レポートでつけます．成績評価に関してはあまり何も考えていないので, 松村先生や他の東北大学の先生に情報を聞いて決めます.

レポートに関して

レポートは資料の最後にあります．紙で欲しい人には水曜日に渡します.

- 内容: レポート問題 授業の資料の最後にレポート問題が書いてある.
- レポート締切: 2026 年??月??日 23:59:00 (日本標準時刻, GMT+9)
- レポート提出方法: 配布したレポート問題に解答し, ??にて提出する.

授業予定

1. ベクトル束・微分形式・接続・曲率
2. Chern 類の定義と性質
3. Hermite–Einstein 計量．Bogomolov–Gieseker 不等式．Slope stability．Kobayashi–Hitchin 対応・Donaldson–Uhlenbeck–Yau の定理
4. Miyaoka–Yau 不等式と Miyaoka の不等式.

補足

- 授業の内容の 3/4 は"Shoshichi Kobayashi. Differential geometry of complex vector bundles. Princeton"の 1,2,4,5 章に基づく．この本はネットで入手可能である.
- 最後は"Yoichi Miyaoka. The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety. In Algebraic geometry, Sendai,"と私たちの論文 (Iwai-Matsumura-Müller 25) に基づく.
- 一部わからない部分は他の論文や chatGPT に聞いた内容を含む.
- 今回の内容は微分幾何・複素幾何によってます．これは現在, 微分幾何の勉強と研究をしているからです．代数幾何学を知っていると得する (かも).
- レポート問題は授業の内容を全くわからなくても解ける問題が 2 つほどある.

B　レポート問題

問題 1. ベクトル束の filtration

$$0 =: E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \ldots \subsetneq E_l := E.$$

となる filtration で各 $G_i := E_i/E_{i-1}$ が rank r_i の ベクトル束になるものが存在すると仮定する.

1.

$$0 \to E_{i-1} \to E_i \to G_i \to 0$$

に Chern character の加法性を用いることで,

$$\frac{\Delta(E)}{r} - \sum_{i=1}^{l} \frac{\Delta(G_i)}{r_i} \quad = \quad \left(\frac{c_1(E)^2}{r} - \sum_{i=1}^{l} \frac{c_1(G_i)^2}{r_i} \right) \text{を示せ.}$$

2.

$$r \left(\sum_{i=1}^{l} \frac{c_1(G_i)^2}{r_i} - \frac{c_1(E)^2}{r} \right) = \sum_{1 \le i < j \le l} r_i r_j \left(\frac{c_1(G_i)}{r_i} - \frac{c_1(G_j)}{r_j} \right)^2 \text{を示せ.}$$

3. 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{\Delta(E)}{r} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\Delta(G_i)}{r_i} - \frac{1}{r} \sum_{1 \le i < j \le l} r_i r_j \left(\frac{c_1(G_i)}{r_i} - \frac{c_1(G_j)}{r_j} \right)^2 \in H^4(X, \mathbb{R})$$

問題 2. (X, ω) をコンパクト Kähler 多様体とし, rank r のベクトル束 E の slope を次で定める.

$$\mu(E) := \frac{c_1(E) \cdot [\omega]^{n-1}}{\mathrm{rank}(E)}$$

ベクトル束の完全系列 $0 \longrightarrow S \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ について,

$$\mathrm{rank}\, S(\mu(E) - \mu(S)) + \mathrm{rank}\, Q(\mu(E) - \mu(Q)) = 0$$

であることを示せ.

問題 3. ベクトル束 E について maximum slope , minimal slope を次で定義する.

$$\mu^{\max}(E) := \sup \{\mu(F) \mid 0 \neq F \subseteq E,\ F \text{ torsion-free}\}.$$

$$\mu^{\min}(E) := \inf \{\mu(Q) \mid E \twoheadrightarrow Q,\ Q \text{ torsion-free}\}.$$

ここで $F = E$, $Q = E$ も含めることに注意する. この時 E-semistable は $\mu^{\max}(E) = \mu(E)$ と同値であり, また $\mu^{\min}(E) = \mu(E)$ と同値であることを示せ

問題 4. 1 以上の整数 $r_1, \dots, r_l, n$ と, 実数 $\mu_1, \dots, \mu_l, d$ が

$$\mu_1 > \dots > \mu_l \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{l} r_i \mu_i = d \quad \sum_{i=1}^{l} r_i \mu_i = n$$

を満たしているとする. この時次が成り立つことを示せ

1. $d - \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{l} r_i \mu_i^2 \geq 0$.
2. $l \geq 2$ かつ上の等号が成立する時, $l = 2, \mu_1 = d, \mu_2 = 0, r_1 = 1, r_2 = n-1$ が成り立つ

問題 5. 1 以上の整数 $r_1, \dots, r_l, n$ と, 実数 $\mu_1, \dots, \mu_l, d$ が

$$\mu_1 > \dots > \mu_l \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{l} r_i \mu_i = d \quad \sum_{i=1}^{l} r_i \mu_i = n$$

を満たしているとする.

この時次が成り立つことを示せ

1. $l \geq 2$ を仮定するとき, $\frac{1}{d}\sum_{i=2}^{l} r_i \mu_i^2 \leq \mu_1 - \frac{r_1 \mu_1^2}{d}$ である.
2. $l, r_1 \geq 2$ を仮定する時

$$\begin{aligned} -\frac{r_1^2}{d(r_1+1)}\mu_1^2 - \frac{1}{d}\sum_{i=2}^{l} r_i \mu_i^2 + d &\geq \frac{1}{d}\left(\frac{r_1}{r_1+1}\mu_1^2 - d\mu_1\right) + d \\ &\geq \left(\frac{1}{r_1(r_1+1)} - \frac{1}{r_1} + 1\right) d \geq \frac{2}{3}d \end{aligned}$$

   という不等式が成り立つ. (ヒント 一つ目の不等式は 1 を使う. 二つ目の不等式は $\mu_1 \leq \frac{d}{r_1}$ と 2 次関数の最大最小問題. 三つ目の不等式も $r_1 \geq 2$ の最大最小問題.)
3. 2 の等号が全て成立する時, $l = 2, \mu_1 = \frac{d}{2}, \mu_2 = 0, r_1 = 2, r_2 = n-2$ が成り立つことを示せ
4. $l \geq 2$ かつ $r_1 = 1$ を仮定する時

$$d - \frac{1}{d}\sum_{i=2}^{l} r_i \mu_i^2 \geq d - \mu_1 + \frac{\mu_1^2}{d} \geq \frac{3}{4}d.$$

   という不等式が成り立つ
5. $l \geq 2$ かつ $r_1 = 1$ を仮定する時, $d - \frac{1}{d}\sum_{i=2}^{l} r_i \mu_i^2 > \frac{3}{4}d$ である.(つまり等号は成立しない)

C　談話会の講演内容

談話会の講演内容を tex にする.

D　vanishing Theorem

[Kob14, 3 章] の内容. 勉強して理解できたら書きます

E　stable ならば Hermite-Einstein 計量を持つことの証明

今勉強中なので整理できたら書きます. [JMS22] の証明を書いていきます.

F　Enoki の generic nefness theorem の証明

今勉強中なので整理できたら書きます