公理的集合論と圏論

岩井雅崇 (大阪大学)

February 23, 2025 ver 1.00

Contents

Chapter 1

公理的集合論

以下は [田中] の「田中尚夫 公理的集合論」をもとにした.

1.0.1 全順序集合と整列集合

定義 1. A を集合とする. 関係 $\leq$ が条件

1. (反射法則) $x \in A,\ x \leq x$
2. (反対称法則) $x, y \in A,\ x \leq x$ and $y \leq x \Rightarrow x = y$
3. (推移法則) $x, y, z \in A,\ x \leq y$ and $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

を満たすとき, $\leq$ を (反射型) 順序という

注意 **2.** A を集合とする. 関係 $<$ が条件

1. (非反射法則) $x \in A,\ x < x$ ではない.
2. (推移法則) $x, y, z \in A,\ x < y$ and $y < z \Rightarrow x < z$

を満たすとき, $<$ を (非反射型) 順序という

順序に関しては $\leq$ を定義しようが $<$ を定義しようが同じである. これは $x < y$ を $x \neq y$ かつ $x \leq y$ で定義する, もしくは逆を辿ることで同値である.

以下 $\leq$ を (反射型) 順序, $<$ を (非反射型) 順序で表す.

$(A, \leq)$ 順序集合について, 次のように定義する

- $\leq$ が全順序とは, 任意の $x, y \in A$ について $x < y$ か $x = y$ か $y < x$ のどれかが成立することである.
- $a \in A$ について
$$Seg(a) := \{x \in A | x < a\}$$
と定義し, a による始切片という.

- $a \in A$ が A の極小元とは，「任意の $x \in A$ について $x < a$ とならない」として定義する．極大も同様.

- $a \in A$ が A の最小元とは，「任意の $x \in A$ について $a \leq x$」として定義する．最大も同様.

- $a, b \in A$ について，b が a の直後元とは，$a < b$ かつ $a < x < b$ なる $x \in A$ が存在しないとして定義する.

定義 3. $(A <_A), (B, <_B)$ を順序集合とする．$f : A \to B$ が順序を保存 ($x <_A y$ と $f(x) <_B f(y)$ が同値) し全単射である時，f は順序同型という．順序同型の時 $(A <_A) \cong (B, <_B)$ と表す.
また f が単射の場合は $f : A \to B$ を順序埋め込みという.

補題 4 (定理 3.1.6)**.** $(A, <_A)$ が順序集合ならば，ある集合 $(S, \subsetneq)$ が存在して

$$(A, <_A) \cong (S, \subsetneq)$$

となる．($(A, \leq_A)$ も同様)

Proof.

$$S := \{Seg(a)\ a \in A\}$$

とおく． $S \in P(A)$ より集合である．(冪集合公理より集合の冪集合は集合!) これで順序同型が言える. □

定義 5. A を集合とする．$(A, <)$ が整列集合とは次を満たすこと[a]

1. $(A, <)$ が全順序．つまり任意の $x, y \in A$ について $x < y$ か $y < x$ のどちらかが成立する.

2. $B \subset A$ なる部分”集合”について，最小元が存在する.

[a] A が集合でない場合 (”クラス”の場合)，始切片が集合であることを仮定する.

定理 6 (定理 3.2.2)**.** $(A, <)$ が整列集合で，$\varphi(x)$ を論理式とする

1. (最小元原理)$\{x \in A | \varphi(x)\}$ は空でなければ最小限を持つ.

2. (帰納法原理) 任意の $x \in A$ について，「任意の $y < x$ が $\varphi(y)$ ならば $\varphi(x)$」が言えるならば，任意の $x \in A$ について $\varphi(x)$ が言える．(数学的帰納法の順序版)

Proof. (1). $b \in \{x \in A | \varphi(x)\}$ をとって $Seg(b)$ を考える．空集合なら b が最小，空でないなら整列集合より最小限が存在し，それが欲しいやつである.

(2). 背理法 $\{x \in A | \varphi(x)$ を満たさない $\}$ とすると，最小元 b があるが，それは仮定に矛盾する． □

定理 7 (定理 3.2.4)**.** 整列集合 $(A,<)$ とし $f:(A,<)\to(A,<)$ が順序保存とする．このとき $x \leq f(x)$.

Proof. 背理法 $\{x \in A | f(x) < x\}$ とし，最小元を b とする．仮定から $f(b) < b$ であるので，最小性より $f(b) \leq f(f(b))$. f は順序を保存するので $b \leq f(b)$ となり矛盾する． □

補題 8 (補題 3.2.5)**.** 整列集合 $(A,<)$ の始切片は元の集合と順序同型でない

Proof. ある $a \in A$ で $f:(A,<)\cong(Seg(a),<|_{Seg(a)})$ を仮定する．よって $f(a) < a$ である．一方 7 から $a \leq f(a)$ となり矛盾. □

補題 9 (定理 3.2.6)**.** 整列集合 $(A,<)$ の異なる始切片は順序同型でない

Proof. $a,b \in A$ で $a < b$ で $A = Seg(b)$ として上の補題を使う. □

補題 10 (定理 3.2.7)**.** 整列集合間の順序同型 $(A,<_A)\to(B,<_B)$ はただ一つ

Proof. $f,g : A \to B$ の順序同型が二つあるとする．$a \in A$ で $f(a) <_B g(a)$ となるものがある．(必要ならば f,g を取りかえる) $f \circ g^{-1} : B \to B$ は順序同型より 7 から

$$g(a) \leq f \circ g^{-1} \circ g(a) = f(a)$$

となり矛盾. □

補題 11 (定理 3.2.8)**.** 2 つの整列集合 $(A,<_A)$, $(B,<_B)$ とする．「任意の A の始切片がある B の始切片に同型である」とする．
この時 A は B か B のある始切片に同型であるとする．

Proof.

$$F := \{(x,y) \in A \times B | Seg_A(x) \cong Seg_B(y)\}$$

とする．

$(x,y),(x,z) \in F$ ならば $Seg_B(y) \cong Seg_B(z)$ より 7 から $y = z$. よって仮定から写像 $f : A \to B$ が定義できる．

F は順序保存である． $a <_A b$ で $f(a) \leq_B f(b)$ となるとすると，$Seg_A(a) \cong Seg_B(f(a))$, $Seg_A(b) \cong Seg_B(f(b))$, $Seg_B(f(b)) \subset Seg_B(f(a))$ となる．よって

$$g : Seg_A(b) \cong Seg_B(f(b)) \subset Seg_B(f(a)) \cong Seg_A(a)$$

が定義できる．7 から $a \leq g(a)$ であるが，行き先を見れば $g(a) < a$ となり矛盾する．

次に $y=f(a)$ なる $y\in B$ について，任意の $z<y$ ならば $z=f(b)$ とかけることを示す．f の定義から $\varphi : Seg_A(a)\cong Seg_B(y)$ である．$z\in Seg_B(y)$ なので $b\in Seg_A(a)$ で $\varphi(b)=y$ となるものが存在する．よって $\varphi|_{Seg_A(b)} : Seg_A(b)\cong Seg_B(z)$ を得る．

順序保存と整列性から f は単射である．f が全射でない時，$B\setminus Im(f)$ の最小元を $y_0\in B$ とおく．このとき $Im(f)=Seg_B(y_0)$ となる．f が全射なら f は順序同型 $f:A\to B$ を与える．

□

定理 12 (定理 3.2.8)**.** 2 つの整列集合 $(A,<_A)$, $(B,<_B)$ について，

- 順序同型
- ある一方が他方の始切片に同型

のどちらか一方が成り立つ

Proof. $(A,<_A)$ が $(B,<_B)$ や $(B,<_B)$ のどの始切片とも順序同型でないと仮定して良い．

まず $b\in B$ について，ある $a\in A$ があって $Seg_A(a)\cong Seg_B(b)$ を示す．もしそうでないなら $\{b\in B|$ 上を満たさない $\}$ に最小元 b_0 が存在する．任意の $y<_B b_0$ について，$Seg_B(y)\cong Seg_A(x)$ なる $x\in A$ があるので，11 から，$Seg_B(b_0)\cong A$ または $Seg_B(b_0)\cong seg_A(a_0)$ となるがどちらも矛盾．

よって任意の $b\in B$ について，ある $a\in A$ があって $Seg_A(a)\cong Seg_B(b)$ なので 11 から B は A の始切片と同型である． □

1.0.2 順序数

定義 13.
- クラス A が推移的であるとは $x\in A$ かつ $y\in x$ ならば $y\in A$ を満たすこと
- クラス A が全順序とは任意の $x,y\in A$ について $x\in y$ か $x=y$ か $y\in x$ が成り立つこと
- 集合 A が順序数とは A が推移的かつ全順序なること．

順序数全体の集まりを $OR=\{u|u$ は順序数 $\}$ とする．これは集合ではない．

例 14. 以下は順序数である．

- $0=\varnothing$
- $1=0\cup\{0\}=\{0\}=\{\varnothing\}$
- $2=1\cup\{1\}=\{0,1\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

定理 15 (定理 3.3.5)**.**
- α 順序数について，$(\alpha,\in)$ は整列集合．
- α 順序数で $\beta\in\alpha$ ならば $\beta=Seg_{(\alpha,\in)}(\beta)$

Proof. (1). α は全順序集合なので, 整列性のみ示せば良い. $A \subset \alpha$ を空でない集合とする. 正則性定理「$A \not\varnothing$ ならば $x \in A$ で $x \cap A = \varnothing$」[1] から $x \in \alpha$ が A の最小限を与える

(2)

$$Seg_{(\alpha,\in)}(\beta) := \{x \in \alpha | x \in \alpha \text{ and } x \in \beta\} = \{x \in \alpha | x \in \beta\} \beta$$

途中 $\beta \in \alpha$ ならば $\beta \subset \alpha$ を用いた. これは $x \in \beta$ ならば $\beta \in \alpha$ より推移的なので $x \in \alpha$ となるからである. □

定理 16 (定理 3.3.6)**.** α 順序数とする

- $x \in \alpha$ について x は順序数
- $x \subset \alpha$ かつ x が推移ならば $x \in \alpha$

Proof. (1) $x \subset \alpha$ より x は全順序となる. 推移性を示す. $a \in b$ かつ $b \in c$ on $a, b, c \in x$ とする. $a, c \in \alpha$ であり α は全順序なので $a \in c$, $a = c$, $c \in a$ のどれかが成り立つ. 後者二つならば, $a \in b \in a$ か $a \in b \in c \in a$ となるので矛盾[2] よって $a \in c$ となる.

(2) $x \neq \alpha$ とする. $z \in \alpha \setminus x$ をとる. この時

$$t \in x \text{ ならば } t \in z$$

となる. なぜなら $t \in x$ かつ $x \in \alpha$ より $t \in \alpha$ で「$t \in z$ か $t = z$ か $z \in t$. $t = z$ なら $z \in x$ で矛盾. $z \in t$ なら $z \in t$ かつ $t \in x$ で x 推移的より $z \in x$ となり矛盾. よって $t \in z$ となる. 特に x は α 内で有界である.

α は整列順序集合なので, $x \subset \alpha$ の直後元 $\beta \in \alpha$ が存在する.[3]

よって $x = \beta$ を示せば良い. 直後元の定義より $t \in x$ ならば $t < \beta$ つまり $t \in \beta$ なので $x \subset \beta$ である. 一方 $t \in \beta$ ならば $t < \beta$ なので $t < a$ なる $a \in x$ が存在するつまり $t \in a$ かつ $a \in x$ なので x 推移的なので $t \in x$ となる. よって $x = \beta$ となる.

□

定理 17 (定理 3.3.7)**.** α, β 順序数について $\alpha \subset \beta$ または $\beta \subset \alpha$

Proof. 背理法による. もし定理が成り立たないのであれば α, β は $\in$ での整列集合なので

- $x_0 \in \beta \setminus \alpha$ なる $\in$ での最小元
- $y_0 \in \alpha \setminus \beta$ なる $\in$ での最小元

が存在する. $x_0 = \alpha \cap \beta$ を示れば, $x_0 = y_0$ となり矛盾が示せる.

[1] 正則性定理から任意の集合 x について $x \notin x$ がいえる. なぜなら「$x \in x$ を仮定する. $A = \{x\}$ とすると $t \in A$ かつ $t \cap A = \varnothing$ となるものがある. $t \in A$ から $t = x$ だが $x \in t \cap A = x \cap \{x\}$ となり矛盾」するので. つまり正則性定理によってラッセルのパラドックスを否定している. (そもそも集合ではない!)

[2] 正則性定理から $a_1 \ni a_2 \ni \cdots$ は"集合"においては成り立たない!

[3] $(A, <)$ の部分集合 B について, その直後元 x を「任意の $a \in B$ で $a < x$ であり, $y \in A$ で $y < b$ かつ任意の $a \in A$ について $a < y$ となるものは存在しない」として定義する.

$t \in \alpha \cap \beta$ について $t \in \beta$ かつ $x_0 \in \beta$ なので, 全順序性から $t \in x_0$, $t = x_0$, $x_0 \in t$ のどれかが成り立つ. $t = x_0$ ならば $x_0 \in \alpha$ となり矛盾. $x_0 \in t$ ならば推移性より $x_0 \in \alpha$ となりこれも矛盾. よって $t \in x_0$ となる. $\alpha \cap \beta \subset x_0$

逆に $t \in x_0$ について x_0 は最小なので $t \notin \beta \setminus \alpha$ 一方 $x_0 \in \beta$ より推移性から $t \in \beta$. よって $t \in \alpha$ となり $x_0 \subset \alpha \cap \beta$. □

定理 18 (定理 3.3.8)**.** 順序数のクラス OR は次を満たす

- (全順序性) α, β 順序数について $\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta \in \alpha$
- (推移性) α 順序数かつ $\beta \in \alpha$ ならば β も順序数

特に順序数のクラス OR は $\in$ で全順序になる.

Proof. α, β 順序数について 17 から (必要ならば α, β を取り替えることにより), $\alpha \subset \beta$ がいえる. $\alpha \neq \beta$ を仮定して良い. すると α は推移的で $\alpha \subset \beta$ より $\alpha \in \beta$ となる. よって全順序性が言えた.

16 より, α 順序数かつ $\beta \in \alpha$ ならば β 順序数は前に示している. □

以下順序数 α, β について $\alpha \in \beta$ を $\alpha < \beta$ と書くことにし $(OR, <)$ で順序数のクラスの全順序クラスを考える. $\leq$ を $<$ または $=$ として入れるすると

$$\alpha = \{\beta \in OR | \beta \in \alpha\} = \{\beta | \beta < \alpha\}$$

となる. このとき $\alpha \leq \beta$ は $\alpha \subset \beta$ に対応する.

定理 19 (定理 3.3.12)**.** 順序数のクラス $(OR, <)$ 　は整列クラスであるつまり次を満たす

- 任意の空でない集合 $A \subset OR$ について $<=\in$ の最小元が存在
- 任意の始切片 $Seg(\alpha)$ は集合である

Proof. (1) 任意の空でない集合 $A \subset OR$ について正則性定理から

$$\beta \in A, \beta \cap A = \varnothing$$

が存在する. これが A の $\in$ における最小元である. なぜなら $x < \beta$ かつ $x \in A$ なら $x \in \beta$ であり $\beta \cap A = \varnothing$ に矛盾するからである.

(2) $\alpha \in OR$ は集合で

$$Seg(\alpha) := \{\beta \in OR | \beta < \alpha\} = \{\beta \in OR | \beta \in \alpha\} = \alpha$$

であったので集合である. □

定義 20. 集合 x について

$$x + 1 := x \cup \{x\}$$

と定める

定理 21 (定理 3.3.14, 3.3.16)**.** 順序数 α について, $\alpha + 1$ は直後順序数である.

Proof. $\alpha + 1$ が順序数となること.

(推移性). $x \in y$ かつ $y \in \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ とする. $y \in \alpha$ ならば $x \in \alpha \subset \alpha + 1$. $y = \alpha$ でも同じである.

(全順序性) $x, y \in \alpha + 1$ ならば次の 3 通りが考えられる.

1. $x, y \in \alpha$
2. $x \in \alpha$ かつ $y = \alpha$(およびその入れ替え)
3. $x = y = \alpha$

どの場合でも $\in$ に関して全順序性がいえる.

$\alpha + 1$ が直後順序数となること. もし $\alpha < \beta < \alpha + 1$ ならば $\alpha \in \beta$ かつ $\beta \in \alpha \cap \{\alpha\}$ なのでどちらの場合も $\alpha \in \beta \in \alpha$ か $\alpha \in \alpha$ となり正則性定理から矛盾. よって直後である. □

定理 22 (定理 3.3.17, 3.3.18)**.** $A \subset OR$ について

- $\cap A$ や $\cup A$ は順序数である
- $\cup A$ は A の最小上界に等しい. ここで β が A の最小上界を「任意の $a \in A$ について $a \leq \beta$」かつ「任意の $a \in A$ について $a \leq \gamma$ ならば $\beta \leq \gamma$」として定める

特に任意の順序数の集合 A について $\cup A + 1$ とすればそれは A のどの順序数よりも真に大きい順序数である. よっていくらでも大きい順序数は作れる.

Proof. $\cap A$ については A の最小元がそれにあたる $\cup A$ については順序数の定義を満たすことを示せば良い.

$\beta = \cup_{\alpha \in A} \alpha$ とおく. 任意の $a \in A$ について $a \subset \beta$ より $a \leq \beta$ である. 一方「任意の $a \in A$ について $a \leq \gamma$ ならば」を仮定する. $x \in \beta$ について $x \in \alpha$ なので, $x \in \alpha \in A$ より $x \in \gamma$ となる. x 任意より $\beta \subset \gamma$ となり $\beta \leq \gamma$ となる □

定義 23. α 順序数について

1. $\alpha = 0$ または $\beta + 1$ の形になる時, 第一種順序数という, そのクラスを $Suc(\alpha)$ と表す.
2. 第一種順序数でないものを第二種順序数または極限数という. そのクラスを $Lim(\alpha)$ と表す.

定理 24 (定理 3.3.20)**.** 極限数 α について, 任意の $\beta < \alpha$ について, ある γ で $\beta < \gamma < \alpha$ となる.

Proof. 背理法. ある $\beta < \alpha$ で任意の γ で $\gamma < \alpha$ ならば $\gamma \leq \beta$ となるなら, それは定義から $\alpha = \beta + 1$ を意味する. □

1.0.3 整列集合の性質・自然数

定理 25 (定理 3.4.5)**.** $(A, <)$ が整列集合ならばある順序数 β で $A \cong \beta$ となる.

Proof. 少々時間がないので後で埋める. 超限帰納法を用いる. □

無限公理「ある集合 a で $\varnothing \in a$ かつ $x \in a$ ならば $x \cup \{x\} \in a$」がある.

定理 26 (定理 3.5.1)**.** ある集合 a で「$\varnothing \in a$ かつ $x \in a$ ならば $x \cup \{x\} \in a$」となるものを仮定する. この時順序数 x で $x \cup \{x\} \subset Suc$ がならば $x \in a$

Proof. 背理法. 「$x \cup \{x\} \subset Suc$ だが $x \notin a$」なるもので最小限を α とする. すると

- $\alpha \cup \{\ \alpha\} \subset Suc$
- $\alpha \notin a$
- $x \in \alpha$ について $x \cup \{x\} \subset Suc$ ならば $x \in a$

となる.1 番目の条件から $\alpha \in Suc$ なので $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ とかける. $\beta \cup \{\beta\} \subset Suc$ なので 3 番目から $\beta \in a$ である. よって a の定義から $\alpha \in a$ となり矛盾. □

定義 27. 上の a をとって

$$\omega := \{x \in a | x \cup \{x\} \subset Suc\}$$

を自然数の集合という. これは上の定理から a の取り方によらない.

定理 28 (定理 3.5.4)**.**

- $\alpha \in \omega$ ならば $\alpha + 1 \in \omega$
- ω もまた順序数

Proof. (1). $\alpha \in \omega$ ならば $\alpha \cup \{\alpha\} \subset Suc$ なので

- $\alpha \cup \{\alpha\} \in Suc$ ($\alpha \in Suc$ なので)
- $(\alpha \cup \{\alpha\}) \cup \{\alpha \cup \{\alpha\}\} \subset Suc$ $(\{\alpha \cup \{\alpha\}\} \subset Suc$ なので)

よって $\alpha \cup \{\alpha\} \in \omega$ である.

(2). $\omega \subset Suc \subset OR$ よてち全順序性は Ok. $x \in y$ かつ $y \in \omega$ とする. $y \in \omega$ より $y \cup \{y\} \subset Suc$ なので $x \in Suc$. $x \subset y$ のため, $x \subset Suc$. 以上より $x \cup \{x\} \subset Suc$ となるので $x \in \omega$ □

これにより $0 \in \omega$ などなどが言える．

定理 29 (定理 3.5.8)**.** ω は極限数

Proof. $\omega \in Suc$ を仮定する．ω の定義から $\omega \subset Suc$ より $\omega \cup \{\omega\} \subset Suc$ である．よって ω の定義を用いて $\omega \in \omega$ である．これは正則性公理に矛盾． □

1.0.4 順序数の演算

$(A, <_A), (B, <_B)$ を全順序集合とする．$A \cap B = \varnothing$ について $(A + B, <_{A+B})$ を

- $A + B := A \cup B$
- $x < y$ iff 「$x <_A y$」 or 「$x \in A$ かつ $y \in B$」 or 「$x <_B y$」

として定義する．
$(A \times B, <_{A \times B})$ を

- $A \times B := A \times B$
- $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ iff 「$y_1 <_B y_2$」 or 「$y_1 = y_2$ かつ $x_1 <_A x_2$」

として定義する．

A, B が整列集合ならば $A + B$, $A \times B$ も整列集合となる．25 によって α, β が順序数ならば $\alpha + \beta$, $\alpha \times \beta$ に対応する順序数が取れる．(整列集合に一回直して考える．)

例 30. $\omega \to \omega \setminus \{0\}$ を $x \to x + 1$ とすれば

$$1 + \omega = \omega$$

となる．

α 順序数について

$$\alpha + 1 \cong (\alpha \cup \{1\}, <_\alpha + <_1) \cong \alpha \cup \{\alpha\}$$

となる．特に $\alpha + 1 \neq \alpha$．よって和の交換法則は成り立たない．

ほか $\omega + \omega = \omega 2$ や $2\omega = \omega$ など．

注意 31. 順序数の演算については超限帰納法でも定義できる．

(1). $\alpha + \beta$ について

- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ $\beta \in Suc$ のとき
- $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \lambda | \lambda < \beta\}$ $\quad \beta \notin Suc$ のとき

(2). $\alpha\beta$ について

- $\alpha 0 = \alpha$
- $\alpha(\beta+1) = \alpha\beta) + \alpha$ $\beta \in Suc$ のとき
- $\alpha + \beta = \sup\{\alpha\lambda | \lambda < \beta\}$ $\quad \beta \notin Suc$ のとき

定義 32. α, β 順序数の時 α^β を次のように定義する.
(1) $\lambda < \beta$ について $\alpha_\lambda = \alpha$ とおいて

$$\prod_{\lambda<\beta} \alpha_\lambda := \{f : \beta \to \cup\{a_\lambda | \lambda < \beta \mathrm{and} f(\lambda) \in a_\lambda\}$$

とし, その部分集合 $U \subset \prod_{\lambda<\beta} \alpha_\lambda$ で

$$U = \{f \in \prod_{\lambda<\beta} \alpha_\lambda | f \text{ は有限個を除いて } 0\}$$

とする. $f, g \in U$ について $f < g$ を「$f \neq g$ かつ $f(\xi) \neq g(\xi)$ となる最大の xi について $f(\xi) < g(\xi)$」で定義する
(2) 超限帰納法の定義

- $\alpha^0 = 1$
- $\alpha^(\beta+1) = (\alpha^\beta)\alpha$ $\beta \in Suc$ のとき
- $\alpha + \beta = \sup\{\alpha^\lambda | \lambda < \beta\}$ $\quad \beta \notin Suc$ のとき

として定義する.

定理 33 (定理 3.10.5)**.** 順序数の演算法則

- $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$
- $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
- $\alpha(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)\gamma$
- $0+\alpha = \alpha+0 = \alpha$
- $\alpha 1 = 1\alpha = \alpha$
- $0\alpha = \alpha 0 = 0$
- $\alpha+\beta = \alpha+\gamma$ は $\beta = \gamma$ に同値
- $\alpha\beta = \alpha\gamma$ は $\beta = \gamma$ に同値 (α¿0)
- $\alpha^\beta = \alpha^\gamma$ は $\beta = \gamma$ に同値 (α¿1)
- $\alpha^{\beta\gamma} = \alpha^\beta\alpha^\gamma$

- $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$
- $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ は $\beta < \gamma$ に同値
- $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ は $\alpha < \beta$ に同値
- $\alpha < \beta$ ならば $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$
- $\alpha < \beta$ ならば $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$
- $\alpha < \beta$ ならば $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$
- $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$ は $\beta < \gamma$ に同値 (α¿1)
- $\alpha^\gamma < \beta^\gamma$ は $\alpha < \beta$ に同値
- $\beta \leq 1$ なら $\alpha^\beta \leq \beta$

定理 34 (定理 3.12.1)**.** 任意の順序数 α, β について $\beta > 0$ とするとき

$$\alpha = \beta\gamma + \delta$$

となる $\delta < \beta$ と $\gamma \leq \alpha$ が存在する　.

Proof. $\beta(\alpha+1) > \alpha$ なので α は $(\beta \times (\alpha+1), <_\in)$ という順序集合のある始切片に等しい．それは $\gamma < \alpha + 1$ と $\delta < \beta$ を用いて $\beta\gamma + \delta$ と表せれる． □

定理 35 (定理 3.12.2)**.** 順序数 α で $\alpha > 1$ を仮定する．この時任意の順序数 $\gamma > 0$ は

$$\gamma = \alpha^{\beta_0}\alpha_0 + \alpha^{\beta_1}\alpha_1 + \cdots \alpha^{\beta_n}\alpha_n$$

となる $0 < \alpha_i < \alpha$ と $\gamma \geq \beta_0 > \beta_1 > \cdots \beta_n \geq 0$ が唯一に存在する．

Proof. "sketch" $\alpha^\gamma \geq \gamma$ である．"= だったらこれで終わる．" そうでないなら $\alpha^\nu > \gamma$ となる最小の順序数をとる．すると $\nu \in Suc$ となる．よって $\nu = \beta_0 + 1$ となり $\alpha^{\beta_0} \leq \gamma < \alpha^{\beta_0+1}$ となるので割り算を行うと

$$\gamma = \alpha^{\beta_0} + \eta_0$$

とできる．これを繰り返せば良い． □

定義 36 (カントールの標準形)**.** 任意の順序数は

$$\gamma = \omega^{\beta_0}m_0 + \omega^{\beta_1}m_1 + \cdots \omega^{\beta_n}m_n$$

となる $m_i \in \mathbb{N}_{>0}$ と $\gamma \geq \beta_0 > \beta_1 > \cdots \beta_n \geq 0$ と唯一に表せられる．

定義 37 (ユプシロン数)**.** $\omega^{(n+1)} := \omega^{\omega^{(n)}}$ かつ $\omega^1 = \omega$ とする

$$\epsilon_0 := \sup \omega^n | n \in \omega|$$

を最初のユプシロン数という.

ユプシロン数は $\epsilon_0 = \omega^{\epsilon_0}$ を満たす.

1.0.5　基数

定理 38 (整列可能定理)**.** (選択公理を認めれば) 任意の集合は整列可能である. よって任意の集合は整列可能な順序構造をもち, それはある順序数と同型となる

集合 A, B について $A \sim B$ を A から B への全単射が存在することで定義する. $A \sim B$ を A と B は同等という.

定義 39 (濃度・基数)**.**

- 集合 A についてその濃度を, A と同等な順序数のうち最小のものとする. つまり順序数 α で $A \sim \alpha$ となるののの最小なものである
- 集合 A の濃度を $|A|$ として定義する. 定義から「$|A| \sim A$」かつ「任意の順序数 β で $\beta \sim A$ ならば $\beta \geq |A|$ である. 」
- 集合の濃度を基数という. つまり順序数 α が基数であるとは, $\alpha = |A|$ となる集合が存在することとする. 基数全体のクラスを Card と表す.

まず集合の濃度は一通りにきまる. 存在性は整列可能定理から. 唯一性は最小性から. $Card \subset OR$ である.

定理 40 (定理 4.1.7)**.**

1. $\kappa \in Card$ かつ $\alpha < \kappa$ ならば $\alpha \not\sim \kappa$
2. $x \in Card$ iff $x = |x|$
3. $x \sim y$ iff $|x| = |y|$
4. α 順序数ならば $|\alpha| \leq \alpha$
5. $x \subset y$ なら $|x| \leq |y|$
6. $x \to y$ なる単射がある iff $|x| \leq |y|$

Proof. (1). $\kappa = |A|$ なる集合 A があり, $\alpha \sim \kappa$ となるなら, 濃度の定義から $\alpha \geq |A| = \kappa$ となり矛盾する.

(2). $\Rightarrow$ のみ示せば良い. 濃度の定義から $|x| \leq x$ である. x は基数なのである集合 A があって $x = |A|$ となる. 基数の定義から「$x \sim A$」かつ「任意の順序数 β で $\beta \sim A$ ならば $\beta \geq x$」今 $|x| \sim x$(基数の定義) かつ $x \sim A$ であるので $|x| \sim A$ であるので $|x| \geq x$ である.

(3) $\Rightarrow$ のみ示せば良い. $x \sim y \sim |y|$ より (2) と同様に基数の定義から $|y| \geq |x|$ である. よって言えた/

(4) (2) に同じ

(5) $\Rightarrow y \sim |y|$ より $x \sim z \subset |y|$ なる集合 z がある. $z \subset |y|$ なので, $(z, \in)$ は整列集合であり, これよりある順序数で $f : \alpha \cong z$ なるものが存在する. これより

- $|x| \leq \alpha$. なぜなら $x \sim z$ と最小性より.
- $\alpha \leq |y|$. なぜなら $\beta \in \alpha$ について $\beta \leq f(\beta) \in z \subset y$ であるので $\alpha \subset y$ より $\alpha \leq y$.

よって言えた.

(6)$\Rightarrow$ は (5) より. $\Leftarrow$ は $x \sim |x| \subset |y| \sim y$ より. □

定理 41 (定理 4.1.8. 4.1.9.4.1.10)**.** $\omega \in Card$

Proof. まず「任意の $n \in \omega$ と任意の順序数 β について $n \sim \beta$ ならば $n = \beta$」を示す.(要は要素の個数が自然数を意味する.) 数学的帰納法.$n = 0$ の時は空集合より良い. $n+1 \sim \gamma$ とする. $\gamma \geq \omega$ なら $n+1 \sim \gamma+1$ より $n \sim \gamma$ となり $n = \gamma \geq \omega$ となって矛盾. $\gamma < \omega$ としてよく, $\gamma = \beta + 1$ となる. $n+1 \sim \gamma+1$ より $n \sim \beta$ となり $n = \beta$ となって ok.

$|\omega| \leq \omega$ は自明 $|\omega| < \omega$ ならば $|\omega| \sim \omega$ かつ $|\omega| \in \omega$ である. よって $|\omega| = \omega$ で矛盾する. よって $|\omega| = \omega$ となる. □

A 集合に関して $|A| < |P(A)|$ よりいくらでも大きい基数が作れる. また上の証明から $n = |n|$ もいえる.

定義 42 (有限基数・無限基数)**.**
- ω の要素を有限基数という.
- 有限基数でない基数を無限基数という. そのクラスを Incard で表す

命題 43. $Incard \cong OR$

Proof. 固有クラスで整列ならば OR と同型であるので. (ここも超限帰納法の定理になる.) □

よって $F : OR \to Incard$ となる同型射が存在する. $F_0 = \omega$ である. $a \in OR$ について $\aleph_a := F(a)$ とする.

$$\aleph_0 = \omega < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \cdots$$

と続いていく. $\aleph_1$ は非加算な最小の順序数と言える.

定義 44 (ベキ基数)**.**

$$2^{\aleph_\alpha} := |P(\aleph_\alpha)|$$

として定義する. 特に $|P(\omega)| = 2^{\aleph}_0$ である.

連続体仮説が言っていることは「$2^{\aleph}_0 = \aleph_1$ は肯定も否定もできないということである.

定義 45 (基数の演算)**.** κ, ν を基数とし, $\kappa = |A|, \nu = |B|$ となる集合をとる.

- $\kappa + \nu := |A \cup B|$ ただし $A \cap B = \varnothing$ となるようにとる
- $\kappa\nu := |A \times B|$
- $\kappa^\nu := |A^B| = |\{f : B \to A\}|$

これは A, B の取り方によらない.

定理 46 (定理 4.1.7)**.**

1. $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$, $\kappa\lambda = \lambda\kappa$
2. $(\kappa + \lambda) + \nu = \kappa + (\lambda + \nu)$, $(\kappa\lambda)\nu = \kappa(\lambda\nu)$
3. $\kappa(\lambda + \nu) = \kappa\lambda + \kappa\nu$
4. $\kappa^{\lambda+\nu} = \kappa^\lambda\kappa^\nu$,
5. $(\kappa\lambda)^\nu = \kappa^\nu\lambda^\nu$,
6. $(\kappa^\lambda)^\nu = \kappa^{\lambda\nu}$,

証明は集合の積などに帰着できることから.
また基数 κ について $P(\kappa) \sim 2^\kappa$ となる.

定理 47. κ 無限基数ならば $\kappa\kappa = \kappa$

Proof. $\alpha \geq \omega$ なる順序数について $\alpha \times \alpha \sim \alpha$ を示せば良い. 実際 κ 無限基数ならば $\kappa \times \kappa \sim \kappa$ で $|\kappa \times \kappa| = \kappa\kappa$(定義) であるので $\kappa\kappa = \kappa$

さて上が成り立たない最小の順序数を α とする. $\alpha \neq \omega$ である. α が基数でなければ $|\alpha| < \alpha$ なので $|\alpha| \sim \alpha$ となるが α の最小性より

$$\alpha \times \alpha \sim |\alpha| \times |\alpha| \sim |\alpha| \sim \alpha$$

で矛盾する. よって α は基数として良い.

$\gamma \cong \alpha \times \alpha$ なる順序数を考える.

$$\alpha = |\alpha| < |\alpha \times \alpha| = |\gamma| \leq \gamma$$

である. よって $f : \alpha \cong Seg(\xi, \eta)_{\alpha\times\alpha}$ となる $(\xi, \eta) \in \alpha \times \alpha$ がある. $\delta = (\xi + \eta) + 1$ とおくと $\delta < \alpha$ かつ $f(\alpha) \subset \delta \times \delta$ である. $\delta < \alpha$ なので $\delta \times \delta \sim \delta$ であるので, $\alpha = |\alpha| \leq \delta$ で矛盾する. □

定理 48 (定理 4.4.6)**.** 以下基数に関して次が成り立つ.

1. $\kappa \leq \lambda$ ならば $\kappa + \nu \leq \lambda + \nu$

2. $\kappa \leq \lambda$, $\mu \leq \nu$ ならば $\kappa + \mu \leq \lambda + \nu$

3. $\kappa \leq \lambda$ ならば $\kappa\nu \leq \lambda\nu$

4. $\kappa \leq \lambda$, $\mu \leq \nu$ ならば $\kappa\mu \leq \lambda\nu$

5. $\kappa \leq \lambda$ ならば $\kappa^\nu \leq \lambda^\nu$, $\mu^\kappa \leq \mu^\lambda$

6. $\kappa \leq \lambda$, $\mu \leq \nu$ ならば $\kappa^\mu \leq \lambda^\nu$

定理 49 (定理 4.4.7)**.** κ, λ を基数. どちらか一方は無限基数とする.

$$\kappa + \lambda = \kappa\lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$$

Proof. $0 < \lambda \leq \kappa$ かつ κ 無限基数とすると

- $\kappa \leq \kappa + \lambda \leq \kappa + \kappa = \kappa 2 \leq \kappa\kappa = \kappa$
- $\kappa \leq \kappa\lambda \leq \kappa\kappa = \kappa$

よりいえた. □

1.0.6 正則基数と強極限基数

定義 50 (定義 4.5.1)**.** 全順序集合 $(A, <)$ とする. $B \subset A$ が共終部分集合であるとは任意の $a \in A$ についてある $b \in B$ が存在して $a \leq b$ が成り立つこと.
順序数 (基数)α, β について β が α と共終とは $A \subset \alpha$ なる共終部分集合で $(A, \in) \cong (\beta, \in)$ となること

例 51.

$$A = \{\alpha \in \omega | \alpha = \beta + \beta \text{とかける}\} = \{\text{偶数の集合}\}$$

は $(\omega, <)$ において共終である.

例 52. $\aleph_0 = \omega$ は $\aleph_\omega$ と共終これは

$$A = \{\aleph_i | i \in \omega\}$$

とおけば良い

定義 53 (定義 4.5.2)**.** 順序数 α と共終な最小の順序数を共終数といい $cf(\alpha)$ と表す.

$cf(\alpha) \leq \alpha$ である.

注意 54. 定義から「任意の順序数 β について, $A \subset \alpha$ なる共終部分集合で $\beta \cong A$ ならば $cf(\alpha) \leq \beta$」である.

実はもっと強く「$A \subset \alpha$ なる共終部分集合ならば $cf(\alpha) \leq |A|$ である.」なぜならば $(A, \in)$ は整列集合であるので, $(\beta, \in) \cong (A, \in)$ となる順序数 $(\beta, \in)$ が存在する. よって $cf(\alpha) \leq \beta$ である. これより $cf(\alpha) \to A$ という単車が作れるので, $|cf(\alpha)| \leq |A|$. $cf(\alpha)$ は基数なので $cf(\alpha) = |cf(\alpha)| \leq |A|$

例 **55.** $cf(\omega) = \omega$. これは $cf(\omega) < \omega$ ならばある自然数 n で $n \to A$ で $A \subset \omega$ なる共終部分集合がある. しかしこれは $\max$ に$+1$ したものを取れてしまい矛盾.

$cf(\omega + 1) = 1$. $\omega + 1$ の最大元を x として $cf(\alpha) \leq 1$ は $1 \to \{x\}$ とすれば良い. 0 はあり得ないので, これでいえた

$cf(\omega + \omega) = \omega$ これは $A = \{\omega + i\}$ が共終部分集合になる.

$cf(\aleph_1) = \aleph_1$ である

定理 56. 順序数 α について $cf(\alpha)$ は基数

Proof. $\beta < cf(\alpha)$ ならば $\beta \not\sim cf(\alpha)$ を示す.

背理法. もし存在するとすると $\beta \sim cf(\alpha)$ より $f : \beta \to \alpha$ なる単射で $f(\beta)$ が α の共終部分集合となる.

$$V = \{x \in \beta | \gamma \leq x \text{ なる } \gamma \text{ について } f(\gamma) \leq f(x)\}$$

とおく.

$f(V)$ が α の共終部分集合であることを示せれば, $cf(\alpha) \leq V$ と同型な順序数 $\leq \beta < cf(\alpha)$ となり矛盾する. これは簡単で, $y \in \alpha$ について $y \leq f(x)$ となる最小の $x \in \beta$ をとると, $\gamma < x$ について $f\gamma \leq y <\leq f(x)$ となる. □

定義 57 (定義 4.5.4)**.** 順序数 α について

1. $cf(\alpha) = \alpha$ なる順序数を正則基数という.(上の定理より基数である)
2. 正則でない基数を特異基数であるという.
3. 正則かつ極限数なる基数を弱到達不能基数という
4. 基数 κ で「任意の $\nu < \kappa$ なる基数について $2^\nu < \kappa$」が成り立つ時, κ を強極限基数という.
5. $\aleph_0$ より大きい強極限正則基数を強到達不能基数という.

正則基数 α の同値な言い換えとして「部分集合 $C \subset \alpha$ が非有界ならば $|C| = \alpha$」とも言える.

例 **58.**

1. ω や $\aleph_1$ は正則基数である. よって弱到達不能基数.
2. $\aleph_\omega$ は特異基数である.
3. $cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$ である.
4. $\aleph_0$ は強極限基数.

定理 59.

1. 強到達不能基数ならば弱到達不能基数. 逆は一般連続体仮説を仮定すれば成り立つ

2. 強到達不能基数の存在は ZFC では証明することはできない.

順序数 α について

- $\beth_0 = \aleph_0$
- $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$
- $\beth_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} 2^{\beth_\beta}$ α が極限数の時

と定義する $\beth_\omega$ は強極限的である.

1.0.7 正則基数の性質

命題 60. α が正則ならば, $|I| < \alpha, |S_i| < \alpha$ について $S = \cup_{i\in I} S_i$ として $|S| < \alpha$

Proof. $\mu := \sup |S_i|$ とする. $\mu < \alpha$ である. (もし $\mu \geq \alpha$ ならば $I \to \alpha$ で共終となるような写像が作れてしまうから) よって

$$|S| = |\cup_{i\in I} S_i| \leq |I| \cdot \mu = \max |I|, \mu < \alpha$$

となり言えた. □

補題 61. [?, 000E 3.7 Cofinality] κ を無限基数とする

1. $\kappa < cf(\alpha)$ となる基数 α が存在する.
2. $\kappa < cf(\alpha)$ となる強極限基数が存在する.

Proof. (1). α を $|\alpha| > \kappa$ となる順序数の中で一番小さいものとする. α は極限数である. もしそうでなければ $\alpha = \beta + 1$ かつ $|\alpha| = |\beta|$ となって最小性に矛盾するため.

$cf(\alpha) \leq \kappa$ であるとする. この時 $S \subset \alpha$ で共終なもので $|S| \leq \kappa$ となるものが存在する. ここで $\beta \in S \subset \alpha$ について $\beta < \alpha$ より最小性から $|\beta| \leq \kappa$ よって S の共終性から

$$|\alpha| = |\cup_{\beta\in S} \beta| \leq |S||\beta| \leq \kappa\kappa$$

となるが, これは α の取り方に矛盾する.

また α は基数となる. なぜなら $\alpha \geq |\alpha| = ||\alpha||$ であるので α の最小性より $\alpha = |\alpha|$ となる.

(2) $\kappa < cf(\beta)$ なる基数 β をとり $\alpha = \beth_\beta$ をとる. $cf(\beta) \leq cf(\alpha)$ を示せば良い. $J \subset \beth_\beta$ なる共終集合について, $f : J \to \beta$ を $j \in J$ について $f(j)$ を $j \in 2^\gamma$ となる最小の $\gamma < \beta$ と定義すれば, J は β の共終集合になる. よって $cf(\beta) \leq cf(\alpha)$ となる.

□

1.0.8　ユニバース

以下は [C. Barwick P.Haine Pyknoticobjects, I. Basic notions Subsection 1.2] の部分を参考にした.

定義 62 (grothendieck Universe)**.** U を集合とする. U がグロタンディーク宇宙とは次の 4 つが成り立つこと

1. $u \in U$ かつ $t \in u$ ならば $t \in U$
2. $u \in U$ ならば $P(u) \in U$
3. $\varnothing \in U$
4. $I \in U$ かつ $u : I \to U$ について $\cup_{i \in I} u_i \in U$

命題 63 (SGA 4_1 Expose I, Appendix)**.**
- δ が強到達不能基数とするとき, $V_\delta := \{V set||V| < \delta\}$ はグロタンディーク宇宙となる.
- V がグロタンディーク宇宙で無限基数を含むならば, $V = V_\delta$ となる強到達不能基数が存在する.

定義 64 (Axiom of Universe)**.** 以下の同値な公理を"Axiom of Universe"という

1. 任意の集合 x についてそれを含むグロタンディーク宇宙 U が存在する
2. 任意の基数 κ について強到達不能基数 λ で $\kappa < \lambda$ となるものが存在する.

Axiom of Universe は ZFC で証明することはできない.

グロタンディーク宇宙のいいところは U は集合なので, U の中で操作が容易にできることである. 実際マックレーンでは ω を含む宇宙を一つ固定し, $A \in U$ なる集合を"小さい集合", クラスを U の部分集合としている. (これは公理的集合論 (というかフォン・ノイマン=ベルナイス=ゲーデル集合論?) におけるクラスではない) これにより小さい集合からなる圏は小さくない.

1.0.9　集合論のヒエラルキー

もう一つの宇宙としてフォン・ノイマン宇宙がある

定義 65 (Von Neumann Universe)**.** 順序数 α について V_α を次で定義する

- $V_0 = \varnothing$
- $V_{\alpha+1} := P(V_\alpha)$
- $V_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} V_\beta$

そして

$$V := \cup_\alpha V_\alpha$$

をフォン・ノイマン宇宙という.

これは"クラス"というものになる.

Chapter 2

圏論

以下は [マックレーン] から引用した．今回の内容で使われる道具は揃っていると思う．

2.0.1　圏

定義 66 (メタ圏)**.** 集合論を使わない公理による圏論の基礎

- メタグラフは対象 (object)$a, b, c, \ldots,$ と射 (arrow)$f, g, h, \ldots,$ の組みで次を満たす．
  1. ドメイン 射 f について $a = dom(f)$ を割り当てる
  2. コドメイン 射 f について $n = cod(f)$ を割り当てる
  3. $f : a \to b$ とかく
- メタ圏とはさらに二つの演算を持つメタグラフである．
  1. 恒等射 $id_a : a \to a$ を割り当てる．
  2. $codf = domg$ ならば $g \circ f : dom(f) \to cod(g)$ という合成射が割り当てられる．

  そしてこれらは次の演算の公理を満たす．
  1. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
  2. $1_b \circ f = f, g \circ id_b = g$

定義 67 (圏)**.**
- 有向グラフとは対象の集合 O と射の集合 A について，$A \rightrightarrows O$ を上は dom をとることで，下は cod をとることで定義する．

  $$A \times_O A := \{(g, f) \in A \times A | domg = codf\}$$

  を合成可能な射の集合となる．
- 圏とはグラフに
  1. 恒等射 $O \to A, c \mapsto id_c$

2. 合成射 $\circ : A \times_O A \to A, (g, f) \mapsto g \circ f$

があって

$$dom(id_a) = a = cod(id_a) \quad dom(g \circ f) = dom(f) \quad cod(g \circ f) = cod(g),$$

となるものである.

- 圏 $\mathcal{C}$ とし, b, c in $Ob(\mathcal{C})$ について hom 集合を次で定める.

$$hom(b, c) := \{f | f \text{ in } Mor(\mathcal{C}), dom(f) = b, cod(f) = c\}$$

2.0.2 関手・自然変換

定義 68 (関手)**.** 圏 $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ について $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ が関手であるとは

- $c \in Ob(\mathcal{B})$ について $Tc \in Ob(\mathcal{C})$
- $f : b \to b'$ について $Tf : Tb \to Tb'$.
- $T(1_c) = 1_{Tc}$ for any $c \in Ob(\mathcal{C})$
- $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$ for any $f, g \in Mor(\mathcal{C})$

を満たすものである.

定義 69. $T : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 関手において次を定義する

- T が同型であるとは $S : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ で, $T \circ S$ や $S \circ T$ が恒等関手なること. 恒等関手 $1_\mathcal{C} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を $c \mapsto c$ とする関手である (f も同様)
- T が充満 (full) とは任意の b, b' と $g \in hom(Tb, Tb')$ についてある $f \in hom(b, b')$ があって, $Tf = g$ なること. つまり任意の b, b' について

$$hom(b, b') \xrightarrow{T} hom(Tb, Tb')$$

が全射となること

- T が忠実 (faithfull) とは, 任意の b, b' について

$$hom(b, b') \xrightarrow{T} hom(Tb, Tb')$$

が単射となること

- T が忠実充満 (fullyfaithfull) とは, 任意の b, b' について

$$hom(b, b') \xrightarrow{T} hom(Tb, Tb')$$

が全単射となること

忠実充満 (fullyfaithfull) でも同型とは限らない. なぜなら $\mathcal{B}$ に $\mathcal{C}$ からこない Object が存在するかもしれないからである.

定義 70 (自然変換)**.** $S, T : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ 関手において $\tau : S \to T$ が自然変換とは, 任意の $c \in Ob(\mathcal{C})$ について $\tau_c : Sc \to Tc$ を割り当てる関数で, 次の図式を満たすものである.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"'] & Sc \arrow[r, "\tau c"] \arrow[d, "Sf"'] & Tc \arrow[d, "Tf"] \\ c' & Sc' \arrow[r, "\tau c'"'] & Tc' \end{tikzcd}$$

これが成り立つ時 $\tau_c : Sc \to Tc$ は c において自然であるという.
任意の $c \in Ob(\mathcal{C})$ で τc が可逆であるとき τ は自然同型という.

定義 71. $f : a \to b$ を射とする

- f が可逆とは $f' : b \to a$ となる逆射が存在すること. この時 a, b は同型といい $a \cong b$ とかく.
- f がモニック (左簡約可能) とは「$f \circ g_1 = f \circ g_2$ ならば $g_1 = g_2$」が成り立つこと.
- f がエピ (右簡約可能) とは「$g_1 \circ f = g_2 \circ f$ ならば $g_1 = g_2$」が成り立つこと.
- $g \circ f = id_a$ である時, g を分裂エピ, f を分裂モニックという.
- $t \in Ob(\mathcal{C})$ は終対象とは任意の $a \in Ob(\mathcal{C})$ について $a \to t$ がただ一つ存在すること.
- $s \in Ob(\mathcal{C})$ は始対象とは任意の $a \in Ob(\mathcal{C})$ について $s \to a$ がただ一つ存在すること.
- $0 \in Ob(\mathcal{C})$ はヌル対象とは始対象かつ終対象なること.

例 **72.** Groupoid を全ての射が可逆な圏とする

定義 73. $\mathcal{C}$ を圏とする. ω を含む Grothendieck 宇宙 U を定義を一つ固定する.

- $\mathcal{C}$ が small とは $Ob(\mathcal{C}), Mor(\mathcal{C})$ が共に U の元となること
- $\mathcal{C}$ が locally small とは任意の c, c' について $hom(c, c')$ が U の元となること
- $\mathcal{C}$ が large とは small でないこと.

注意 **74.** $V \in U$ なる集合を”小さい集合”, $V \subset U$ なる集合を”クラス”, それ以外の集合を大きい集合と呼んでいた. なお Grothendieck 宇宙は集合であり, 存在は ZFC では証明できない.(強到達基数の存在と同値なので,)

2.0.3 普遍性

定義 75. $S : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 関手, $c \in Ob(\mathcal{C})$ とする. c から S への普遍射とは $r \in Ob(\mathcal{D})$ と $u : c \to Sr$ の組み $(r, u) \in Ob(\mathcal{D}) \times hom_{\mathcal{C}}(c, S_r)$ であって次の普遍性を満たすものである.
「任意の $d \in Ob(\mathcal{D})$ と $f : c \to Sd$ について, ある唯一な写像 $f' : r \to d \in hom_{\mathcal{D}}(r, d)$ があって, $Sf' \circ u = f$」となる.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Sr \arrow[d, dashed, "Sf'"] & r \arrow[d, "f'"'] \\
c \arrow[r, "f"'] & Sd & d
\end{tikzcd}$$

つまり $c \to Sd$ なる射は $Sf' \circ u$ の形に限り, この f' はただ一つに定まる.

例 **76.** 完備化, 商体, 集合から自由群を作る操作などなど

命題 77. $S : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 関手, $c \in Ob(\mathcal{C})$ とする. $r \in Ob(\mathcal{D})$ と $u : c \to Sr$ の組み $(r, u) \in Ob(\mathcal{D}) \times hom_{\mathcal{C}}(c, Sr)$ を考える. $(r, u : c \to Sr)$ が普遍射であることは,

$$S : hom_{\mathcal{D}}(r, d) \to hom_{\mathcal{D}}(c, Sd), f \mapsto Sf \circ u$$

が任意の $d \in Ob(\mathcal{D})$ について全単射になることと同値である.
そしてこの全単射は d において自然である.

Proof. $\Rightarrow$ の証明”ある唯一な写像があって...”のところにより全単射は明らか. 「d において自然である」については $g : d \to d'$, $f \in hom_{\mathcal{D}}(r, d)$ について $Sg \circ (Sf \circ u) = S(g \circ f) \circ u$ を示せば良い. がこれは関手性から明らかとなる.

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[d, "g"'] & hom_{\mathcal{D}}(r, d) \arrow[r, "S(\cdot)\circ u"] \arrow[d, "g"'] & hom_{\mathcal{C}}(c, Sd) \arrow[d, "Sg"] \\
d' & hom_{\mathcal{D}}(r, d') \arrow[r, "S(\cdot)\circ u"'] & hom_{\mathcal{C}}(c, Sd')
\end{tikzcd}$$

$\Leftarrow$ の証明

$\varphi_r : hom_{\mathcal{D}}(r, r) \to hom_{\mathcal{D}}(c, Sr)$ なる同型によって $id_r \mapsto \varphi_r(id_r)$ を得る. $u = \varphi_r(id_r)$ である. $d \in Ob(\mathcal{D})$ と $f : c \to Sd$ をとる. $f' : r \to d$ で $Sf' \circ u = f$ となるものの存在を示す.

$$\begin{tikzcd}
r \arrow[d, "\varphi_d^{-1}(f)"] & hom_{\mathcal{D}}(r, r) \arrow[r, "\varphi_r"] \arrow[d, "\varphi_d^{-1}(f)\circ"] & hom_{\mathcal{C}}(c, Sr) \arrow[d] \\
d & hom_{\mathcal{D}}(r, d) \arrow[r, "\varphi_d"'] & hom_{\mathcal{C}}(c, Sd)
\end{tikzcd}$$

$\varphi_d^{-1}(f) : r \to d$ をとる. (これが f' である.) よって以下の等式を得る.

$$f = \varphi_d(\varphi_d^{-1}(f) \circ id_r) = S(\varphi_d^{-1}(f)) \circ \varphi_r(id_r) = S(\varphi_d^{-1}(f)) \circ u$$

□

定義 78. $\mathcal{D}$ が locally small とする. $K : \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ が表現可能とはある $r \in Ob(\mathcal{D})$ があって $hom_{\mathcal{D}}(r, \cdot) \cong K$ が自然同型となること

補題 79 (米田の補題)**.** $\mathcal{D}$ が locally small とする. $K : \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ 関手に関して

$$y : Nat(hom_{\mathcal{D}}(r, \cdot), K) \cong Kr, \quad \tau \mapsto \tau_r(id_r)$$

は全単射となる.

Proof. $\tau \in Nat(hom_{\mathcal{D}}(r, \cdot), K)$ について

$$\begin{tikzcd} r \arrow[d, "g"] & hom_{\mathcal{D}}(r,r) \arrow[r, "\tau_r"] \arrow[d, "g\circ"] & Kr \arrow[d, "Kg"'] \\ d & hom_{\mathcal{D}}(r,d) \arrow[r, "\tau_d"] & Kd \end{tikzcd}$$

が成り立っている.

(全射)$g \in Kr$ について $\tau_d : hom_{\mathcal{D}}(r, d) \to Kd$ を $f \mapsto K(f)(g)$ で定めれば自然同型である.

(単射)$\tau_r(id_r) = \tau'_r(id_r)$ ならば, $g \in hom_{\mathcal{D}}(r, d)$ について $\tau_d(g) = \tau'_d(g)$ は上の図式からわかる. (τ_r の部分が等しいから!)

□

同様に $hom_{\mathcal{D}}(\cdot, r) : C^{op} \to \mathbf{Set}$ について次の米田が成り立つ

$$y : Nat(hom_{\mathcal{D}}(\cdot, r), K) \cong Kr, \quad \tau \mapsto \tau_r(id_r)$$

補題 80. $\mathcal{D}$ が locally small とする. $\mathbf{Set}^{\mathcal{D}}$ を $K : \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ となる関手ならなる圏とする. $E : \mathbf{Set}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ を evaluation functor

- $(K, r) \mapsto Kr$
- $(\tau : K \to K', f : r \to r') \mapsto \tau_{Kr'} \circ Kf = Kf' \circ \tau_{Kr} : Kr \to K'r'$

$N : \mathbf{Set}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ を

- $(K, r) \mapsto Nat(hom_{\mathcal{D}}(r, \cdot), K)$

とすると $y : N \to E$ は自然同型を与える.

定義 81 (米田関手)**.** $\mathcal{D}$ が locally small とする. $Y : \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{D}}$ を

- $Y(r) := hom_{\mathcal{D}}(r, \cdot)$
- $Y(f : r \to r') := \circ f : hom_{\mathcal{D}}(r', \cdot) \to hom_{\mathcal{D}}(r, \cdot)$

を米田関手という. $Y' : \mathcal{D} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{D}^{op}}$ も同様.

補題 82. 米田関手 $Y : \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{D}}$ は fullyfaithfull.

Proof. 示すことは $d, d' \in Ob(\mathcal{D})$ について

$$Y : hom_{\mathcal{D}}(d, d') \to hom_{\mathbf{Set}^{\mathcal{D}^{op}}}(hom_{\mathcal{D}}(d', \cdot), hom_{\mathcal{D}}(d, \cdot)) = Nat(hom_{\mathcal{D}}(d', \cdot), hom_{\mathcal{D}}(d, \cdot))$$

$Y(f : d \to d') := \circ f : hom_{\mathcal{D}}(d', \cdot) \to hom_{\mathcal{D}}(d, \cdot)$ が全単射であることを示せば良い. ここで

$$Nat(hom_{\mathcal{D}}(d', \cdot), hom_{\mathcal{D}}(d, \cdot)) \cong hom_{\mathcal{D}}(d, d')$$

なる全単射が $\circ f \mapsto (\circ f)(id'_d) = f$ で与えられる. これで全単射が言えている. □

系 83. $\mathcal{D}$ が locally small とする. $r, r' \in Ob(\mathcal{D})$ について

$$\tau : hom_{\mathcal{D}}(r, \cdot) \cong hom_{\mathcal{D}}(r', \cdot)$$

となる自然同型があるならば, $r \cong r'$

Proof. $f = \tau_r(id_r) \in hom_{\mathcal{D}}(r', r)$ をとり, $g = \tau_{r'}^{-1}(id_{r'})$ とすると以下の図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
id_r \in hom_{\mathcal{D}}(r, r) \arrow[r, "\tau_r"] & hom_{\mathcal{D}}(r', r) \ni f \\
g \in hom_{\mathcal{D}}(r, r') \arrow[u, "f\circ"] \arrow[r, "\tau_{r'}"] & hom_{\mathcal{D}}(r', r') \ni id_{r'} \arrow[u, "f\circ"]
\end{tikzcd}$$

よって一番左の図式により $f \circ g = id_r$ となる.

同じ議論を r' に行うと $f = (\tau_r^{-1})^{-1}(id_r)$ に注意すると

$$\begin{tikzcd}
id_{r'} \in hom_{\mathcal{D}}(r', r') \arrow[r, "\tau_{r'}^{-1}"] & hom_{\mathcal{D}}(r, r') \ni g \\
f \in hom_{\mathcal{D}}(r', r) \arrow[u, "g\circ"] \arrow[r, "\tau_r^{-1}"] & hom_{\mathcal{D}}(r, r) \ni id_r \arrow[u, "g\circ"]
\end{tikzcd}$$

を得て, よって一番左の図式により $g \circ f = id_r$ となる. よって $r \cong r'$ となる. □

例 84 (余積)**.** $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ を対角関手とする. つまり $\Delta(a) = (a, a), \Delta(a) = (f, f)$ とする.

$(a, b) \in Ob(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ から Δ への普遍射 $r \in Ob(\mathcal{C})$ と $u : (a, b) \to \Delta r = (r, r)$ の組み $(r, u) \in Ob(\mathcal{C}) \times hom((a, b), (r, r))$ であって次の普遍性を満たすものである. 「任意の $d \in Ob(\mathcal{C})$ と

$g:(a,b)\to\Delta d=(d,d)$ について, ある唯一な写像 $f:r\to d\in hom_{\mathcal{D}}(r,d)$ があって, $(f,f)\circ u=g$」となる.

$$\begin{tikzcd}
(a,b) \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & \Delta r=(r,r) \arrow[d, dashed, "\Delta f=(f,f)"] & r \arrow[d, "f"'] \\
(a,b) \arrow[r, "g"'] & \Delta d=(d,d) & d
\end{tikzcd}$$

これを余積という.

もうちょい書き下すと, $i:a\to c, j:b\to c$ があって, 「任意の $f:a\to d, g:b\to d$ についてある $h:c\to d$ があって, $f=h\circ i, g=h\circ j$ となる」 この $c\in Ob(\mathcal{C})$ は一意になる.

余積は次の圏ではこうなる

- 集合, 位相空間, Abelian group, R-mod なら余積
- 群なら自由積
- 可換環ならテンソル積

例 85 (コイコライザー)**.** $\mathcal{C}$ を圏とする. $\downarrow\downarrow$ という圏を

- Object を 0,1 の二つの元
- morphism を $0 \rightrightarrows 1$ の二つの違った写像 (上の u, 下を d とする.)

とする. $\Delta:C\to C^{\downarrow\downarrow}$ なる functor を下で定める.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "r"] & c \arrow[r] \arrow[d, "r"] & c \arrow[d, "r"] \\
c' & c' \arrow[r] & c'
\end{tikzcd}$$

$f,g:a\to bin\mathcal{C}$ を固定する. これは $(f,g)\in C^{\downarrow\downarrow}$ の元を定める. つまり $0\rightrightarrows 1$ の二つの違った写像 (上の u, 下を d とする.) において上に f を下に g を 0 を a,1 に b を対応させる

$(f,g)\in C^{\downarrow\downarrow}$ から $\Delta:C\to C^{\downarrow\downarrow}$ への普遍射とは $c\in Ob(\mathcal{C})$ と $u:(f,g)\to\Delta c=(id_c,id_c)$ の組みであって次の普遍性を満たすものである.

「任意の $d\in Ob(\mathcal{C})$ と　$F:(f,g)\to\Delta d=(id_d,id_d)$ について, ある唯一な写像 $F':c\to d\in hom_{\mathcal{C}}(c,d)$ があって, $(id_{F'},id_{F'})\circ u=F:(f,g)\to\Delta c=(id_c,id_c)$」となる. 書き下すと任意の $F_b\circ g=F_a=F_b\circ f$ となれば, ある $F':c\to d$ があって $F'\circ u_1=f$, $F'\circ u_2=g$ となり, これはコイコライザーとなる.

例 86 (余極限)**.** $\mathcal{C},\mathcal{J}$ を圏とする. ($\mathcal{J}$ を添字圏とする.) $\Delta:\mathcal{C}\to\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ を対角関手とする　. つまり

- $c\in Ob(C)$ について $\Delta c:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$ を任意の object を c に射を id_c の送るものとする
- $f:c\to c'$ について $\Delta f:\Delta c\to\Delta c'$ となる自然変換を任意の $j\in Ob(\mathcal{J})$ について $(\Delta f)_j=f:\Delta c(j)=c\to\Delta c'(j)=c'$ とする.

$\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ 関手, $F \in Ob(\mathcal{C}^{\mathcal{J}})$ とする. F から Δ への普遍射とは $r \in Ob(\mathcal{C})$ と $u : F \to \Delta r$ の組みであって次の普遍性を満たすものである.

「任意の $d \in Ob(\mathcal{C})$ と $f : F \to \Delta d$ について, ある唯一な写像 $f' : r \to d \in hom_{\mathcal{C}}(r, d)$ があって, $\Delta f' \circ u = f$」となる.

一つずつ噛み砕いていく.

- $u : F \to \Delta r$ を与えることは J 内の $k : 1 \to 2$ について $u_i : F(i) \to r$ で $u_2 \circ F(k) = u_1 : F(1) \to r$ を与えることである.
- $f : F \to \Delta d$ を与えることは, J 内の $k : 1 \to 2$ について $f_i : F(i) \to r$ で $f_2 \circ F(k) = f_1 : F(1) \to d$ を与えることである.
- $\Delta f' \circ u = f$ となるとは, 二つはどちらも自然変換なので, $j \in Ob(j)$ について $f' \circ u_j = f_j$ ということである.

以上より, F から Δ への普遍射とは $r \in Ob(\mathcal{C})$ と $u : F \to \Delta r$ の組みで

1. (r, u_j) のくみで, J 内の $k : 1 \to 2$ について $u_i : F(i) \to r$ で $u_2 \circ F(k) = u_1 : F(1) \to r$ が成り立ち,
2. 任意の J 内の $k : 1 \to 2$ について $f_i : F(i) \to d$ で $f_2 \circ F(k) = f_1 : F(1) \to d$ が成り立つ (d, f_j) の組みについて,
3. ある $f' : r \to d$ が存在して, 任意の j について $f' \circ u_j = f_j$ となる.

よってこの $r \in Ob(\mathcal{C})$ と $u : F \to \Delta r$ の組み, 噛み砕くと, $(r, u_j : F(j) \to r)$ の組みを F の余極限という.

以下をまとめるとこうなる.

定義 87 (余積と余極限)**.** J を有限圏, $F : J \to C$ を関手とする. この時 $\mathrm{colim}F$ とは $c = \mathrm{colim}F \in Ob(C)$ と $u : F \to \Delta c$ で普遍性があるものである.
特に $J = \mathbf{2} = \{1, 2\}$ で恒等射しか許さないものにすると $c = \mathrm{colim}F$ と $u : F \to \Delta c$ とは

- $u_i : F(i) \to c$ かつ
- 任意に $a_i : F(i) \to d$ について, ただ一つの $\eta : \mathrm{colim}F = c \to d$ があって, $\eta \circ u_i = a_i$

となるものである. これは余積 $F(1) \sqcup F(2)$ のことである.

例 88 (極限)**.** $\mathcal{C}, \mathcal{J}$ を圏とする. ($\mathcal{J}$ を添字圏とする.) $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ を対角関手とする **.**

$\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ 関手, $F \in Ob(\mathcal{C}^{\mathcal{J}})$ とする. Δ から F への普遍射とは $r \in Ob(\mathcal{C})$ と $u : \Delta r \to F$ の組みであって次の普遍性を満たすものである.

「任意の $d \in Ob(\mathcal{C})$ と $f : \Delta d \to F$ について, ある唯一な写像 $f' : d \to r \in hom_{\mathcal{C}}(d, r)$ があって, $u \circ \Delta f' = f$」となる.

噛み砕くと $r \in Ob(\mathcal{C})$ と $u : \Delta r \to F$ の組みで

1. (r, u_j) のくみで, J 内の $k : 1 \to 2$ について $u_i : r \to F(i)$ で $u_2 = F(k) \circ u_1 : r \to F(2)$ が成り立ち,

2. 任意の J 内の $k : 1 \to 2$ について $f_i : d \to F(i)$ で $f_2 = F(k) \circ f_1 : d \to F(2)$ が成り立つ (d, f_j) の組みについて,

3. ある $f' : d \to r$ が存在して, 任意の j について $u_j \circ f' = f_j$ となる.

よってこの $r \in Ob(\mathcal{C})$ と $u : \Delta r \to F$ の組み, 噛み砕くと, $(r, u_j : r \to F(j))$ の組みを F の極限という.

定義 89. $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ 関手, $F \in Ob(\mathcal{C}^{\mathcal{J}})$ について, F から Δ への普遍射を, $\mathrm{colim}F \in Ob(\mathcal{C})$ と $\mu : F \to \Delta(\mathrm{colim}F)$ で表す.
また $c \in Ob(C)$ について $Cone(F, c) := Nat(F, \Delta c)$ とし cone と呼ぶ.

補題 90. F から Δ への普遍射を, $\mathrm{colim}F \in Ob(\mathcal{C})$ と $\mu : F \to \Delta(\mathrm{colim}F)$ が存在するとき

$$Cone(F, c) = Nat(F, \Delta c) \cong hom_C(\mathrm{colim}F, c)$$

Proof. $\eta \in Nat(F, \Delta c)$ を与えることは, $(c, \eta_j : F(j) \to c)$ で可換性が成り立つものを与えることと同じである.

よってそのようなものを与えたときに, 普遍性の定義からある $f : \mathrm{colim}F \to c$ が存在して, 任意の j について $f \circ \mu_j = \eta_j$ となる. これはただ一つであるので全単射となる. □

2.0.4 フィルター圏

定義 91. 圏 J がフィルターであるとは以下の二つの条件を満たす空でない圏とする

1. $j, j' \in Ob(J)$ についてある $j \to k, j' \to k$ が存在する

2. $a, b : j \to k$ について, $u : k \to m$ が存在して $ua = ub : j \to k \to m$

$F : J \to C$ がフィルター余極限とは J がフィルターなること.

2.0.5 特別な極限

定理 92. 余積とコイコライザーを持つ圏は余極限を持つ. 同様に積とイコライザーを持つ圏は極限を持つ.

Proof. $G : I \to C$ について colim は

$$f, g : \sqcup_{a \in Mor(I)} G(dom(a)) \to \sqcup_{i \in Ob(I)} Gi$$

$$f_{G(dom(a))} = id_{G(dom(a))} : G(dom(a)) \to G(dom(a)) \quad g_{G(dom(a))} = a : G(dom(a)) \to G(cod(a))$$

のコイコライザーとなるため.

同様に $G: I \to C$ について $\lim$ は

$$f, g: \prod_{i \in Ob(I)} Gi \to \prod_{a \in Mor(I)} G(cod(a)) \to$$

$$f_i = id_{Gi}: Gi \to Gi \quad g_i = (a)_{i=dom(a)}: Gi \to G(cod(a))$$

のイコライザーとなるため. □

定理 93. J 小さなフィルター圏, P 有限圏ならば

$$F: P \times J \to \mathbf{Set}$$

について $\lim \mathrm{colim} F(p,j) \cong \mathrm{colim} \lim F(p,j)$

Proof. まず canonical map を構成する. それは

$$\begin{tikzcd}
F(p,j) \arrow[d] & \lim_P F(p,j) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathrm{colim}_J \lim_P F(p,j) \arrow[d, dashed] \\
\mathrm{colim}_J F(p,j) & \lim_P \mathrm{colim}_J F(p,j) \arrow[l] \arrow[r, equal] & \lim_P \mathrm{colim}_J F(p,j)
\end{tikzcd}$$

よって $p \in P$ を固定すると $\mathrm{colim}_J F(p,j) = \sqcup_J F(p,j)/\sim$ とかける ($\sim$ は同値関係である) すると次の 2 条件は同値である.

1. $x \in F(p,j), x' \in F(p,j')$ について $x \sim x'$
2. $u: j \to k$, $u': j' \to k$ があって $F(p,u)x = F(p,u')x$

これは集合の余極限の構成がまさにそれだからである.,

そこで $F(p,j)$ の同値類を (x,j) と表す. この時 $x \in F(p,j)$ である. すると二つのことが言える

- $(x_1, j_2), (x_2, j_2)$ について $j_1 = j_2$ として良い. これは J のフィルター圏の定義の 1 番目より
- $(x_1, j) \sim (x_2, j)$ とはある $u: j \to k$ があって $F(p,u)x_1 = F(p,u)x_2$ である. これは J のフィルター圏の定義の 2 番目より

$G: P \to \mathbf{Set}$ について

$$\lim_P G = Cone(1, G) = Nat(\Delta 1, G)$$

である.(110 参照) ここで $\tau \in Nat(\Delta 1, G)$ とは $\tau_p: 1 \to Gp$ で $f: p \to p'$ について $G(f) \circ \tau_p = \tau_{p'}$ となるものである. そこで $G(p) := \mathrm{colim}_J F(p,j)$ とおく. すると τ は $\tau_p = (y_p, k)$ で $f: p \to p'$ について $F(p, id_k) y_p = y_{p'}$ となるものである. すると

$$y: \Delta 1 \to F(\cdot, k)$$

によって $y \in \lim_p F(p,k) = Nat(\Delta 1, F(\cdot, k))$ の元になる．よって

$$\lim_P \mathrm{colim}_J F(p,j) \to \mathrm{colim}_J \lim_P F(p,j) \quad \tau \mapsto [(y,k)]$$

によって逆写像を得る．

□

定義 94 (共終)**.** $L : I \to J$ が共終とは $k \in Ob(J)$ について $k \downarrow L$ 空でなく連結であること．わかりやすくいうと以下の 2 条件を満たすこと．

1. 任意の $y \in Ob(J)$ についてある $x \in Ob(I)$ があって $y \to L(x)$.
2. 任意の $y \in Ob(J)$, $x, x' \in Ob(I)$ についてある

$$x = x_0 \leftarrow x_1 \to x_2 \cdots x_{2n-2} \leftarrow x_{2n-1} \to x_{2n} = x'$$

の列があって, 次の可換図式が成り立つこと

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ L(x_{2i-2}) & L(x_{2i-1}) \arrow[l] \arrow[r] & L(x_{2i}) \end{tikzcd}$$

定理 95. $L : I \to J$ が共終であり, 関手 $F : J \to X$ について $\mathrm{colim}_{i \in I} FL(i)$ が存在する時, $\mathrm{colim}_{j \in J} F(j)$ も存在し, canonical map

$$h : \mathrm{colim}_{i \in J} FL(i) \to \mathrm{colim}_{j \in J} F(j)$$

は同型になる．

1. $\mathrm{colim}_{j \in J} F(j)$ の存在 $x = \mathrm{colim}_{i \in I} FL(i)$ とする．すると $\mu : FL \to \Delta c$ なる自然変換で普遍なものが存在する．

$k \in J$ について $u : k \to Li$ なる i を選んで

$$\tau_k : Fk \xrightarrow{Fu} FLi \xrightarrow{\mu_i} x$$

とおく．これは i の取り方によらない．これは次の図から明らかである．

$$\begin{tikzcd} & Fy \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ FL(x_{2i-2}) \arrow[dr, "u_{x_{2i-2}}"'] & FL(x_{2i-1}) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "u_{x_{2i-1}}"] & FL(x_{2i}) \arrow[dl, "u_{x_{2i}}"] \\ & x & \end{tikzcd}$$

これより $\tau : F \to \Delta x$ が cocone となる．こいつが普遍性を持つことを示せば良い．

つまり $\lambda : F \to \Delta y$ を別の cocone とするとき，ある $f : x \to y$ があって $\lambda = (\Delta f)\tau$ を示せば良い．

$\lambda L : FL \to \Delta y$ という自然変換を得るので $u : FL \to \Delta x$ の普遍性からある一意的な射 $f : x \to y$ があって $\lambda L = (\Delta f)\mu$ となる．よって $k \in J$ について $u : k \to Li$ を選べば

$$((\Delta f)\tau)_k = (\Delta f)_x \cdot \tau_k = (\Delta f)_x \cdot \mu_i \cdot Fu = \lambda_{Li} \cdot Fu = \lambda_k$$

となる．よって言えた． □

2.0.6 コンマ圏

定義 96. $T : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$, $S : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 関手としてコンマ圏 $(T \downarrow S)$ を次のように定義する．

- Object $(e, d, f) \in Ob(\mathcal{E}) \times Ob(\mathcal{D}) \times Hom_{\mathcal{C}}(Te, Sd)$, つまり $f : Te \to Sd$ とする．s
- Morphism $(k, h) : (e, d, f) \to (e', d', f') \in Hom_{\mathcal{E}}(e, e') \times Hom_{\mathcal{D}}(d, d')$ を $k : e \to e', h : d \to d'$ で $f' \circ Tk = Sh \circ f$ となるもの

$$\begin{tikzcd} e \arrow[d, "k"'] & Te \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Tk"'] & Sd \arrow[d, "Sh"] & d \arrow[d, "h"'] \\ e' & Te' \arrow[r, "f'"'] & Sd' & d' \end{tikzcd}$$

例 97. $\mathcal{E} = \mathbf{1}$ とする．$b \in Ob(\mathcal{C})$ は $b : \mathbf{1} \to \mathcal{C}$ という関手とみれる．$S : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 関手としてコンマ圏 $(b \downarrow S)$ は次のようになる．

- Object $(1, d, f) \in Ob(\mathcal{E}) \times Ob(\mathcal{D}) \times Hom_{\mathcal{C}}(b, Sd)$, つまり $f : b \to Sd$ とする．
- Morphism $(1, h) : (1, d, f) \to (1, d', f') \in Hom_{\mathcal{E}}(e, e') \times Hom_{\mathcal{D}}(d, d')$ を $1 : 1 \to 1, h : d \to d'$ で $f' = f' \circ id_b = Sh \circ f$ となるもの

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "1"'] & b \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal, "id_b"'] & Sd \arrow[d, "Sh"] & d \arrow[d, "h"'] \\ 1 & b \arrow[r, "f'"'] & Sd' & d' \end{tikzcd}$$

紛らわしいので１を消すと

- Object $(d, f) \in \times Ob(\mathcal{D}) \times Hom_{\mathcal{C}}(b, Sd)$, つまり $f : b \to Sd$ とする．
- Morphism $h : (d, f) \to (d', f') \in Hom_{\mathcal{D}}(d, d')$ を $h : d \to d'$ で $f' = Sh \circ f$ となるもの

2.0.7 表現可能関手の余極限

定理 98. $\mathcal{D}$ small $K:\mathcal{D}\to\mathbf{Set}$ 関手とする．この時 K は $hom_{\mathcal{D}}(d,\cdot)$ の余極限としてかける

Proof. J をコンマ圏 $1\downarrow K$ とする．つまり, $1\in Ob(\mathbf{Set})$(1 は１点集合のこと) $1:\mathbf{1}\to\mathbf{Set}$ という関手とみれる．$K:\mathcal{D}\to\mathbf{Set}$ 関手として

- Object $(d,x)\in Ob(\mathcal{D})\times Hom_{\mathbf{Set}}(1,Sd)$, つまり $x:1\to Kd$ とする．
- Morphism $h:(d,x)\to(d',x')\in\times Hom_{\mathcal{D}}(d,d')$ を $h:d\to d'$ で $x'=Kh\circ x$ となるもの

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "1"'] \\
1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "x"] \arrow[d, equal] & Kd \arrow[d, "Kh"] \\
1 \arrow[r, "x'"'] & Kd'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
d \arrow[d, "h"'] \\
d'
\end{tikzcd}
$$

もう少し噛み砕くと

- Object $(d,x)\in Ob(\mathcal{D})\times Kd$. $x\in Kd\in Ob(\mathbf{Set})$ である．
- Morphism $h:(d,x)\to(d',x')\in\times Hom_{\mathcal{D}}(d,d')$ を $h:d\to d'$ で, $Kh:Kd\to Kd'$ は集合の写像になるので, $x'=Kh(x)$ である．

そこで反変関手 $M:\mathcal{J}^{op}\to\mathbf{Set}^{\mathcal{D}}$ を

- Object $(d,x)\in Ob(\mathcal{D})\times Kd$ について $M(d,x)=hom_{\mathcal{D}}(d,\cdot)$
- Morpshim $h:(d,x)\to(d',x')$(つまり $h:d\to d'$ で $x'=Kh(x)$ なるもの) について $Mh:M(d',x)=hom_{\mathcal{D}}(d',\cdot)\to M(d,x)=hom_{\mathcal{D}}(d,\cdot)$ とする．

示すことは $K\in Ob(\mathbf{Set}^{\mathcal{D}})$ が M の余極限であること, つまり $(K,u_{(d,x)}:M(d,x)\to K)$ の組で

1. $(K,u_{(d,x)}:M(d,x)\to K)$ のくみで, J 内の $h:(d,x)\to(d',x')$ について $u_{(d',x')}=u_{(d,x)}\circ M(h):M(d',x)\to K)$ が成り立ち,
2. J 内の $h:(d,x)\to(d',x')$ について $f_{d,x}:M(d,x)\to L$, $f_{d',x'}:M(d',x')\to L$ で $f_{d',x'}=f_{d,x}\circ M(h):M(d',x)\to L$ が成り立つ $(L,f_{d,x})$ の組みについて,
3. ある $f':K\to L$ が存在して, 任意の j について $f'\circ u_{d,x}=f_{d,x}$ となる．

であることを示せば良い．$u_{(d,x)}\in Nat(M(d,x)=hom(d,\cdot),K)\cong Kd$ より $u(d,x)=x$ とすれば良い．(つまり $u_{(d,x)}(d'):hom(d,d')\to Kd'$ を $f\mapsto Kf(x)$ とする) すると $x'=hx$ から $u_{(d',x')}=u_{(d,x)}\circ M(h)$ が従う．

(2) については $(L,f_{d,x})$ の組みについて, 自然変換 $f:K\to L$ を与えることは $d'\in Ob(\mathcal{D})$ について $f_{d'}:Kd'\to Ld'$ で可換性を満たすようなものを作れば良い．$f_{d,x}\in Nat(M(d,x),L)=Nat(hom(d,\cdot),L)\cong Ld$ より, $f_{d,x}$ は Ld の元とみなせるこれは $a\in Kd'$ について $f_{d,a}$ を返せば良い．自然性は米田の同型を追えば良い □

系 99. $\mathcal{D}$ small $K : \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{Set}$ 反変関手, つまり $K \in \mathbf{Set}^{\mathcal{D}^{op}}$ とする. (K は前層) この時 K は $hom_{\mathcal{D}}(\cdot, d)$ の余極限でかける.

Proof. J をコンマ圏 $1 \downarrow K$ とする. つまり, $1 \in Ob(\mathbf{Set})$(1 は１点集合のこと) $1 : \mathbf{1} \to \mathbf{Set}$ という関手とみれる. $K : \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{Set}$ 関手として

- Object $(d, x) \in Ob(\mathcal{D}^{op}) \times Hom_{\mathbf{Set}}(1, Sd)$, つまり $x : 1 \to Kd$ とする.
- Morphism $h : (d, x) \to (d', x') \in Hom_{\mathcal{D}^{op}}(d, d')$ を $h : d \to d' in \mathcal{D}^{op}$ で $x' = Kh \circ x$ となるもの

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "1"'] \\
1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "x"] \arrow[d, equal] & Kd \arrow[d, "Kh"] \\
1 \arrow[r, "x'"'] & Kd'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
d \arrow[d, "h"'] \\
d'
\end{tikzcd}
$$

もう少し噛み砕くと

- Object $(d, x) \in Ob(\mathcal{D}^{op}) \times Kd$. $x \in Kd \in Ob(\mathbf{Set})$ である.
- Morphism $h : (d, x) \to (d', x') \in Hom_{\mathcal{D}^{op}}(d, d')$ を $h : d \to d' in \mathcal{D}^{op}$ で, $Kh : Kd \to Kd'$ は集合の写像になるので, $x' = Kh(x)$ である.

そこで関手 $M : \mathcal{J}^{op} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{D}^{op}}$ を

- Object $(d, x) \in Ob(\mathcal{D}^{op}) \times Kd$ について $M(d, x) = hom_{\mathcal{D}}(\cdot, d)$
- Morpshim $h : (d, x) \to (d', x') in \mathcal{J}^{op}$ について, $h : (d', x') \to (d, x) in \mathcal{J}$ より, $h : d' \to d in \mathcal{D}^{op}$ で $x = Kh(x')$ なるものがあり, $h : d \to d' in \mathcal{D}$ であるので, $Mh : M(d, x) = hom_{\mathcal{D}}(\cdot, d) \to M(d', x) = hom_{\mathcal{D}}(\cdot, d')$ て定義できる.

ここで J は small となる. これは $|Ob(\mathcal{D})| < cf(\kappa) \leq \kappa$ となる基数 κ をとると (この存在は 61 から), $\sup_{d \in Ob(\mathcal{D})} |Kd| < \kappa$ が言えるから.

示すことは $K \in Ob(\mathbf{Set}^{\mathcal{D}^{op}})$ が $M \in Psh(\mathcal{D}^{op}, \mathbf{Set})^{\mathcal{J}^{op}}$ の余極限

$$K \cong \operatorname{colim}_{M : \mathcal{J}^{op} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{D}^{op}}} M(d, x) = \operatorname{colim}_{M : \mathcal{J}^{op} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{D}^{op}}} hom_{\mathcal{D}}(\cdot, d)$$

であることを示す. $K \in Ob(\mathbf{Set}^{\mathcal{D}^{op}})$ と $u : M \to \Delta K$ の組みで普遍なものがあることを示せば良い ($\Delta K \in Psh(\mathcal{D}^{op}, \mathbf{Set})^{\mathcal{J}^{op}}$ に注意する)

つまり $(K, u_{(d,x)} : M(d, x) \to K)$ の組で

1. $(K, u_{(d,x)} : M(d, x) \to K)$ のくみで, J^{op} 内の $h : (d, x) \to (d', x')$ について $u_{(d,x)} = u_{(d',x')} \circ M(h) : M(d, x) \to K)$ が成り立ち,
2. J^{op} 内の $h : (d, x) \to (d', x')$ について $f_{d,x} : M(d, x) \to L$, $f_{d',x'} : M(d', x') \to L$ で $f_{d,x} = f_{d',x'} \circ M(h) : M(d, x) \to L$ が成り立つ $(L, f_{d,x})$ の組みについて,

3. ある $f' : K \to L$ が存在して, 任意の j について $f' \circ u_{d,x} = f_{d,x}$ となる.

であることを示せば良い.

$u_{(d,x)} \in Nat(M(x,d) = hom_{\mathcal{D}}(\cdot, d), K) \cong Kd$ より $u(d,x) = x$ とすれば良い. (つまり $u_{(d,x)}(c) : hom_{\mathcal{D}}(c,d) \to Kc$ を $f \mapsto (Kf)(x)$ とする) $h : (d,x) \to (d',x') in \mathcal{J}^{op}$ について, $h : d' \to d in \mathcal{D}^{op}$ で $x = Kh(x')$ となる. よって $u_{(d,x)} = u_{(d',x')} \circ M(h) : M(d,x) \to K$ であることは, 任意の $c \in \mathcal{D}$, $f \in M(d,x)(c) = hom_{\mathcal{D}}(c,d)$ について

$$u_{(d',x')} \circ M(h)(f) = u_{(d',x')}(h \circ f) = K(h \circ f)(x') = Kf \circ Kh(x') Kf(x) = u_{(d,x)}(f)$$

となり言える.

(2) については $(L, f_{d,x})$ の組みについて, 自然変換 $f : K \to L$ を与えることは $d' \in Ob(\mathcal{D})$ について $f_{d'} : Kd' \to Ld'$ で可換性を満たすようなものを作れば良い. $f_{d,x} \in Nat(M(d,x), L) = Nat(hom(\cdot, d), L) \cong Ld$ より, $f_{d,x}$ は Ld の元とみなせるこれは $a \in Kd'$ について $f_{d,a}$ を返せば良い. 自然性は米田の同型を追えば良い □

2.0.8 随伴と圏同値

定義 100. A, X を locally small category とする. (F, G, φ) が X から A の随伴とは

- $F : X \to A$, $G : A \to X$ となる関手
- φ は $x \in Ob(X), a \in Ob(A)$ について

$$\varphi_{x,a} : hom_A(Fx, a) \cong hom_X(x, Ga)$$

  が全単射になるものの族で x, a について自然である.

このとき $F \dashv G$ とかく. F は G の左随伴, G は F の右随伴という.

注意 101. hom 集合を使わずに定義す流のであれば, 任意の $f : Fx \to a$ について右随伴射 $\varphi f : x \to Ga$ が唯一定まり,

$$\varphi(k \circ f) = Gk \circ \varphi f, \quad , \varphi(f \circ Fh) = \varphi f \circ h \tag{2.1}$$

が任意の $h : x' \to x$, $k : a \to a'$ に成り立つこれは次の図からわかる

$$\begin{tikzcd} f \in hom_A(Fx,a) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "k"'] & hom_X(x,Ga) \arrow[d, "Gk"'] \\ hom_A(Fx,a) \arrow[r, "\varphi"] & hom_X(x,Ga) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f \in hom_A(Fx,a') \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "Fh"] & hom_X(x,Ga') \arrow[d, "h"'] \\ hom_A(Fx',a) \arrow[r, "\varphi"] & hom_X(x',Ga) \end{tikzcd}$$

左随伴射 φ^{-1} の言葉で書けば

$$\varphi(g \circ h) = \varphi^{-1 g \circ Fk}, \quad , \varphi^{-1}(Gk \circ g) = k \circ \varphi^{-1} g$$

$a = Fx$ の場合,

$$\varphi_{x,Fx} : hom_A(Fx, Fx) \cong hom(x, GFx)$$

であるので, $\eta_x := \varphi_{x,Fx}(id_{Fx}) : x \to GFx$ を得る. 自然変換 $\eta : I \to GF$ を与えるなぜなら 2.1 から $h : x \to x'$ について

$$G(Fh) \circ \varphi(id_{Fx'}) = \varphi(Fh \circ id_{Fx'}) = \varphi(id_{Fx'} \circ Fh) = \varphi(id_{Fx}) \circ h$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "h"] & GFx \arrow[d, "G(Fh)"] \\ x' \arrow[r, "\varphi"'] & GFx' \end{tikzcd}$$

すると 2.1 から $f : Fx \to a$ について

$$\varphi(f) = \varphi(f \circ F(id_x)) = Gf \circ \varphi(id_x) = Gf \circ \eta_x$$

となる.

同様に $\varphi^{-1}_{Ga,a} : hom_X(Ga, Ga) \cong hom_A(FGa, a)$ $\epsilon_a = \varphi^{-1}_{Ga,a}(id_{Ga})$ とおくと同様のことが成り立つ.

まとめると次になる.

補題 102. A, X を locally small category とする. (F, G, φ) が X から A の随伴とする.

1. 上の η_x は x から G への普遍射, 自然変換 $\eta : I \to GF$ を与える. ここで $I, GF : X \to X$ である. また $\varphi(f) = Gf \circ \eta_x : x \to Ga$ である.
2. $\epsilon_a = \varphi^{-1}_{Ga,a}$ とおくと, F から a への普遍射, 自然変換 $\epsilon : FG \to I$ を与える. また $\varphi^{-1}(g) = \epsilon_a \circ Fg : Fx \to a$ である.($g : x \to Ga$ とする)

η を unit, ϵ を counit という.

以下随伴 (F, G, η, ϵ) と言ったら

- $F : X \to A$, $G : A \to X$ となる関手
- $\eta : I \to GF$ を unit, $\epsilon : FG \to I$ を counit とする.

定理 103. 随伴 $(F, G, \eta, \epsilon) : X \to A$ について以下が成り立つ

1. $G : A \to X$ が忠実 (faithfull) は任意の $a \in A$ について ϵ_a がエピと同値
2. $G : A \to X$ が充満 (full) は任意の $a \in A$ について ϵ_a が分裂モニックと同値
3. $G : A \to X$ が充満忠実 (fully faithfull) は任意の $a \in A$ について $\epsilon_a : FGa \cong a$ が同型と同値

Proof.

$$\varphi^{-1} \circ G_{a,\cdot} : hom_A(a, \cdot) \to hom_X(Ga, G\cdot) \to hom_A(FGa, \cdot)$$

を考える．これは $\epsilon_a : FGa \to a$ として ϵ_a^* と同じである．φ^{-1} が全単射より下の補題から「ϵ_a^* エピ $\Leftrightarrow \epsilon_a^* = \varphi^{-1} \circ G_{a,\cdot}$ モニック $\Leftrightarrow G_{a,\cdot}$ モニック $\Leftrightarrow G : A \to X$ が忠実 (faithfull)」となる． □

補題 104. $f : b \to a$ について，$f^* : hom_A(a, \cdot) \to hom_A(b, \cdot)$ を自然変換とする．この時以下が成り立つ

1. f^* モニック は f エピと同値
2. f^* エピは f が分裂モニックと同値

これは定義から直ちに従う．(言い換えているに過ぎない)

定義 105 (圏同値)**.** 関手 $S : A \to C$ が圏同値であるとはある関手 $T : C \to A$ と $ST \cong I_C : C \to C$ かつ $TS \cong I : A \to A$ なる自然同型が存在すること．
この時 T は S の左随伴でもあり右随伴でもある．

定義 106 (随伴圏同値)**.** 随伴 $(F, G, \eta, \epsilon) : X \to A$ について，$\eta : I \to GF$, $\epsilon : GF \to I$ が共に自然同型である時，$(F, G, \eta, \epsilon) : X \to A$ は随伴圏同値と呼ぶ．

定理 107. 関手 $S : A \to C$ について次は同値

1. $S : A \to C$ は圏同値
2. $(S, T, \eta, \epsilon) : A \to C$ が随伴圏同値となるような T, η, ϵ が存在する
3. S fully faithfull かつ $c \in Ob(C)$ についてある $a \in A$ があって $c \cong Sa$.

Proof. (2) $\Rightarrow$ (1) 自明

(1) $\Rightarrow$ (3) $a, a' \in Ob(A)$ について

$$hom_A(a, a') \cong hom_A(a, TSa') \overset{\varphi}{\cong} hom_C(Sa, Sa')$$

によって全単射を得る．よって fully faithfull. 任意の $c \in Ob(C)$ について，$c \cong S(Tc)$ より $a = Tc$ とおけば良い．

(3) $\Rightarrow$ (2) $T : C \to A$ を構成する $c \in Ob(C)$ について $a \in A$ があって $\nu_c : c \cong Sa$ となるので，$Tc = a$ とする．$f : c \to c'$ について，S は fully faithfull なので

$$hom_A(a, a') \to hom_C(Sa, Sa') \cong hom_C(c, c')$$

が全単射であり，$\nu_{c'}^{-1} \circ S(g) \circ \nu_c = f$ となる g が一意に存在する．$T(f) = g$ とおく．

よって S が T の右随伴であることと, $\eta : I \to ST$ と $\epsilon : TS \to I$ なる自然同型が存在することとを示せば良い. $\square$

例 108 (骨格 (skelton)). A を C の full subcategory とする.(subcategory とは包含関手 $F : A \to C$ が存在すること. 自動的に F は faithfull である.)

任意の $c \in Ob(C)$ について, ある唯一の $a \in Ob(A)$ が存在して $c \cong F(a)$ となるとき, A を C の骨格という. この時 $F : A \to C$ は圏同値を与える. これは定理 107 の (3) の条件見れば良い.

例えば有限順序集の圏を C とし, 有限集合の圏を **FinSet** をおく. $C \to$ **Finset** なる関手を包含関手で定めれば, full であることがわかる. C が **FinSet** の骨格であることは濃度 (個数) を取れば良い.

2.0.9 極限

定義 109. 圏 C が (小) 完備とは, 任意の小さな圏から任意の関手 $F : J \to C$ が極限を持つこと.

定理 110 (**Set** は完備)**.** 任意の小さな圏から任意の関手 $F : J \to$ **Set** は極限を持つ. 特にその極限は $\mathrm{colim} F = Cone(1, F) = Nat(\Delta 1, F)$ である. ここで 1 は一点集合であるそして $\nu \mathrm{colim} F \to Fj$ は $\tau \in Nat(\Delta 1, F)$ について $\tau_j \in Fj$ を与える射である.

$\Delta : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^{\mathcal{J}}$ は対角関手であり $\Delta 1$ は J の全てに 1 を返す関手である

Proof. J small より $Cone(1, F) = Nat(\Delta 1, F)$ もまた small である. これは $\tau \in Nat(\Delta 1, F)$ について

$$\begin{array}{ccc} j & & \Delta 1(j) = 1 \xrightarrow{\tau j} Fj \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle \Delta 1(f)}\| \qquad\qquad \downarrow{\scriptstyle Ff} \\ j' & & \Delta 1(j') = 1 \xrightarrow[\tau j']{} Fj' \end{array}$$

であり, $Fj \in Ob(\mathbf{Set})$ であるので small なので, $\eta : J \to \cup_{j \in J} F(j)$ とみなせるためである[1]

あとは極限であることを示せば良い. これは任意の集合 X と自然変換 $\tau \Delta X \to F$ について, ある $f : X \to \mathrm{colim} F$ が存在して, $\nu_j \circ \Delta f = \tau_j$ となること示せば良い. これは $f : X \to Nat(\Delta 1, F)$ を $x \in X$ について $f(x)_j = \tau_j(x)$ として定めれば良い. $\square$

ここで $Cone(X, F) = Nat(\Delta X, F) \cong hom(X, \lim F) = hom_{\mathbf{Set}}(X, Cone(1, F))$

定理 111. C を locally small category とする. $hom(c, \cdot) : C \to$ **Set** なる関手は極限を保存する

同様に $hom(\cdot, c)$ は余極限 colim を保存する

[1] グロタンディーク宇宙 U_κ 内で考えると, U_κ の元が小さいとなる. $|J| < \kappa$ かつ $|F(j)| < \kappa$ ならば κ は正則より $|(\cup_{j \in J} F(j))^J| < \kappa \times \kappa = \kappa$ となるので $|Nat(\Delta 1, F)| < \kappa$.

Proof. $F : J \to \mathbf{Set}$ とする.

$$Nat(\Delta 1, hom_C(c, F\cdot)) \cong Nat(\Delta c, F)$$

である. これは $Nat(\Delta 1, hom_C(c, F\cdot))$ は

$$\begin{tikzcd} j \arrow[d, "h"'] & \Delta 1(j) = 1 \arrow[r] \arrow[d, equal, "\Delta 1(f)"'] & hom_C(c, Fj) \arrow[d, "Fh"] \\ j' & \Delta 1(j') = 1 \arrow[r] & hom_C(c, Fj') \end{tikzcd}$$

で与えられ, $Nat(\Delta c, F)$ は

$$\begin{tikzcd} j \arrow[d, "h"'] & \Delta c(j) = c \arrow[r, "\tau j"] \arrow[d, equal, "\Delta c(f)"'] & Fj \arrow[d, "Fh"] \\ j' & \Delta c(j') = c \arrow[r, "\tau j'"'] & Fj' \end{tikzcd}$$

で与えられることからわかる. よって

$$Cone(1, hom_C(c, F\cdot) = Nat(\Delta 1, hom_C(c, F\cdot)) \cong Nat(\Delta c, F) = Cone(c, F)$$

であるので,

$$Cone(X, hom_C(c, F\cdot)) \cong hom_{\mathbf{Set}}(X, Cone(1, hom_C(c, F\cdot)) \cong hom_{\mathbf{Set}}(X, Cone(c, F)) \cong hom_{\mathbf{Set}}(X, hom_C(c, \lim$$

となる. $Cone(X, hom_C(c, F\cdot)) \cong hom_{\mathbf{Set}}(X, Y)$ となる Y こそが $\lim hom_C(c, F\cdot)$ であったので, $\lim hom_C(c, F\cdot) \cong hom_C(c, \lim F)$ となる. □

系 112. (F, G, φ) を X から A の随伴であるとする. $T : J \to A$ が極限 $\tau : \Delta(\lim T) \to T$ を持つならば, GT は極限 $G\tau : \Delta(G \lim T) \to GT$ と持つ.
つまり右随伴射 G について, $\lim(GT) \cong G(\lim T)$ である. (right adjoint perverse limit)

同様に左随伴射 F について $\mathrm{colim} FT \cong F(\mathrm{colim} T)$ である.

Proof. 任意の $x \in X$ について

$$hom_X(x, \lim(GT)) \cong hom_X(x, G(\lim T))$$

を示せば良い. これは以下から言える.

$$hom_X(x, G(\lim T)) \cong hom_A(Gx, T) \cong \lim hom_A(Gx, T)) \cong \lim hom_X(x, GT)$$

□

2.0.10 Kan 拡張

定義 113. $K : M \to C, T : M \to A$ を関手とする．K に沿った T の右 Kan 拡張とは

- $R : C \to A$ 関手
- $\epsilon : RK \to T$ 自然変換

に二つくみ $(R, \epsilon : RK \to T)$ であって，任意の $S : C \to A, \alpha : SK \to T$ について，$\alpha = \epsilon \cdot \sigma K : SK \to T$ となる自然変換 $\sigma : S \to R$ が唯一存在すること．
このとき $R := Ran_K T$ とかく．

$\sigma \mapsto \epsilon \cdot \sigma K$ によって自然な全単射

$$Nat(S, R) = Nat(S, Ran_K T) \cong Nat(SK, T)$$

となる. よってこれをかっこよくいうと次の補題を得る.

補題 114. $K : M \to C$ を固定する．任意の $T \in A^M$ $(T : M \to A)$ について右 Kan 拡張 $(R, \epsilon) := (Ran_K T \in A^C, \epsilon_T : RK \to T)$ が存在すると仮定する．
この時 $\beta : A^M \to A^C$ を

- $\beta T := Ran_K T$
- $\beta(g : T \to T')$ について $\beta(g) : Ran_K T \to Ran_{K'} T$ を，$S = Rank_T K : C \to A, \alpha = g \circ \epsilon_T : SK \to T$ として，唯一存在する自然変換 $\beta(g) := \sigma : Ran_K T \to Ran_K T'$ で $\alpha = g \circ \epsilon_T = \epsilon_T \cdots \beta(g) K$ となるもの．

で決めると，

$$F : A^C \to A^M \quad N : C \to A \mapsto N \circ K : M \to A$$

の右随伴，つまり

$$hom_{A^M}(F(N), T) = Nat(NK, T) \cong hom_{A^C}(N, Ran_K T) = Nat(N, Ran_K T)$$

となり，$\epsilon : I \to Ran_K \circ F$ は unit である．

定理 115 (点列極限としての右 Kan 拡張)**.** $K : M \to C, T : M \to A$ を関手とする．任意の $c \in Ob(C)$ について

$$T \circ Q : (c \downarrow K) \to M \to A$$

に関する極限 $\lim T \circ Q$ と $\mu : \Delta(\lim T \circ Q) \to TQ$ が存在すると仮定する．
このとき $R : C \to A$ を

- $c \in Ob(C)$ について，$Rc := \lim(T \circ Q : (c \downarrow K) \to M \to A)$

- $g : c \to c'$ について $Rg : Rc \to Rc'$ となる射

とするとこれは関手になる
さらに $\epsilon : RK \to T$ について $\epsilon_m : RKm \to Tm$ を次で定めるとこれは自然変換になる:
$RKm = \lim T \circ Q \in Ob(A)$ と $\mu : \Delta RKm \to TQ$ は定義から, (RKm, μ_x) のくみ $(x : Km \to Km)$, $Ob(c \downarrow K)$ 内の $h : (m, x) \to (m', x')$ について

- $\mu_x : RKm \to Tm$, つまり A 内で $\mu_x : RKm \to Tm$

- $TQh \circ \mu_{x'} = \mu_{(m,x)} : RKm \to TQ(m, x) = Tm$,

である. そこで $\epsilon_m := \mu_{id_{Km}} : RKm \to Tm$ と定義する.
そして (R, ϵ) は K に沿った T の右 Kan 拡張となる.

Proof. [0.] $Ob(c \downarrow K)$ と $Q : (c \downarrow K) \to M$ の定義について.

- $(m, x) : Ob(c \downarrow K)$ は $m \in Ob(M)$ かつ $x : c \to Km$

- Morphism $h : (m, x) \to (m', x') \in Hom_M(m, m')$ を $h : m \to m'$ で $x' = Kh \circ x$ となるもの

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "1"'] \\
1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "x"] \arrow[d, equal, "id_c"'] & Km \arrow[d, "Kh"] \\
c \arrow[r, "x'"'] & Km'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
m \arrow[d, "h"'] \\
m'
\end{tikzcd}
$$

ここで $Q : (c \downarrow K) \to M$ を以下で定める

- $(m, x) \in Ob(c \downarrow K)$ について $Q(m.x) = m$

- $h : (m, x) \to (m', x') \in Hom_M(m, m')$ について $Q(h) = h$

[1.] R が関手になること. $c \in On(C)$ について, その極限 $a_c = \lim T \circ Q \in Ob(A)$ と $\mu : \Delta(\lim T \circ Q) \to TQ$ とは

1. $(a_c, \mu_{(m,x)})$ のくみ $(x : c \to Km)$, $Ob(c \downarrow K)$ 内の $h : (m, x) \to (m', x')$ について
   - $\mu_{(m,x)} : a_c \to Tm$, つまり A 内で $\mu_{(m,x)} : a_c \to Tm$
   - $TQh \circ \mu_{(m',x')} = \mu_{(m,x)} : a_c \to TQ(m, x)$,
2. $(a', \nu_{(m,x)})$ の組 $(x : c \to Km)$ で $h' : (m, x) \to (m', x')$ について
   - $\nu_{(m,x)} : a' \to Tm$, つまり A 内で $\nu_{(m,x)} : a' \to Tm$
   - $TQh' \circ \nu_{(m',x')} = Th' \circ \nu_{(m',x')} = \nu_{(m,x)} : a' \to TQ(m, x)$

   となるものについて, ある $f : a \to a_c$ がただ一つ存在して, $Ob(c \downarrow K)$ 内の $h : (m, x) \to (m', x')$ について $\mu_{(m,x)} \circ f = \nu_{(m,x)} : a \to TQ(m, x) = Tm$ となる.

ここで, $x : c \to Km$ なので, m の情報も持っているので $\mu_x := \mu_x$ と書くことにする. すると $c \in On(C)$ について, その極限 $a_c = \lim T \circ Q \in Ob(A)$ と $\mu : \Delta(\lim T \circ Q) \to TQ$ とは

1. $(a_c, \mu_{(x)})$ のくみ $(x : c \to Km)$, $Ob(c \downarrow K)$ 内の $h : (m, x) \to (m', x')$ について
   - $\mu_x : a_c \to Tm$, つまり A 内で $\mu_x : a_c \to Tm$
   - $TQh \circ \mu_x = \mu_x : a_c \to TQm$,
2. (a', ν_x) の組 $(x : c \to Km)$ で $h' : (m, x) \to (m', x')$ について
   - $\nu_x : a' \to Tm$, つまり A 内で $\mu_x : a' \to Tm$
   - $TQh' \circ \mu_{x'} = Th' \circ \mu_x : a' \to TQm$

   となるものについて, ある $f : a \to a_c$ がただ一つ存在して, $Ob(c \downarrow K)$ 内の $h : (m, x) \to (m', x')$ について $\mu_x \circ f = \nu_x : a \to Tm$ となる.

よって $g : c \to c'$ について, その極限 $a'_c = \lim T \circ Q \in Ob(A)$ と $\mu' : \Delta(\lim T \circ Q) \to TQ$ を考える. この時 $x : c' \to Km$ なる組について $\mu'_{m,x} : a'_c \to Tm$ で $\mu_{m,x} : a'_c \to T_m$ がある.

そこで $(x \circ g, m)$ について $(x \circ g : c \to Mm$ で$)$ $\mu_{x \circ g} : a'_c \to Tm$ で $\mu'_x : a'_c \to T_m$ であるので, 普遍性から $Rg : a_c \to a'_c$ なる関手が存在する. そして以下が成り立つ. $x : c' \to Km$ とする.

$$\begin{tikzcd}
Rc = \lim TQ \arrow[r, "\mu_{(x \circ g)}"] \arrow[d, "Rg"'] & Tm \arrow[d, equal] \\
Rc = \lim TQ' \arrow[r, "\mu'_x"'] & Tm
\end{tikzcd}$$

[2.] 自然変換 $\epsilon : RK \to T$ の定義. $m \in M$ について $\epsilon_m : RKm \to Tm$ で任意の $h : m \to m'$ について以下の図式が成り立つことをいう.

$$\begin{tikzcd}
RKm = \lim TQ_{Km} \arrow[r, "\epsilon_m"] \arrow[d, "RKh"'] & Tm \arrow[d, "Th"'] \\
RKm' = \lim TQ'_{Km'} \arrow[r, "\epsilon'_m"'] & T'm
\end{tikzcd}$$

を示せば良い. ここで $RKm = \lim T \circ Q \in Ob(A)$ と $\mu : \Delta RKm \to TQ$ とは (RKm, μ_x) のくみ $(x : Km \to Km)$, $Ob(c \downarrow K)$ 内の $h : (m, x) \to (m', x')$ について

- $\mu_x : RKm \to Tm$, つまり A 内で $\mu_x : RKm \to Tm$
- $TQh \circ \mu_{x'} = \mu_{(m,x)} : RKm \to TQ(m, x) = Tm$,

である. よって, $\epsilon_m := \mu_{id_{Km}} : RKm \to Tm$ とおけば良い .

この時 $h : m \to m'$ について $g = Rh : Km \to Km$ と置いて [1] の事実を用いると

$$\begin{tikzcd}
RKm = \lim TQ \arrow[r, "\mu_{id_m : Km \to Km}"] \arrow[d, "Rg"'] \arrow[dr, "\mu_{Kh : Km \to Km'}"] & Tm \arrow[d, "Th"] \\
RKm' = \lim TQ' \arrow[r, "\mu_{id_{m'} : Km' \to Km'}"'] & Tm'
\end{tikzcd}$$

となる．よって自然変換も言える．

[3] 右 Kan 拡張であること．

$S : C \to A$ と $\alpha : SK \to T$ が存在したとする．示すことは自然変化 $\sigma : S \to R$ の唯一存在と $\alpha = \epsilon \cdot \sigma K : SK \to T$ である．

[3-1], $\sigma : S \to R$ の存在．これは $c \in Ob(C)$ と $\sigma_c : Sc \to Rc$ を作れば良い $f : c \to Km$ に対する図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
Rc = \lim(T \circ Q : (c \downarrow K) \to M \to A) \arrow[r, "\mu_{f:c\to Km}"'] & Tm \arrow[r, "Th"] & Tm' \\
Sc \arrow[ur] \arrow[r, "Sf"'] & SKm \arrow[u, "\alpha_m"'] \arrow[r, "SKm"'] & SKm' \arrow[u, "\alpha'_m"']
\end{tikzcd}$$

これにより極限の定義から $\sigma_c : Sc \to Rc$ が唯一存在する．なぜならば, $(c \downarrow K)$ の写像 $h : (f, m) \to (f', m')$ について $(f : c \to Km, f' : c \to Km', h : m \to m', Kh \circ f = f')$ について上の可換図式がまわるからである．

[3-2] σ が自然になること． これは $g : c \to c'$ について $\sigma'_c \circ Sg = Rg \circ \sigma_c$ を示せば良い．$f' : c' \to Km$ について

$$\begin{tikzcd}
Rc \arrow[r, "Rg"'] \arrow[rr, bend left, "\mu_{f'\circ g:c\to Km}"] & Rc' \arrow[r, "\mu'_{f':c'\to Km}"] & Tm \\
Sc \arrow[u, "\sigma_c"'] \arrow[r, "Sg"] \arrow[rr, bend right, "S(f'\circ g)"'] & Sc' \arrow[u, "\sigma_{c'}"'] \arrow[r, "Sf'"] & SKm \arrow[u, "\alpha'_m"']
\end{tikzcd}$$

Rc' の普遍性に帰着させる．

$$\mu_{f'\circ g:c\to Km} \circ \sigma_c = \alpha'_m \circ S(f' \circ g) = \mu'_{f':c'\to Km} \circ (\sigma_{c'} \circ Sg) : Sc \to Tm$$

である．$f' : c' \to Km$ についての極限を取れば $h : Sc \to Rc'$ で任意の f' について $\mu'_{f':c'\to Km} \circ h = \alpha'_m \circ S(f' \circ g) : Sc \to Tm$ このような h はただ一つである．よって

$$\mu'_{f':c'\to Km} \circ (\sigma_{c'} \circ Sg) = \mu'_{f':c'\to Km} \circ h = \alpha'_m \circ S(f' \circ g) = \mu_{f'\circ g:c\to Km} \circ \sigma_c = \mu'_{f':c'\to Km} \circ (Rg \circ \sigma_c)$$

より普遍性の唯一性から $h = \sigma_{c'} \circ Sg = Rg \circ \sigma_c$ である．

[3-3] $\alpha = \epsilon \cdot \sigma K : SK \to T$ について．示すことは, $m \in Ob(M)$ について

$$\alpha_m = \epsilon_m \cdot \sigma_{Km} : SKm \to Tm$$

である．$c = Km$, $f = id_{Km} : c = Km \to Km$ として [3.1] のような図式を考えると,

$$\begin{tikzcd}
Rc = \lim(T \circ Q : (c \downarrow K) \to M \to A) \arrow[rr, "\mu_{id_{Km}:Km \to Km} = \sigma_{Km}"'] & & Tm \\
SKm \arrow[u, "\sigma_c = \sigma_{Km}"] \arrow[rr, equal, "Sf = Sid_{Km}"'] & & SKm \arrow[u, "\alpha_m"']
\end{tikzcd}$$

より言える.

[4]$\sigma : S \to R$ の唯一性.

[2] において $f : c \to Km,\ c' = Km,\ f' = id_{Km}$ とすると以下の図式を得る

$$\begin{tikzcd}
Rc \arrow[r, "Rf"'] \arrow[rr, bend left, "\mu_{f:c \to Km}"] & RKm \arrow[r, "\mu'_{id_{Km}:Km \to Km} = \epsilon_m"'] & Tm \\
Sc \arrow[u, "\sigma_c"'] \arrow[r, "Sf"'] \arrow[rr, bend right, "Sf"'] & SKm \arrow[u, "\sigma_{Km}"'] \arrow[r, equal, "SKm"'] & SKm \arrow[u, "\alpha_m"']
\end{tikzcd}$$

上の図式は全て可換で $\sigma_c : S_c \to Rc$ が唯一であることがわかる.（Rc が極限で $\mu_{f:c \to Km} \circ h_c = \mu_{f:c \to Km} \circ h'_c$ なら $h_c = h'_c$ となる/）□

系 116. M が small, A が完備なら任意の $T : M \to A$ は任意の $K : M \to C$ に沿った右 Kan 拡張を持つ. さらに A^K は右随伴を持つ
特に Msmall ならば任意の $T : M \to \mathbf{Set}$ は任意の $K : M \to C$ に沿った右 Kan 拡張を持つ.

Proof. 任意の $c \in Ob(C)$ について

$$T \circ Q : (c \downarrow K) \to M \to A$$

に関する極限 $\lim T \circ Q$ と $\mu : \Delta(\lim T \circ Q) \to TQ$ が存在することを示せば良い. これは M を経由しているので存在する.

□

系 117. 122 のように $K : M \to C$, $T : M \to A$ を関手, 任意の $c \in Ob(C)$ について

$$T \circ Q : (c \downarrow K) \to M \to A$$

に関する極限 $\lim T \circ Q$ と $\mu : \Delta(\lim T \circ Q) \to TQ$ が存在すると仮定する.
さらに $K : M \to C$ が fully faithfull の場合, K の T に沿った Kan 拡張 $R = Ran_K T$ についての普遍射 $\epsilon : RK \to T$ は自然同型を与える

Proof. $m \in Ob(M)$ について $\sigma_m : RKm \to Tm$ が A 上で自然な可逆を持つことを言えば良い. $Ob(Km \downarrow K)$ は K が fullyfaithfull であるので次のようにかける.

- $(m', Kh) : Ob(c \downarrow K)$ は $m \in Ob(M)$ かつ $Kh : Km \to Km'$($Km \to Km'$ は fullyfaithfull よりこの形でかける)

- Morphism $H : (m_1, Kh_1) \to (m_2, Kh_2) \in Hom_M(m_1, m_2)$ を $H : m_1 \to m_2$ で $h_2 = H \circ h_1$ となるもの.

$$T \circ Q : (c \downarrow K) \to M \to A : (m', Kh) \to Tm'$$

である. 任意の $h : m \to m'$ について,

$$Th : Tm \to Tm'$$

が定めるので, $\alpha_m : Tm \to \lim TQ$ が唯一存在する. 一方で $\sigma_m : id_m : m \to m$ について $\lim TQ \to Tm$ が定まる. $\sigma_m \circ \alpha_m = id_m$ は唯一性のところから明らか. 逆については, 唯一性からでる. □

系 118. M が C の full sub category つまり包含関手 $K : M \to C$ が fullyfaithfull とする. $T : M \to A$ 関手とする. $c \in C$ について

$$(c \downarrow K) \to M \to A$$

が A 内に極限を持つとき $R : C \to A$ があって $\epsilon : RK \cong T$ である.
特に恒等自然変換 $1 : RK \to T$ とすると $(R, 1)$ は T の K に沿った右 Kan 拡張となる.

定理 119. $K : M \to C$, $T : M \to A$, $G : A \to X$ とする. G が左随伴を持つ時, G は右 Kan 拡張を保存する.

$$G \circ Ran_K T = Ran_K GT$$

Proof.

$$hom_A(Fx, a) \cong hom_X(x, Ga)$$

により $H \in X^C, L \in A^C$ について

$$Nat(FH, L) \cong (HGL)$$

がいえる. よって任意の $H \in X^C$ について自然な全単射

$$Nat(H, G \circ Ran_K T) \cong Nat(FH, Ran_K T) \cong Nat(FHK, T) \cong Nat(HK, GT) \cong Nat(H, Ran_K GT)$$

が成り立つので, 同型が言える. □

左 Kan 拡張に関しても同様である. 以下事実をまとめておく.

定義 120 (左 Kan 拡張). $K : M \to C$, $T : M \to A$ を関手とする. K に沿った T の左 Kan 拡張とは

- $L : C \to A$ 関手
- $\epsilon : T \to LK$ 自然変換

に二つくみ $(L, \epsilon : LK \to T)$ であって, 任意の $S : C \to A, \alpha : T \to SK$ について, $\alpha = \sigma K \circ \epsilon : T \to SK$ となる自然変換 $\sigma : L \to S$ が唯一存在すること.
このとき $L := Lan_K T$ とかく.

$\sigma \mapsto \epsilon \cdot \sigma K$ によって自然な全単射

$$Nat(L, S) = Nat(Lan_K T, S) \cong Nat(T, SK)$$

となる. よってこれをかっこよくいうと次の補題を得る.

補題 121. $K : M \to C$ を固定する. 任意の $T \in A^M$ $(T : M \to A)$ について左 Kan 拡張 $(L, \epsilon) := (Lan_K T \in A^C, \epsilon_T : T \to LK)$ が存在すると仮定する.
この時 $\beta : A^M \to A^C$ を

- $\beta T := Lan_K T$
- $\beta(g : T \to T')$ について $\beta(g) : Lan_K T \to Lan_{K'} T$ を, $S = Lan_K T' : C \to A, \alpha = g \circ \epsilon_T : T \to SK = Lan_K T' K$ として, 唯一存在する自然変換 $\beta(g) := \sigma : Lan_K T \to Lan_K T'$ で $\alpha = g \circ \epsilon_T = \beta(g) K \cdot \epsilon_T$ となるもの.

で決めると,

$$F : A^C \to A^M \quad N : C \to A \mapsto N \circ K : M \to A$$

の左随伴, つまり

$$Nat(Lan_K T, N) = hom_{A^C}(Lan_K T, N) \cong hom_{A^M}(T, F(N)) = Nat(T, NK)$$

となり, $\epsilon : I \to Ran_K \circ F$ は unit である.

定理 122 (点列極限としての左 Kan 拡張). $K : M \to C$, $T : M \to A$ を関手とする. 任意の $c \in Ob(C)$ について

$$T \circ P : (K \downarrow c) \to M \to A$$

に関する余極限 $\mathrm{colim} T \circ P$ と $\mu : TP \to \Delta(\lim T \circ P)$ が存在すると仮定する.
このとき $L : C \to A$ を

- $c \in Ob(C)$ について, $Lc := \mathrm{colim}(T \circ P : (K \downarrow c) \to M \to A)$

- $g : c \to c'$ について $Lg : Lc \to Lc'$ となる射

とするとこれは関手になる
さらに $\epsilon : T \to RK$ について $\epsilon_m : Tm \to RKm$ を次で定めるとこれは自然変換になる:
$LKm = \mathrm{colim} T \circ P \in Ob(A)$ と $\mu : TP \to \Delta TPm$ は定義から, (LKm, μ_x) のくみ $(x : Km \to Km)$, $Ob(c \downarrow K)$ 内の $h : (m, x) \to (m', x')$ $(x' : Km' \to Km)$ について

- $\mu_x : Tm \to RKm$, つまり A 内で $\mu_x : Tm \to RKm$
- $\mu_x \circ TPh = \mu_{x'} : TQ(m', x') = Tm' \to RKm$,

である. そこで $\epsilon_m := \mu_{id_{Km}} : Tm \to RKm$ と定義する.
そして (L, ϵ) は K に沿った T の左 Kan 拡張となる.

系 123. M が small, A が完備なら任意の $T : M \to A$ は任意の $K : M \to C$ に沿った左 Kan 拡張を持つ. さらに A^K は左随伴を持つ
特に Msmall ならば任意の $T : M \to \mathbf{Set}$ は任意の $K : M \to C$ に沿った左 Kan 拡張を持つ.

系 124. 122 のように $K : M \to C$, $T : M \to A$ を関手, 任意の $c \in Ob(C)$ について

$$T \circ P : (K \downarrow c) \to M \to A$$

に関する極限 $\mathrm{colim} T \circ P$ と $\mu : TP \to \Delta(\lim T \circ Q)$ が存在すると仮定する.
さらに $K : M \to C$ が fully faithfull の場合, K の T に沿った Kan 拡張 $L = Lan_K T$ についての普遍射 $\epsilon : T \to LK$ は自然同型を与える

系 125. M が C の full sub category つまり包含関手 $K : M \to C$ が fullyfaithfull とする. $T : M \to A$ 関手とする. $c \in C$ について

$$(K \downarrow c) \to M \to A$$

が A 内に極限を持つとき $L : C \to A$ があって $\epsilon :\cong T \cong LK$ である.
特に恒等自然変換 $1 : RK \to T$ とすると $(L, 1)$ は T の K に沿った右 Kan 拡張となる.

定理 126. $K : M \to C$, $T : M \to A$, $G : A \to X$ とする. G が右随伴を持つ時, G は左 Kan 拡張を保存する.

$$G \circ Lan_K T = Lan_K GT$$

Bibliography

[alg] alg-d 全ての概念は Kan 拡張である https://alg-d.com/math/kan_extension/

[Iwa22] 岩井雅崇　集合と位相まとめノート https://x.gd/aDQt1

[田中] 田中尚夫 公理的集合論　培風館

[マックレーン] S. マックレーン 圏論の基礎 丸善出版