compact 生成空間・compact 生成弱 Hausdorff 空間まとめ

岩井雅崇 (大阪大学)

February 23, 2025 ver 1.00

Contents

1 compact 生成空間・compact 生成弱 Hausdorff 空間まとめ

compact 生成空間 (CG) や compact 生成弱 Hausdorff 空間 (CGWH) の基本的な性質を [Str] を読んでまとめた. 位相空間の基礎的な用語に関しては [Iwa22] を参照のこと.

1.1 CGWH space まとめ

定義 1. [Str, Definition 1.1 ,1.2] X を位相空間とし, $\mathfrak{B}$ を X の閉集合系とする.

1. $Y \subset X$ が k-closed とは任意の compact Hausdorff 空間 K からの連続写像 $u : K \to X$ について $u^{-1}Y$ が閉集合となるもの.
2. k-closed 集合を $k\mathfrak{B}$ と表す. $\mathfrak{B} \subset k\mathfrak{B}$ である.
3. kX を $(X, k\mathfrak{B})$ という位相空間とする.
4. X が compact 生成空間 (CG) とは $X = kX$ となる位相空間である.
5. X が弱 Hausdorff(WH) とは任意の compact Hausdorff 空間 K からの連続写像 $u : K \to X$ について $u(K)$ が閉集合となるもの

注意 2. Hausdorff ならば弱 Hausdorff. なぜならば Hausdorff 空間の compact 集合は閉集合なので. 弱 Hausdorff ならば, T_1 空間. これは一点集合からの射を考えれば良い.

注意 3. k-closed と同様に k-open も定められる. [Str] では k-closed で議論をしているが, k-open でも議論は同じである.

補題 4. [Str, Lemma 1.3] X を WH とする.

1. W compact Hausdorff, $\phi : W \to X$ 連続のとき $\phi(W)$ は compact Hausdorff.
2. $Y \subset X$ が k-closed であることは任意の compact Hausdorff 空間 $K \subset X$ について $K \cap Y$ が K で閉であることと同値.

Proof. (1). $\phi(W)$ が Hausdorff を示せば良い. $x, y \in \phi(W)$ かつ $x \neq y$ とする. compact Hausdorff 空間は T_4 なので

$$\phi^{-1}(x) \subset U \quad \phi^{-1}(y) \subset V \quad U \subset V = \varnothing$$

となる W の開集合 U, V が取れる. $\phi(U^c)$ は閉集合で $(\phi(W) \setminus \phi(U^c)) \cap (\phi(W) \setminus \phi(V^c)) = \varnothing$ であり

$$x \in (\phi(W) \setminus \phi(U^c)) \quad y \in (\phi(W) \setminus \phi(V^c))$$

であるので上の二つの開集合が x, y を分離する. (2) は (1) からすぐでる. $\square$

定義 5. [Str] X 位相空間, $Y \subset X$ 部分集合とする. Y が sequentially closed であるとは任意の $y_n \in Y$ かつ $y_n \to x$ となるならば $x \in Y$ となる集合のこととする.
X が sequential space とは sequentially closed 部分集合が閉集合となること.

注意 6. sequentially closed ならば T_1 である. これは $y_n = x$ という点列を考えるれば良い.

第一可算集合 (任意の点が可算開近傍系を持つ) ならば sequentially closed. なぜならば, Z を sequentially closed 集合としたら, $x \in \overline{Z}$ について $y_n \to x$ となる Z の点列で収束するものが可算開近傍系から作れるからである. 特に距離空間は sequentially closed である.

命題 7. [Str, Prop 1.6] sequentially space は CG

Proof. $Y \subset X$ を k-closed 集合とする. Y が sequentially closed であることを示す. $y_n \in Y$ かつ $y_n \to x$ とおく. $x \in Y$ を示せば良い.

K を $\mathbb{N}$ の一点 compact 化とする. つまり $V \subset K$ が開集合であるとは, $V \subset \mathbb{N}$ または「$\infty \in V$ かつ $K \setminus V$ は有限集合」である.

$u : K \to X$ を $u(n) = y_n, u(\infty) = x$ とおく. これは $y_n \to x$ より連続写像になる. よって Y は k-closed より, $u^{-1}Y$ は $\mathbb{N} \subset u^{-1}Y \subset K$ となる閉集合. よって K の開集合の定義から $u^{-1}Y = K$. $x \in Y$ となる.

$\square$

命題 8. [Str, Prop 1.7] locally compact Hausdorff ならば CGWH.

Proof. X を locally compact Hausdorff とする. CG を示せば良い. $Y \subset X$ を k-closed 集合とする. $\overline{Y} = Y$ を示す.

$x \in \overline{Y}$ とする．X locally compact より $x \in U$ 開集合で $K := \overline{U}$ が compact となるものがある．よって $j : K \to X$ を考えると明らかに連続で，Y は k-closed 集合より $K \cap Y = j^{-1}Y$ は K での閉集合である．

$x \in V \cap K$ で V を X での開集合とする．すると $x \in V \cap U$ より $x \in \overline{Y}$ から $V \cap U \cap Y \neq \varnothing$ となる．よって $V \cap (K \cap Y) \neq \varnothing$ である．

これより任意の x を含む"K での開集合 $V \cap K$"について $(V \cap K) \cap (K \cap Y) \neq \varnothing$ である．これは閉包の定義から $K \cap Y$ の"K での閉包"に x が属する．今 $K \cap Y = j^{-1}Y$ は K での閉集合であるので，$x \in K \cap Y$ となる．つまり $x \in Y$ である． □

補題 9. [Str, Lemma 1.8] K を compact Hausdorff 空間とする．$u : K \to (X, \mathfrak{B})$ 連続は $u : K \to (X, k\mathfrak{B})$ 連続と同値．

補題 10. [Str, Cor1.9] $kX = k(kX)$ である．特に kX は CG.

補題 11. [Str, Cor1.10] X を CG, Y を位相空間とする．$f : X \to Y$ 連続は $f : X \to kY$ が連続と同値．特に $Y \mapsto kY$ は忘却関手 $X \mapsto X$ の右随伴であり

$$hom_{\mathbf{Top}}(X, Y) = hom_{\mathbf{CG}}(X, kY).$$

Proof. 閉集合系は $\mathfrak{B}_Y \subset k\mathfrak{B}_Y$ である．よって右から左は自明である．

$f : X \to Y$ 連続とする．$Z \subset Y$ が k-closed として，$f^{-1}Z \subset X$ が閉集合を示す．X は CG なので $f^{-1}Z$ が k-closed を示せば良い．$u : K \to X$ を compact Hausdorff 空間からの連続写像とする．$u^{-1}(f^{-1}Z)$ が閉集合を示せば良い．これは $f \circ u : K \to X \to Y$ は連続なので明らか． □

命題 12. [Str, Prop1.11] X を CG, Y 位相空間とする．$f : X \to Y$ 連続は，任意の compact Hausdorff 空間からの連続写像 $u : K \to X$ について $f \circ u : K \to Y$ が連続になることと同値．

Proof. 左から右は明らか，右から左に関しては，$Z \subset Y$ 閉集合に関して，$f^{-1}Z$ が k-closed を示せば良く，上の証明と同じ議論で言える． □

命題 13. [Str, Prop1.12] $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \subset P(X)$ を X の閉集合系とする．この時 $k\mathfrak{A} \subset k\mathfrak{B}$.

Proof. $Z \in k\mathfrak{A}$ とする．$Z \in k\mathfrak{B}$ を示せば良い．つまり $u : K \to (X, \mathfrak{B})$ を compact Hausdorff 空間からの連続写像について $u^{-1}Z$ が K の閉集合であることを示せば良い．$u : K \to (X, \mathfrak{A})$ も連続なので明らか． □

命題 14. [Str, Prop2.1] X を CG とし，$\sim$ を X の同値関係とすると $X/\sim$ も CG.

Proof. $\pi : X \to X/\sim$ を商写像とする．$Z \subset X/\sim$ が k-closed とする．Z が閉集合であることを示せば良い．11 から $\pi : X \to k(X/\sim)$ も連続であるので，$\pi^{-1}Z$ は X の閉集合である．π は商写像なので，Z は閉集合である． □

命題 15. [Str, Prop2.2] $\{X_i\}_{i\in I}$ を CG の族とする．(ただし I は集合とする) この時 $\sqcup X_i$ も CG．

Proof. $Z \subset \sqcup X_i$ を k-closed とする．Z が閉集合であることを示せば良い．これは $\eta_i : X_i \to \sqcup X_i$ を包含写像として，$Z_i := X_i \cap \eta_i^{-1}Z$ としたとき Z_i が X_i で閉集合であることを示せば良い．X_i は CG なので Z_i が k-closed であることを示せば良い．

これは $u : K \to X_i$ を compact Hausdorff 空間からの連続写像とすれば $u^{-1}Z_i = (\eta_i \circ u)^{-1}Z$ であることから明らかである． □

以下，位相空間 X, Y について $X \times_0 Y$ を位相空間の直積とする．

定義 16. [Str, Def 2.3] X, Y を CG として，その直積 $X \times Y$ を下で定める．

- 集合としては $X \times Y$．
- 位相としては $k(\mathfrak{B}_X \times \mathfrak{B}_Y)$ とする．

つまり $X \times Y = k(X \times_0 Y)$ とする． 同様に $\prod X_i$ を積位相空間に k 化したもの，つまり $k(\prod_0 X_i)$ で定める．

命題 17. [Str, Prop2.4] $\{X_i\}_{i\in I}$ を CG の族とする．

1. $p_i : \prod X_i \to X_i$ を射影とすると，これは連続．
2. 任意の CG である Y について，$f : Y \to \prod X_i$ が連続であることは，各 $p_i \circ f$ が連続と同値．

よって $\prod X_i$ は **CG** の圏の直積となる．

Proof. (1)．11 より $p_i : \prod X_i \to X_i$ が連続は，$\prod_0 X_i$ で連続であることと同じであるので．

(2) については右から左のみ非自明．$p_i \circ f$ が連続であるとすると，$f : Y \to \prod_0 X_i$ は連続である．よって 11 より k 化した $k(\prod_0 X_i)$ でも連続となる． □

補題 18. [Str, Lem 2.5] X を compact 位相空間，Y を位相空間，$y \in Y$ とする．$X \times \{y\} \subset U$ なる $X \times_0 Y$ の開集合 U が存在する時，Y の y を含む開集合 V で $X \times_0 V \subset U$ となる．

Proof. $(x, y) \in U$ より積位相の定義から $(x, y) \in U_x \times V_x$ がある．$\cup_{x\in X} U_x = X$ より X は compact だから有限個でおおえる．$X = \cup_{i=1}^n U_{x_i}$ とし $V := \cap_{i=1,\dots,n} V_{x_i}$ とすれば良い． □

命題 19. [Str, Prop2.6] X が locally compact Hausdorff, Y が CG ならば $X\times_0 Y = X\times Y$.

Proof. $Z\subset X\times_0 Y$ が k-closed とする. Z が X と Y の"積位相"で閉集合であることを示せば良い.

$(x,y)\notin Z$ について $(x,y)\in U\times V$ なる X,Y の開集合で $(U\times V)\cap Z=\varnothing$ であるものが存在することを示す.

$$i_y : X\to X\times Y \quad x'\mapsto (x',y)$$

とする. これは連続写像で, $i_y^{-1}Z\subset X$ は k-closed 集合かつ X が CG であることより, $i_y^{-1}Z\subset X$ は閉集合. X は局所 compact かつ $x\notin i_y^{-1}Z$ より, $x\in U\subset X$ なる開集合で $\overline{U}$compact かつ $\overline{U}\cap i_y^{-1}Z=\varnothing$ となるものがある. よって

$$(\overline{U}\times\{y\})\cap Z=\varnothing$$

となる.

そこで

$$V:=\{y'\in Y|(\overline{U}\times\{y'\})\cap Z=\varnothing\}$$

とおく.$y\in V$ である. この V が Y で開集合であることを示せば良い. それには $u:K\to Y$ を compact Hausdorff 空間からの連続写像について $u^{-1}V$ が開集合であることを示せば良い.

$$1\times u:\overline{U}\times K\to X\times Y$$

とする. $Z\subset X$ は k-closed なので, $Z':=(1\times u)^{-1}Z$ は $\overline{U}\times K$ 上の閉集合である. $\overline{U}\times K$ は compact なので, Z' もまた compact, $pr_2(Z')\subset K$ は compact, 特に KHausdorff なので $pr_2(Z')\subset K$ は閉集合である. (ただし $pr_2:\overline{U}\times K\to K$ を第二射影とする.)

$$pr_2(Z')=(u^{-1}V)^c$$

であることに注意すれば $u^{-1}V$ は開集合である. □

命題 20. [Str, Prop2.7] X,Y がどちらも第一加算ならば, $X\times_0 Y$ も第一加算. 特に $X\times_0 Y = X\times Y$.

Proof. これは可算近傍系の直積を取れば良い. 最後に関しては第一加算は CG より明らか. □

定義 21. [Str, Def 2.8] X,Y を CG とする. $u:K\to X$ を compact Hausdorff 空間からの連続写像, $U\subset Y$ 開集合として

$$W(u,K,U):=\{f:X\to Y\ \text{連続写像}\ |f\circ u(K)\subset U\}$$

とする. u が包含写像で $K\subset X$ であるときは $W(u,K,U)=W(K,U)$ とかく.

$C_0(X,Y)$ を $W(u,K,U)$ を開集合とする位相で一番小さいものとする (つまり準開基とする位相) これを compact-open topology という.

また $C(X,Y)=kC_0(X,Y)$ とする.

注意 **22.** $Z\subset Y$ ならば $C(X,Z)=\cap_{x\in X}W(\{x\},Z)^c$ より $C(X,Y)$ 内の閉集合である.

補題 **23.** [Str, Lemma 2.10] X,Y,Z,W を CG とする. $g:Y\to Z,\ f:W\to X$ を連続写像とする.

$$g_*:C(X,Y)\to C(X,Z)\quad t\mapsto g\circ t$$

$$f^*:C(X,Y)\to C(W,Y)\quad t\mapsto t\circ f$$

はともに連続である.

Proof. (1)$u:K\to X$ を compact Hausdorff 空間からの連続写像, $U\subset Z$ 開集合とするとき

$$g_*^{-1}W(u,K,U)=\{t:X\to Y|g\circ t\circ u(K)\subset U\}=W(u,K,g^{-1}U)$$

であることから k 化する前の位相において連続である. よって 11 より k 化しても連続である.

(2) $u:K\to W$ を compact Hausdorff 空間からの連続写像, $U\subset Y$ 開集合とするとき

$$f^{*-1}W(u,K,U)=\{t:X\to Y|t\circ f\circ u(K)\subset U\}=W(fu,K,U)$$

であることから (1) と同様. □

命題 **24.** [Str, Prop2.11] X,Y を CG とする.

$$ev:X\times C(X,Y)\to Y\quad (x,f)\mapsto f(x)$$

$$inj_{X,Y}:Y\to C(X,X\times Y)\quad y\mapsto (inj(y):x\mapsto (x,y))$$

はともに連続である.

Proof. (1)inj について. 11 から $inj:Y\to C_0(X,X\times Y)$ で連続であることを示せば良い.

- $u:K\to X$ を compact Hausdorff 空間からの連続写像,
- $U\subset X\times Y$ を開集合

とするとき, $inj^{-1}W(u,K,U)$ が Y での開集合であることを示せば良い. Y は CG より

- $v:L\to Y$ を compact Hausdorff 空間からの連続写像

として $v^{-1}inj^{-1}W(u,K,U)$ が L の開集合であることをしめせば良い.

$$u\times v:K\times L\to X\times Y$$

は連続である. よって

$$\{l\in L|K\times\{l\}\subset(u\times v)^{-1}U\}$$

は K が compact なので 18 から開集合である.

$$\begin{aligned} v^{-1}inj^{-1}W(u,K,U) &= \{l \in L | inj(v(l)) \in W(u,K,U)\} \\ &= \{l \in L | inj(v(l))(uK) \subset U\} \\ &= \{l \in L | u(K) \times \{v(l)\} \subset U\} \\ &= \{l \in L | K \times \{l\} \subset (u \times v)^{-1}U\} \end{aligned}$$

であるので L の開集合であることが言えた.

(2) ev について. $U \subset Y$ を開集合とする. $ev^{-1}(U) \subset X \times C(X,Y)$ が開集合であることを示すには,

- $u = v \times w : K \to X \times C(X,Y)$ を compact Hausdorff 空間からの連続写像,

として, $V := u^{-1}(ev^{-1}U) \subset K$ が開集合であることを示せば良い. すると定義から

$$V = u^{-1}(ev^{-1}U) = \{a \in K | w(a)(v(a)) \in U\}$$

となる. ($w(a) : X \to Y$ であることに注意.)

$a \in V$ について, $a \in Z_a \subset V$ なる K の開近傍の存在を示す. $w(a) \circ v : K \to X \to Y$ は連続かつ K が compact Hausdorff なので, $a \in L \subset (w(a) \circ v)^{-1}U$ となる compact 集合 L が取れる. $w(a)(v(L)) \subset U$ であるので定義から

$$w(a) \in W(v,L,U) \subset C(X,Y)$$

となる. $w : K \to C(X,Y)$ で連続なので, $a \in w^{-1}(W(v,L,U))$ は K の開近傍である. よって

$$a \in L \cap w^{-1}(W(v,L,U))$$

を得る. この $Z_a := L \cap w^{-1}(W(v,L,U))$ が欲しいものである. 実際 $a \in Z_a$ は明らか, Z_a が開集合も上からわかる. $Z_a \subset V$ は以下のように示される: 任意の $b \in Z_a$ について $w(b) \in W(v,L,U)$ から $w(b)v(L) \subset U$ であり, $b \in L$ より $w(b)(v(b)) \in U$ となるので V の上の定義から $b \in V$ となる. □

命題 25. [Str, Prop2. 1 2] X, Y, Z を CG とする.

$$adj : C(X, C(Y,Z)) \to C(X \times Y, Z) \quad f \mapsto (adj(f) : (x,y) \mapsto f(x)(y))$$

は同相である.

Proof.

$$D(X,Y) := \{f : X \to Y | f \text{ は集合としての写像 }\}$$

とおく. 次の"集合の写像としての"全単射が存在する.

1. $f : X \to D(Y,Z)$

2. $g : X \times Y \to Z$

上から下への対応は $g(x,y) = f(x)(y)$ である．

$g(x,y)$ が連続になるには次の二つの条件が満たされなければならない．

1. $f(x) : Y \to Z$ が任意の $x \in X$ で連続．

2. $f : X \to C(X,Y)$ が連続．

なぜならば f が上の (1)(2) を満たされている場合，

$$g : X \times Y \xrightarrow{f\times 1} C(Y,Z) \times Y \xrightarrow{ev} Y$$

であるので，24 から g は連続となる．逆に g が連続なら，(1) は明らかで

$$f : X \xrightarrow{inj} C(Y, X \times Y) \xrightarrow{inj} C(Y,Z)$$

より 24 から (2) もわかる．

以上より $adj : C(X, C(Y,Z)) \to C(X \times Y, Z)$ は集合としての全単射である．同相になることに関しては 2 通りの証明がある．

[1](地道にやる方法)

$$ev : X \times C(X, C(Y,Z)) \to C(Y,Z) \quad ev : Y \times C(Y \times Z) \to Z$$

は 24 から連続であった，よって

$$g = ev \circ (1_Y \times ev) : Y \times X \times C(X, C(Y,Z)) \to Z$$

は連続である．よって $g : (Y \times X) \times C(X, C(Y,Z)) \to f$ が連続なので $f : C(X, C(Y,Z)) \to C(X \times Y, Z)$ は連続である．これは $f(h)(x,y) = g((x,y),h) = ev((x,y),h) = h(x)(y)$ なので $f = adj$ であり連続である．

逆に

$$ev : Y \times X \times C(X \times Y, Z) \to Z$$

は連続であったので，ev の adjoint である $X \times C(X \times Y, Z) \to C(Y,Z)$ も連続である．よって $C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y,Z))$ も連続である．

[2](米田を使う方法) $adj_{X,Y,Z} : C(X, C(Y,Z)) \to C(X \times Y, Z)$ とかく任意の位相空間 W について

$$\begin{aligned}
C(W, C(X, C(Y,Z))) &\overset{adj_{W,X,C(Y,Z)}}{\longrightarrow} C(W \times X, C(Y,Z)) \\
&\overset{adj_{W\times X,Y,Z}}{\longrightarrow} C(W \times X \times Y, Z)) \\
&\overset{adj_{W,X\times Y,Z}}{\longleftarrow} C(W, C(X \times Y, Z))
\end{aligned}$$

上は W によって自然な同型なので米田から同相が言える． $\square$

定義 26. C を圏とし直積を持つとする. 関手 $\times Y : C \to C$ を

- Object $X \mapsto X \times Y$
- Morphism $\varphi \mapsto \varphi \times id_Y$

とする.
対象 Y, Z について冪対象 Z^Y とは関手 $\times Y$ から Z への普遍射として定義する. つまり

1. $Z^Y \in Ob(C)$ と $eval : \times Y(Z^Y) = Z^Y \times Y \to Z$ への組みであって
2. 任意の $X \in Ob(X)$ と $f : \times Y(X) = X \times Y \to Z$ について, ある $\lambda f : X \to Y^Z$ で $f = eval \circ (\lambda \times id_Y) : X \times Y \to Z$ となるものが一つ存在する.

λf を f のカリー化 (転置) という.
この時関手 $Z \to Z^Y$ は $\times Y$ の右随伴であり

$$hom_C(X \times Y, Z) \cong hom(X, X^Y)$$

で与えられる.

定義 27. 圏は cartesian closed とは次の三つを満たすこととする.

1. 終対象を持つ.
2. 二つの対象 X, Y について直積 $X \times Y$ が存在する.
3. Y, Z の冪対象 Z^Y が存在する.

系 **28.** [Str, Prop2. １ 2] **CG** の圏は cartesian closed である.

1. 終対象は一点集合.
2. 二つの対象 X, Y について, 直積 $X \times Y$ を当てる.
3. Y, Z の冪対象 $Z^Y := C(Y, Z)$ が存在し, 以下が成り立つ.

$$hom(X \times Y, Z) \cong hom(X, Z^Y) = hom(X, C(Y, Z))$$

命題 29. [Str, Prop2. １ 3] X が compact Hausdorff, Y が距離空間ならば $C(X, Y)$ は

$$d(f, g) = \max_{x \in X} d_Y\{f(x), g(x)\}$$

という距離空間となる.

Proof. $d(f, g)$ が Well-defined なのは (つまり X 内で最大値を持つことは), X が compact Hausdorff

空間であるからわかる.

今 $C(X,Y)$ には二つの位相がある.(ξ や χ を X の開集合系とする.)

1. ξ を $C(X,Y)$ の compact 開位相とした $k\xi$.

2. 距離 $d(f,g)$ に関する距離位相 χ.

よって $k\xi=\chi$ を示せば良い. $\chi=k\chi$ なので $\xi\subset\chi$ かつ $\chi\subset\xi$ を示せば良い. (実は $\xi=\chi=k\xi$ がわかる.)

$\xi\subset\chi$ について. $u:K\to X$ を compact Hausdorff 空間からの連続写像, $U\subset Y$ 開集合とする. $W(u,K,U)=\{f:X\to Y$ 連続 $|f\circ u(K)\subset U\}$ が χ の元であることを示せば良い.

$$h:K\to\mathbb{R}\quad a\to d(f\circ u(a),U^c)$$

は連続な正値連続関数より $h(K)>\epsilon>0$ なる ϵ が取れる.

$$B(\epsilon/3,f):=\{g\in C(X,Y)|d(f,g)<\epsilon/3\}$$

とすると, $B(\epsilon/3,f)\subset W(u,K,U)$ が言える.

$\chi\subset k\xi$ について. $B(\epsilon,f)\subset C(X,Y)$ をとる. すると $\cup_{y\in Y}f^{-1}B(\epsilon/3,y)$ は X の開被覆になる.[1] X は compact なので $X=\cup_{i=1}^{n}f^{-1}B(\epsilon/3,y_i)$ とできる.

$$K_i:=f^{-1}\overline{B(\epsilon/3,y_i)}\quad U_i:=B(\epsilon/2,y_i)$$

とする. K_i は compact かつ $f(K_i)\subset U_i$ である.

$N:=\cap_{i=1}^{n}W(f,K_i,U_i)$ とする. $N\subset B(\epsilon,f)$ を示せば良い. これは $g\in N,x\in X$ について $d(f(x),g(x))<\epsilon$ を示せば良い. $x\in K_i$ なる i をとると $f(x),g(x)\in B(y_i,\epsilon/3)$ であるので言えた. □

命題 30. [Str, Prop2.14] X を CG とする. X が弱 hausdorff であることは $\Delta_X:=\{(x,x)|x\in X\}\subset X\times X$ が $X\times X$ で閉集合であることと同値. (つまり Δ_X が普通の直積 $X\times_0 X$ の k-closed であることと同値)

Proof. [1]X を Weak Hausdorff とする. 任意の compact Hausdorff 空間からの連続写像 $u=v\times w:K\to X\times X$ について $u^{-1}\Delta_X:=\{a\in K|v(a)=w(a)\}$ が K の閉集合であることを示せば良い.

$a\notin u^{-1}\Delta_X$ とする. $a\in Z\subset K\setminus u^{-1}\Delta_X$ となる K の開集合 Z の存在を示す. $v(a)\neq w(a)$ であり, X は T_1 なので

$$U:=\{b\in K|v(b)\neq w(a)\}=v^{-1}(X\setminus\{w(a)\})$$

は K の開集合で a を含む. K は compact Hausdorff 空間であるので $a\in V\subset\overline{V}\subset U$ となる開集合 V が存在する. $v:K\to X$ は連続でX は弱 Hausdorffなので, $v(\overline{V})\subset X$ は閉集合である U の

[1] $B(\epsilon,y):=\{z\in Y|d_Y(y,z)<\epsilon\}$ とする.

定め方から $w(a) \neq v(\overline{V})$．よって $Z := w^{-1}(X \setminus v(\overline{V}))$ とすると

$$a \in w^{-1}(X \setminus v(\overline{V})) = Z$$

であり，Z は閉集合である．そして $Z \subset K \setminus u^{-1}\Delta_X$ でありいえた．

[2]$\Delta_X := \{(x,x)|x \in X\} \subset X \times X$ が $X \times X$ で閉集合であるとする．任意の compact Hausdorff 空間からの連続写像 $u : K \to X$ について $u(K)$ が閉集合であることを示せば良い．X は CGなので任意の compact Hausdorff 空間からの連続写像 $v : L \to X$ について $v^{-1}(u(K)) \subset L$ が閉集合であることを示せば良い．

$$M := \{(a,b) \in K \times L | u(a) = v(b)\} = K \times_X L \subset K \times L$$

と定める．すると定義から $M = (u \times v)^{-1}\Delta_X$ であり，$u \times v : K \times L \to X \times X$ は連続写像なので M は閉集合である．

$$v^{-1}(u(K)) = pr_L(M)$$

であり，射影 $pr_L : K \times L \to L$ は閉写像であるので言えた． □

系 31. [Str, Cor2.15] X, Y を CGWH とする．$f, g : X \to Y$ 連続ならば，

$$ker(f,g) = \{x \in X | f(x) = g(x)\} = (f,g)^{-1}\Delta_Y$$

は閉集合である．

系 32. [Str, Cor2.16] X_i が CGWH, I を添字集合とするとき $\prod_i X_i$ は CGWH.

Proof. CG は明らか．WH を示す．30 より Δ_X が $\prod_i X_i$ の位相で closed を示せば良い．しかしこれは $p_i : X \to X_i$ として

$$\Delta_X = \cap_i (p_i \times p_i)^{-1}\Delta_{X_i}$$

より明らかである． □

命題 33. [Str, Prop2.17] X, Y を CG とする．$\sim$ を X 上の同値関係とする．$X \times Y$ 上の同値関係を

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \sim x_2 \text{ and } y_1 = y_2$$

で入れるとき，自然な全単射

$$(X \times Y)/\sim \to (X/\sim) \times Y$$

は同相である．

Proof. $q : X \to X/\sim$, $q' : X \times Y \to (X \times Y)/\sim$ を商写像とする．すると $q \times 1 : X \times Y \to (X/\sim$

$) \times Y$ によって Well-defined な連続写像

$$\overline{q \times 1} : (X \times Y)/\sim \to (X/\sim) \times Y$$

を得る.

一方 25 から $q' : X \times Y \to (X \times Y)/\sim$ の adjoint $X \to C(Y, (X \times Y)/\sim)$ を得る. これより $q^\sharp : X/\sim \to C(Y, (X \times Y)/\sim)$ を得る. これの adjoint をとって

$$(X/\sim) \times Y \to (X \times Y)/\sim$$

となる連続写像を得る. これらが同相写像を与える. □

命題 34. [Str, Prop 2.20] $f : W \to X$, $g : Y \to Z$ を CG 間の商写像とする時 $f \times g : W \times Y \to X \times Z$ も商写像である.

Proof. $f : W \to X$ を商写像とする時, $w \sim w'$ を $f(w) = f(w')$ として定めれば, 位相空間として $X \cong W/\sim$ となる. よって

$$f \times g = (id_X \times g) \circ (f \times id_Y) : W \times Y \to X \times Y \to X \times Z$$

は 33 より連続写像である. □

系 35. [Str, Cor2.21] X を CG, $\sim$ を X 上の同値関係とする. $X/\sim$ が WH であることは,

$$R := \{(x, y) | x \sim y\} \subset X \times X$$

としたとき R が $X \times X$ 上の閉集合であることと同値. (つまり X の通常の積位相で k-closed であることと同値.)

Proof. $X/\sim$ が WH であることは,

$$\Delta_{X/\sim} \subset (X/\sim) \times (X/\sim)$$

が閉集合であることと同値. ここで $\pi : X \to X/\sim$ を商写像として

$$\pi \times \pi : X \times X \to (X/\sim) \times (X/\sim)$$

とおくと 34 から商写像である. よって $\Delta_{X/\sim}$ が閉集合であることは

$$R = (\pi \times \pi)^{-1} \Delta_{X/\sim}$$

が閉集合であることと同値である. □

以下 $\sim$ を X 上の同値関係とした時

$$R_\sim = \{(x,y) | x \sim y\} \subset X \times X$$

で定める.

命題 36. [Str, Prop2.22] X を CG とする.

$$\mathcal{R} := \{\sim | X \text{ 上の同値関係で } R_\sim \text{ が } X \times X \text{ 閉 }\}$$

とおき $x \sim_{\min} y$ を $(x,y) \in \cap_{\sim \in \mathcal{R}} R_\sim$ で定める. このとき $\sim_{\min}$ は X の同値関係であり, $X/\sim_{\min}$ は CGWH となる.
さらに

$$h : \mathbf{CG} \to \mathbf{CGWH}$$

を $h(X) := X/\sim_{\min}$ で定めれば, これは包含関手の左随伴射であり

$$hom_{\mathbf{CGWH}}(h(X), Y) \cong hom_{\mathbf{CG}}(X, Y)$$

となる. つまり任意の CGWH 空間 Y への連続写像は $h(X)$ を経由する

Proof. [1]$\sim \in \mathcal{R}$ について次の三つが成り立つ.

1. $(x,x) \in R_\sim$
2. $(x,y) \in R_\sim$ ならば $(y,x) \in R_\sim$
3. $(x,y) \in R_\sim$ かつ $(y,z) \in R_\sim$ ならば $(x,z) \in R_\sim$

以上より $\sim_{\min}$ を

$$x \sim_{\min} y \Leftrightarrow (x,y) \cap_{\sim \in \mathcal{R}} R_\sim$$

で入れればこれは明らかに同値関係になる. そして $R_{\sim_{\min}}$ は $X \times X$ の閉集合なので $h(X) = X/\sim_{\min}$ は WH である.

[2]CGWH 空間 Y への連続写像 $f : X \to Y$ を考える.

$$R := \{(x,x') \in X \times X | f(x) = f(x')\} = (f \times f)^{-1}\Delta_Y$$

とおくとこれは X の同値関係を定める. よって $R_{\sim_{\min}} \subset R$ であることから $hX \to Y$ を誘導し唯一性もわかる. □

系 37. [Str, Cor2.23, Prop2.24] **CGWH** の圏は次の性質を満たす.

1. 完備かつ余完備.
2. cartesian closed.

CGWH の圏は局所 compact Hausdorff 空間も含む．よって多様体は含まれる．次の節で CWcomplex も含むことを示す．

注意 38. 一般に圏論 C に直積とイコライザー $(ker(f,g))$ をもてば完備である．これは $F:J\to C$ について

$$s,t:\prod_{i\in Ob(I)}F(i)\to\prod_{f\in Mor(C)}F(cod(f))\quad s=(F(f)\circ\pi_{dom(f)})_{f\in Mor(C)}\quad t=(\pi_{cod(f)})_{\in Mor(C)}$$

で定めれば，このイコライザーが極限を与える．

例えば $f:Y\to X,\ g:Z\to X$ についてその直積 $Y\times_X Z$ は

$$s,t:\prod_{i\in Ob(I)}F(i)=X\times Y\times Z\to X\times X=\prod_{f\in Mor(C)}F(cod(f))$$

$$s(x,y,z)=(f(y),g(z))\quad t(x,y,z)=(x,x)$$

であるのでこれらのイコライザーは

$$ker(s,t)=\{(x,y,z)\in X\times Y\times Z|(f(y),g(z))=(x,x)\}$$

である．これは $Y\times_X Z=\{(y,z)\in Y\times Z|f(y)=g(z)\}$ に等しい．

Proof. [1] 完備なること．より直積 $\prod_{i\in I}X_i$ は CGWH である．そして $f,g:X\to Y$ についてイコライザー $ker(f,g)\subset X$ は 31 は閉集合であり CGWH である．極限は通常の積位相 $\prod_{i\in I}X_i$ の k 化したやつの部分空間である.(集合としては lim と同じ)

[2]. 余完備なること．15 より余直積 $\sqcup_{i\in I}X_i$ は CG である．よって $h(\sqcup_{i\in I}X_i)$ は 14 から CG であり WH である．そして $f,g:X\to Y$ についてコイコライザー

$$cok(f,g)=h(Y\sqcup Y/\sim)$$

であったので CGWH となる．特に余極限は通常の colim の h 化である．

[3]cartesian closed なること．終対象は一点集合，直積の存在は [1] よりよってあとは冪対象の存在である．

これは Y,Z を CGWH について $C(Y,Z)$ が CGWH を示せば良い．WH のみ非自明である．$\Delta_{C(Y,Z)}\subset C(Y,Z)\times C(Y,Z)$ が閉集合であることを示せば良い．それは $ev_y:C(Y,Z)\to Y$ を $f\mapsto f(y)$ で定めると，24 から連続である．すると

$$\Delta_{C(Y,Z)}=\cap_{y\in Y}(ev_y\times ev_y)^{-1}\Delta_Z$$

であるので閉集合である． □

1.2 CW 複体

以下は nlabhttps://ncatlab.org/nlab/show/CW+complex を参考にした．

定義 39. 1. D^n を $\mathbb{R}^n$ の閉単位球 (closed unit ball), つまり $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n | ||x|| \leq 1\}$ とする. 位相は $\mathbb{R}^n$ の部分位相を入れる.

2. S^{n-1} を $\mathbb{R}^n$ の単位球面 (closed unit ball), つまり $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | ||x|| = 1\}$ とする. 位相は $\mathbb{R}^n$ の部分位相を入れる.

3. $i_n : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ を包含連続写像とする.

また $S^{-1} = \varnothing$, $S^0 := * \sqcup *$ と約束する.

定義 40 (single cell attachment)**.** X を位相空間とする. X の n-cell attachment とは, ある連続写像 $\phi : S^{n-1} \to X$ に関する位相空間としての pushout $X \sqcup_\phi D^n$ とする.

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "\phi"'] \arrow[d, "i_n"'] & X \arrow[d] \\ D^n \arrow[r] & X \sqcup_\phi D^n \end{tikzcd}$$

例 41. $X = D^n$ かつ $\phi = i_n : S^{n-1} \to D^n$ の時, $X \sqcup_\phi D^n = S^n$ となる.

例 42. $\phi : S^{-1} = \varnothing \to X$ の時, $X \sqcup_\phi D^0 = X \sqcup *$ となる.

定義 43 (attachment many cells at once)**.** I を集合とし, $\{\phi_i : S^{n_i-1} \to X\}_{i\in I}$ を連続写像の族とする.
$\sqcup_{i\in I}\phi_i : \sqcup_{i\in I}S^{n_i-1} \to X$ と $\sqcup_{i\in I}i_{n_i} : \sqcup_{i\in I}S^{n_i-1} \to \sqcup_{i\in I}D^{n_i}$ に関する位相空間としての pushout を, "attachment many cells at once" といい $X \sqcup_{(\phi_i)_{i\in I}} D^{n_i}$ と書く.

$$\begin{tikzcd} \sqcup_{i\in I}S^{n_i-1} \arrow[r, "\sqcup_{i\in I}\phi_i"'] \arrow[d, "\sqcup_{i\in I}i_{n_i}"'] & X \arrow[d] \\ \sqcup_{i\in I}D^{n_i} \arrow[r] & X \sqcup_{(\phi_i)_{i\in I}} D^{n_i} \end{tikzcd}$$

定義 44 (CW 複体)**.** X が CW 複体であるとは, 位相空間の列

$$\varnothing = X_{-1} \hookrightarrow X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \cdots$$

があって次を満たすものである.

1. $X_k \hookrightarrow X_{k+1}$ は, ある $\sqcup_{i\in I}\phi_i : \sqcup_{i\in I}S^k \to X_k$ があって, $X_{k+1} = X_k \sqcup_{(\phi_i)_{i\in I}} D^{k+1}$ となる.

$$\begin{tikzcd} \sqcup_{i\in I}S^{k} \arrow[r, "\sqcup_{i\in I}\phi_i"'] \arrow[d, "\sqcup_{i\in I}i_{k}"'] & X_k \arrow[d] \\ \sqcup_{i\in I}D^{k+1} \arrow[r] & X_{k+1} \end{tikzcd}$$

2. $X = \mathrm{colim}_{k\in\mathbb{N}} X_k = \cup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ である.

有限 CW 複体とはある有限の n_0 があって $X = X_{n_0}$ となることとする. また X_n を n-skelton という.
CW 複体間の cellular map$f : X \to Y$ とは $f : X \to Y$ 連続写像で任意の $n \in \mathbb{N}$ で $f(X_n) \subset Y_n$ となるものとする.

命題 45. X を CW 複体とする.

1. X は paracompact ハウスドルフ.
2. X は CG. 特に X は CGWH.

実は正規であることもわかっている.

Proof. (sketch)
(1). n による帰納法. $n = -1$ なら $X_{-1} = \varnothing$ より. X_{n-1} がそうだとすると, $h : \sqcup S^{n-1} \hookrightarrow \sqcup D^n$ は包含写像で $h(\sqcup S^{n-1}) \subset \sqcup D^n$ は閉集合なので, $X_{n-1} \to X_n$ も包含写像で像は閉集合 (closed map) となる. paracompact Hausdorff 空間の closed map での pushout は paracompact Hausdorff である[2]ので, X_n もそうなる.
(2) X は D^n という CG 空間の colim でかけているため. □

1.3 CG, CGWH の圏論的性質

以下は [Fra] を参考にした

CG は完備かつ余完備でカルテシアン閉である.

- lim については位相の lim をとった後に k-closed なものを付け加える.
- colim はそのまま.
- $Y^Z = C(Y, Z)$ で $C(Y, Z)$ には compact open topology の k 化を入れる.

また **Top** $\to$ **CG** を $X \mapsto kX$ と言う k-closed な位相を付け足したものにする関手とするとこれは右随伴関手である.

CGWH は完備かつ余完備でカルテシアン閉である.

- lim については CG の lim とする.
- colim は CG の colim を取った後に h 化する (閉な同値関係で一番小さいものでわる).
- $Y^Z = C(Y, Z)$ で $C(Y, Z)$ には compact open topology の k 化を入れる.

[2] https://ncatlab.org/nlab/show/CW-complexes+are+paracompact+Hausdorff+spaces

また $\mathbf{CG} \to \mathbf{CGWH}$ を $X \mapsto hX$ という h 化する関手とするとこれは左随伴関手である.

なぜこれらがトポロジーで重要かというと次のクラスになっているからである.

定義 46. 圏 C が"convenirnt category of topological space"とは次の条件を満たす **Top** の部分圏とする.

1. CW-complex は C の Object.
2. 完備かつ余完備.
3. カルテシアン閉.

上からすぐに次がわかる.

定理 47. **CG** や **CGWH** は convenirnt category of topological space.

1.4 CGWH 空間の余極限の補足

補題 48. I を集合とし, $i \in I$ について X_i 位相空間とする. $X = \sqcup X_i$ とするとき $kX = \sqcup kX_i$. 特に k-closed 集合の直和は k-closed.

Proof. $\pi_i : X_i \to X$ は連続なので $\pi_i : kX_i \to kX$ も連続である. 示すことは $V \subset X$ について V が k-closed であることは各々 $\pi_i^{-1}(V) \subset X_i$ が k-closed であることと同値であることである.

$V \subset X$ が k-closed とする. すると, $\pi_i : kX_i \to kX$ も連続より, $\pi_i^{-1}V \subset X_i$ も k-closed である.

逆に $\pi^{-1}(V) \subset X_i$ が k-closed であるとする. $u : K \to X$ を compact Hausdorff 空間からの連続写像とする. $u(K) \subset X = \cup_{i \in I} \pi_i(X_i)$ より $u(K)$ は compact なので, $u(K) \subset \cup_{i=1}^n \pi_i(X_i)$ である. よってこれより

$$u^{-1}(V) = \cup_{i=1}^n \{k \in K | u(k) \in \pi_i(\pi^{-1}(V_i))\}$$

今 $\pi_i^{-1} : \pi_i(X_i) \to X_i$ を $(x_i, i) \mapsto x_i$ で定めると同相写像になる. よって

$$\{k \in K | u(k) \in \pi_i(\pi^{-1}(V_i))\} = (\pi_i^{-1} \circ u)(k) \in \pi^{-1}(V_i)$$

$\pi_i^{-1} \circ u : K \to X_i$ は連続なので, $\{k \in K | u(k) \in \pi_i(\pi^{-1}(V_i))\}$ は k-closed となり $u^{-1}(V)$ も closed となる, □

補題 49. [Str, Lemma 3.3] I small filtered category とし, $X : I \to \mathbf{CGWH}$ を関手とする. さらに $f : i \to j$ について $Xf : X_i \to X_j$ は連続な単射で $Xf(X_i) \subset X_j$ は X_j で閉集合であるとする. この時 $\mathrm{colim}_{i \in I} X_i$ は CGWH である.

Proof. $i, j \in I$ について $f_{ik} : i \to k, f_{jk} j \to k$ となる k を取り

$$R_{ij} := X_i \times_{X_k} X_j := \{(x_i, x_j) | f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)\}$$

と定める．これは R_{ij} は k の取り方によらない．(なぜならば$Xf : X_i \to X_j$ は単射だから $k \to k'$ となる射がある場合に同じことが示せる．また $R_{ii} = \Delta_{X_i}$ となる) また

$$R_{ij} = \{(x_i, x_j) | f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)\} = (f_{ik} \times f_j)^{-1} \Delta_{X_k}$$

であり X_k は CGWH なので 30 より $\Delta_{X_k} \subset X_k \times X_k$ は k-closed である． これより 11 から，$f_{ik} \times f_j : k(X_i \times X_j) \to k(X_k \times X_k)$ は連続なので R_{ij} は $X_i \times X_j$ の k-closed 集合である．

$Y := \sqcup_{i \in Ob(I)} X_i$ とおき $\eta_i : X_i \to Y$ を包含写像とする．すると有限極限とフィルター余極限の交換から $Y \times Y$ と $\sqcup_{i,j}(X_i \times X_j)$ は同相である．よって

$$R := \sqcup_{i,j \in I} R_{ij} \subset \sqcup_{i,j}(X_i \times X_j) \cong Y \times Y$$

とすると R_{ij} は k-closed であるので 48 から R は k-closed である．

$x \sim y$ という 2 項関係を，$(x, y) \in R$ であることとして定める．すると $\sim$ は同値関係で

$$\mathrm{colim}_{i \in I} X_i \cong Y / \sim$$

となる．同値関係になることは $R_{ij} := \{(x_i, x_j) | f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)\}$ であることを考えると

1. $x \sim x$ は $R_{ii} = X_i \times X_i$ であるので．
2. $x \sim y$ ならば $R_{ij} \cong R_{ji}$ を $(x_i, x_j) \to (x_j, x_i)$ であるので $y \sim x$.
3. $x \sim y, y \sim z$ かつ $(x, y) \in R_{ij}, (y, z) \in R_{jk}$ について，$i, j, k \to l$ なる l をとると言える．

さらに $\mathrm{colim}_{i \in I} X_i$ の構成方法は Y に同値関係 $(x_i, i) \sim_c (x_j, j)$ を $i, j \to k$ を取り $f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)$ として入れるので，$\mathrm{colim}_{i \in I} X_i$ と $Y / \sim$ は同相である．

14, 15 から $Y / \sim$ は CG である．WH に関しては $R \subset Y \times Y$ が k-closed なので 35 より言える． □

References

[Fra] Martin Frankland *Math 527 - Homotopy Theory Additional notes* https://uregina.ca/~franklam/Math527/Math527_0204.pdf

[Str] N. P. Strickland *THE CATEGORY OF CGWH SPACES* https://ncatlab.org/nlab/files/StricklandCGHWSpaces.pdf

[Iwa22] 岩井雅崇　集合と位相まとめノート https://x.gd/aDQt1