チャーン類の不等式と構造定理

岩井 雅崇　(阪大理)*

1 イントロダクション

相加相乗不等式を考えよう. この不等式を厳密にいうと次のようになる.

1. (不等式) 任意の正の数 a, b について $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ である.
2. (等号成立条件) 上の不等式の等号が成立するとき, $a = b$ である.

このように不等式の存在には必ず等号成立条件がつきものである.

第 2 Chern 類の不等式に関しても同じことが言えないだろうか? より厳密にいうと, 今回次のことをお話ししたい.

1. (Chern 類の不等式) 複素多様体 X に条件をつければ, 定数 A があって, 不等式 $c_2(X) - Ac_1(X)^2 \geq 0$ が成り立つ?
2. (構造定理) 上の不等式の等号が成立するとき, X の構造は決定できるか?

2 宮岡-Yau 不等式と構造定理

以下しばらく X を n 次元射影複素多様体とする. つまり X は $\mathbb{CP}^N$ の閉部分複素多様体と思って良い. また Ω_X^1 を正則余接ベクトル束とし, 標準束を $K_X := \det \Omega_X^1$ で定める. これによって, X の Chern 類は

$$c_1(X) := -c_1(\Omega_X^1) \quad c_1(X)^2 = c_1(\Omega_X^1)^2 \quad c_2(X) := c_2(\Omega_X^1)$$

と書くことができる.

Chern 類の不等式で一番有名なのは次の"宮岡-Yau 不等式"であろう.

定理 2.1. [Miy77][Yau77] K_X が豊富 (曲率正) であるとき, 次の"宮岡-Yau 不等式"

$$\left(c_2(X) - \frac{n}{2(n+1)}c_1(X)^2\right)[K_X]^{n-2} \geq 0 \tag{1}$$

が成り立つ. また (1) の等号が成り立つとき, X の普遍被覆は $\mathbb{C}^n$ の単位球となる.

ここで直線束の正値性について復習しておく.

定義 2.2. [Dem12, Section 6] L を直線束とする.

1. ある滑らかな計量 h があってその Chern 曲率が $\sqrt{-1}\Theta_{L,h} > 0$ を満たすとき, L は

* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科 数学専攻
e-mail: masataka@math.sci.osaka-u.ac.jp,masataka.math@gmail.com

豊富 (曲率正) であるという.

2. 任意の複素 1 次元曲線 $C \subset X$ について $L \cdot C \geq 0$ となるとき, L は**ネフ**であるという.

関係としては次が成り立つ.

$$\boxed{\text{豊富 (曲率正)}} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{滑らかな計量 } h \text{ で } \sqrt{-1}\Theta_{L,h} \geq 0 \\ \text{(曲率半正)}\end{array}} \Longrightarrow \boxed{\text{ネフ}}$$

次に K_X の曲率が 0 の場合を考える. これも [Yau77] によってわかっている.

定理 2.3. [Yau77] K_X の曲率は 0, つまり $c_1(K_X) = 0$ であるとする. このとき任意の豊富直線束 H について

$$c_2(X)H^{n-2} \geq 0 \tag{2}$$

が成り立つ. また (2) の等号が成り立つとき, X はトーラス T からの有限被覆 $T \to X$ を持つ.

定理 2.1 や定理 2.3 の証明は以下のとおりである. K_X が豊富や曲率 0 の場合は [Yau77] から Kähler-Einstein 計量が存在する. よって次の Chen-荻上の定理 [CO75] を示せば良い.

定理 2.4. [CO75] X が Kähler-Einstein 計量 ω を持つならば,

$$\left(c_2(X) - \frac{n}{2(n+1)} c_1(X)^2 \right) [\omega]^{n-2} \geq 0 \tag{3}$$

を満たす. そしてその等号が成立するならば, X の普遍被覆は $\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n$ の単位球の 3 つに限られる.

証明 [Kob14, Section 4] にも証明がある. 今回は [His24, Section 3] の証明を拝借した. normalized Riemann curvature tensor や normalized Ricci tensor を

$$\widetilde{\mathrm{Rm}}(\omega) := R_{ij\overline{k\ell}} - \frac{R(\omega)}{n(n+1)} \left(g_{ij} g_{\overline{k\ell}} + g_{i\bar{\ell}} g_{j\bar{k}} \right) \quad \widetilde{\mathrm{Ric}}(\omega) := \mathrm{Ric}(\omega) - \frac{R(\omega)}{n}\omega.$$

とする. ここで $R(\omega)$ はスカラー曲率である. [CO75] によって

$$\begin{aligned} &\left\{ 2(n+1)c_2(X) - nc_1(X)^2 \right\} [\omega]^{n-2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2 n(n-1)} \int_X \left\{ (n+1) \left| \widetilde{\mathrm{Rm}}(\omega) \right|^2 - (n+2) \left| \widetilde{\mathrm{Ric}}(\omega) \right|^2 \right\} \omega^n. \end{aligned} \tag{4}$$

がわかっている. よって ω が Kähler-Einstein 計量ならば,

$$\left| \widetilde{\mathrm{Ric}}(\omega) \right|^2 = |\mathrm{Ric}(\omega)|^2 - \frac{R(\omega)^2}{n} \leq \left| \mathrm{Ric}(\omega) - \frac{R(\omega)}{n}\omega \right|^2 = 0$$

であるので, (4) に代入して

$$\left\{2(n+1)c_2(X) - nc_1(X)^2\right\}[\omega]^{n-2} \geq \frac{1}{4\pi^2 n(n-1)} \int_X (n+1)\left|\widetilde{\mathrm{Rm}}(\omega)\right|^2 \geq 0$$

がわかる. (3) の等号が成立する場合は $\widetilde{\mathrm{Rm}}(\omega) = 0$ となる. つまり ω の正則断面曲率は一定である. 古典的な結果 [*1] によって, X の普遍被覆は $\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n$ の単位球の 3 つに限られる. □

以上をまとめると次のとおりである.

K_X が豊富や曲率 0 だと, (1) や (2) のような Chern 類の不等式が存在し, その等号が成立するとき, X の構造が決定できる.

3 宮岡の不等式

3.1 宮岡の不等式と構造定理

では K_X の曲率半正の場合はどうなるのだろうか? 定義 2.2 から K_X の曲率半正ならばネフなので, 自然と次の問題が考えられる.

問題 3.1. K_X がネフの場合の「Chern 類の不等式と構造定理」はどうなるだろうか?

この場合の Chern 類の不等式はもうすでにわかっている.

定理 3.2. [Miy87] K_X がネフであるとき, 任意の豊富直線束 H について以下の”宮岡の不等式”が成り立つ.

$$\left(c_2(X) - \frac{1}{3}c_1(X)^2\right) H^{n-2} \geq 0 \tag{5}$$

では等号成立した場合の X の構造はどうなるだろうか? これに答えたのが我々の論文 [IMM24] の主定理である.

定理 3.3. [IMM24] K_X がネフであり豊富な直線束 H について

$$\left(c_2(X) - \frac{1}{3}c_1(X)^2\right) H^{n-2} = 0 \tag{6}$$

が成り立つとき, ある有限被覆 $X' \to X$ があって, X' は次の 3 つに限られる.

1. ($c_1(X) = 0$ のとき) X' はトーラス.
2. ($c_1(X) \neq 0$ かつ $c_1(X)^2 = 0$ のとき) 沈め込み $X' \to C$ があって, ファイバーはトーラスかつ C は種数 2 以上のリーマン面である.
3. ($c_1(X)^2 \neq 0$ のとき) X' は $A \times S$ と同型である. ここで A は $n-2$ 次元トーラス

[*1] かの有名な微分幾何の本”Kobayashi-Nomizu”によると Hawley と Igusa が独立に示したとのこと.

かつ S は複素曲面でその普遍被覆は $\mathbb{C}^2$ の単位球である．

証明はかなりテクニカルである．[Yau77] や [CO75] のような微分幾何学的なアプローチは用いず, [PRT22] の葉層理論を使ったり, Campana の Special 多様体の理論などの理論を用いる．私はこういったテクニカルな論文は好きだが, ここで証明を書いても退屈しそうなので, 今回は証明を書かない．

3.2 極小モデル理論との関連

ここで双有理幾何学・極小モデル理論のお話をする．なおこの節を書くにあたって , 藤野先生のサーベイ [Fuj22] や權業先生のサーベイ [Yos16] を参考にした．

極小モデル理論には以下の二つの大予想がある

予想 3.4 (非消滅予想)**.** K_X が擬有効ならば, ある $m \in \mathbb{N}$ があって $H^0(X, K_X^{\otimes m}) \neq 0$.

予想 3.5 (アバンダンス予想)**.** K_X が擬有効ならば $\kappa(K_X) = \nu(K_X)$. 特に K_X がネフならば半豊富である．

用語について説明すると, 以下のとおりである．

定義 3.6. [Dem12, Section 6][Yos16] L を直線束とする．

1. $\kappa(L)$ を以下で定義する．
$$\kappa(L) := \max\left\{k \in \mathbb{N} |\limsup_{m\to\infty} \frac{\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, L^{\otimes m})}{m^k} > 0\right\}$$
ただし右の集合が空の場合は $\kappa(L) := -\infty$ と定義する．
2. $\nu(L)$ を以下で定義する．
$$\nu(L) := \max\left\{k \in \mathbb{N} | \text{ 豊富直線束 } A \text{ があって} \limsup_{m\to\infty} \frac{\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, L^{\otimes m} \otimes A)}{m^k} > 0\right\}$$
とおく．ただし右の集合が空の場合は $\nu(L) := -\infty$ と定義する．なお L がネフの場合は $\nu(L) = \max\{k \in \mathbb{N} | c_1(L)^k \neq 0\}$ である．
3. L が**巨大**とは, $\kappa(L) = \dim X$ となること．
4. L が**擬有効**とは巨大直線束の極限でかけること．つまり任意の豊富直線束 A と $m \in \mathbb{N}$ について $L^{\otimes m} \otimes A$ が巨大となること．
5. L が**半豊富**とは, ある $m \in \mathbb{N}$ があって $L^{\otimes m}$ が大域的に生成されること．つまり任意の $x \in X$ についてある正則切断 $s \in H^0(X, L^{\otimes m})$ があって $s(x) \neq 0$ となること．

図にすると以下のとおりである．

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\text{豊富 (曲率正)}\\ \sqrt{-1}\Theta_{L,h} > 0\end{array}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{半豊富}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\begin{array}{c}\text{曲率半正}\\ \sqrt{-1}\Theta_{L,h} \geq 0\end{array}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{ネフ}} \arrow[d, Rightarrow] \\
\boxed{\text{ネフかつ巨大}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{巨大}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{ある } m \text{ で } H^0(X, L^{\otimes m}) \neq 0.} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{擬有効}}
\end{tikzcd}
$$

どの矢印も一般の直線束 L については逆は成り立たない．

アバンダンス予想から非消滅定理が従う．なぜなら K_X が擬有効ならば, $\nu(K_X) \geq 0$ が常に言えているからである．また [Has18] により, 滑らかな射影多様体に関する非消滅定理が解けると極小モデルの存在がわかる．つまり予想 3.4 や 3.5 は極めて難しいことがわかる．予想 3.4 や 3.5 は 3 次元以下では解決しているが, 4 次元以上では未解決である．

定理 3.3 の構造定理はアバンダンス予想 3.5 への応用がある．

系 3.7. [IMM24] K_X がネフかつ $\left(c_2(X) - \frac{1}{3}c_1(X)^2\right) H^{n-2} = 0$ ならば K_X は半豊富である．

特に「K_X がネフかつ $c_2(X)H^{n-2} = 0$ ならば K_X 半豊富」である．これは我々の前の研究 [IM22] の内容である．

3.3 特異点をつけた場合の宮岡の不等式.

定理 3.3 は特異点つけても成り立つ．ここで特異点に関して復習する．

定義 3.8. X を正規射影代数多様体とする．X が高々 **terminal (resp. canonical, Kawamata log terminal, log canonical) 特異点**を持つとは, ある特異点解消 $\pi : X' \to X$ と X' 上の例外因子 E_i があって

$$K_{X'} \sim_{\mathbb{Q}} \pi^* K_X + \sum_{i=1}^{l} a_i E_i$$

とかけるとき, 全ての a_i が > 0 (resp. $\geq 0, > -1, \geq -1$) を満たす．

定理 3.3 は KLT(Kawamata log terminal) にまで拡張できる．

定理 3.9. [IMM24] X を KLT 多様体 (KLT 特異点を持つ射影代数多様体) とする．K_X がネフならば, 豊富直線束 H について

$$\left(\widehat{c}_2(\Omega_X^{[1]}) - \frac{1}{3}c_1(\Omega_X^{[1]})^2\right) H^{n-2} \geq 0 \tag{7}$$

が成り立つ．さらに等号が成立するとき, quasi-étale cover(余次元 1 集合を除いて有限エタールな被覆)$X' \to X$ が存在して X' は滑らかである．よって X' は定理 3.3 の (1)-(3) の 3 つに限られる．

ここで「$\widehat{c}_2(\Omega_X^{[1]})$ とはなんぞや？」となる．これは"$\mathbb{Q}$-Chern 類"というもので次のように定義する．[*2]

X を KLT 多様体とする．[GKP16] から，$\mathrm{codim}(X \setminus X^\circ) \geq 3$ となる Zariski 開集合 $X^\circ \subset X$ で X° は商特異点のみを持つものがある．よって X° にはオービフォールドの構造 X°_{orb} が入る．また X_{reg} を非特異集合，$i : X_{\mathrm{reg}} \to X$ を包含写像として $\Omega_X^{[1]} := (i_* \Omega^1_{X_{\mathrm{reg}}})^{\vee\vee}$ と定める．[*3] すると $\Omega_X^{[1]}|_{X^\circ}$ はオービフォールド ベクトル束となるので，オービフォールド Chern 類 $\widehat{c}_2(\Omega_X^{[1]})$ が定義でき，直線束との交点数 $\widehat{c}_2(\Omega_X^{[1]})H^{n-2}$ が定義できる．これは $\mathrm{codim}(X \setminus X^\circ) \geq 3$ なので，X° の取り方によらなくなる．なお $\mathrm{codim}(X \setminus X_{\mathrm{reg}}) \geq 3$ ならば $\widehat{c}_2(\Omega_X^{[1]})$ は普通の chern 類 $c_2(X)$ と同じである．

実は宮岡-Yau 不等式などに関しても，Greb-Kebekus-Peternell-Taji によって KLT 多様体で成り立つことが知られている．

定理 3.10. [GKPT19][GKPT20] X が KLT 多様体で K_X がネフかつ巨大ならば

$$\left(\widehat{c}_2(\Omega_X^{[1]}) - \frac{n}{2(n+1)} c_1(\Omega_X^{[1]})^2\right) K_X^{n-2} \geq 0 \tag{8}$$

が成り立つ．また (8) の等号が成り立つとき，X の標準モデル X_{can} について quasi-étale cover $X' \to X_{can}$ が存在して X' は滑らかである．特に X' の普遍被覆は $\mathbb{C}^n$ の単位球である．

定理 3.11. [GKP16][LT18] X が KLT 多様体で $K_X \sim_{\mathbb{Q}} 0$ ならば，豊富直線束 H について

$$\widehat{c}_2(\Omega_X^{[1]}) H^{n-2} \geq 0 \tag{9}$$

が成り立つ．また (9) の等号が成り立つとき，quasi-étale cover $X' \to X_{can}$ が存在して X' はトーラスである．

3.4 コンパクト Kähler 多様体の宮岡の不等式

コンパクト Kähler 多様体でも宮岡の不等式は言える．

定理 3.12. [IM22][Iwa25] (X, ω) をコンパクト Kähler 多様体とする．K_X がネフ [*4] ならば，(X, ω) に依存した正の数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在して

$$\left(c_2(X) - \frac{1}{3} c_1(X)^2\right) (K_X + \varepsilon\omega)^{n-2} \geq 0 \tag{10}$$

が任意の $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ で成り立つ．そして (10) の等号がある正の数 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ で成り立

[*2] 詳しくは [GKPT19] 参照のこと．[IMM24] でも簡潔に書いた．

[*3] $\mathcal{E}^\vee := \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ である．

[*4] Kähler の場合は部分多様体がないこともあるので，ネフの定義は変わる．「任意の $\varepsilon > 0$ について，ある K_X の滑らかな計量 h_ε で $\sqrt{-1}\Theta_{K_X, h_\varepsilon} \geq -\varepsilon\omega$ となる」ことをネフの定義にする．

つとき, ある有限被覆 $X' \to X$ があって, X' は定理 3.3 の (1)-(3) の 3 つに限られる.

ただ今の所ちょっと気に入ってないのが"$(K_X + \varepsilon\omega)^{n-2}$"の部分である. この部分を"$\omega^{n-2}$"にできないのか?と思う ([Iwa25] 参照).[*5]

4 弱 Fano 多様体の Chern 類の不等式と構造定理

4.1 弱 Fano 多様体の宮岡-Yau 不等式.

今まで K_X が正値性を持つ場合をやってきた. 次は $-K_X$ が正値性を持つ場合, つまり (弱)Fano 多様体の場合を考える. この場合は宮岡-Yau 不等式は必ずしも成り立たない.

例 4.1. [GKP22, Example 7] 4 次元 Fano 多様体 $X = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^3}(3))$ を考えると, $c_1(X)^4 = 800$ かつ $c_2(X)c_1(X)^2 = 296$ なので, 宮岡-Yau 不等式は成り立たない.

ただ次のことはわかっている.

定理 4.2. [CO75][His24][Ou23] X を KLT 多様体とし次のどちらかを仮定する.

1. $-K_X$ はネフかつ巨大であり, X は一様 K 安定である.
2. $-K_X$ はネフだが巨大ではない.

このとき

$$\left(\widehat{c}_2(\Omega_X^{[1]}) - \frac{n}{2(n+1)}c_1(\Omega_X^{[1]})^2\right)[-K_X]^{n-2} \geq 0 \tag{11}$$

が成り立つ. また仮定 1 のもとで (11) の等号が成り立つとき, 反標準モデル X_{ac} は $\mathbb{CP}^n$ からの quasi-étale cover $\mathbb{CP}^n \to X_{ac}$ を持つ.

$-K_X$ が豊富の場合, 一様 K 安定から Kähler-Einstein 計量が存在するので, 定理 2.4 から宮岡-Yau 不等式がわかる. [His24] では twisted Kähler-Einstein 計量を用いて, 宮岡-Yau 不等式が成り立つことを示している. [*6]

証明 (1).[His24] では滑らかな多様体しか扱っていないので, 一応証明を付け加えておく. (ただし証明は全く同じである.) [Xu23, Theorem 1.1, 1.2] から反標準モデル X_{ac} が定義でき, X_{ac} は一様 K 安定である. よって X_{ac} は特異 Kähler-Einstein 計量を持つ ([DGP24, Remark 4] 参照). これより [DGP24, Theorem B] から, "canonical extension"

[*5] [Iwa25] はホームページで公開している. 正直あまり新しい結果と思えないので, 今の所論文にする気はない. この問題を解けたら論文にしてもいいかなとは思う.

[*6] 後に 2024 年 6 月に久本先生と議論したらもっと代数的な証明があることや等号成立に関してもわかった. ただ既存の大結果を組み合わせたらできたので, 久本先生の論文に付け加えてもらうことにした.

が $-K_{X_{ac}}$ 半安定である．以上より

$$\left(\widehat{c}_2(\Omega_X^{[1]}) - \frac{n}{2(n+1)}c_1(\Omega_X^{[1]})^2\right)[-K_X]^{n-2}$$
$$\underset{\text{[GKPT20]}}{\geq} \left(\widehat{c}_2(\Omega_{X_{ac}}^{[1]}) - \frac{n}{2(n+1)}c_1(\Omega_{X_{ac}}^{[1]})^2\right)[-K_{X_{ac}}]^{n-2} \underset{\text{BG 不等式}}{\geq} 0.$$

であるので (11) が言えた．等号成立の場合の主張は [GKP22] と同じである．

(2). [Ou23] から，$-K_X$ ネフならば任意の豊富直線束 H について

$$\widehat{c}_2(\Omega_X^{[1]})H^{n-2} \geq 0$$

である．(KLT の場合は [IMM24] 参照.) よって $H_\varepsilon = K_X + \varepsilon H$ として $\varepsilon \to 0$ とすれば，(11) が言える． □

ところで (2) の証明で出てきた「$-K_X$ ネフならば $\widehat{c}_2(X)H^{n-2} \geq 0$」に関して等号成立する場合はどうなるのだろうか．これも [IMM24] で KLT 多様体の場合にわかった．

定理 4.3. [IMM24] X が KLT 多様体で $-K_X$ がネフとする．ある豊富直線束 H で

$$\widehat{c}_2(\Omega_X^{[1]})H^{n-2} = 0$$

が成り立つとき，ある quasi-étale cover $X' \to X$ があって X' は次のどちらかである．

1. ($\nu(K_X) = 0$ のとき) X' はトーラス．
2. ($\nu(K_X) = 1$ のとき) X' はトーラス A 上の $\mathbb{CP}^1$ ファイバー束．

この構造定理は滑らかな射影多様体の場合は [Cao13] や [Ou23] でわかっていた．コンパクト Kähler の場合は [IM22] で示した．それから KLT 多様体の場合どうなるか考えていたが，[IMM24] で解決した．

4.2 弱 Fano 多様体の Chern 類の不等式.

定理 4.2 から弱 Fano 多様体が宮岡-Yau 不等式を満たすのには Kähler-Einstein 計量が必要だということがわかる．ではそうでないものについては何かわからないのだろうか? [IJL23] で次のことを示した．

定理 4.4. [IJL23] 任意の $n \in \mathbb{N}$ についてある定数 $b_n > 0$ があって，任意の n 次元 terminal 多様体 X で $-K_X$ がネフかつ巨大ならば次が成り立つ．

$$b_n c_2(X)(-K_X)^{n-2} \geq (-K_X)^n$$

この b_n は Birkar による BAB 予想の解決を使うので，具体的にはわかっていない．3 次元の場合は以下の予想がある．

予想 4.5. $b_3 = 3$

現状次がわかっている.

定理 4.6.
1. [IJL23] $b_3 < 2^4 \cdot 3^6 \cdot 7$.
2. [LL23][LL24] Picard 数 1 かつ $\mathbb{Q}$-factorial な Fano に限れば $b_3 = 3$

補足 4.7. なぜ $b_3 = 3$ と予想されているのか? それは予想 4.5 から $(-K_X)^3 \leq 72$ という予想が導かれるからである. 以下は Ching-Jui Lai 先生から教えてもらった.

X が terminal で $\dim X = 3$ とすると, Reid's Riemann-Roch から

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{24}c_2(X)(-K_X) + \frac{1}{24}\sum_{r \in R_X}\left(r - \frac{1}{r}\right)$$

である. ここで $R_X := \{r \in \mathbb{N} |$ ある $x \in X$ で $\frac{1}{r}(1, -1, b)$ 特異点を持つ $\}$ である. $-K_X$ がネフかつ巨大ならば $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$ であるので,

$$1 = \frac{1}{24}c_2(X)(-K_X) + \frac{1}{24}\sum_{r \in R_X}\left(r - \frac{1}{r}\right) \geq \frac{1}{24}c_2(X)(-K_X)$$

となる. もし予想が正しいならば上の式から $(-K_X)^3 \leq 72$ である.

ちなみに Riemann-Roch から X が滑らかな場合は $b_3 = 3$ がわかる.

5 まとめと問題集

今回の話をまとめると下の図のようになる.

	K_X 豊富	K_X 曲率 0	K_X ネフ	$-K_X$ 豊富 かつ 一様 K 安定	$-K_X$ ネフ
不等式	$c_2 - \frac{n}{2(n+1)}c_1^2 \geq 0$	$c_2 \geq 0$	$c_2 - \frac{1}{3}c_1^2 \geq 0$	$c_2 - \frac{n}{2(n+1)}c_1^2 \geq 0$	$c_2 \geq 0$
構造定理	普遍被覆が $\mathbb{C}^n$ の単位球	トーラス	(1) トーラス (2) 種数 2 以上のリーマン面のトーラスファイブレーション (3) トーラスと普遍被覆が $\mathbb{C}^2$ の単位球となる曲面の直積	$\mathbb{CP}^n$	(1) トーラス (2) トーラス上の $\mathbb{CP}^1$ 束

[IMM24] で私が気になっていた構造定理は得られたのでその部分は一件落着した. ただ $-K_X$ が正値性を持っている場合などはまだよくわかっていない. Chern 類の研究はしばらくはまだやるかな?という状況である. なので気になる問題をこの節で書いてみることにした.

5.1 Ω_X^1 がネフの場合のアバンダンス予想.

[IM22][IMM24] のきっかけになったのは次の予想である.

予想 5.1. Ω_X^1 がネフ (つまり $\mathbb{P}(\Omega_X^1)(1)$ がネフ) ならば, K_X は半豊富か?

[IM22] から $\nu(K_X) = 1$ の場合が解けた. なぜなら $\nu(K_X) = 1$ かつ Ω_X^1 ネフから

[DPS94] で $c_2 = 0$ がわかるからである.「アバンダンス予想 3.5 は難しいのになぜこの問題をするのか?」との声もあるが以下の定理があるからである.

定理 5.2. [WZ02] 双正則断面曲率が 0 以下ならば, K_X は半豊富である.

双正則断面曲率が 0 以下ならば Ω_X^1 がネフがすぐに従う. [WZ02] の証明だが, 古い微分幾何の結果のオンパレードで私には全くわからない. どうも"Ricci flat foliation"を作って, それが代数的可積分であることを示しているようで有る. [*7] この辺りは最近葉層理論が流行っているので, もっと簡単に示せないかなと思う.

ちなみに [IM22] から「Ω_X^1 がネフならば numerical flat な Q と generically ample な G で $\Omega_X^1 = Q \oplus G$ となる分解 (藤田分解)」が存在する. これはアバンダンスで使えるのでは?と思い Druel 先生に聞いてみたら,「$Q \subset \Omega_X^1$ から numerical flat な葉層が作れ, それから X の普遍被覆はわかる」と言われた. この内容は最近 [DPPT24] として Arxiv に提出された.

5.2 なぜ宮岡の不等式の係数は $\frac{1}{3}$ なのか?

宮岡の不等式をもう一度見てみると, K_X がネフならば

$$\left(c_2(X) - \frac{1}{3}c_1(X)^2\right) H^{n-2} \geq 0$$

である. なぜ $\frac{1}{3}$ なのだろうか? [IMM24] で確かにこの不等式を示したのだが「計算したらなぜかこうなった」としか言えないのである. [Miy87] の証明を見ても自然な理由が全くわからない. 一体どうやって宮岡先生はこの不等式を見つけてきたのか毎回不思議に思う.

宮岡-Yau の不等式は微分幾何学でみるとある意味自然である. それは (4) から $2(n+1)c_2(X) - nc_1(X)^2$ が Riemann curvature tensor の言葉で書けるからである. なので自然と次が思いつく.

問題 5.3. $3c_2(X) - c_1(X)^2$ は Riemann curvature tensor の言葉で書けないか?

もう一つ思うことは, この $\frac{1}{3}$ は変えれるのではないかということである.

問題 5.4. 宮岡の不等式の"$\frac{1}{3}$"の部分はもっと精密にできないか? 例えば $\nu(K_X)$ との関係はないだろうか?

これは共同研究者の Niklas さんから「博論でこの問題をやるので, 考えさせてほしい」と言われた. ただその後全く音沙汰がない. 実際似たような問題は宮岡先生のサーベイ [Miy14, p.28] にもある.

[*7] [IM22] でも葉層理論の結果を用いて示したので, 葉層がカギなのは確かである. ([Yos16] の最終章も参照)

5.3 なぜ 2 次の Chern 類だけなのか?

これも宮岡先生のサーベイ [Miy89] で書いていたことである.

問題 5.5. [Miy89, 問題 4.1]

1. 安定ベクトル束 E について $c_3(E), c_4(E), \ldots$ を含む自然な不等式はあるか?
2. K_X がネフならば $c_3(X), c_4(X), \ldots$ が満たすべき不等式はあるか?

なぜ 2 次の Chern 類だけこのような不等式や構造定理はあるのだろうか? 3 次, 4 次の Chern 類は考える意味はないのだろうか? 調べてみたが, 全く研究が見つからなかった.

5.4 Fano 多様体の Chern 類の不等式の問題

これは Ching-Jui Lai 先生から聞いた予想である.

予想 5.6. $-K_X$ が豊富かつ T_X がネフならば宮岡-Yau 不等式は成り立つか?

Campana-Peternell 予想が正しければ, X に Kähler-Einstein 計量が入るので, この予想は正しい. Ching-Jui Lai 先生からは「これが難しくても $\left(c_2(X) - \frac{1}{3}c_1(X)^2\right)(-K_X)^{n-2} \geq 0$ ぐらいはわかるのでは?」と言われた.

もう一つは Haidong Liu さんからいた予想である.

予想 5.7. $-K_X$ ネフ かつ $\left(c_2(X) - \frac{n}{2(n+1)}c_1(X)^2\right)(-K_X)^{n-2} = 0$ の X の構造は?

ネフかつ巨大かつ一様 K 安定なら [His24] の結果から X の構造はわかる. では巨大を外したときはどうなるのだろうか?.

他にも Haidong Liu さん関連の予想もこの際なので書いておく.

予想 5.8. X を 3 次元 Calabi-Yau 多様体とする. L が strictly ネフならば $c_2(X)L > 0$ か?

これが解けると 3 次元の ampleness 予想「L が strictly ネフならば豊富」がとける.([Liu23] 参照) ampleness 予想に関しては 4 次元の場合は [LM23] で解けている. なぜか 3 次元の場合が残っている.

6 思い出話

[Miy87] や [Ou23] がこの研究のスタートになっている. これらの論文は 2019 年の博士 3 年の時に読んだ. [Miy87] は初等的な道具だけで Chern 類の不等式を示していて, 何回読んでもいい論文だなあと思う限りである. [Ou23] は [Miy87] をより精密に書いた論文である. これも何回も読んだ. ただその時はこの論文が何かためになるとは思っていなかった.

2021 年に東北大学の助教になった際, 「せっかく東北大学に来たのだから, 松村先生

が言っていた問題 (Ω_X^1 がネフのアバンダンス) を解こう!」と思った．当然, 解けるわけもなく [WZ02] を読んでも理解できるわけもなく, 途方に暮れていた．ある日の帰り道に「$c_1(X)^2 = 0$ かつ Ω_X^1 ネフなら解けるのかな?」と思った．ふと [Ou23] が頭に思いつき, 当時ちょっと読んでた葉層の論文 [PRT22] と合体させると, アバンダンスがすぐに示せた. あまりに簡単に解けたので不安になり, 松村先生とセミナーをした．その後この内容を論文にしたのが [IM22] である.

その後 [IM22] を KLT 多様体に拡張しようと考えたが, これが全くうまくいかなかった．これと別件で [Miy87] の宮岡の不等式の等号成立の場合を調べていた．滑らかな多様体の場合はすぐにできたのだが, KLT の場合がわからず, お蔵入りになっていた．そこで 2023 年 6 月にフランスの集会で Claudon 先生に「こういうのはできたんですけどねー」とこの結果を話した．すると横にいた Niklas さんが「これは僕が博論で考えてた問題やねんけど...」と言ってきた．その場にいた Claudon 先生から「共同研究したら?」と勧められ, Niklas さんと共同研究することになった．その後松村先生も誘ってできたのが, [IMM24] である.

[IJL23] の共同研究の成り立ちも面白い．[IJL23] の前のバージョンに, Chen Jiang さんと Haidong Liu さんの予想「$-K_X$ がネフかつ巨大ならば $c_2(X)(-K_X)^{n-2} > 0$ が成り立つか？」があった．たまたま ArXiv でこの問題を見た私は「[IM22] の計算使えば絶対できるやろ」と思った．実際 2 週間くらいで解けたので 2 人に送り, それが共同研究になった．私からすると「2 週間で問題が解けて論文も書けてラッキー」となるが, 2 人からするとどう思っていたのであろう? Chen Jiang さんは東大時代の私のことを覚えていたらしく全くの見知らぬ人ではなかった．ただ Haidong Liu さんはメールでも初対面であった．今思えば見知らぬ人からいきなり「お前の問題解けたぞ」とメールが来たらそれは少し怖い気もする．ちなみに Haidong Liu さんとはその後日本でも中国でも会った．2025 年 6 月の中国の集会に招待してもらっている.

参考文献

[Cao13] Junyan Cao. A remark on compact Kähler manifolds with nef anticanonical bundles and its applications, 2013. Preprint. arXiv:1305.4397.

[CO75] Bang-yen Chen and Koichi Ogiue. Some characterizations of complex space forms in terms of Chern classes. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 26(104):459–464, 1975.

[Dem12] Jean-Pierre Demailly. *Analytic methods in algebraic geometry*, volume 1 of *Surveys of Modern Mathematics*. International Press, Somerville, MA; Higher Education Press, Beijing, 2012.

[DGP24] Stéphane Druel, Henri Guenancia, and Mihai Păun. A decomposition theorem for $\mathbb{Q}$-Fano Kähler-Einstein varieties. *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 362(S1):93–118, 2024.

[DPPT24] Stéphane Druel, Jorge Vitório Pereira, Brent Pym, and Frédéric Touzet. Numerically flat foliations and holomorphic poisson geometry., 2024. Preprint arXiv:2411.08806.

[DPS94] Jean-Pierre Demailly, Thomas Peternell, and Michael Schneider. Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles. *J. Algebraic Geom.*, 3(2):295–345, 1994.

[Fuj22] Osamu Fujino. Problems on the theory of minimal models, 2022. Preprint. Available at `https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/2211-18.pdf`.

[GKP16] Daniel Greb, Stefan Kebekus, and Thomas Peternell. Étale fundamental groups of Kawamata log terminal spaces, flat sheaves, and quotients of abelian varieties. *Duke Math. J.*, 165(10):1965–2004, 2016.

[GKP22] Daniel Greb, Stefan Kebekus, and Thomas Peternell. Projective flatness over klt spaces and uniformisation of varieties with nef anti-canonical divisor. *J. Algebraic Geom.*, 31(3):467–496, 2022.

[GKPT19] Daniel Greb, Stefan Kebekus, Thomas Peternell, and Behrouz Taji. The Miyaoka-Yau inequality and uniformisation of canonical models. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 52(6):1487–1535, 2019.

[GKPT20] Daniel Greb, Stefan Kebekus, Thomas Peternell, and Behrouz Taji. Harmonic metrics on Higgs sheaves and uniformization of varieties of general type. *Math. Ann.*, 378(3-4):1061–1094, 2020.

[Has18] Kenta Hashizume. On the non-vanishing conjecture and existence of log minimal models. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 54(1):89–104, 2018.

[His24] Tomoyuki Hisamoto. On the miyaoka-yau inequality for manifolds with nef anti-canonical line bundle, 2024. Preprint. arXiv:2403.09120.

[IJL23] Masataka Iwai, Chen Jiang, and Haidong Liu. Miyaoka type inequality for terminal threefolds with nef anti-canonical divisors, 2023. Preprint. arXiv:2303.00268. to appear in Sci.China Math.

[IM22] Masataka Iwai and Shin-ichi Matsumura. Abundance theorem for minimal compact Kähler manifolds with vanishing second Chern class, 2022. Preprint. arXiv:2205.10613.

[IMM24] Masataka Iwai, Shin-ichi Matsumura, and Niklas Müller. Minimal projective varieties satisfying miyaoka's equality, 2024. arXiv:2404.07568.

[Iwa25] Masataka Iwai. Remarks on miyaoka's equality for compact kähler manifolds, 2025. Preprint. Available at `https://masataka123.github.io/blog3/pdf/Miyaoka_inequality_kahler.pdf`.

[Kob14] Shoshichi Kobayashi. *Differential geometry of complex vector bundles*. Princeton Legacy Library. Princeton University Press, Princeton, NJ, [2014]. Reprint of the 1987 edition [MR0909698].

[Liu23] Haidong Liu. On the log version of serrano's conjecture, 2023. Preprint. arXiv:2302.06209.

[LL23] Haidong Liu and Jie Liu. Kawamata–Miyaoka type inequality for canonical $\mathbb{Q}$-Fano varieties, 2023. Preprint. arXiv:2308.10440. to appear J. Reine Angew.

Math.

[LL24] Haidong Liu and Jie Liu. Kawamata–Miyaoka type inequality for canonical $\mathbb{Q}$-Fano varieties ii: terminal $\mathbb{Q}$-fano threefolds, 2024. Preprint. arXiv:2401.04391. to appear in Épijournal Géom. Algébrique.

[LM23] Haidong Liu and Shin-ichi Matsumura. Strictly nef divisors on K-trivial fourfolds. *Math. Ann.*, 387(1-2):985–1008, 2023.

[LT18] Steven Lu and Behrouz Taji. A characterization of finite quotients of abelian varieties. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2018(1):292–319, 2018.

[Miy77] Yoichi Miyaoka. On the Chern numbers of surfaces of general type. *Invent. Math.*, 42:225–237, 1977.

[Miy87] Yoichi Miyaoka. The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety. In *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, volume 10 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 449–476. North-Holland, Amsterdam, 1987.

[Miy89] Yoichi Miyaoka. 主題と変奏-chern 類に関する不等式をめぐって-, 1989. Preprint. Available at `https://www.jstage.jst.go.jp/article/sugaku1947/41/3/41_3_193/_pdf/-char/ja`.

[Miy14] Yoichi Miyaoka. Bogomolov-miyaoka-yau 不等式をめぐって, 2014. Preprint. Available at `http://www.nara-wu.ac.jp/omi/oka_symposium/13/miyaoka.pdf`.

[Ou23] Wenhao Ou. On generic nefness of tangent sheaves. *Math. Z.*, 304(4):58, 2023.

[PRT22] Jorge Vitório Pereira, Erwan Rousseau, and Frédéric Touzet. Numerically non-special varieties. *Compos. Math.*, 158(6):1428–1447, 2022.

[WZ02] Hung-Hsi Wu and Fangyang Zheng. Compact Kähler manifolds with nonpositive bisectional curvature. *J. Differential Geom.*, 61(2):263–287, 2002.

[Xu23] Chenyang Xu. K-stability for varieties with a big anticanonical class. *Épijournal Géom. Algébrique*, pages Art. 7, 9, 2023.

[Yau77] Shing Tung Yau. Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 74(5):1798–1799, 1977.

[Yos16] Gongyo Yoshinori. 極小モデル理論と拡張定理, 2016. Preprint. Available at `https://www.mathsoc.jp/section/algebra/algsymp_past/algsymp16_files/algebraic-geometry/3-gongyo.pdf`.