Campana-Winkelman 15, Oka 多様体のまとめ

Masataka IWAI

December 17, 2025, version 0.01

Abstract

岡多様体の勉強会のために Campana-Winkelman [CW15] と Oka 多様体に関してまとめたものです.

Contents

1 Campana-Winkelman 15 まとめ **4**

1.1 1 章 Introduction 4

1.2 2 章 Specialness 9

1.2.1 Specialness and the core map 9

1.2.2 Kobayashi pseudometric のおさらい 12

1.2.3 Orbifold Kobayashi-Ochiai 17

1.3 3 章 Jouanoulou's trick 20

1.4 4 章 Opposite complex structures and associated cohomological integrals 23

1.4.1 dominant rational map での引き戻し 23

1.4.2 Opposite complex structure 24

1.4.3 opposite structure and meromorphic map 28

1.5 5 章 h-principle and Brody-hyperbolicity 29

1.6 6 章 h-principle implies specialness for projective manifolds 35

1.7 7 章 Necessary conditions on the quasi-Albanese map 37

1.7.1 コンパクト Kähler manifold の場合 37

1.7.2 quasi-Albanese の復習 40

1.7.3 quasi-projective の場合 41

1.7.4 引用されていた定理たち 42

1.8 8 章 (Counter-)examples 43

1.9 9 章 Does special imply the h-principle? 46

1.10 補足・ちょっと思ったこと 47

1.10.1 Hyperkahler の場合 47

1.10.2 [CW15] 関連 48

2 Oka 多様体まとめと問題 **49**
2.1 Oka 多様体の定義 . . . 49
2.2 成り立つこと . . . 54
2.3 Oka 多様体に関する未解決問題たち . . . 56
3 Voison のサーベイ **58**
3.1 Introduction . . . 58
3.2 Fibrations and holomorphic forms . . . 59
3.2.1 General facts on fibrations and holomorphic forms . . . 59
3.2.2 Iitaka fibration . . . 61
3.2.3 Castelnuovo-de Franchis and Bogomolov theorems . . . 63
3.3 Fibrations from families of cycles . . . 68
3.3.1 Generalities about Hilbert schemes and Chow varieties . . . 68
3.4 MRC and Γ-fibrations . . . 70
3.4.1 Rationally connected varieties . . . 70
3.4.2 The MRC fibration . . . 74
3.4.3 Mumford's conjecture . . . 76
3.4.4 An application to Calabi-Yau manifolds . . . 77
3.4.5 Shafarevich maps (or Γ-reductions) and Shafarevich conjecture . . . 78
3.5 Special varieties and the core . . . 86
3.5.1 Morphisms of general type . . . 86
3.5.2 The core fibration . . . 91
3.5.3 Conjectures . . . 92
4 Campana-Winkelman 23 まとめ **95**
4.1 1. Introduction . . . 95
4.2 2. Review of rationally connected manifolds . . . 95
4.3 3. Brief review of special manifolds . . . 96

はじめに

この pdf は次の内容に基づいています.

- Campana-Winkelman 15 のまとめ. [CW15] をそのまま読んだ内容を書いています. 内容は"special 多様体と h-principle"について (雑に??) まとめた (?) 論文の解読書です.
- Oka 多様体まとめと問題. Oka 多様体に関する日下部さんのサーベイや Forstneric 先生のサーベイをまとめた内容です.
- Voison 先生のサーベイまとめ. [Voi] のサーベイをまとめています. Iitaka-fibration, MRC fibration+有理連結, Shafarevich map, Core fibration (+special 多様体) の内容を (玄人向けに?) まとめたサーベイの解読書です. (が, あまりよくわからなかったです.)
- その他は期限内に読めなかったが, 和訳だけしたものを書いています. ただ著作権的にまず

い可能性もあるので, その場合は削除します.

また赤字がありますが, これはわからなかったところです. わかったことがあれば教えてください.

1 Campana-Winkelman 15 まとめ

はじめに

以下 [CW15] の論文を現論文の順番通りに解読していく．いろんな内容があり面白い反面, 繋がりがよくわからなかったのでかなり苦労した.

1.1 1章 Introduction

Definition 1.1. [CW15, Defintion 1.1] 解析空間 (complex space)X が h-principle を満たすとは, 任意の Stein 多様体 S, 任意の連続関数 $f : S \to X$ について, ある正則関数 $F : S \to X$ があって, F と f は homotopic である.

History はこちら：

- Oka-Grauert: Stein 多様体 S 上の complex Lie group G を fiber とする主 G 束を X とする. その連続なセクション $s : X \to G$ は, ある正則切断と homotopic になる
- Gromov: Eliptic ならば, h-principle を満たす.
- Forstneric: Subeliptic ならば h-principle を満たす.
- 等質空間. (homogenerous complex manifold. 群 G が X に推移的に作用しているもの) は h-principle を満たす. よって $\mathbb{CP}^n$, Grassmanian, Torus も h-principle を満たす.
- $A \subset \mathbb{C}^m$ を Algebraic subvariety で余次元 2 以上なものをとると, $\mathbb{C}^m \setminus A$ も h-principle を満たす.
- Oka 多様体は h-principle を満たす. 2.6 参照.

Stein の定義は次の通りである.

Definition 1.2 (正則凸・正則分離・Stein 空間, [GR79, IV.2.1, 2.2, 3.12, V.4.2])**.** X を (2nd countable) 解析空間とする. (reduced, irreducible, normal は不要).
X が正則凸 (holomorphically convex) であるとは同値な以下の条件を満たすこと.

1. 任意の相対コンパクト $K \subset X$ について, その正則凸包

$$\widehat{K} := \{x \in X | |f(x)| \leq \max_{y \in K} |f(y)| \text{ が任意の } f \in \mathcal{O}_X(X) \text{ で成り立つ } \}$$

   もまた相対コンパクトになる.
2. 任意の集積点を持たない点列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, X 上のある正則関数 f が存在して $\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} |f(y_n)| = +\infty$ となる.

X が正則分離可能 (homomorphically separable) とは, 任意の $x, y \in X$ についてある X 上の正則関数 f があって $f(x) \neq f(y)$ となること.
X が Stein 空間とは次の同値な条件を満たすこと.

1. X は正則完備, つまり X は弱正則凸 (任意のコンパクト集合 K について $\widehat{K} \cap W$ がコンパクトになるような K の開近傍 W が存在する) かつ X 内のコンパクト解析的部分集合は有限集合である.
2. X 内の任意の閉部分集合 P について定理 B, つまり $H^q(P, \mathcal{F}) = 0$ が任意の解析的連接層 $\mathcal{F}$ と $q \geq 1$ について成り立つ.
3. $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ を連接 ideal 層としたとき, $H^1(X, \mathcal{I}) = 0$ が成り立つ.
4. $\Gamma(X, \cdot) : Coh(X) \to Ab$ は完全関手.
5. X は正則凸, 正則分離可能, かつ任意の $x \in X$ についてその埋め込み次元 $e := \dim_{\mathbb{C}} m_x/m_x^2$ とすると, ある e この $f_1, \dots, f_e \in \mathcal{O}_{X,x}$ があって, m_x を生成する.
6. X は正則凸かつ正則分離可能,

埋め込み次元の部分がわかりづらい. もし簡単のため $X \subset \mathbb{C}^N$, $x = 0$ で $X = (g_1 = \dots = g_k = 0)$ と書けているときは

$$e := \dim_{\mathbb{C}} m_x/m_x^2 = N - \operatorname{rank} J_0(g_1, \dots, g_k)$$

となる. 陰関数定理から $0 \in X$ の周りで $\mathbb{C}^{N - \operatorname{rank} J_0} = \mathbb{C}^e$ に埋め込むことができる. 特に $\dim X \leq e$ である.

正則ならば $=$ がなりたつ. よって Stein ならば局所座標を全体に伸ばすことができるので次を得る.

Corollary 1.3 (局所座標公理)**.** *X が Stein 多様体とする. 任意の $x \in X$ についてある X 上の正則関数 $f_1, \dots, f_n$ があって $f_i|_U$ が z を含むある小さな開集合 U 上の局所座標となる.*

この論文の主定理は次の通り.

Theorem 1.4. *[CW15, Main Theorem] X を irreducible projective variety とする.*

1. *(=1.52) X が projective manifold で, h-principle を満たすならば special.*
2. *(=1.50) X が h-principle を満たすならば, Brody hyperbolic Kähler 多様体 Y への正則写像 $f : X \to Y$ について, f は定数になる.*

Theorem 1.5. *[CW15, Theorem 1.2] X を解析空間とする.*

1. *(=1.44) h-principle を満たすならば, homotopically $\mathbb{C}$-connected*

2. *(=1.7) X が algebraic variety または compact Kähler とする．このとき (quasi-)Albanese map は全射．*

Definition 1.6. [CW15, Definition 1.3] X を解析空間とする．

1. X が $\mathbb{C}$-connected とは，X の任意の 2 点が entire curve の chain で結ばれること．つまり $x, y \in X$ について，ある $f_1, \ldots, f_N : \mathbb{C} \to X$ があって

$$x \in f_1(\mathbb{C}) \quad f_i(\mathbb{C}) \cap f_{i+1}(\mathbb{C}) \quad y \in f_N(\mathbb{C})$$

となること．

2. X が Brody hyperbolic とは，任意の正則写像 $f : \mathbb{C} \to X$ が定数となること．
3. X が homotopically $\mathbb{C}$-connected とは，任意の unramified covering $X' \to X$ と，Brody hyperbolic 解析空間 Y への正則写像 $X' \to Y$ について，ホモトピー群の写像

$$\pi_k(f) : \pi_k(X') \to \pi_k(Y)$$

が $k > 0$ について 0 写像になること．

$\mathbb{C}$-connectedness は"covering"，"正則写像での像"によって保たれる．また X が smooth ならば proper modification でも保たれる．また解析空間の写像 $\pi : X \to Y$ が unramified とは $\Omega^1_{X/Y} = 0$ となること．([GPRG94, Ch.2 Subsection 2-4] 参照.) [1]

ホモトピー群に関して復習する．

Definition 1.7 (ホモトピー群)**.** X を位相空間，$x_0 \in X$ とする．$S^n := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n (x_i)^2 = 1\}$ を n 次元球面，$P = (1, 0, \ldots, 0)$ とする．X の n 次ホモトピー群を

$$\pi_n(X, x_0) := \{f : S^n \to X \mid f(P) = x_0\}/\sim$$

と定義する．
ここで $f \sim g$ を"f と g は homotopic"，つまり「ある連続写像 $H : S^n \times [0,1] \to X$ で $H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = g(x)$ なものが存在する」として同値関係を入れる．

$I = [0, 1]$ として $S^n \sim I^n/\partial I$ を使って定義する方法もある．

次のことがわかっている

- X が $\mathbb{C}$-connected，Y が Brody hyperbolic ならば，正則写像 $f : X \to Y$ は定数．特に

[1] ただこの定義はあまり良くないと思う．おそらく étale(flat かつ unramified) の方がいいと思う．なお X, Y smooth であれば flat は常に言えるのであんまり差はない．

$\mathbb{C}$-connected ならば homotopically $\mathbb{C}$-connected.[2]

- X 可縮ならば homotopically $\mathbb{C}$-connected. $\pi_k(X) = 1$ であるので.
- [CW09, Theorem 5?] smooth projective 3-fold で homotopically $\mathbb{C}$-connected だが $\mathbb{C}$-connected でない例がある.

まとめると次が言える.

$$\text{Subelliptic manifold} \Rightarrow \mathbb{C}\text{-connected} \Rightarrow \text{homotopically } \mathbb{C}\text{-connected}.$$

Question 1.8. [CW15, Question 1.4] X 連結複素多様体とする. h-principle を満たすならば, X は $\mathbb{C}$-connected 解析空間と正則写像によってホモトピー同値か?

理由としては「知っている例で h-principle を満たす連結複素多様体は全て Subelliptic 解析空間と正則写像によってホモトピー同値だから」. 結構安易な質問な気もする. が, これはどうも良くない問いで, コンパクト複素多様体はコンパクト多様体の proper analytic subset と homotopic になり得ない. よってこの問いよりも次の問のほうが良い. [3]

Conjecture 1.9. *[CW15, Question 1.5, 1.6, 1.7, 1.8]*

- *(1.5)* コンパクト連結複素多様体が *h-principle* を満たすならば, $\mathbb{C}$-*connected* か*?*
- *(1.6) Projective manifold* が *h-principle* を満たすならば, 基本群は *Almost Abelian* か? *?*なお *[CW15, Theorem 6.1]* で*"Projective manifold* について *h-principle* $\Rightarrow$ *Special"*が言えている 「*Special* ならば基本群は *Almost Abelian* か*?*」も未解決*.*
- *(1.7)* 任意の *compact Kähler manifold* について *h-principle* を満たすならば*, Special* か*? [CW15, Theorem 6.1]* の証明は *Jouanoulou trick* を使うので *projective* を使う*.*
- *(1.8) X smooth (or normal) quasi-projective variety* とする. X が *special* か $\mathbb{C}$-*connected* を仮定する. このとき *h-principle* を満たすか*?* また *Oka* か?

[2] この部分 [CW15] では"weak $\mathbb{C}$-connected" と書いてあった.
[3] ここは [CW15] の原文そのまま.

まとめるとこういうことである.

$$
\begin{tikzcd}
\text{elliptic} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{Ell}_\infty \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & \mathrm{Ell}_2 \arrow[r, Leftrightarrow] & \mathrm{Ell}_1 \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{subelliptic} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Oka} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & h\text{-principle} \arrow[r, Rightarrow, "{[\text{CW15}, Thm6.1]\text{proj のみ}}"'] \arrow[r, dashed, bend left, "Conj1.7"] \arrow[d, Rightarrow, "{[\text{CW15}, Thm1.2]}"] \arrow[dr, dashed, "Conj1.6"] \arrow[dl, dashed, "Conj1.5"] & \text{special} \arrow[l, dashed, bend right, "Conj1.8"'] \arrow[d, dashed, "{[\text{Cam04}]Conj}"] \\
\begin{array}{c}\text{Rationally}\\ \text{chain connected}\end{array} \arrow[r, Rightarrow] & \mathbb{C}\text{-connected} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[ur, dashed, bend left, "Conj1.8"] & \begin{array}{c}\text{homotopically}\\ \mathbb{C}\text{-connected}\end{array} & \pi_1 \text{ almost Abel} \\
 & \begin{array}{c}\text{Kobayashi}\\ \text{pseudometric} \equiv 0\end{array} & &
\end{tikzcd}
$$

[CW15, Section 8] (1.8) では次の例をあげる

- "non-normal projective" curve で, h-principle を満たさないが, special や $\mathbb{C}$-connected である例.
- "compact no-Kähler" surface で, h-principle を満たさないが, special である例.
- "non-compact non-algebraic な $\mathbb{C}^2$ の領域" で, h-principle を満たさないが, $\mathbb{C}$-connected である例.

つまり Conjecture 1.8 にはnormal 性, Kähler 性, コンパクト性は必要である.

Remark 1.10. [CW15, Remark 1.9] (1) 自明な議論から以下が成り立つ.

$$\text{可縮} \Rightarrow h\text{-principle}$$

Proof. X 可縮なので, $x \in X$ であって, 定数関数 $g : X \to \{pt\}$ と包含写像 $i : \{x\} \hookrightarrow X$ であって, $i \circ g \underset{homotopic}{\sim} id_X$ となるものがある.

よって任意の Stein 多様体 S, 任意の連続関数 $f : S \to X$ について, $i \circ g \circ f : S \to X$ は定数関数で特に正則関数である. そして $i \circ g \circ f \underset{homotopic}{\sim} f$ であるのでいえた. □

よって h-principle は可縮でない多様体にのみ興味がある話題となる. またコンパクト複素多様体は可縮になり得ない. X は向きづけ可能であるので, 基本類が存在して $H_n(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ であるためである.

また可縮 な affine で log general type な多様体が存在する.(引用は [CW15, Remark 1.9] 参照) つまり h-principle をみたすけど special ではない Affine variety が存在する.(つまりコンパクト性は必要.)

(2). $X' \to X$ を unramified covering で X, X' が連結な複素多様体とする. 1.56 から X が h-principle を満たすなら, X' も満たす. ただし逆は成り立たない.

反例として, コンパクト Brody-Hyperbolic manifold X で Eilenberg-maclane $K(\pi, 1)$ 空間なものとする.[4] 例えば compact ball quotient や種数 2 以上の曲線とする. すると X が可縮ではない. よって 1.45 より, X は h-principle を満たさない. 一方で X_{univ} は可縮であるので h-principle を満たす.

(3) 以下の文は本当?? にわかには信じられない. 1.1 における $f: S \to X$ を考える. $\dim S \geq 3$ ならば S の複素構造 J_0 を $J_1(f)$ に取り替えることができて, 1.1 は常に成り立つ [Fc18, Section 9.10] から, $\dim S = 2$ ならば S の同相写像を保つ向き付けを考える必要がある (らしい?)

1.2 2 章 Specialness

1.2.1 Specialness and the core map

[CW15, Definition 2.1] では κ^{sat} が出てきたが, その後使われていないので, [Cam04] に基づいて定義をする. またコンパクト解析空間 X が Fujiki class とは, compact Kähler 多様体と bimeromorphic となることとする.

Definition 1.11. [CW15, Definition 2.1], X 連結コンパクト複素多様体 in Fujiki's class とする.

1. [Cam04, Definition 2.24] $p > 0$ とする. line bundle $L \subset \Omega_X^p$ が Bogomolov sheaf とは, $\kappa(F) = p$ となること. ここで Kodaira-Iitaka 次元を
$$\kappa(F) := \limsup_{m \to \infty} \frac{\log h^0(X, F^{\otimes m})}{\log m} \in \{-\infty, 0, 1, \dots, \dim X\}$$
として定義する.
2. [Cam04, Theorem 2.27] X が special とは Bogomolov sheaf を持たないこと.
3. [Cam04, Theorem 2.25] L が Bogomolov sheaf のとき, ある p 次元コンパクト複素多様体 Y への meromorphic dominant map $f: X \dashrightarrow Y$ があって, $L = f^*(K_Y)$ が X の general point で成り立つ.

Special であることは bimeromorophic な性質である.

[4] $\pi_1(X) \cong \pi$ かつ $\pi_n(X) = 0$ となる弧状連結な空間のこと. http://pantodon.jp/index.rb?body=Kpi1 参照. 例えば種数 $g \geq 2$ の曲線は $K(\pi, 1)$ 空間である. (π を自由群とする.)

2個目の主張はCastelnuovo-De Franchisの定理である(Bogomolovによって一般化された). Bogomolov-Sommese vanishingによって, 任意のline bundle $L \subset \Omega_X^p$ は常にから

$$\kappa(F) \leq \nu(X, F) \leq p$$

を満たす. この等号が成り立つときがBogomolov sheafである.

Remark 1.12. [CW15, Remark 2.2]

1. X specialならば, 一般型(of general type) Y へのdominant meromorphic map $f : X \dashrightarrow Y$ は存在しない. もし存在したら $f^*(K_Y) \subset \Omega_X^{\dim Y}$ のsaturationがBogomolov Sheafとなってしまうため
2. [Cam04, Chapter 2] X specialならば. 任意のdominant meromorphic map $f : X \dashrightarrow Y$ について, Y もspecial.
3. [Cam04, Chapter 5] X specialならば, finite unramified covering $X' \to X$ について X' もspecial.[5] 特に以下が成り立つ.

   $$\text{special} \Rightarrow \text{weakly special}$$

   なお逆は成立しない. (3次元の反例がある) ここで X がweakly specialとは「任意のfinite unramified covering $X' \to X$ について, X' はof general type Y へのdominant meromorphic map $f : X' \dashrightarrow Y$ を持たない」こと
4. Weakly SpecialだけではCore mapなどの存在が言えないので不十分である. ただ[Cam04, Chapter 9] Kobayashi Pseudo metricとの予想もある. またweakly specialでKobayashi pseudometricが消えない例もある. [CW09] [6]
5. [Cam04, Definition 2.1] X がspecialであることは, of general type orbifold pair (Y, Δ) へのdominant rational mapが存在しないことと同値である.
6. RCまたは $\kappa(K_X) = 0$ ならばspecial.
7. [Cam04, Section 6.5] Special多様体は $n - 1$ 以下の小平次元を取りうる.
8. [Cam04, Chapter 5] $n = 1$ のときは

   $$\text{Special} \Leftrightarrow \text{weakly Special} \Leftrightarrow \text{Brody hyperbolic ではない}$$

   $n = 2$ のときは

   $$\text{Special} \Leftrightarrow \text{weakly Special} \Leftrightarrow \kappa(K_X) < 2 \text{ かつ } \pi_1(X) \text{ almost Abelian}$$

   よってSpecial surfaceならば以下のいずれかが成り立つ

   - $\kappa(K_X) = -\infty$ かつ $q(X) \leq 1$

[5] ”この証明はかなり難しい”と[CW15]に書いてあった.

[6] この文章よくわからなかったが, 要するに”special”が大事だということ?? あとweakly specialだけでは不十分なこともわかっている. https://arxiv.org/abs/2410.06643 参照.

- $\kappa(K_X) = 0$
- $\kappa(K_X) = 1$ かつ $\widehat{q}(X) \leq 1$. $(\widehat{q}(X) := \sup\{q(X') \mid X' \to X \text{ finite étale}\})$

9. [BL00] より $n = 2$ のとき, non-elliptic K3 を除いて,

$$\text{Special} \Leftrightarrow \mathbb{C}^2\text{-dominable}$$

詳しくいうと non-elliptic K3 は special であることがわかっているが, $\mathbb{C}^2$-dominable がわからない. [7]

任意の Fujiki 多様体は Special と of log general type$(C(X), \Delta_{c_X})$ に分解できる.

Theorem 1.13. *[Cam04, Chapter 3] X コンパクト複素多様体 in Fujiki's class. このとき $c_X : X \dashrightarrow C(X)$ というファイバー連結な dominant almost holomorphic meromorphic map が存在して次を満たす.*

1. 一般 fiber は special.

2. Orbifold Base $(C(X), \Delta_{c_X})$ は of general type. つまり $\kappa(K_{C(X)} + \Delta_{c_X}) = \dim C(X)$ である.

この c_X を core map という. 特に Core map が自明 (つまり $\dim C(X) = 0$) ならば, X は special である.

meromorphic map $\varphi : X \dashrightarrow Y$ が almost holomorphic であるとは, f の不確定点除去

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"] & Y \\
X \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

をとったとき, 不確定点 $I(\varphi) \subset X$ として, $\widetilde{\varphi}(\pi^{-1}(I(\varphi))) \neq Y$ となること. 同値な言い換えとして, ある Zariski open set $Y_0 \subset Y$ があって $\varphi : \varphi^{-1}(Y_0) \to Y$ が well-defined であること.

Remark 1.14. core map $c_X : X \dashrightarrow C(X)$ について $C(X)$ は Moishezon であることがわかっている. (Algebraic reduction を経由するから) よって $C(X)$ は bimeromorphic な model を取り替えて projective であると仮定して良い.

Conjecture 1.15. *[CW15, Conjecture 2.4] X コンパクト複素多様体 in Fujiki's class. このとき $c_X = (J \circ r)^{\dim X}$ となる. ここで*

[7] $\mathbb{C}^n$-dominable ならば Special である. 逆はおそらく正しくないと予想されている. というのも [CW23] にて, "This ($\mathbb{C}^n$ dominable implies specialness) might however be a low-dimensional phenomenon, and it is not expected to remain true in dimension 3." とあった. そのため Oka$\Rightarrow$ Special はもしかしたら正しくない??

- *J Orbifold version of Moishezon map (Iitaka map の一種)*
- *r Rational quotient*

とする．特に *special* 多様体は $\kappa = 0$ と $\kappa_+ = 0$ で構成される．ここで $\kappa_+(X)$ を次で定める．

$$\kappa_+(X) := \sup\{\kappa(\det \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \subset \Omega^p_X \textit{ coherent subsheaf }\}$$

$\kappa_+(X)$ は [Cam] によって普遍被覆や Shafarevich map との関連がある．

Theorem 1.16. *Orbifold version of Iitaka Conjecture* が成り立つならば，*1.15* も成り立つ．

Conjecture 1.17. *[CW15, Conjecture 2.7]* コンパクト複素多様体 *in Fujiki's class* について次は同値．

1. *special*
2. 基本群が *almost Abelian.*
3. *Kobayashi pseudometric* が消える．
4. *$\mathbb{C}$-connected.*

1.2.2 Kobayashi pseudometric のおさらい

ここからは Kobayashi pseudometric に関するおさらいである．[Kob98] 参照のこと．山ノ井先生のサーベイ [Yam15] も見やすいらしい．

Definition 1.18. [NO90, Section 1.3 and 1.4][Kob98, Chapter 3] X 解析空間，$p, q \in X$ について,p から q への円板鎖 (*chain of analytic disks from p to q*) を次で定める：$f_j : \Delta := D(0,1) \to X$ を正則写像として，

$$p = f_0(0), \quad f_j(z_j) = f_{j+1}(0), \quad 0 \le j \le k-1, \quad q = f_k(z_k),$$

このとき，小林擬距離 (Kobayashi pseudo-distance) d_{Kob} を

$$d_{\mathrm{Kob}}(p,q) := \inf_{\{f_j, z_j\}} \left(d_{\mathrm{Poin}}(0, z_0) + \cdots + d_{\mathrm{Poin}}(0, z_k)\right).$$

として定める．ここで Poicare 計量は

$$d_{\mathrm{Poin}}(0,z) = \log\frac{1+|z|}{1-|z|} = 2\tanh^{-1}|z|$$

とする．($\rho(0,z)$ と書くこともある.)
M が多様体の場合は同値な定義もある．*Kobayashi-Royden infinitesimal pseudometric* を $\xi \in T_{X,x}$ について，

$$\begin{aligned} F_M(\xi) &= \inf\{\lambda > 0;\ \exists f : \Delta \to X,\ f(0) = x,\ \lambda f'(0) = \xi\} \\ &= \inf\left\{\frac{1}{r} \mid \exists g : D(0,r) \to X\ g(0) = x,\ g'(0) = \xi\right\} \end{aligned}$$

とし，$\gamma : [0,1] \to M$ という C^∞ 級曲線に関して，Finsler pseudometric を

$$L_M(\gamma) := \int_0^1 F_M(\frac{d\gamma}{dt})dt$$

とし[a]

$$d_{\mathrm{Kob}}(p,q) := \inf_\gamma L_M(\gamma)$$

として定義する．この二つは一致する．

[a] $v = \xi + \bar{\xi} \in T_{X,x} \oplus \overline{T_{X,x}}$ と分解して，$F_M(v) = F_M(2\xi)$ として定義する．2 倍する理由計算上の都合から．[NO90, 1.3.1] 参照

一般の Poincare 計量に関しては次のとおり：メビウス変換 $\varphi_w(z) := \frac{z-w}{1-\bar{w}z}$ として

$$d_{\mathrm{Poin}}(w,z) := \log\frac{1+|\varphi_w(z)|}{1-|\varphi_w(z)|} = \log\frac{|1-z\bar{w}|+|z-w|}{|1-z\bar{w}|-|z-w|} = 2\tanh^{-1}\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right|.$$

である．これは Δ 上の $\frac{dz\otimes d\bar{z}}{(1-|z|^2)^2}$ という計量で与えられる．
以下成り立つことを述べておく．

Proposition 1.19. *[Kob98, Chapter 3]* X, Y を解析空間とする．

1. *[Kob98, Proposition 3.1.6]* $f : X \to Y$ を正則写像とするとき

$$d_{\mathrm{Kob},Y}(f(p), f(q)) \le d_{\mathrm{Kob},X}(p,q)$$

特に f が双正則ならば上は等号が成立する．

2. *[Kob98, Proposition 3.1.6]*. 単位円板 D において，$d_{\mathrm{Kob},D}$ は *Poincare metric* ρ に等

しい.

3. *[Kob98, Proposition 3.1.7].* $d_{\mathrm{Kob},X}$ は擬距離であり, 任意の単位円板 D からの正則写像 $f : D \to X$ について

$$d_{\mathrm{Kob},X}(f(z), f(w)) \leq \rho(z, w)$$

となる. また任意の X 上の擬距離 δ で上のように $\delta(f(z), f(w)) \leq \rho(z, w)$ を満たすならば, $\delta \leq d_{\mathrm{Kob},X}$ となる.

4. *[Kob98, Theorem 3.1.9]*

$$d_{\mathrm{Kob},X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_{\mathrm{Kob},X}(x_1, x_2), d_{\mathrm{Kob},Y}(y_1, y_2)\}$$

Proof. [1] $f_j : \Delta := D(0, 1) \to X$ を正則写像で

$$p = f_0(0), \quad f_j(z_j) = f_{j+1}(0), \quad 0 \leq j \leq k - 1, \quad q = f_k(z_k),$$

となるものについて, $f \circ f_j$ が $f(p)$ と $f(q)$ を結ぶ正則写像たちになることから.

[2] まず単位円板上の Poincare metric ρ について, D と正則写像 $f : D \to D$ について,

$$\rho(f(a), f(b)) \leq \rho(a, b) \quad \text{for } a, b \in D. \tag{1.1}$$

が成り立つ. なぜならば $z \in D$ について Schwarz Lemma より

$$|\varphi_{f(0)}(z)| \underset{1.18}{=} \left| \frac{f(z) - f(0)}{1 - \bar{f(0)}z} \right| \underset{Schwarz}{\leq} |z| \tag{1.2}$$

であるので, $b = 0$ の場合は

$$\rho(f(a), f(0)) = \log \frac{1 + |\varphi_{f(0)}(f(a))|}{1 - |\varphi_{f(0)}(f(a))|} \underset{(1.2)}{\leq} \log \frac{1 + |a|}{1 - |a|} = \rho(a, 0)$$

となる. $b \neq 0$ の場合はメビウス変換を考えて, $b = 0$ の場合に帰着する.

簡単のため, $p = 0$ とする. 0 から q への円板鎖 $f_0, \ldots, f_k$ について

$$\rho(0, q) = \rho(0, f_k(z_k)) \underset{\rho\ \text{距離}+f_j(z_j)\,=\,f_{j+1}(0)}{\leq} \sum_{i=1}^{k} \rho(f_i(0), f_i(z_i)) \underset{(1.1)}{\leq} \sum_{i=1}^{k} \rho(0, z_i)$$

となる. 右の inf が Kobayashi 擬距離の定義より $\rho(0, q) \leq d_{\mathrm{Kob}}(0, q)$. 一方, $id : D \to D$ は 0 から q への円板鎖を与えるので定義から $\rho(0, q) \geq d_{\mathrm{Kob}}(0, q)$. よって等号成立する.

[3] 擬距離になるのは定義などから. $d_{\mathrm{Kob},X}(f(p), f(q)) \leq \rho(p, q)$ は上の二つによる. また δ がその

ような擬距離ならば, p から q への円板鎖 $f_0, \ldots, f_k$ について

$$\delta(p,q) \underset{\delta\text{ 擬距離}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \delta(f_i(0), f_i(z_i)) \underset{\text{仮定}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \rho(0, z_i)$$

よって右の inf が Kobayashi 擬距離の定義よりいえる.

[4] 込み入るので省略. 円板鎖を取り換えまくって定義から愚直に示していく. □

Example 1.20. (1). $\Delta = D(0,1)$ の場合は

$$d_{\mathrm{Kob},D(0,1)}(0,z) = \rho(0,z) = \log\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

(2). 半径 $r>0$ の円板 $D(0,r)$ の場合は, $f : D(0,r) \to D(0,1)$ を $f(z) = \frac{z}{r}$ が双正則写像になるので

$$d_{\mathrm{Kob},D(0,r)}(0,z) \underset{1.19\ (1)}{=} d_{\mathrm{Kob},D(0,1)}(f(0), f(z)) = \rho(0, f(z)) = \log\frac{r+|z|}{r-|z|}$$

(3) $\mathbb{C}$ の場合は (2) において, $r \to \infty$ して $d_{\mathrm{Kob},\mathbb{C}} \equiv \log 1 = 0$ となる. よって 1.19 から次が言える.

$$d_{\mathrm{Kob},\mathbb{C}^n} \underset{1.19\ (4)}{=} \max d_{\mathrm{Kob},\mathbb{C}} \equiv 0$$

(4) $\mathbb{C}^*$ について, 全射正則写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ を $f(z) = e^z$ とすれば

$$d_{\mathrm{Kob},\mathbb{C}^*} \underset{1.19\ (1)}{\leq} d_{\mathrm{Kob},\mathbb{C}} \equiv 0$$

(5) 解析空間 X が $\mathbb{C}$-connected(1.6 参照) ならば $d_{\mathrm{Kob},X} \equiv 0$. 証明は以下の通り: $p,q \in X$ について, $f : \mathbb{C} \to X$ で $f(a) = p, f(b) = q$ となる f が存在する場合は

$$d_{\mathrm{Kob},X}(p,q) \underset{1.19\ (1)}{\leq} d_{\mathrm{Kob},\mathbb{C}}(a,b) = 0$$

となりいえる. 一般の場合は, $p,q \in X$ について, $p = p_0, p_1, \ldots, p_l = q$ で p_i と p_{i+1} が $\mathbb{C}$ で結べるものをとれば

$$d_{\mathrm{Kob},X}(p,q) \underset{\text{擬距離}}{\leq} \sum_{i=1}^{l} d_{\mathrm{Kob},X}(p_{i-1}, p_i) = 0$$

よって次が言える

$$\begin{tikzcd}
\text{Oka} \arrow[r, Rightarrow] & \begin{array}{c}\mathbb{C}\text{-dominable} \\ (\exists \mathbb{C}^n \twoheadrightarrow X)\end{array} \arrow[r, Rightarrow] & \mathbb{C}\text{-connected} \arrow[r, Rightarrow] & \begin{array}{c}\text{Kobayashi} \\ \text{pseudometric} \equiv 0\end{array} \\
\begin{array}{c}\text{Rationally} \\ \text{connected}\end{array} \arrow[r, Rightarrow] & \begin{array}{c}\text{Rationally} \\ \text{chain connected}\end{array} \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

特に複素連結 Lie 群 X について, $d_{\mathrm{Kob},X} \equiv 0$ である.

Theorem 1.21 (Brody 78)**.** コンパクト複素多様体について次は同値.

1. *Kobayashi hyperbolic,* つまり d_{Kob} は距離になる. ($d_{\mathrm{Kob}}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ということ)
2. *Brody hyperbolic,* つまり任意の正則写像 $f : \mathbb{C} \to X$ は定数.

他には以下のことが知られている.

Lemma 1.22. *[KL22]* X, Y をコンパクト解析空間とする. 性質 P を "*non-Kobayashi hyperbolic*" または "$d_{\mathrm{Kob},X} \equiv 0$" とするとき, 次が成り立つ.

1. $f : X \to Y$ が *finite* とする. X が性質 P を持つなら, Y も性質 P を持つ. *finite étale* なら逆も成り立つ.
2. $f : X \dashrightarrow Y$ *dominant meromorphic map* について, $d_X = 0$ ならば, $d_Y = 0$.
3. $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ とし, 全ての X_i が性質 P を持つなら, X も性質 P を持つ
4. $f : Y \to X$ *bimeromorphic morphism* で X を *smooth* とする. $d_X \leq \varepsilon$ ならば $d_Y \leq \varepsilon$ である.

(1) の主張に関しては , [Kob98, Theorem 3.2.8] による: X 解析空間, $\pi : \widetilde{X} \to X$ が covering space ならば

$$d_{\mathrm{Kob},X}(p,q) = \inf_{\pi(\widetilde{p})=p, \pi(\widetilde{q})=q,} d_{\mathrm{Kob},\widetilde{X}}(\widetilde{p}, \widetilde{q}).$$

最後の主張については [Kob98, Theorem 3.2.19] による: Zariski closed subset $V \subset X$ で $\operatorname{codim}_X V \geq 2$ ならば,

$$(d_{\mathrm{Kob},X})|_{X \setminus V} = d_{\mathrm{Kob},X \setminus V}$$

Theorem 1.23 (Demailly-Lempert-Shiffman)**.** *X を quasi-projective variety する．このとき Kobayashi 擬距離 $d_{\mathrm{Kob},X}$ は代数曲線で定義される．つまり代数曲線の族 C_i で*

$$d_{\mathrm{Kob},X}(p,q) = \inf \sum_{i=1}^{k} d_{\mathrm{Kob},C_i}(p_{i-1},p_i),$$

となる．ただし $p=p_0,p_1,\dots,p_l=q$ で p_i と p_{i+1} は代数曲線 C_i で結べるものとする．

これからも Rationally chain connected ならば $d_{\mathrm{Kob},X}\equiv 0$ が言える．

1.2.3 Orbifold Kobayashi-Ochiai

Theorem 1.24. *[Cam04, Theorem 8.2] X をコンパクト複素多様体 in Fujiki's class, $c_X : X \dashrightarrow C(X)$ を coremap とする．$\overline{M}$ を連結複素多様体とし，$M\subset\overline{M}$ Zariski open subset とする．*
このとき任意の meromorphic map $\varphi : M \dashrightarrow X$ で $g := c_X\circ\varphi : M \dashrightarrow C(X)$ が非退化 (dominant) になるものについて，g は $\overline{M} \dashrightarrow C(X)$ に meromorphically に拡張する．

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, dashed, "\forall\varphi"] \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "g"'] & X \arrow[d, dashed, "c_X"] \\
\overline{M} \arrow[r, dashed, "\exists\overline{g}"'] & C(X)
\end{tikzcd}$$

$g := c_X\circ\varphi : M \dashrightarrow C(X)$ が非退化とは，M のある点で submersive, つまりヤコビ行列がの階数が $\dim C(X)$ と等しいこと．サードの定理よりこれは g が dominant(全射) と同じである．また c_X の部分は，任意の of general type な射 $f : X \dashrightarrow Y$ でも良い．([Cam04, Chapter 2] 参照.)

Corollary 1.25. *[CW15, Corollary 2.9] X コンパクト複素多様体 in Fujiki's class とする．dominant meromorphic map$\varphi : \mathbb{C}^n \dashrightarrow X$ が存在するならば，X は special である．特に Oka ならば special.*

Proof. $M := \mathbb{C}^n \subset \mathbb{CP}^n =: \overline{M}$ とすると，1.24 より dominant meromorphic map $\overline{g} : \mathbb{CP}^n \dashrightarrow C(X)$ を持つ．$\mathbb{CP}^n$ が special なので，[Cam04, Corollary 2.17] から X も special となる

最後の主張は Oka ならば $\mathbb{C}^n$-dominable, つまり dominant meromorphic map $\varphi : \mathbb{C}^n \dashrightarrow X$ を持つため． □

Remark 1.26. 1.24 の状況において，$D = \overline{M}\setminus M$ は $\overline{M}$ の reduced divisor であるとする．すると

[Cam04, Theorem 8.2](Kobayashi-Ochiai) によって

$$g^* : H^0(C(X), m(K_{C(X)} + \Delta(c_X))) \to H^0(\overline{M}, (\Omega_{\overline{M}}^{\dim C(X)})^{\otimes m}((m-1)D))$$

という写像を得る．g が非退化なので，ある locus で g は全射になることから，g^* は単射になる．

これを用いると 1.25 の別証明を与えることができる．$M := \mathbb{C}^n \subset \mathbb{CP}^n =: \overline{M}$ とおくと，

$$H^0(\overline{M}, (\Omega_{\mathbb{CP}^n}^{\dim C(X)})^{\otimes m}((m-1)D)) = 0 \tag{1.3}$$

である．よって $\dim C(X) = 0$ である．

1.3 の証明に関しては次のとおり:[8] $D = \mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{C}^n$ は $\mathbb{CP}^n$ の hyperplane と同一視でき $D \sim \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(1)$ である．$p = \dim C(X)$ とすると，D^{n-1} に関する slope μ_D は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\mu_D\left((\Omega_{\mathbb{CP}^n}^p)^{\otimes m}((m-1)D)\right) &\underset{\text{slope の加法性}}{=} \mu_D\left((\Omega_{\mathbb{CP}^n}^p)^{\otimes m}\right) + \mu_D((m-1)D)) \\
&\underset{D^n=1}{=} m\mu_D(\Omega_{\mathbb{CP}^n}^p) + m - 1 \\
&\underset{[\text{Iwa21}, Prop.4.2]}{=} -m\frac{p(n+1)}{n} + m - 1 < 0
\end{aligned}$$

また今 $\mathbb{CP}^n$ は KE 計量を持つので $(\Omega_{\mathbb{CP}^n}^p)^{\otimes m}((m-1)D)$ は D-semistable である．

一般に ample line bundle A について，vector bundle E が A-semistable かつ $\mu_A(E) < 0$ ならば，$H^0(X, E) = 0$ である (例えば [Kob14, Chapter 5] 参照) よって 1.3 が言える．

Theorem 1.27. *[CW15, Theorem 2.10] X, Z を projective manifold, M を smooth algebraic variety とする．次を仮定する．*

- *$\tau : M \to Z$ という全射な algebraic 射を持つ．*
- *任意の τ の fiber は $\mathbb{C}^k$ と双正則な affine 空間とする．*

任意の meromorphic map $G : M \dashrightarrow X$ で $g = c_X \circ G : M \dashrightarrow C(X)$ が非退化 (dominant) になるものについて，ある $\varphi : C(Z) \dashrightarrow C(X)$ が存在し，次の図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\tau"] \arrow[rr, dashed, bend left, "\forall G"] & Z \arrow[d, dashed, "c_Z"'] & X \arrow[d, dashed, "c_X"] \\
& C(Z) \arrow[r, dashed, "\exists\varphi"] & C(X)
\end{tikzcd}$$

[8][Cam04, Example 8.8] には”次の事実は容易に確認できる”とあったが，これは容易じゃないと思う．

Proof. $M = \overline{M} \setminus D$ となるような projective variety $\overline{M}$ と normal crossing な超曲面 D をとる．すると $\overline{\tau} : \overline{M} \to Z$ と言う拡張が取れる．[9]

また 1.24 から g の拡張 $\overline{g} : \overline{M} \dashrightarrow C(X)$ が存在する．core map の functoriality [Cam04, Chapter 2] も用いて次の図を得る．

$$\begin{tikzcd}
\overline{M} \arrow[r, "\overline{\tau}"] \arrow[d, dashed, "c_{\overline{M}}"] \arrow[rr, dashed, bend left, "G"] & Z \arrow[d, dashed, "c_Z"'] & X \arrow[d, dashed, "c_X"] \\
C(\overline{M}) \arrow[r, dashed, "c_{\overline{\tau}}"] \arrow[rr, dashed, bend right, "c_{\overline{G}}"'] & C(Z) & C(X)
\end{tikzcd}$$

$c_{\overline{\tau}} : C(\overline{M}) \dashrightarrow C(Z)$ が bimeromorphic であることを示す．もしこれが示されれば $\varphi := c_{\overline{G}} \circ c_{\overline{\tau}}^{-1} : C(Z) \dashrightarrow C(X)$ とおけば証明が完了する．

さて $\overline{\tau} : \overline{M} \to Z$ の general fiber は有理連結 (rationally connected) である．これは

$$\tau : M \hookrightarrow \overline{M} \underset{\overline{\tau}}{\to} Z$$

より，一般の $z \in Z$ について $\mathbb{C}^k \cong \tau^{-1}(z) \subset \overline{\tau}^{-1}(z)$ である．よって $\overline{\tau}^{-1}(z)$ は $\mathbb{CP}^k$ と双有理であり，特に rationally connected である．

よって $r : \overline{M} \dashrightarrow R(\overline{M})$ を rational quotient(MRC fibration) とすると，$r(\overline{\tau}^{-1}(z))$ は一般の $z \in Z$ で point となる．よって $\alpha : Z \dashrightarrow R(\overline{M})$ があって，$\alpha \circ \overline{\tau} = r$ となる．

$$\begin{tikzcd}
\overline{M} \arrow[r, "\overline{\tau}"] \arrow[d, dashed, "c_{\overline{M}}"] \arrow[rr, dashed, bend left, "r"] & Z \arrow[r, dashed, "\exists\alpha"'] \arrow[d, dashed, "c_Z"'] & R(\overline{M}) \arrow[d, dashed, "c_{R(\overline{M})}"] \\
C(\overline{M}) \arrow[r, dashed, "c_{\overline{\tau}}"] \arrow[rr, dashed, bend right, "c_r"'] & C(Z) \arrow[r, dashed, "\exists c_\alpha"'] & C(R(\overline{M}))
\end{tikzcd}$$

coremap の functoriality より

$$c_\alpha : C(Z) \dashrightarrow C(R(\overline{M})) \quad \text{and} \quad c_\alpha \circ c_{\overline{\tau}} = c_r$$

である．よって [Cam04, Theorem 3.26](下参照) より，$c_r : C(\overline{M}) \dashrightarrow C(R(\overline{M}))$ は bimeromorphic であるので言えた． □

[9] Nagata のコンパクト化．https://stacks.math.columbia.edu/tag/0F3T?utm_source=chatgpt.com 参照．ここに代数性を使っている．(Stein だと無理だと思う)

Theorem 1.28. *[Cam04, Theorem 3.26] Y をコンパクト複素多様体 in Fujiki's class, $r : Y \dashrightarrow R(Y)$ を rational quotient とするとき $c_r : C(Y) \dashrightarrow C(R(Y))$ は bimeromorphic である.*

Remark 1.29. [CW15, Remark 2.11] もっと強く次が成り立つ.

- X, Z projective manifold.
- $F : X \dashrightarrow Y$ general type orbifold base への fibration.
- M smooth algebraic variety で, projective manifold $\overline{M}$ と, normal crossing hypersurface D によるコンパクト化 $M = \overline{M} \setminus D$ をもつとする.
- $\overline{\tau} : \overline{M} \to Z$ の fiber は rationally connected であり, 任意の D の既約成分は Z に全射でうつる.
- meromorphic map $G : M \dashrightarrow X$ で $g = F \circ G : M \dashrightarrow Y$ が dominant であるとする.

このときある $\varphi : C(Z) \dashrightarrow Y$ が存在し, 次の図式が可換になる.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\tau"] \arrow[rr, dashed, bend left, "\forall G"] & Z \arrow[d, dashed, "c_Z"'] & X \arrow[d, dashed, "F"] \\
& C(Z) \arrow[r, dashed, "\exists\varphi"] & Y
\end{tikzcd}$$

証明には [GHS03] と [Cam04, Theorem 3.26] を使う.

1.3 3 章 Jouanoulou's trick

Proposition 1.30. *[CW15, Proposition 3.1] X を projective manifold とする (もっと強く variety でも良い).*
このときある <u>affine</u> 複素多様体 M と正則全射 $\tau : M \to X$ があって次を満たす.

1. *$\tau : M \to X$ ホモトピー同値*
2. *τ の全てのファイバーは $\mathbb{C}^n$ と同相. 特に任意のファイバーで Kobayashi 擬距離が消えている.*
3. *τ は局所的に自明なファイバー束である.*
4. *τ は real analytic section を持つ.*

M が Affine とは $\mathbb{C}^n$ の閉代数多様体と同型なもの. 同じことだが $M \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]/(f_1, \ldots, f_l))$ となること. この命題において"M が affine(Stein)"であることが重要である.

Remark 1.31. [CW15, Remark 3.2] 上は [Ĺ05] で紹介されたテクニック. "Good manifold"("quasi-projective manifold 上の affine bundle でファイバーが $\mathbb{C}^n$") でも上の主張は成り立つ.

Proof. [$X = \mathbb{CP}^N$ のとき.] $(\mathbb{CP}^N)^\vee$ を dual projective space, つまり $\mathbb{CP}^N$ の hyperplane の集合とする. $P := \mathbb{CP}^N \times (\mathbb{CP}^N)^\vee$ とし

$$D := \{(x, H) \in P \mid x \in H\} \subset P = \mathbb{CP}^N \times (\mathbb{CP}^N)^\vee$$

とおく. $\mathbb{CP}^N$ の hyperplane のなる universal family の graph である.

$D \subset P$ は ample である.[10] まず $(\mathbb{CP}^N)^\vee \cong \mathbb{CP}^N$ である. これは

$$(\mathbb{CP}^N)^\vee \ni H = \{[z_0 : \cdots : z_N] \in \mathbb{CP}^N \mid a_0 z_0 + \cdots + a_N z_N = 0\} \mapsto [a_0 : \cdots a_N] \in \mathbb{CP}^N$$

で対応する. よって以後 $P = \mathbb{CP}^N \times \mathbb{CP}^N$ とみなす. この同一視によって,

$$D = \{([z_0 : \cdots : z_N], [w_0 : \cdots : w_N]) \in \mathbb{CP}^N \times \mathbb{CP}^N \mid z_0 w_0 + \cdots + z_N w_N = 0\}$$

となる. よって D は $\mathbb{CP}^N \times \mathbb{CP}^N$ の hyperplane になるので ample である. [11]

$V := P \setminus D$, $\tau := pr_1|_V : V \to \mathbb{CP}^N$ とおけば, これが (1-4) の条件を満たす affine 多様体であることを示す. これを見ていく.

(1-3). $U := \{z_N \neq 0\} \subset \mathbb{CP}^N$ とする. $U \cong \mathbb{C}^N$ であり, U という座標近傍で見ると, $\eta_i := \frac{z_i}{z_N}$ として

$$\{z_N \neq 0\} \times \mathbb{CP}^{N-1} \cong \tau^{-1}(\{Z_N \neq 0\} \cap D) = \{((\eta_0, \ldots, \eta_{N-1}), [w_0 : \cdots : w_N]) \mid w_N = \eta_0 w_0 + \cdots + \eta_{n-1} w_{N-1}\}$$

$$(\eta_0, \ldots, \eta_{N-1}), [w_0 : \ldots : w_{N-1}] \mapsto (\eta_0, \ldots, \eta_{N-1}), [w_0 : \ldots : w_{n-1} : \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i w_i]$$

である. よって $\tau^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{P}^N \setminus U \times \mathbb{P}^{N-1} \cong U \times \mathbb{C}^N$ である. これより (2), (3) が言える. (1) は (3) より両者のホモトピー群が等しいので Whitehead の定理 1.46 からわかる.

(4) に関しては,

$$\mathbb{CP}^N \ni [z_0 : \cdots : z_N] \mapsto ([z_0 : \cdots : z_N], [\overline{z_0} : \cdots : \overline{z_N}]) \in V$$

が real analytic な section となる.

M が affine になることに関しては, 一般論から.[12] Projective variety $W = \mathrm{Proj}\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_l) =$

[10] [CW15] には"Projection $pr_1 : P \to \mathbb{CP}^N$, $pr_2 : P \to (\mathbb{CP}^N)^\vee$ の fiber に含まれる line のなす二つの family と positive に交差するから ample である"と書いてあったがわからなかった.

[11] セグレ埋め込み $\mathbb{CP}^N \times (\mathbb{CP}^N)^\vee \hookrightarrow \mathbb{CP}^{N^2+2N}$ によって, D は $\mathbb{CP}^{N^2+2N}$ の 2 次超曲面内の hypersurface になることからもわかる. セグレ埋め込みは https://mathlog.info/articles/1265 参照

[12] projective variety の基本開集合 $D_+(f)$ が affine になる. https://stacks.math.columbia.edu/tag/01MB?utm_source=chatgpt.com

Proj $\oplus_{l\in\mathbb{Z}_+} S_l$ について, $g(X_0,\dots,X_n)$ を d 次斉次多項式としたとき

$$\{w \in W \mid g(w) \neq 0\} \cong \mathrm{Spec}\left(\left\{\frac{S_{kd}}{g^k} \mid k \in \mathbb{Z}_+\right\}\right)$$

となるので affine である.

一般論を使わなくても, セグレ埋め込み

$$\mathbb{CP}^N \times \mathbb{CP}^N \hookrightarrow \mathbb{CP}^{N^2-1} \quad (z,w) \mapsto (z_i w_j)_{1\leq i,j\leq N}$$

を使ってもわかる. $\mathbb{CP}^{N^2-1}$ の座標を T_{ij} とすると $P \cong \{T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji} = 0\}_{1\leq i,j\leq N} \subset \mathbb{CP}^{N^2-1}$ という零点集合になる. この同一視によって $D \cong P \cap \{\sum_{i=1}^N T_{ii} = 0\}$ となる. よって

$$M \cong \{T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji} = 0\}_{1\leq i,j\leq N} \cap \{\sum_{i=1}^N T_{ii} \neq 0\}$$

となる. M は Affine 多様体 $\{S_{ii}S_{jj} - S_{ij}S_{ji} = 0\} \cap \{\sum_{i=1}^N S_{ii} = 1\} \subset \mathbb{C}^{N^2}$ と同型になる.

一般には $X \subset \mathbb{CP}^N$ を閉埋め込みとして, $M := {pr_1}^{-1}(X)$ とすれば良い. これは $X \subset \mathbb{CP}^N, V \to \mathbb{CP}^N$ の base change なので, と M は $V = \mathbb{CP}^N \setminus D$ の closed algebraic subset になり, V が affine なので affine となる. (1-4) に関しても V 上で成り立っているので, M でも成り立つ. (base change でファイバーは不変である. X が singular でも C^∞ 性はこれからわかる). □

Example 1.32. $X = \mathbb{CP}^1$ のとき.

- $P := \mathbb{CP}^1 \times (\mathbb{CP}^1)^\vee = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$
- $D \cong \{(x,x) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1\}$. 特に対角線集合と同型. これは

  $$D = \{([z_0 : z_1],[w_0 : w_1]) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \mid z_0w_0 + z_1w_1 = 0\} = \{([z_0 : z_1],[-z_1 : z_0]) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1\}$$

  なので, 後ろの座標を $[-z_1 : z_0] \mapsto [z_0 : z_1]$ と入れ替えれば言える.
- $V = P \setminus D = \{(x,y) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \mid x \neq y\}$
- $\tau = pr_1|_V : V \to X\ (x,y) \mapsto x$. これは $\mathbb{C}$-bundle になる.
- real analytic section $X \to V$ は例えば $x \mapsto (x, \overline{x})$ などがある.
- セグレ埋め込みは

  $$\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^3 \quad [a:b],[c,d] \mapsto [ac : ad : bc : bd]$$

  であり, $P \cong \{xw - yz = 0\} \subset \mathbb{CP}^3$, $D \cong \{x + w = 0\}$ となる. よって

  $$P \setminus D \cong \{xw - yz = 0\} \cap \{x + w \neq 0\} \subset \mathbb{CP}^3$$

である．これは $\mathbb{C}^3$ 内の $x(1-x)-yz=0$ と同型である.[13]

C が代数曲線のときは finte map $f : C \to \mathbb{P}^1$ として，その base change$M \to C$ をとれば，これが欲しいやつとなる．[14]

Question 1.33. [CW15, Ques 3.3] 任意の複素多様体 Z について，ある Stein manifold S と正則写像 $f : S \to Z$ があって，その fiber が $\mathbb{C}^n$ となるものはあるか？

Z が projective なら上より存在，コンパクト Kähler のときでも未解決.

1.4 4章 Opposite complex structures and associated cohomological integrals

1.4.1 dominant rational map での引き戻し

下の補題に関して現論文では"in Fujiki's class"の仮定はなかったが，多分必要だと思う．

Lemma 1.34. *[CW15, Lemma 4.1] X, Y コンパクト複素多様体 in Fujiki's class, f : $X \dashrightarrow Y$ dominant meromorphic map, $I(f) \subset X$ 不確定点とする.*
このとき任意の $c \in H^{k,k}(Y)$ について，ただ一つの $c' \in H^{k,k}(X)$ で次を満たすものが存在する:
任意の X 上の *closed* $(n-k, n-k)$*-form* α, Y 上の *closed* (k,k)*-form* β で，$c = [\beta] \in H^{k,k}(Y)$ となるものについて，

$$[\alpha] \cdot c' = \int_{X \setminus I(f)} \alpha \wedge f^*\beta$$

上のおいて $[c]$ の f での引き戻しを $f^*([c]) := c'$ として定義する．

$H^{k,k}(X)$ については次のとおり（[Dem, Section 6.8, 6.12] 参照）．Dolbeault cohomology

$$H^{p,q}(X) := H^q(X, \Omega_X^p) := \{\overline{\partial}\text{-closed } (p,q)\text{-forms}\}/\{\overline{\partial}\text{-exact } (p,q)\text{-forms}\}$$

で定める．Kähler ならば，Bott-Chern cohomology group

$$H_{BC}^{p,q}(X) := \{d\text{-closed } (p,q)\text{-forms}\}/\{\partial\overline{\partial}\text{-exact } (p,q)\text{-forms}\}$$

として，$H^{p,q}(X) \cong H_{BC}^{p,q}(X)$ である．また Kähler indentity から

$$H_{dR}^k(X) \cong \oplus_{p+q=k} H^{p,q}(X) \quad \text{and} \quad \overline{H^{p,q}(X)} \cong H^{q,p}(X)$$

[13] $x + w = 1$ を $xw - yz = 0$ に代入する.
[14] と書いてあったがこれ本当？ singular になると思うんだけど...

である．これは Fujiki でも成り立つ．また Serre duality によって (これには Kähler は不要)

$$<>: H^{p,q}(X) \times H^{n-p,n-q}(X) \to \mathbb{C}$$

は非退化である．

Proof. [c' の唯一性] $(c_1 - c_2) \cdot [\alpha] = 0$ が任意の closed $(n-k, n-k)$ form α で成り立つので, Serre duality より, $c_1 = c_2$ である．

[c' の存在性] $\tau : X' \to X, F : X' \to Y$ を f の不確定点除去とする．$F^* : H^{p,q}(Y) \to H^{p,q}(X')$ によって, $F^*[\beta] \in H^{k,k}(X')$ が定義できる．そこで α を X 上の closed $(n-k, n-k)$-closed form として

$$\alpha \mapsto \int_{X'} \tau^* \alpha \wedge F^* \beta$$

と定義する．すると

$$F^*[\beta] : H^{n-k,n-k}(X) \to \mathbb{C} \quad [\alpha] \mapsto \int_{X'} \tau^* \alpha \wedge F^* \beta$$

が定義できる．$\tau^* : H^{n-k,n-k}(X) \hookrightarrow H^{n-k,n-k}(X')$ なので, $F^* \beta$ は非退化である．よって, Serre duality より, $F^*[\beta] \in H^{k,k}(X)$ が定義できる．これを $c' \in H^{k,k}(X)$ とする．定義から

$$[\alpha] \cdot c' \underset{\text{def}}{=} \int_{X'} \tau^* \alpha \wedge F^* \beta \underset{\text{smooth}}{=} \int_{X' \setminus \tau^{-1}(I(f))} \tau^* \alpha \wedge F^* \beta \underset{\text{isom}}{=} \int_{X \setminus I(f)} \alpha \wedge f^* \beta$$

となる． □

1.4.2 Opposite complex structure

以下概複素構造などの復習.

X を n 次元複素多様体とする．$X_{\mathbb{R}}$ を X を $2n$ 次元実多様体とみなしたものとし, $T_{\mathbb{R}}X$ を $X_{\mathbb{R}}$ の実接ベクトル束とする．$z_i := x_i + \sqrt{-1} y_i$ として

$$J : T_{\mathbb{R}}X \to T_{\mathbb{R}}X \quad J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) := \frac{\partial}{\partial y_i} \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) := -\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.4}$$

と定義する．これは $J \circ J = -Id$ となる．

一般に $J \circ J = -Id$ となるものを概複素構造という．概複素構造 J について

$$T_{\mathbb{R}}X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T'X \oplus T''X$$

と分解できる, ここで $T'X$ (resp. $T''X$) は J の固有値 $\sqrt{-1}$ (resp. $-\sqrt{-1}$) に対応する部分束であ

る. 同様にして余接ベクトル束 $T^*_{\mathbb{R}}X$ について

$$T^*_{\mathbb{R}}X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T'^*X \oplus T''^*X$$

と分解できる. 同様にして,

$$\wedge^r T^*_{\mathbb{R}}X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \sum_{p+q=r} \wedge^p T'^*X \otimes \wedge^q T''^*X$$

である.

J の捩れを, $u, v \in T_{\mathbb{R}}X$ について, Nijenhuis テンソル

$$N(u,v) := [Ju, Jv] - [u,v] - J[u, Jv] - J[Ju, v]$$

と定義する. $N(fu,v) = fN(u,v) = N(u,fv)$ なので, $N_x : T_{\mathbb{R},x}X \times T_{\mathbb{R},x}X \to T_{\mathbb{R},x}X$ という交代双線形写像を得る.

Theorem 1.35 (Newlander-Nirenberg)**.** *$N = 0$(J が可積分) ならば複素構造である*

Definition 1.36. X を n 次元複素多様体, J を X に対応する可積分な概複素構造, $X_{\mathbb{R}}$ を X の $2n$ 次元実多様体構造とする.
X の opposite (conjugate) complex structure $\overline{X}$ を以下で定める.

$$\overline{X} := (X_{\mathbb{R}}, -J)$$

$\overline{X}$ が複素多様体となるのは, $-J$ が可積分になるから. 実際

$$N_{-J}(u,v) = [-Ju, -Jv] - [u,v] - (-J)[u, -Jv] - (-J)[-Ju, v] = [Ju, Jv] - [u,v] - J[u, Jv] - J[Ju, v] = N_J(u,v)$$

なので J が可積分と $-J$ 可積分は同値である.

Example 1.37. $X = (\mathbb{C}^n, z_1, \ldots, z_n)$ について $\overline{X} = (\mathbb{C}^n, \overline{z}^1, \ldots, \overline{z}^n)$ である. この理由を定義から説明する.

以下 1.4 のあたりのように, $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ と実係数で表示し, $X_{\mathbb{R}}$ に $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ という実座標を取る. すると

$$T_{\mathbb{R}}X = \mathbb{R}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}\right)$$

となる.[15]. よって

$$T_{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}\right) = T'_X \oplus T''_X$$

である. 定義から次がわかる.

$$T'_X := \mathbb{C}\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_1}}_{=:\frac{\partial}{\partial z_1}}, \ldots, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_n} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_n}}_{=:\frac{\partial}{\partial z_n}},\right) \quad T''_X := \mathbb{C}\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_1}}_{=:\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}}, \ldots, \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_n} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_n}}_{=:\frac{\partial}{\partial \overline{z_n}}}\right)$$

さて $\overline{X} = (X_{\mathbb{R}}, -J)$ の複素構造においての $T_{\overline{X}}$ とは,

$$T_{\overline{X}} = (-J : T_{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C} \to T_{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C} \text{ の固有値 } \sqrt{-1} \text{ の固有空間})$$

すると 1.4 から

$$(-J)\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_i}}\right) \underset{\text{定義}}{=} -J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) - \sqrt{-1}J\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) \underset{1.4}{=} -\frac{\partial}{\partial y_i} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \overline{z_i}}$$

である. よっていえた.

さて X を n 次元複素多様体, J を X に対応する可積分な概複素構造, $X_{\mathbb{R}}$ を X の $2n$ 次元実多様体構造とする. また X の正則接ベクトル束を, T'_X と同一視する.

$h : T'_X \times T'_X \to \mathbb{C}$ を X のエルミート計量とする.[16] そして

$$h_{i\bar{j}} := h\left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right)$$

とする. すると以下のように h から $\widetilde{h} : T_{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C} \times T_{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ という拡張を得る.

- T'_X と T''_X は $\widetilde{h}$ で直交している.
- $u, v \in T''_X$ について,

$$\widetilde{h}(u, v) := \overline{h(\overline{u}, \overline{v})} \tag{1.5}$$

簡単な計算から $h_{i\bar{j}} = g'_{ij} + \sqrt{-1}g''_{ij}$ とすると

$$g'_{ij} = \widetilde{h}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \widetilde{h}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) \quad g''_{ij} = \widetilde{h}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\widetilde{h}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right)$$

[15] $R(\cdot)$ とは $\mathbb{R}$ で生成されるベクトル空間とする.
[16] 以下は中野 多変数函数論 9 章を参照した.

となる．特に g は Riemann 計量で $g(X,Y)=g(JX,JY)\ (X,Y\in T_{\mathbb{R}}X)$ となるものを誘導する．逆にこのような Riemann 計量からエルミート計量 h を誘導できる

さて $\overline{X}:=(X_{\mathbb{R}},-J)$ においてエルミート計量は 1.5 より

$$\widetilde{h}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z_i}},\frac{\partial}{\partial\overline{z_j}}\right)=\overline{h_{i\bar{j}}}(=h_{j\bar{i}}) \tag{1.6}$$

で与えられる．以下これを $\overline{h}$ とかく．h の基本 2 次形式 ω_h は

$$\omega_h:=\sqrt{-1}\sum_{i,j}h_{i\bar{j}}dz_i\wedge d\overline{z_j}$$

で与えられるので, $\overline{h}$ の基本 2 次形式 $\omega_{\overline{h}}$ は

$$\omega_{\overline{h}}:=\sqrt{-1}\sum_{i,j}\overline{h_{i\bar{j}}}d\overline{z_i}\wedge dz_j\underset{1.6}{=}-\sqrt{-1}\sum_{i,j}h_{j\bar{i}}dz_j\wedge d\overline{z_i}=-\omega_h$$

である．特に ω_h が Kähler ならば, $\omega_{\overline{h}}$ も Kähler となる．

また $X=(X_{\mathbb{R}},J)$ の向きを ω_h^n で入れ, $\overline{X}=(X_{\mathbb{R}},-J)$ の向きを $\omega_{\overline{h}}$ で入れる.[17] すると $\omega_h^n=(-1)^n\omega_{\overline{h}}$ なので, $(-1)^n$ の ambiguity が出る．つまり任意の $X_{\mathbb{R}}$ 上の C^∞ 級 $2n$-form α について,

$$\int_X\alpha=(-1)^n\int_{\overline{X}}\alpha$$

となる．以上をまとめると次のとおり．

Lemma 1.38. *X を n 次元複素多様体, J を X に対応する可積分な概複素構造, $X_{\mathbb{R}}$ を X の $2n$ 次元実多様体構造, $\overline{X}=(X_{\mathbb{R}},-J)$ を opposite complex structure とする．*
h を X のエルミート計量, ω_h を h の基本 2 次形式とするとき次が成り立つ．

- *$\overline{h}$ で $\overline{X}$ のエルミート計量が与えられる．*
- *$\omega_{\overline{h}}=-\omega_h$．特に h がケーラー計量ならば, $\overline{h}$ もそう．*
- *$\omega_{\overline{h}}^n$ で $\overline{X}$ に向きを入れると, X の向きと $(-1)^n$ の違いが出る．特に任意の $X_{\mathbb{R}}(=X,\overline{X})$ 上の C^∞ 級 $2n$-form α について,*

$$\int_X\alpha=(-1)^n\int_{\overline{X}}\alpha$$

[17] $2n$ 次元実多様体 $X_{\mathbb{R}}$ に向きを与えるとは, どこでも消えない $2n$-form を与えることと同じ．

1.4.3 opposite structure and meromorphic map

以下の補題に関しても X の条件がなかったが, 多分 Kähler の仮定は必要だと思う. 下線がついているところは私が付け加えた仮定である.[18]

Lemma 1.39. *[CW15, Lemma 4.2, Corollary 4.3]* X をコンパクト n 次元 *Kähler* 多様体, $\overline{X}$ をその *opposite* とする.

- $\zeta : \overline{X} \to X$ C^∞ 級写像.
- $c : X \dashrightarrow Y$ を複素多様体 Y への *meromorphic map.*
- $\varphi := c \circ \zeta : \overline{X} \dashrightarrow Y$
- α*:* Y 上の *d-closed* C^∞ 級 $2d$*-form.*
- ω_X*:* X 上の$\underline{\textit{Kähler form}}$.

$\zeta \underset{homotopic}{\sim} id_X$ であるならば, $\underline{\omega_{\overline{X}} := -\omega_X}$として,

$$I' := \int_{\overline{X}} \omega_{\overline{X}} \wedge \varphi^*\alpha = (-1)^d \int_X \omega_X^{n-d} \wedge c^*\alpha =: (-1)^d I$$

となる. *(*$c^*\alpha$ は *1.34* の定義*)*
さらに $\dim Y > 0$ かつ $c : X \dashrightarrow Y$ が非退化 *(dominant)* ならば, $\varphi := c \circ \zeta : \overline{X} \dashrightarrow Y$ は *meromorphic* ではない.

簡単な例は $\zeta = id_X : \overline{X} \to X, c = id_X : X \to X$ である. 明らかに $\varphi := c \circ \zeta = id_X : \overline{X} \to X$ は正則ではない.

Proof. $\omega_{\overline{X}} := -\omega_X$ とする. 1.38 より $(\overline{X}, \omega_{\overline{X}})$ は Kähler 多様体で, 向きづけは $(-1)^n$ の違いが出る.

ζ と id_X は homotopic であるので

$$\zeta^* = id_X : H^{2(n-d)}(X) \to H^{2(n-d)}(\overline{X})$$

[18] 証明を見ると必要な仮定などが欠如していた. また色々と誤植がひどかった. 例として $\omega_{\overline{X}}$ が何か明記がなかった.

となる．よって

$$\begin{aligned}I = \int_X \omega_X^{n-d} \wedge c^*\alpha \underset{\text{pullback}}{=} \int_{X_\mathbb{R}} \zeta^*\omega_X^{n-d} \wedge c^*\alpha \\ &\underset{\text{orientation}}{=} (-1)^n \int_{\overline{X}} id_X^* \omega_X^{n-d} \wedge c^*\alpha \\ &\underset{\omega_{\overline{X}}\ \text{の定義}}{=} (-1)^{n+n-d} \int_{\overline{X}} \omega_{\overline{X}}^{n-d} \wedge c^*\alpha \\ &= (-1)^d I'\end{aligned}$$

となりいえる．

最後の主張に関して，Y を Kähler と仮定して良い[19] $\alpha = \omega_Y$ を Kähler form とすると

$$I := \int_X \omega_X^{n-1} \wedge c^*\omega_Y \underset{\text{非退化}}{>} 0$$

である．一方，もし meromorphic ならば，$I' = \int_{\overline{X}} \omega_{\overline{X}} \wedge \varphi^*\omega_Y \geq 0$ でもある．これは $I = (-1)I'$ に矛盾する． □

1.5 5 章 h-principle and Brody-hyperbolicity

Proposition 1.40. *[CW15, Proposition 5.1]* n 次元球面 $S^n := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}$ は n 次元 *affine quadric*

$$Q_n := \{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n z_i^2 = 1\}$$

と *homotopic* である．
また Q_n の任意の *2* 点は $\mathbb{C}^*$ によって結ばれる．特に *Kobayashi pseudo-metric* は常に *0* である．

Proof. まず $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ とすると $\sum_{i=0}^n z_i^2 = 1$ という条件は

$$\sum_{i=0}^n x_i^2 - y_i^2 = 1 \quad \text{and} \quad \sum_{i=0}^n x_i \cdot y_i = 0 \tag{1.7}$$

[19] Varochros の定理から $X \to Y$ が flat かつ X が Kähler なら Y も Kähler になる．よって flattening をとると Y の bimeromorphic model が Kähler になる．よって Y を Kähler として良い．

となる．今 $\mathbb{R}^{n+1}$ について，$q(x,y) := \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot y_i$ とする．

$$\begin{array}{cccc} \rho : & Q_n & \to & N_n := \{(x,y) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid q(x,y) = 0\} \\ & z = x + iy = (x_0 + iy_0, \cdots, x_n + iy_n) & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1+q(y,y)}}(x,y) = \left(\frac{(x_0,\ldots,x_n)}{\sqrt{1+q(y,y)}}, \frac{(y_0,\ldots,y_n)}{\sqrt{1+q(y,y)}} \right) \end{array}$$

とする．1.7 より Well defined で $\frac{x}{\sqrt{1+q(y,y)}} \in S^n$ となる．

$D^{n+1} = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid q(y,y) < 1\}$ とすると．$\rho(Q_n) = S^n \times D^{n+1}$ であり $\rho : Q_n \to S^n \times D^{n+1}$ は連続全単射である．そして逆写像は

$$\begin{array}{cccc} \rho^{-1} : & S^n \times D^{n+1} & \to & Q_n \\ & (s,t) & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1-q(t,t)}}(s,t) = \left(\frac{(s_0,\ldots,s_n)}{\sqrt{1-q(t,t)}}, \frac{(t_0,\ldots,t_n)}{\sqrt{1-q(t,t)}} \right) \end{array}$$

となる．よって Q_n と $S^n \times D^{n+1}$ が同相になる．よって Q_n と S^n は homotopic.

Q_n が $\mathbb{C}^*$-connected を示す.[20]

$$M = \{(z_0 : \cdots : z_n : z_{n+1}) \in \mathbb{CP}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} z_i^2 = z_{n+1}^2\} = \{(z_0 : \cdots : z_n : z_{n+1}) \in \mathbb{CP}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} z_i^2 + (\sqrt{-1} z_{n+1})^2 = 0\}$$

とおく．$Q_n = M \setminus \{z_{n+1} = 0\}$ である．

今 $x, y \in M$ とする．すると $x, y \in H \cong \mathbb{CP}^3 \subset \mathbb{CP}^{n+1}$ で $M \cap H \subset \mathbb{CP}^3$ が 2 次曲面になるものが存在する．($\sum_{i=0}^{n} z_i^2 + (\sqrt{-1} z_{n+1})^2 = 0$ という 2 次形式が退化しないようにとる) よって $\mathbb{CP}^3$ 内の 2 次曲面 $M \cap H$ について，

$$M \cap H = \{z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0\} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

であるので[21]，これから $x, y \in M$ は次数 2 の滑らかな有理曲線で結ぶことができる．

以上より $x, y \in Q_n = M \setminus \{z_{n+1} = 0\}$ について，ある次数 2 の滑らかな有理曲線 C があって $x, y \in C$ となる．$C \cap \{z_{n+1} = 0\}$ は交点数を計算すると 2 となるので，x, y は $\mathbb{P}^1$ から 2 点引いた $\mathbb{C}^*$ で結ぶことができる．

Kobayashi-pseudo metric が 0 に関しては，$x, y \in Q_n$ について，$f : \mathbb{C}^* \to Q_n$ で $f(0) = x, f(1) = y$ をとると

$$d_{\mathrm{Kob},Q_n}(x,y) = d_{\mathrm{Kob},Q_n}(f(0), f(1)) \underset{\text{Prop. } 1.19}{\leq} d_{\mathrm{Kob},C^*}(0,1) \underset{d_{\mathrm{Kob},\mathbb{C}^*} \equiv 0}{=} 0$$

となりいえる． □

[20] CW15 の説明はよくわからんかったので別証

[21] セグレ埋め込み $[a:b], [c,d] \mapsto [ac : ad : bc : bd]$ で同型になる

Question 1.41. [CW15, Question 5.2] Z を連結実多様体もしくは有限次元 CW 複体とする．このとき「Z と homotopic で, Kobayashi 擬距離が 0 となる Stein 多様体 S の存在」を特徴づける topological obstruction はあるか？

例えば, 実次元 2 のときは種数 g がそれに当たる．なお Kobayashi 擬距離の部分の仮定を外せば常に正しい

Proposition 1.42. *[CW15, Proposition 5.3] Z 連結実多様体もしくは有限次元 CW 複体とする．Z と homotopic な Stein 多様体 S が存在する．*

Grauert による Stein の特徴付けである.([Fc18, Corollary 3.5.3] 参照)．Eliashberg の定理からもわかる．ただこの証明壊滅的にわからなかったので, 教えてください．なおこの 1.42 はこの後全く使わないです．

Proof. Z が CW-複体の場合は連結実多様体の場合に帰着できる．というのも Z が CW-複体ならば埋め込み $Z \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ が存在する．よって, ある Z の開近傍 $U \subset \mathbb{R}^n$ があって, Z は U と homotopic である．これは有名な事実?? U は連結実多様体より良い．

以下 Z が連結実多様体のときを考える．$\mathbb{R}^3$ と直積を取ることで, $\dim_{\mathbb{R}}(Z) > 2$ を仮定して良い．$M := T^*_{\mathbb{R}}Z$ を Z の余接束とする．M はシンプレクティック多様体 (2-formω で $\omega^{\dim Z}$ が非退化なもの) が存在する．よって almost complex structureJ_ω が存在する.???

$M = T^*Z$ の計量 h と Z 上の exhaustive Morse 関数 ρ をとる．すると $p(v) = \rho(\pi(v)) + h(v)$ が M 上の exhaustive Morse 関数となる．p の critical point は全て $M := T^*_{\mathbb{R}}Z \to Z$ の 0section にあり, それは ρ の critical point と一致する．???

よって, critical point で index $> \dim(Z) = \frac{1}{2}\dim(M)$ となるものは存在しない．下の Eliashberg の定理 (下の [Eli90, Theorem 1.3.1]) から M は Stein 多様体になる．??? そして $M := T^*_{\mathbb{R}}Z \to Z$ は homotopy 同値である．

Theorem 1.43. *[Eli90, Theorem 1.3.1] Let X be a $2n$-dimensional smooth manifold with an almost complex structure J. Let $\varphi : M \to \mathbb{R}$ be a proper Morse function such that indexes of all its critical points are $\leq n$. Suppose that $n > 2$. Then J is homotopic to a genuine complex structure $\widetilde{J}$ such that φ is $\widetilde{J}$-convex. In particular, the complex manifold $(M, \widetilde{J})$ is Stein.*

□

Theorem 1.44. *[CW15, Theorem 5.4] X を h-principle を満たす解析空間とする．このとき X は homotopically $\mathbb{C}$-connected.*

Proof. 背理法で示す．ある unramified covering $X' \to X$ と，Brody hyperbolic 解析空間 Y への正則写像 $\varphi : X' \to Y$ で，$\pi_k(\varphi) : \pi_k(X') \to \pi_k(Y)$ が $k > 0$ について 0 写像でないとする．1.56 より X' も h-principle を満たすことに注意する．

背理法の仮定から $f : S^k \to X$ を連続写像で

$$[f] \neq 0 \in \pi_k(X) \quad \pi_k(\varphi)([f]) \neq 0 \in \pi_k(Y)$$

となるものがある．Q_k を k 次元の affine quadric とすると，1.40 より，連続写像 $\rho : Q_k \to S^k$ でホモトピー同値を与えるものがある．

よって Q_k は Stein より，h-principle から，正則写像 $\widetilde{f} : Q_n \to X$ で

$$\widetilde{f} \sim f \circ \rho : Q_k \to X$$

となるものが存在する．よって以下の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\pi_k(S_k) = \mathbb{Z} \arrow[dr, "\pi_k(f)"] \arrow[drr, "\neq 0"] & & \\
\pi_k(Q_k) = \mathbb{Z} \arrow[u, "\pi_k(\rho)\mathrm{isom}"] \arrow[r, "\pi_k(f\circ\rho)=\pi_k(\widetilde{f})"'] & \pi_k(X) \arrow[r, "\pi_k(\varphi)"'] & \pi_k(Y)
\end{tikzcd}$$

よって $\pi_k(\varphi \circ \widetilde{f}) : \pi_k(Q_k) \to \pi_k(Y)$ は nonzero map である．一方で，正則写像 $\varphi \circ \widetilde{f} : Q_k \to Y$ は定数 (後述) である．よって $\pi_k(\varphi \circ \widetilde{f})$ は zeromap になり矛盾．

[正則写像 $\varphi \circ \widetilde{f} : Q_k \to Y$ が定数について] $x, x' \in Q_k$ について，1.40 より $h : \mathbb{C}^* \to Q_k$ で $h(a) = x, h(a') = x'$ が存在する．全射正則写像 $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^z$ をとれば $\varphi \circ h \circ \exp : \mathbb{C} \to Y$ が取れる．Y が Brody hyperbolic なので定数となり $\varphi(x) = \varphi(x')$. □

Corollary 1.45. *[CW15, Corollary 5.5] X を Brody-hyperbolic 複素多様体とする．X が h-principle を満たすことと，X が可縮であることは同値である．*

Proof. 可縮ならば h-principle は 1.10 から．X が h-principle を満たすとする．1.44 より，homotopically $\mathbb{C}$-connected. よって X が Brody hyperbolic なので任意の $k \in \mathbb{Z}_+$ で $\pi_k(\mathrm{id}_X) : \pi_k(X) \to \pi_k(X)$ は zero map である．特に任意の $k \in \mathbb{Z}_+$ で $\pi_k(X) = 0$. 以上より Whitehead の定理 (下参照) より X は可縮である． □

Theorem 1.46 (Whitehead)**.** *CW 複体の間の連続写像 $f: X \to Y$ について π_k が任意の $k \in \mathbb{Z}_+$ で同型 (弱ホモトピー同値) ならば, X と Y はホモトピー同値 (ホモトピック) である.*

Corollary 1.47. *[CW15, Corollary 5.6] コンンパクトな Brody hyperbolic 多様体は h-principle を満たさない.*

特に種数 2 以上のコンパクトリーマン面は h-principle を満たさない

Proof. 正の次元のコンパクトな複素多様体は基本類 $[X] \in H_{2n}(X, \mathbb{Z})$ が 0 ではないので, 特に可縮でない. よって 1.45 より. □

Remark 1.48. "homotopically $\mathbb{C}$-connected" から"Brody hyperbolic Kahler 多様体への写像が定数になる"は従わない. (Projective なら 1.50 から正しい.)

C を超楕円曲線とする. C は種数 2 以上で次数 2 の finite map $C \to \mathbb{P}^1$ を持つ.

$$\pi_2(C) = \pi_1(\mathbb{P}^1) = 0$$

であるから常に $\pi_k(f) = 0$ である. 一方で f は定数ではない. つまり

$$\pi_k(f) = 0 \text{ でも } f \text{ が定数にならないことはありうる.}$$

なおこの例では, $H_2(f) \neq 0$ でもある.

ちなみに $\pi_2(C) = 0$ に関しては次の命題からわかる.(C の普遍被覆は可縮である)

Proposition 1.49. *[Hat02, Proposition 4.1] $\widetilde{X} \to X$ を位相空間の covering space とする. 2 以上の整数 n について $\pi_n(\widetilde{X}) \cong \pi_n(X)$.*

Theorem 1.50. *[CW15, Theorem 5.8] X 既約 projective variety で h-principle を満たすとする. $f: X \dashrightarrow Y$ を Brody hyperbolic Kähler 多様体 Y への meromorphic map とする. f が正則, または X が smooth(KLT でも可) ならば, f は定数である.*

Proof. 次の主張により $f: X \to Y$ は正則写像であると仮定して良い.

Claim 1.51. X が smooth(KLT でも可) のときは, meromorphic map $f: X \dashrightarrow Y$ は常に正則である.

Claim の証明. $\pi : \widetilde{X} \to X$ を X を resolution してから, f の不確定点解消したものとする. $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to Y$ を f から誘導された射とする.

$x \in X$ を f の不確定点とすると, X は KLT なので Hacon-Mckernan の定理 [HM07] から[22] $\pi^{-1}(x)$ は rationally connected である. 一方, Y は Brody-hyperbolic なので特に rational curve を含まない. よって $\widetilde{f}(\pi^{-1}(x))$ は一点である. よって [Deb01, Lemma 1.15] の rigidity lemma から, f は正則である. $\square$

f を定数でないと仮定して矛盾を示す. X は projective なので代数曲線 $C \subset X$ で $f|_C$ が定数でないものを取る.

J_C を C の複素構造として次のものを取る.

- $\overline{C} := (C, -J_C)$ (C, J_C) の opposite complex structure (1.36 参照)
- $j : \overline{C} \to C$ "集合" としての恒等写像.
- $\tau : E \to \overline{C}$ affine $\mathbb{C}$-bundle (1.30 参照)

すると h-principle から, 連続写像 $j \circ \tau : E \to X$ は, 正則写像 $h : E \to X$ とホモトピックである.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[d, "\tau\ \mathbb{C}\text{bundle}"'] \arrow[dr, "j\circ\tau"] \arrow[dr, bend left=60, "\exists h"] & & \\
\overline{C} \arrow[r, "j"'] \arrow[rr, dashed, bend right, "\exists\varphi"'] & X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

任意の $c \in \overline{C}$ について, $\tau^{-1}(C) \cong \mathbb{C}$ より, Y は Brody-hyperbolic なので, $f \circ h(\tau^{-1}(C)) = pt$ となる. よって正則写像 $\varphi : \overline{C} \to Y$ で, $f \circ h = \varphi \circ \tau$ となるものが存在する.

$\tau : E \to \overline{C}$ はホモトピー同値を与えるので, $\varphi \sim f \circ j$ である. 特に

$$\varphi^* = (f \circ j)^* : H^2(Y, \mathbb{R}) \to H^2(\overline{C}, \mathbb{R}) \underset{\int_{\overline{C}} \cdot}{\cong} \mathbb{R}$$

である. 今 Y 上の Kähler form を ω とする. $\varphi : \overline{C} \to Y$ は meromorphic なので.

$$\varphi^* \omega \underset{\int_{\overline{C}} \cdot \text{ による同一視}}{\geq} 0$$

一方で, 1.39 より

$$(f \circ j)^* \omega \underset{\int_{\overline{C}} \cdot \text{ による同一視}}{=} \int_{\overline{C}} f^* \omega \underset{1.39\&\omega 2\text{-form}}{=} = -\int_C f^* \omega \underset{f|_C \text{ が定数でない}}{<} 0.$$

これは $\varphi^* = (f \circ j)^*$ に矛盾である. $\square$

[22] X が smooth なら, 不確定点解消は smooth centers の blowing up でできる.

1.6 6 章 *h*-principle implies specialness for projective manifolds

Theorem 1.52. *[CW15, Theorem 6.1] X projective manifold. X が h-principle を満たすならば, X は special.*

Proof. $\bar{X}$ を X の opposite complex structure とし, $\iota\colon \bar{X} \to X$ を集合としての恒等写像とする. 1.30 より $\bar{X}$ projective なので, ある affine 多様体 M と正則全射 $\tau : M \to \bar{X}$ がある.

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "\tau\ \text{正則}"] \arrow[dr, "h\ \text{正則}"] \arrow[drr, dashed, bend left, "g=c_X\circ h\ \text{有理}"] & & \\
\bar{X} \arrow[u, bend left, "\sigma\ C^\infty\ \text{section}"] \arrow[r, "\iota\ C^\infty"] \arrow[r, bend right, "\zeta=h\circ\sigma\ C^\infty"'] & X \arrow[r, dashed, "c_X\ \text{有理}"] & C(X)
\end{tikzcd}
$$

M は Stein なので, $\iota\circ\tau : M \to X$ に h-principle を使って, ある正則写像 $h\colon M \to X$ で, $\iota\circ\tau$ と homotopic なものが存在する.

1.30 より, C^∞ 級 section $\sigma\colon \bar{X} \to M$ を取り, $\zeta := h\circ\sigma\colon \bar{X} \to X$ とおくと

$$\zeta := h\circ\sigma \underset{\text{homotopic}}{\sim} \iota\circ\tau\circ\sigma \underset{\sigma\ \text{section}}{=} \iota\circ id_{\bar{X}} = \iota$$

よって ζ は $\iota = id_X : \bar{X} \to X$ と homotopic である.

今 $c_X\colon X \dashrightarrow C(X)$ を X の coremap とする.[23] 以下 $\dim C(X) = 0$(つまり X が special) であることを背理法で示す. $d := \dim(C) > 0, n := \dim(X), g := c\circ h\colon M \dashrightarrow C(X)$. とおく. ω_C , ω_X を C , X の Kähler form として,

$$I := \int_X \omega_X^{n-d} \wedge c^*(\omega_C^d) > 0.$$

とおく. 1.39 より, $\omega_{\bar{X}} := -\omega_X$ とすると

$$I' := \int_{\bar{X}} \omega_{\bar{X}}^{n-d} \wedge (c_X\circ\zeta)^*(\omega_C^d)) \underset{1.39}{=} (-1)^d \cdot I \neq 0.$$

特に $(c\circ\zeta)^*(\omega_C^d) \in H^{d,d}(\bar{X})$ は 0 ではない. 1.34 より, $c\circ\zeta : \bar{X} \dashrightarrow C(X)$ は非退化である. よって

$$g \underset{\text{def}}{:=} c_X\circ h \underset{\sigma\ \text{section}}{=} c_X\circ(h\circ\sigma)\circ\tau \underset{\zeta:=h\circ\sigma}{=} \underbrace{c\circ\zeta}_{\text{non-degenerate}} \circ \underbrace{\tau}_{\text{fiber bundle}}$$

より $g = c_X\circ h : M \dashrightarrow C(X)$ も非退化である.

[23] ここに X が多様体であることを使っている.

1.27 から, meromorphic map $\varphi\colon \bar{X} \dashrightarrow C$ で $\varphi \circ \tau = g = c_X \circ h$ となるものがある.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\tau\ \text{正則}"] \arrow[rr, bend left, "h\ \text{正則}"] & \bar{X} \arrow[d, dashed, "c_{\bar{X}}"'] \arrow[dr, dashed, "\exists\varphi\ \text{有理}"] & X \arrow[d, dashed, "c_X"] \\
& C(\bar{X}) \arrow[r, dashed, "\exists c_\varphi\ \text{有理}"] & C(X)
\end{tikzcd}$$

すると

$$\varphi = \varphi \circ \underbrace{\tau \circ \sigma}_{=id_{\bar{X}}} \underset{(\varphi\circ\tau = c_X \circ h)}{=} c_X \circ \underbrace{h \circ \sigma}_{=:\zeta} = c_X \circ \zeta$$

よって $c_X \circ \zeta : \bar{X} \dashrightarrow C(X)$ は meromorphic である. これは 1.39 に矛盾する. □

Conjecture 1.53. *[CW15, Conjecture 6.2] X を projective manifold とする. X が h-principle を満たすならば, $\pi_1(X)$ は almost Abelian か?*

これは Campana の予想"Special ならば $\pi_1(X)$ は almost Abelian か?"の亜種である. $\pi_1(X)$ が linear(GL の部分群) か solvable ならば解決済み.[24]

Conjecture 1.54. *[CW15, Question 6.3.]*

1. *compact Kähler 多様体において, h-principle ならば special か? これは曲面では正しい.*
2. *X quasi-projective manifold とする. h-principle を満たし, X がいかなる proper subvariety $Z \subset X$ とも homotopy 同値になり得ないとする. このとき X は special か?*

Corollary 1.55. *[CW15, Corollary 6.5] compact Kähler 曲面において, h-principle ならば special.*

Proof. K_X big ならば projective になる. この場合はわかっているので $\kappa(K_X) \leq 1$ と仮定して良い.

X が special でないとする. [Cam04, Proposition 9.29] より, X が曲面なので weakly special でもない. つまり, ある finite etale cover $X' \to X$ と種数 2 以上の curve C への surjective 正則写像 $f'\colon X' \to C$ が存在する. 1.56 から X' も h-principle を満たすが, これは 1.60 に矛盾する. □

[24] Arapura-Nori の定理から $\pi_1(X)$ は virtually nilpotent になり, Albanese map が全射ファイバー連結なので [Cam04, Section 7] の議論から $\pi_1(X)$ は virtually abelian になる.

Lemma 1.56. *[CW15, Lemma 6.6] $\pi\colon X' \to X$ を解析空間の unramified covering とする. X が h-principle を満たせば, X' も h-principle を満たす.*

unramified covering とはおそらく etale (flat かつ unramified) のことだと思う. また逆は成り立たない (が, finite etale の場合は不明)

Proof. $f\colon S \to X'$ を Stein 空間 S からの連続写像とする. $\pi \circ f : S \to X$ は連続なので, h-principle から, ある正則写像 $F\colon S \to X$ で $\pi \circ f$ と homotopic なものがある. つまり

$$H : S \times [0,1] \to X \quad H(\cdot, 0) = \pi \circ f \quad H(\cdot, 1) = \pi \circ F$$

となるものが存在する.

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & \mathcal{C}(S, X') \arrow[d, "\pi^*"] \\ {[0,1]} \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\exists H'"] & \mathcal{C}(S, X) \end{tikzcd}$$

よって Homotopy Lifting property から[25]

$$H' : S \times [0,1] \to X \quad H'(\cdot, 0) = f \quad \pi \circ H' = H$$

となるものが存在する. よって $F' := H'(\cdot, 1)$ とすると $\pi \circ F' = F : S \to X$ が正則なので, F' も正則. この F' は f と homotopic である □

Remark 1.57. Oka 性が unramified covering で移る理由は, (例えば CAP を考えると) 定義に出てくる S みたいなものが可縮なので, Lift が常に取れるから. h-principle で同様にいかないのは"任意の連続写像 $S \to X$ が $S \to X'$ に Lift するかがわからない"部分にある (S は単連結とは限らない.)

1.7 7 章 Necessary conditions on the quasi-Albanese map

1.7.1 コンパクト Kähler manifold の場合

compact Kähler の場合を考え, quasi-projective はどのように補正したらいいかを述べる.

Theorem 1.58. *[CW15, Theorem 6.4] X を compact Kähler とする. もし Albanese map が全射でないならば, X は h-principle を満たさない.*

Proof. h-principle を満たすとして矛盾を示す.

[25] 調べた限り被覆空間とかファイバー束ならば満たすらしい. Serre fibration だから?

Albanese map $a : X \to A$ とする．$Z = \overline{a(X)}^{\text{zar}}$ とする．平行移動して, A の単位元 e_A が $e_A \in Z$ となっているとして良い.

a が全射でないので, $A \setminus Z \neq \varnothing$ である．よって$(\star 1)$[Kaw80, Theorem 4]より, 高々有限個数の sub-semitorus $T_i \subset A$ と T_i-orbit $S_i \subset A$ があって次を満たす.

1. $S_i \subset Z$
2. 任意の A の sub-semitorus W について, ある $x \in A$ で $x + W \subset Z$ ならば, $W \subset S_i$ となる i がある.

1.59 より, $\gamma_0 \in \pi_1(A) \setminus \bigcup \pi_1(S_i)$ が取れる．Albanese map の性質から

$$a_* : \pi_1(X) \twoheadrightarrow \pi_1(A)$$

なので, $a_*(\gamma) = \gamma_0$ が取れる．よって $\gamma : S^1 \to X$ なる連続写像が存在する．$S^1 \underset{\text{homotopic}}{\sim} \mathbb{C}^*$ なので, 連続写像 $\gamma : \mathbb{C}^* \to X$ が存在する (記号の濫用だが, これも γ と表す)

X は h-principle を満たすので, 正則写像

$$f : \mathbb{C}^* \to X$$

で $\gamma \underset{\text{homotopic}}{\sim} f$ となるものが存在する．これより正則写像

$$F = a \circ f \circ \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \to X \to\to Z \subset A.$$

を得る．$(\star 2)$[Kaw80, Theorem 3] よりanalytic Zariski closure $\overline{F(\mathbb{C})}^{\text{zar}}$ を Z 上でとると, $\overline{F(\mathbb{C})}^{\text{zar}}$ は A の sub-semitorus の平行移動となる.

よって (2) からある S_i があって, $\overline{F(\mathbb{C})}^{\text{zar}} \subset S_i$ となる．よって, $a \circ f(\mathbb{C}^*) \subset S_i$ より $\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$ の単位元を $1_{\mathbb{C}^*}$ とすると

$$a_*(\gamma) = (a \circ \gamma)_*(1_{\mathbb{C}^*}) \underset{\gamma \underset{\text{homotopic}}{\sim} f}{=} (a \circ f)_*(1_{\mathbb{C}^*}) \underset{a \circ f(\mathbb{C}^*) \subset S_i}{\in} \pi_1(S_i),$$

これは $a_*(\gamma) = \gamma_0 \in \pi_1(A) \setminus \bigcup \pi_1(S_i)$ に矛盾する. □

また証明に使った補題を示しておく.

Lemma 1.59. *[CW15, Lemma 7.2]* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ を $G = \mathbb{Z}^n$ の部分群とする．$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} \Gamma_i < n$ ならば $\cup_i \Gamma_i \neq G$

Γ_i は有限生成 (ネーター環 $\mathbb{Z}$ の有限生成加群の部分加群より) なので, 有限生成アーベル群の基本定理より, $\gamma_i \cong \mathbb{Z}^{\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} \Gamma_i} \oplus (\text{Torsionpart})$ となる.

Proof. $G = \mathbb{Z}^r \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ とユークリッド空間に埋め込む．$x \in G$ について $||x||$ をそのユークリッド距離とする．部分群 $H \subset G$ のランクを d とする．$r \in \mathbb{Z}_+$ について

$$N(H, r) := \{x \in H \mid ||x|| \leq r\}$$

とおくと，$r \gg 0$ について $|N(H, r)| = O(r^d)$ である．

以上より，仮定から $N(\Gamma_i, r) = O(r^{n-1})$ かつ，$N(G, r) = O(r^n)$．である．よって，r を十分大きく取れば (torsion part の部分も無視できるくらい大きくすれば)，$\gamma \in G \setminus \cup_i \Gamma_i$ が存在する． □

Corollary 1.60. *[CW15, Corollary 7.3] X を compact Kähler とし，種数 2 以上の曲線 C への全射 $F : X \to C$ を有するとする．このとき X は h-principle を満たさない．*

Proof. A (resp. J) を X (resp. C) の Albanese variety とする．1.58 より $X \to A$ が全射出ないことを示せば良い．

背理法．$X \to A$ が全射とする．Albanese map の関手性より，$F_1 : A \to J$ がある．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "a_X"] \arrow[d, "F"'] & A \arrow[d, "F_1"] \\ C \arrow[r, "a_C"] & J \end{tikzcd}$$

すると $F_1 : A \to J$ は全射となる．これは F は全射なので，$F^* : H^0(C, \Omega^1_C) \hookrightarrow H^0(X, \Omega^1_X)$ は単射である．よって

$$F^{*\vee} : H^0(X, \Omega^1_X)^\vee \twoheadrightarrow H^0(C, \Omega^1_C)^\vee$$

は全射である．Albanese variety の構成から $J = H^0(C, \Omega^1_C)^\vee / H_1(C, \mathbb{Z})$ であるので，$F_1 : A \to J$ の全射性が言える (1.66 参照)

よって $F_1 \circ a_X$ は全射で，$F_1 \circ a_X = a_C \circ F$ より a_C は全射である．しかし C は種数 2 以上なので，$g = \dim(J) > \dim(C) = 1$ であるので矛盾． □

Proposition 1.61. *[CW15, Proposition 7.4] X compact Kähler 多様体で，complex torus A への finite map $f : X \to A$ を有するとする．*
X が h-principle を満たすならば，X は complex torus である．

証明がなかったが多分これで言えると思う．[26]

Proof. $X \to \mathrm{Alb}(X)$ を Albanese map とする．Albanese map の普遍性から $\mathrm{Alb}(X) \to A$ が存在

[26] [CW15] には [NWY07] を使えば言えると書いていたが，よくわからなかった．

する．その Stein 分解を $\mathrm{Alb}(X) \to A' \to A$ とする．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f \text{ with con. fibre}"'] & \mathrm{Alb}(X) \arrow[d, "\text{with con. fibre}"] \\ A & A' \arrow[l, "\text{finite}"] \end{tikzcd}$$

ここで上に出てくる全ての多様体は次元が同じことに注意する．よって $\mathrm{Alb}(X) \to A'$ は bimeromorphic である．しかし $\mathrm{Alb}(X)$ に有理曲線は存在しないので, $\mathrm{Alb}(X) \cong A'$ である．

よって, $X \to \mathrm{Alb}(X)$ は finite map になる．一方でファイバー連結なので同型写像になる． □

1.7.2 quasi-Albanese の復習

quasi-Albanese map に関して [Wan22] の preprint の Appendix を参照した[27](Fujino 先生の論文でも良い)

Definition 1.62 ([Fuj15], Definition 2.8)**.** G を連結な代数群とする．

$$1 \to H \to G \to A \to 1$$

を G の Chevalley decomposition とする．ここで H は 線形代数群 であり，A は Abelian variety である．もし $H \simeq G_m^{\dim H}$（ここで G_m は乗法群 $\mathbb{C}^*$ を表す）であれば，G を *semi-Abelian variety* と呼ぶ．

semi-Abelian variety のいくつかの初等的性質を次のようにまとめておく：

Proposition 1.63 ([Fuj15], Lemma 2.11, Lemma 2.13)**.** G を *semi-Abelian variety* とし，

$$1 \to G_m^d \to G \to A \to 1$$

を A を *Abelian variety* とする G の *Chevalley decomposition* とする．このとき次が成り立つ．

1. G は A 上の主 G_m^d-束である．
2. G は可換群である．
3. G の普遍被覆は $\mathbb{C}^{\dim G}$ であり, $\pi_1(G)$ を $\mathbb{C}^{\dim G}$ の格子とみなせば $G \simeq \mathbb{C}^{\dim G}/\pi_1(G)$ となる．

[27] https://arxiv.org/abs/2005.05782 Preprint version には Appendix があってかなりわかりやすい

Proposition 1.64 ([Fuj15], Theorem 4.4)**.** G を *semi-Abelian variety* とし，W を G の閉部分代数多様体とする．このとき *log Kodaira* 次元 $\bar{\kappa}(W) \geq 0$.
また $\bar{\kappa}(W) = 0$ となるのは， W が G の *semi-Abelian subvariety* の平行移動である場合に限る．

Proposition 1.65 ([Fuj15], Theorem 3.16)**.** U を *smooth quasi-projective variety* とし，$u \in U$ を固定点とする．このとき *semi-Abelian variety* Alb_U と 代数射

$$\mathrm{alb}_U : U \to \mathrm{Alb}_U$$

が存在して次を満たす.

- $\mathrm{alb}_U(u) = 0$.
- 任意の *semi-Abelian variety* G への代数射 $\alpha : U \to G$ で $\alpha(u) = 0_G$ を満たすなら，ただ一つの 代数群 の準同型 $f : \mathrm{Alb}_U \to G$ が存在して $\alpha = f \circ \mathrm{alb}_U$ を満たす．

alb_U はこの普遍性によって一意に決まり，alb_U を U の quasi-Albanese map と呼び，Alb_U を U の quasi-Albanese variety と呼ぶ．

U がコンパクトであれば，alb_U は通常の Albanese map と一致する．Alb_U と alb_U の構成については [Fuj15, 3] を参照. Albanese map の基本的性質は次のとおり.

Proposition 1.66 ([Fuj15], Lemma 3.11)**.** U を *smooth quasi-projective variety* とし，$\mathrm{alb}_U : U \to \mathrm{Alb}_U$ をその *quasi-Albanese map* とする．すると誘導される写像

$$(\mathrm{alb}_U)_* : H_1(U, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(\mathrm{Alb}_U, \mathbb{Z})$$

は全射であり，$\ker(\mathrm{alb}_U)_*$ は $H_1(U, \mathbb{Z})$ の *torsion* 部分に一致する．

1.7.3 quasi-projective の場合

Theorem 1.67. X を *quasi-projective manifold* とする. もし *quasi-Albanese map* が *dominant* でないならば, X は *h-principle* を満たさない.

Proof. 1.58 の証明において次のように補正すれば良い.

($\star$1) の部分は [NW14, Theorem 5.6.19] や [NWY02, Lemma 5.5] を参照する.

($\star$2) の部分は Noguchi's logarithmic version of the theorem of Bloch-Ochiai ([NW14, Theorem

4.8.17]) を引用する．これで証明が回る． □

Corollary 1.68. *[CW15, Corollary 7.3] X を algebraic variety とし，種数 2 以上の曲線 C への全射 $F : X \to C$ を有するとする．このとき X は h-principle を満たさない．*

Proof. 証明は全く同じ．途中で"Albanese variety の構成から $J = H^0(C, \Omega^1_C)^\vee / H_1(C, \mathbb{Z})$ であるので全射性が言える"という部分に 1.66 を使うだけ □

Proposition 1.69. *[CW15, Proposition 7.4] X quasi-projective manifold で，semi-abelian variety A への finite map $X \to A$ を有するとする．*
このとき X が h-principle を満たすならば，X は semi-abelian variety である

"[NWY07] より次が言える"と書いていたが証明がわからなかった．

1.7.4 引用されていた定理たち

以下 [NW14] の引用されていた定理を述べておく．

Theorem 1.70. *[NW14, Theorem 5.6.19] T を semi-torus とし，$T \hookrightarrow \overline{T}$ を equivariant compactification とする。$\overline{T}$ の closed analytic subset を $\overline{Z}$ とし，$Z = \overline{Z} \cap T$ に含まれる T の sub-semi-torus の正次元軌道をすべて集めたものの合併を W とする。*
このとき，$\overline{T}$ の closed analytic subset $\overline{W}$ が存在して $W = \overline{W} \cap T$ を満たす。さらに，W の任意の既約成分は正次元の stabilizer group をもつ。

Theorem 1.71. *[NW14, Theorem 4.8.17]（Logarithmic Bloch–Ochiai Theorem）M をコンパクト Kähler manifold とし，D を M 上の reduced divisor とする。もし $\overline{q}(M \setminus D) > \dim M$ ならば，任意の entire curve $f : \mathbb{C} \to M \setminus D$ の像は M の中で Zariski dense にはならない。*

Corollary 1.72. *[NW14, Corollary 4.8.18] (Bloch–Ochiai Theorem) もし $q(M) > \dim M$ ならば，任意の entire curve $f : \mathbb{C} \to M$ は algebraically degenerate である。*

Theorem 1.73. *[NW14, Theorem 6.6.1]（Noguchi–Winkelmann–Yamanoi) X を complex algebraic variety とし，$\pi : X \to A$ を semi-abelian variety A への有限写像とする。$f : \mathbb{C} \to X$ を任意の entire curve とする。もし $\overline{\kappa}(X) > 0$ ならば，f は algebraically degenerate で*

ある。
さらに，$f(\mathbb{C})$ の *Zariski* 閉包の正規化は *semi-abelian variety* となり，それは A のある真の *semi-abelian subvariety* の平行移動の有限 *étale* 被覆である。

Corollary 1.74. *[NW14, Corollary 6.6.2]* X を *quasi-Albanese map* が *proper map* であるような *complex algebraic variety* とする。$\overline{\kappa}(X) > 0$ かつ $\overline{q}(X) \geq \dim X$ であると仮定する。このとき，任意の *entire curve* $f : \mathbb{C} \to X$ は *algebraically degenerate* である。

1.8 8章 (Counter-)examples

$$\text{special} \Longrightarrow h\text{-principle} \quad \mathbb{C}\text{-connected} \Longrightarrow \text{special}$$

という予想は X が normal, Kähler, コンパクトという条件がいる.

Example 1.75. [CW15, Example 8.1] non-normal 代数曲線 X で $\mathbb{C}$-connected(もっと強く rational) を満たすが, h-principle を満たさない例[28]

$$X = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^2 : z_0 z_1 z_2 = z_1^3 + z_2^3\}.$$

とする. これは $(1:0:0)$ に特異点があるので, smoooth ではない. よって non-normal である.

さらに $\widehat{X} := \mathbb{P}^1$ とすると,

$$h : \widehat{X} = \mathbb{P}^1 \to X \quad [x_0 : x_1] \mapsto [x_0^3 + x_1^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2]$$

という写像で X は rational である. 特に $\mathbb{C}$-connected.

またこの h は X の正規化である. ここは [Har77, Chapter 4 exercise1.8] を用いる. $\pi : \overline{X} \to X$ を正規化とすると, $p = (1:0:0) \in X$ について

$$\delta_p := \mathrm{length}(\pi_* \mathcal{O}_{\overline{X}} / \mathcal{O}_X)$$

である. p の近くで X は $uv = u^3 + v^3$ となるので, $\delta_p = 1$ である. 一方 X は $\mathbb{CP}^2$ の 3 次曲線なので $h^1(X, \mathcal{O}_X) = 1 (= \frac{(3-1)(3-2)}{2})$ よって [Har77, Chapter 4 exercise1.8] から

$$h^1(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) = h^1(X, \mathcal{O}_X) - \delta_p = 0$$

となり $\overline{X} \cong \mathbb{P}^1$ となる.

$\widetilde{X} \to X$ を X の普遍被覆とすると, $\widetilde{X}$ は可算無限個の S^2 がくっついた感じになっている. $h : \widehat{X} = \mathbb{P}^1 \to X$ は $h([0:1]) = h([1:0]) = [1:0:0]$ でありその他の点は 1:1 に移るので,

[28] normal ではないので special などは論じることができない.

X は S^2 の北極と南極をつなげた図形と同相

である．これは $S^2 \vee S^1$ とホモトピー同値である[29] よって普遍被覆は S^1 の部分が直線に伸びて，その直線に S^2 が $\mathbb{Z}$ こつながる．

Hurewicz の定理から

$$\pi_2(\widetilde{X}) \simeq H_2(\widetilde{X}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$$

となる．よって $\pi_2(X) \simeq \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ である．特に $h : \widehat{X} \to X$ によって誘導される

$$\mathbb{Z} \simeq \pi_2(\widehat{X}) \xrightarrow{h_*} \pi_2(X) \simeq \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} \tag{1.8}$$

は全射ではない．

今 Q_2 を 1.40 のような 2 次元 affine quadric とする．Q_2 は Stein で S^2 と homotopic である．そこで $\gamma \in \pi_2(X) \setminus h_*(\pi_2(\widehat{X}))$ を選ぶと，1.8 から

$$\gamma : Q_2 \to X \quad \text{and} \quad \gamma \text{ は } h : \widehat{X} \to X \text{ を経由しない}$$

という連続写像を構成できる．

もし X が h-principle を満たすならば，$\gamma \underset{\text{homotopic}}{\sim} f_\gamma$ となる正則写像 $f_\gamma : Q_2 \to X$ が存在する．$h : \widehat{X} \to X$ は X の正規化より f_γ は $h : \widehat{X} \to X$ を経由する．しかしこれは γ の取り方に矛盾する．

この構成使ったら normal でも反例作れない？

Example 1.76. [CW15, Example 8.2] non-Kähler コンパクト複素曲面 (井上曲面) で h-principle を満たさないが，special となるものがある．

井上曲面 X は次を満たす．

- コンパクト複素曲面かつ代数次元 $a(X) = 0$ [30]
- 普遍被覆が $\Delta \times \mathbb{C}$ で，複素直線で foliated される．多分これは $\pi : \Delta \times \mathbb{C} \to X$ という商写像として，$\pi(\{x\} \times \mathbb{C})$ の形の leaf を持つ foliation が存在することだと思う．

[Cam04, Section 2.1] により，$a(X) = 0$ ならば Special である

一方任意の正則写像 $\mathbb{C}^* \to X$ の像は X の leaf に含まれる．[31] これは exp をかまして，$\mathbb{C} \to X$ を考えると，$\mathbb{C} \to \Delta \times \mathbb{C}$ に Lift して，$\mathbb{C} \to \Delta$ は定数になるので，$\mathbb{C}$ の像は $\pi(\{x\} \times \mathbb{C})$ の形になる．

なので $\mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{C}^*) \to \pi_1(X)$ という群準同型で，正則写像から来ないものが存在する．よって h-principle を満たさない．

[29] これ有名な例らしい https://math.stackexchange.com/questions/20282/fundamental-group-of-s2-with-north-and-south-pole-identified Hatcher の p.11 にわかりやすい図がある．

[30] "OT manifold(井上曲面の高次元版) は $a(X) = 0, \kappa(K_X) = -\infty$ で有理曲線を持たない" とのこと．

[31] 多分これから任意の正則写像 $f : \mathbb{C} \to X$ について像が dence entire になることも言えると思う．

と書いてあったがこれよくわからなかった.$\pi_1(X)$ は $\mathbb{Z}^3$ と $\mathbb{Z}$ の extension で $\pi_1(L)$ は $\mathbb{Z}$ と同型らしい. 最後に関しては $L \subset X$ を leaf として $i_*\pi_1(L) \neq \pi_1(X)$ であることから来ていると思う. もしそれが言えたら, $\pi_1(X) \setminus i_*\pi_1(L)$ の元 η に送る map が連続写像で正則写像から来ないものの例になる. つまり $1_C = [S^1 \to \mathbb{C}^*] \mapsto \eta = [S^1 \mapsto X]$ なので

$$F : \mathbb{C}^* \underset{\text{homotopic}}{\sim} S^1 \xrightarrow{\eta} X$$

が連続写像でいかなる正則写像とも homotopic にならないものになる.(ということ??)

Example 1.77. [CW15, Example 8.3] non-compact 複素多様体で $\mathbb{C}$-connected だが, h-principle を満たさない例がある.

Rosay-Rudin の定理 ([RR88, Theorem 4.5]) から離散部分群 $S \subset \mathbb{C}^2$ であって, 任意の非退化な正則写像 $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ について

$$F(\mathbb{C}^2) \cap S \neq \emptyset$$

となるものが存在する. $X := \mathbb{C}^2 \setminus S$. とする. S は離散なので, X は $\mathbb{C}$-connected である.(S の濃度は高々可算なので, 任意の 2 点は折れ線で結べるから)

$G := SL_2(\mathbb{C})$. とする. G は affine(Stein) である. そして S^3 と homotopic である. [32]

$p \in G$, $v, w \in T_pG$ として, 正則写像

$$f : \mathbb{C}^2 \to G$$

で $exp(v), exp(w) \in f(\mathbb{C}^2)$ となるものがある ($exp : T_pG \to G$ を指数写像とする. この構成は exp を v, w が張る $\mathbb{C}^2$ に制限すれば良い.)

任意の正則写像 $F : G \to X$ について, 上の exp 使って $\mathbb{C}^2 \to G \to X \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ を考えれば, S の定義から

$$\operatorname{rank}(DF)_p \leq 1 \quad \text{for any } p \in G,$$

が成り立つ. よって実多様体の写像 $F_{\mathbb{R}} : G_{\mathbb{R}} \to X_{\mathbb{R}}$ と見たときの Jacobi 行列 $J_{F_{\mathbb{R}}}$ のランクは 2 以下である. 以上より任意の d-closed 3-form ω について $F^*\omega \equiv 0$ である. つまり $F^* : H^3(X, \mathbb{R}) \to H^3(G, \mathbb{R})$ は自明である.

一方で連続写像 $f : S^3 \to X$ で

$$f^* : H^3(X, \mathbb{R}) \to H^3(S^3, \mathbb{R}) \quad \text{が 0 ではない}$$

となるものが存在する. これは $p \in S$ について, 半径 r の open ball $B_p(r)$ $B_p(r) \setminus \{p\} \subset X$ となるものをとれば良い.

この f を $G \underset{\text{homotopic}}{\sim} S^3$ にかまして, 連続写像 $G \to X$ を考えれば, これが h-princple を壊す例となる. (もし正則写像と homotopic なら $H^3(X, \mathbb{R}) \to H^3(G, \mathbb{R})$ は 0 射になってしまう.)

[32] P を正定値 Hermite 行列の空間とすると, $SL(2, \mathbb{C}) = SU(2, \mathbb{C}) \times P$ という分解が存在するらしい. https://homepage.ntu.edu.tw/~cjtsai/teaching/23dg/HW2.pdf?utm_source=chatgpt.com これを認めると P は可縮 (単位行列とむすぶ) であり,$SU(2, \mathbb{C}) \cong S^3$(diffeo) が言えるので言える.

1.9 9章 Does special imply the h-principle?

この辺りは [CW15] そのまま書いた.

Question 1.78. X smooth projective とする. Special ならば h-principle を満たすか？ これは2次元でも不明.

1次元なら OK. 種数と対応する.

2次元で次のものは h-principle を満たすことがわかっている.

- rational surfaces,
- minimal surfaces
- ruled over an elliptic curve
- blown-up abelian surfaces and their étale undercovers (bielliptic)

2次元で次のものは special だが, h-principle を満たす課はわかっていない.

- blown-up K3 and Enriques surfaces
- the blown-ups of surfaces with $\kappa = 1$ これらは以下の２通り
  1. elliptic fibrations over an elliptic base without multiple fibre
  2. elliptic fibrations over a rational base with at most four multiple fibres, where the sum of the inverses of the multiplicities is at least two (respectively, one) if there are four (respectively, three) multiple fibres.

3次元以上だと全くわからない. 例えば Fano, RC, rational manifolds (e.g. $\mathbb{P}^3$ の degree3 以上の曲線に沿った blow up) など.

3次元以上の Fano, RC に関しては, non-degenerate meromorphic map $\mathbb{C}^n \to X$ も未解決. もし存在しないならば「Special だが Oka ではない」例である. これは unirational でも不明.

次の操作で h-principle が保存されるかがわからない.

- smooth blow-ups and blow-downs,
- products[33]
- (finite) étale coverings, for which only one direction is known (cf. [For11]).[34]

なおこれらの操作で Special は保存される

[33] これは簡単にわかると思う.
[34] finite etale $X' \to X$ で X' が h-principle を満たすときに X が満たすかがわからない.

Gromov の定理「elliptic $\Rightarrow$ Oka $\Rightarrow$ h-principle」である．elliptic の例に関して Homogeneous な複素多様体 ($\mathbb{P}^n$, Grassmannians, tori) や $\mathbb{C}^n \setminus A$ (A は codim 2 以上の algebraic subvarieties A) などがある．

なお Oka との関連は"projective manifold"の場合は次のとおり．

$$\text{elliptic} \Longrightarrow \text{Oka} \Longrightarrow h\text{-principle} \Longrightarrow \text{special}$$

「h-principle$\Rightarrow$Oka」は一般に嘘である．(単位円板を考える) ただ次はどうなるだろうか？

Question 1.79. [CW15, Question 9.1] projective manifold に関して h-principle $\Rightarrow$ Oka?

1.10 補足・ちょっと思ったこと

1.10.1 Hyperkahler の場合

Kobayashi pseudometric が消えるという条件は HyperKähler の方で調べれれている．Kamenovelehn[KL22] を見ると次の通り

Theorem 1.80. *[KL22, Theorem 1.1] X primitive symplectic variety とする． 任意の primitive symplectic variety で X と locally trivial deformation を持つものが rational SYZ conjecture を満たすとする．このとき次が成り立つ．*

1. *$b_2(X) \geq 5$ ならば，X は Kobayashi hypertbolic ではない．*
2. *$b_2(X) \geq 7$ ならば，Kobayashi pseudometric d_X は常に 0．*

Question 1.81. 上の多様体は Oka, $\mathbb{C}$-connected, h-principle を満たす?

$\kappa = 0$ なので Special は確定である．

また"singular"の場合は本当に Oka, h-principle を満たすかな?と思った．

Question 1.82. Fujiki の複素 2 次元 symplectic orbifold は全て h-principle を満たすか?

Fujki 先生が 82 年に symplectic orbifold の例を出している． https://arxiv.org/abs/2503.23373 参照のこと．

1.10.2 [CW15] 関連

[CW15, Section 7] 見てて思ったこと

Question 1.83. X を compact Kähler 多様体とする. h principle を満たすならば weakly special??
また h principle を満たすならば任意の Brody hyperbolic 多様体への正則写像は定数?

X が projective の場合は正しい． special ならば weakly special なので. X が compact Kähler の場合はどうなる? もし正しいなら [CW15, Section 7] は自明に正しい.

Question 1.84. h-principle は bimeromorphic invariant?
finite etale $X' \to X$ で X' が h-principle を満たすときに X が満たす?

もしそうなら面白いし, そうでないなら special でない反例になる.

Question 1.85. h-principle を満たすならば, 任意の表現 $\rho : \pi_1(X) \to GL(r, \mathbb{C})$ の像は almost Abelian??

special ならば上は満たす.

Question 1.86. LC もしくはそれより悪い特異点だと 1.79 は成り立たないのでは？
また 1.50 は X が singular だと下の例が反例になっている?

Y を $\mathbb{P}^2$ 内にある種数 2 以上のリーマン面とする. $X \subset \mathbb{P}^3$ を頂点 P とする Y 上の cone をとする. $f : X \dashrightarrow Y$ を P から Y への射影とする. これは定数ではない.

ちなみに $\pi : \widetilde{X} \to X$ を P での blow up とすると $\widetilde{X} \to Y$ は $\mathbb{P}^1$ 束となる. $\pi^{-1}(x) \cong Y$ であり, X の特異点は LC より悪い. h-principle を満たすかがわからない.

なおこの例は非常に有名な例で, Rationally connected ではないが, Rationally chain connected である例である. (環論でも有名な例らしい). また $\widetilde{X}$ は special ではないしまた Kobayashi psedo-metric も消えてない

1.75 を使えば normal でも反例があるような気がする.(多分 KLT より singularity が悪いと色々と不備が出そうな気がする.)

2 Oka 多様体まとめと問題

Oka 多様体の基本性質などをまとめる．これらは日下部さんのサーベイ (日本数学会 2021 [kus21]) や Forstnevic のサーベイ [Fc13] などをそのまま移した．

また用語に関しては時代によって変わっている可能性がある．適宜 Forstneric の ICM2026 のサーベイや日下部さんの岡シンポジウム 2024 のサーベイなど最近のものを参照してほしい．

2.1 Oka 多様体の定義

Definition 2.1. X を複素多様体, $f: X \to Y$ を正則写像とする．

1. $f: X \to Y$ 上のsprayとは, 正則ベクトル束 $E \to X$ と, $s: E \to Y$ で任意の $x \in X$ について $s(0_x) = f(x)$ となるもの．
2. $f: X \to Y$ 上の spray $E \to X, s: E \to Y$ がdominateとは, $s|_{E_x}: E_x \to Y$ が $0_x \in E_x$ で沈め込みになること．
3. $f: X \to Y$ にdominate な sprayが存在するとは, 正則ベクトル束 $E \to Y$ と正則写像 $s: E \to Y$ が存在して, 任意の $x \in X$ で $s(0_x) = f(x)$ かつ $s|_{E_X}: E_x \to Y$ が $0_x \in E_x$ で沈め込みになること．

Definition 2.2. X を複素多様体とする．

- X が(Gromov)-Ellipticであるとは, id_X に dominate な spray が存在すること． つまり正則ベクトル束 $E \to X$ と正則写像 $s: E \to X$ が存在して, $s(0_x) = x$ かつ $s|_{E_x}: E_x \to X$ が $0_x \in E_x$ で沈め込みになること．
- X がsubellipticであるとは, X 上の有限個の正則ベクトル束 $\pi_j: E_j \to Y$ と零切断に制限すると恒等写像になる正則写像 $s_j: E_j \to Y,\ j = 1, \ldots, m$ で、任意の $y \in Y$ に対して
$$\sum_{j=1}^{m} (ds_j)_0|_{(E_j)_y} = T_yY$$
となるものが存在すること．
- X がEll_1(相対楕円的)であるとは, 任意の Stein 多様体 Z と任意の正則写像 $f: Z \to X$ に dominate な spray が存在すること． つまり正則ベクトル束 $E \to Z$ と正則写像 $s: E \to X$ が存在して, $s(0_z) = f(z)$ かつ $s|_{E_z}: E_z \to X$ が $0_z \in E_z$ で沈め込みになること．
- X がOkaとは, 任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ と任意のコンパクト凸集合 $K \subset \mathbb{C}^n$ について $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, X)|_K \subset \mathcal{O}(K, Y)$ が dense であること． この性質を CAP(Convex Approximation Property) という．

- X がC-dominableとは, ある $x \in X$ と正則写像 $s : \mathbb{C}^{\dim X} \to X$ があって, $s(0) = x$ かつ 0 で沈め込みになること. (つまり s が非退化であること.)
- X がC-strongly-dominableとは, 任意の点 $x \in X$ についてある正則写像 $s : \mathbb{C}^{\dim X} \to X$ があって $s(0) = x$ かつ 0 で沈め込みになる.
- X がC-connectedであるとは, 任意の $a, b \in Y$ に対し, 有限個の $f_j \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, Y)$, $j = 1, \ldots, m$ で
$$a \in f_1(\mathbb{C}), \quad b \in f_m(\mathbb{C}), \quad f_j(\mathbb{C}) \cap f_{j+1}(\mathbb{C}) \neq \emptyset, \quad j = 1, \ldots, m-1$$
となるものが存在すること.
- X がstrongly C-connectedであるとは, 上で $m = 1$ としたものが成り立つこと.
- X が Zariski dense entire curve を持つとは, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, Y)$ で $\overline{f(\mathbb{C})} = Y$ となるものが存在すること.

図にするとこんな感じである.

$$\begin{tikzcd}
\text{elliptic} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathrm{Ell}_\infty \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & \mathrm{Ell}_2 \arrow[r, Leftrightarrow] & \mathrm{Ell}_1 \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{subelliptic} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Oka} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & \mathbb{C}\text{-strongly dominable} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{dense entire curve} & \text{strongly } \mathbb{C}\text{-connected} \arrow[r, Rightarrow] & \mathbb{C}\text{-connected} & \mathbb{C}\text{-dominable}
\end{tikzcd}$$

上に図に関して 2 点補足すると以下の通りである.

Theorem 2.3. *[kus21][Fc13]* 複素多様体 X について次は同値

1. *Oka*
2. *Ell_1 (他にも Ell_2, Ell_∞ とかあるらしい.)*
3. *convex elliptic.* つまり任意のコンパクト凸集合 $K \subset \mathbb{C}^n$ から X への正則写像に支配的スプレーが存在する.
4. 任意の *Stein* 多様体 (空間*?*) Z, コンパクト正則凸集合 $K \subset Z$, 閉部分多様体 $Z' \subset Z$ について, 連続写像 $f_0 : Z \to X$ で K の近傍と X' 上で正則ならば, あるホモトピー $f_t : Z \to X$ が存在して次を満たす.
    - $f_t : Z \to X$ は K の近傍で正則で, K 上に一様に近似する.
    - $f_t|_{Z'} = f_0|_{Z'}$
    - $f_1 : Z \to X$ は正則

5. 任意のコンパクト凸集合 $K \subset \mathbb{C}^n$ の近傍からの X への正則写像について，正則写像 $\mathbb{C}^n \to X$ で K 上に一様近似できる．

Theorem 2.4. *Gromov elliptic ならば Oka である．逆は必ずしも成り立たない*

Proof. 上の同値性 (これも定理だが) から Gromov elliptic ならば Ell_1 を示せば良い．Stein 多様体 Z と任意の正則写像 $f : Z \to X$ について，$f^*E \to Z$ と $f^*E \to E \to X$ を考えればこれが dominate spray を与える． □

Oka 多様体の他の同値性に関しては次のとおり．以下の同値性から h-principle との関係が言える．

Theorem 2.5. *[FcL11] 複素多様体 X について次は同値*

1. *Oka．つまり CAP(Convex Approxmation Propety) を満たす．ここで CAP とは，任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ と任意のコンパクト 凸集合 $K \subset \mathbb{C}^n$ について $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n, X)|_K \subset \mathcal{O}(K, Y)$ が dense であること.(一様近似できる).*
2. *Convex Interpolation Property (CIP) を満たす．つまり任意の閉部分多様体 $T \subset \mathbb{C}^n$ で，ある $\mathbb{C}^k$ の convex domain と双正則なものと，任意の正則写像 $f : T \to X$ について，f は正則写像 $\mathbb{C}^n \to X$ への拡張を持つ．*
3. *Basic Oka Property Approxmation and Interpolation (BOPAI) を満たす．つまり任意の Stein inclusion $T \hookrightarrow S$，任意の正則凸コンパクト集合 $K \subset S$，そして連続関数 $f : S \to X$ で $K \cup T$ 上で正則なものについて，f は正則写像 $S \to X$ に変形できる (homotopic である)．またこの変形は T を保つ．*
4. *Parametric Oka Property Approxmation and Interpolation (POPAI) を満たす．つまり，$T \hookrightarrow S$ $K \subset S$ を BOPAI のものとし，$Q \subset P \subset \mathbb{R}^m$ をコンパクト部分集合とする．*
   任意の連続関数 $f : S \times P \to X$ であって，
   - *任意の $x \in Q$ について，$f(\cdot, x) : S \to X$ は正則*
   - *任意の $x \in P$ について，$f(\cdot, x)$ は $K \cup T$ 上で正則*

   このとき連続な変形 $f_t : S \times P \to X$ $(t \in [0, 1])$ であって，$f = f_0$ かつ次を満たす．
   - *$\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ は $(S \times Q) \cup (T \times P)$ を保つ．*
   - *任意の $t \in [0, 1]$, $x \in P$ について $f_t(\cdot, x)$ は K 上で正則．さらに f_t は $K \times P$ 上に f に一様に近づく.(多分 $\lim_{t\to 0} \sup_{K\times P} ||f_t - f||_X = 0$ だと思う)*
   - *任意の $x \in P$ について，$f_1(\cdot, x) : S \to X$ は正則*

他にも BOBI とかいっぱいあるが BOP と POP 以外は全て同値とのこと[35]

最後の POPAI がわかりずらい．$K = \varnothing$ にするとこの図のようになる．ここで $\mathcal{O}(S, X)$ は $S \to X$ なる正則写像の集合, $\mathcal{C}(S, X)$ は $S \to X$ なる連続写像の集合とする．

$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "q \mapsto f(\cdot, q)"] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}(S,X) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{C}(S,X) \arrow[d, "\cdot|_T"] \\
P \arrow[r, "p \mapsto f(\cdot, p)"'] \arrow[ur, dotted, "p \mapsto f_1(\cdot, p)"] \arrow[urr, "p \mapsto f(\cdot, p)"'] & \mathcal{O}(T,X) \arrow[r, hook] & \mathcal{C}(T,X)
\end{tikzcd}
$$

つまり,

- 連続関数で $f : S \times P \to X$ を与える．これは $p \in P$ ごとに $f(\cdot, p) \in \mathcal{C}(S, X)$ を与える (P から右右上の矢印)
- $q \in Q$ ごとに $f(\cdot, q) \in \mathcal{O}(S, X)$ を与える (上の水平の矢印)
- $p \in P$ ごとに $f(\cdot, p) \in \mathcal{O}(T, X)$ を与える (下の水平の矢印)

となるものを与えると, $f_t : S \times P \to X$ という変形で

- (POP の 3 つ目の条件と同値) $p \in P$ について, $f_1(\cdot, p) \in \mathcal{O}(S, X)$($P$ から右上の矢印)
- (POP の 1 つ目の条件と同値) $Q \to P \to \mathcal{C}(S, X)$ と $P \to \mathcal{C}(S, X) \to \mathcal{C}(T, X)$ の部分が可換

となるものが存在する．($K = \varnothing$ より 2 番目の条件は null condition)

$K = \varnothing, T = *$ にするともっと簡単になる．連続写像 $f : P \to \mathcal{C}(S, X)$ で $f(Q) \subset \mathcal{O}(S, X)$ となるものは $f_1 : P \to \mathcal{O}(S, X)$ に homotopy で連続変形できる．ただし, $\mathcal{O}(S, X), \mathcal{C}(S, X)$ にはコンパクト開位相を入れる．図式にすると次のとおり

$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}(S,X) \arrow[d, hook] \\
P \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "f_1"] & \mathcal{C}(S,X)
\end{tikzcd}
$$

ただこの図の可換性に関しては注意が必要で,

- $Q \to P \to \mathcal{O}(S, X)$ の部分は可換.
- $P \to \mathcal{O}(S, X) \to \mathcal{C}(S, X)$ の部分は”連続変形”をかませば可換.

[35] [FcL11] の POP は今でいう POPAI のことだと思う．

Corollary 2.6. *Stein* 多様体 S と *Oka* 多様体 X について, $\mathcal{O}(S,X) \hookrightarrow \mathcal{C}(S,X)$ という包含写像は, コンパクト開位相に関して弱ホモトピー同値. *(*この性質を弱岡という*)*
つまり任意の $k \in \mathbb{Z}_+$ について次の同型 *(*$k=0$ のときは全単射*)* が言える.

$$\pi_k(\mathcal{O}(S,X)) \cong \pi_k(\mathcal{C}(S,X))$$

特に *Oka* 多様体は *h-principle(*任意の *Stein manifold* Z からの連続写像 $Z \to X$ が正則写像と *homotopic* である*)* を満たす.

ホモトピー群の定義は1.7参照. S^n を n 次元球面, $P=(1,0,\ldots,0)$, $x_0 \in X$ をとって $x_0 \in \mathcal{O}(S,X)$ を $S \to \{x_0\}$ という定数写像としたとき

$$\pi_n(\mathcal{O}(S,X)) := \{f : S^n \to \mathcal{O}(S,X) \mid f(P)=x_0\}/\sim$$

とする. ここで $f \sim g$ を"f と g はホモトピック", つまり「ある連続写像 $H : S^n \times [0,1] \to \mathcal{O}(S,X)$ で $H(x,0)=f(x), H(x,1)=g(x)$ なものが存在する」として同値関係を入れる.

Proof.

$$\pi_k(i) : \pi_k(\mathcal{O}(S,X)) \to \pi_k(\mathcal{C}(S,X))$$

とする. 全単射を示せば良い.

(単射性) $\gamma : S^k \to \mathcal{O}(S,X)$, $f(P)=x_0$ かつ $\pi_k(i)(\gamma)=0$ とする. すると連続写像 $H : S^k \times [0,1] \to \mathcal{C}(S,X)$ で $H(x,0)=\gamma(x), H(x,1)=x_0 \in \mathcal{C}(S,X)$ なものが存在する

前の議論で, $Q=S^k \times \{0,1\}, P=S^k \times [0,1], K=\varnothing, T=*$ とすると

$$\begin{tikzcd}
S^k \times \{0,1\} \arrow[r, "{\gamma, x_0}"] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}(S,X) \arrow[d, hook] \\
S^k \times [0,1] \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "G"] & \mathcal{C}(S,X)
\end{tikzcd}$$

となるので, ある $G : S^k \times [0,1] \to \mathcal{O}(S,X)$ で $G(x,0)=\gamma(x), G(x,1)=x_0 \in \mathcal{O}(S,X)$ なものが存在する. よって定義から $\gamma = 0 \in \pi_k(\mathcal{O}(S,X))$

(全射性) $\delta : S^k \to \mathcal{C}(S,X)$, $f(P)=x_0$ とする. 前の議論で, $Q=\varnothing, P=S^k, K=\varnothing, T=*$ とすると

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}(S,X) \arrow[d, hook] \\
S^k \arrow[r, "\delta"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\delta}"] & \mathcal{C}(S,X)
\end{tikzcd}$$

となるので, $\widetilde{\delta} : S^n \to \mathcal{O}(S,X)$ で δ と homotopic となるものが存在する. よって $\pi_k(i)(\widetilde{\delta})=\delta$ である.

最後の主張に関しては (全射性) の証明において $k = 0$, $S^0 = pt$ とすれば言える. □

2.2 成り立つこと

Oka 多様体の性質をまとめると次のとおり.

1. Stein Oka は Gromov elliptic.
2. [kus21] Oka である Zariski 開集合で被覆される多様体は Oka
3. [Fc13, Prop2.8] 正則な covering map $\tilde{X} \to X$ について Oka である性質はうつりあう.[36]
4. [Fc13, Cor 2.9] Oka ならば strongly Liouville(任意の negative psh は定数のみ.)
5. [Fc18] Oka ならば $\mathbb{C}$-strongly dominable. つまり $f : \mathbb{C}^{\dim X} \to X$ という全射正則写像がある.
6. [Fc13, Theorem 2.11] 正則ファイバー束 $f : E \to X$ でファイバーが Oka とする. このとき E が Oka と X が Oka は同値. ただ submersion では分かってないらしい. [37]
7. Oka の 1 点 blow up は Oka. ただ blow up locus の次元が 1 次元以上だと分かってないらしい.
8. [Fc13, Theorem 2.13] $\mathbb{C}^n, \mathbb{CP}^n$, Grassmann 多様体について, codim 2 以上の $\mathbb{C}^n$ 内の algebraic subvariety の補集合は Oka.
9. Rational なら Gromov elliptic が 2024 年 11 月に示されたらしい[38]

Example 2.7. (1). 等質多様体 X は Gromov elliptic. 特に Oka.

Proof. 群 G が X に正則かつ推移的に X に作用するとして

$$s : X \times T_e G \to X$$

を $s(x, v) := exp(v)x$ とすればこれが id_X の dominate な spray になる. □

(2). T_X が完備正則ベクトル場 $V_1, \ldots, V_N$ で生成される[39]ならば X は Gromov Elliptic である. 特に Oka である.

Proof. $\varphi_t^i \in Aut(X)$ を V_i のフローとして $s : X \times \mathbb{C}^N \to X$ を

$$s(x, t_1, \ldots, t_N) = \varphi_{t_1}^1 \circ \cdots \circ \varphi_{t_N}^N(x)$$

とすればこれが id_X の dominate な spray になる. □

[36] ここは h-principle と違う点. 種数 2 のリーマン面は h-principle を満たさないが, 普遍被覆は可縮なので h-princiole を満たす. この例はどちらも Oka ではない.

[37] ここも special と違う. X とファイバーが special だが E が special ではない submersion の例がある. ファイバー束の場合はわからん.

[38] https://arxiv.org/abs/2411.17892

[39] 正則柔軟 (holomorphic soft?) というらしい

特に X コンパクトかつ T_X が globally generated なら Oka である.

(3) toric ならば Oka([Fc13, Theorem 2.17], Larusson による結果) 特に $\mathbb{CP}^n$ や minimal Hirzebruch surface も Oka

Proof. $\mathbb{C}^*$ が Oka であることを使い X が torus factor を持たないとして良い. このとき $X = (\mathbb{C}^m \setminus Z)/G$ で Z が algebraic subvariety で codim2 以上なので, $\mathbb{C}^m \setminus Z$ は Oka であり, G が推移的に作用しているので従う. □

(4) トーラスは Oka. $\mathbb{C}^n$ が Oka であるので. 実は [Fc13, Cor 2.25] で $\mathbb{C}^n/\Gamma$ から有限個の点を取り除いても Oka になることがわかっている. これは「$\mathbb{C}^n \setminus A$ で A が discrete な tame 集合というもの」からの covering map を持つからである.

(5) コンパクトリーマン面が Oka であることは $g \leq 1$ と同値. これは $g \geq 2$ ならば $\mathbb{C} \to X$ という全射はないから.

(6) 2 次元 surface$X$ について, RC ならば Oka. これは MMP$X \to X_{min}$ を考えると X_{min} は Hirzebruch surface, $\mathbb{CP}^2$ となるからである.

突き詰めると Xuniruled で X_{min} が種数 2 以上の ruled surface でないなら, X は Oka である

(7) Hopf surface も Oka.

普遍被覆が $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ であるので.

(8) [Cam04, Section 8] Oka ならば special. これは Orbifold Kobayashi-Ochiai を使う.

Example 2.8. [Fc13, Subsection 2.8] minimal Surface に関しては, Kodaira 次元で分けると次がわかる

$\kappa = -\infty$. 分類より $\mathbb{CP}^2$ か ruled surface であるので, 「ruled surface over curve with $g \geq 2$」以外は Oka である

$\kappa = 0$. torus, bielliptic なら Oka. K3, Enriques は不明.

$\kappa = 1$ Buzzard-Lu [BL00] より, $\mathbb{C}$-dominable と dense entire curve があることは同値である. その他全く不明.

$\kappa = 2$ Special でないので Oka でもない.

一つ面白い結果があったので, 書いておく

Proposition 2.9. *[Fc13, Cor 2.39] Kummer ならば $\mathbb{C}$-strongly dominable*

Proof. statified Oka ならば $\mathbb{C}$-strongly dominable であることがわかっている. ここで statified Oka とは $X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_m = \varphi$ という閉部分代数多様体の stratification があって, $X_i \setminus X_{i+1}$ が Oka になるものである.

Kummer 曲面 X はトーラスを $(z.w) \mapsto (-z, -w)$ の作用でわり, そこででた 16 点の特異点で blow up したものである．つまり 16 点の特異点で blow up した rational curve の集合を $C = \cup_{i=1}^{16} R_i$ とすれば $X \setminus C$ は $T \setminus 16$ 点 を $\mathbb{Z}_2$ で割ったものと同型であり, $T \setminus 16$ 点 は Oka である.

C は rational curve の集まりより Oka である. よって X は statified Oka であり, $\mathbb{C}$-strongly dominable である □

2.3 Oka 多様体に関する未解決問題たち

Question 2.10. special ならば Oka か?

ただこれ成り立つか微妙である. なお Campana Winkelman は次のことを示した

Theorem 2.11. *[CW15] X を projective manifold とする. X が h-principle, つまり「任意の Stein manifold Z からの連続写像 $Z \to X$ が正則写像と homotopic である」を満たすとする.*
このとき X は special で Brody hyperbolic Kähler manifold Y への正則写像 $X \to Y$ は定数である.

h-principle であっても Oka ではない. 例えば可縮 ならばどんな写像も定値写像と homotopic なので, 単位円板が反例になる.

Question 2.12. special ならば h-principle を満たすか?

Question 2.13. T_X nef な Fano は Oka 多様体か?

Campana-Peternell 予想が正しいなら T_X は globally generated なので, Oka となる. (Rational homogenus から Oka でもいい)

突き詰めるとこういうことになる.

Question 2.14.
- T_X psef な rationally connected は Oka か？
- Fano や RC は Oka か？
- $\kappa = 0$ なら Oka か？

なお Campana-Winkelman 23 [CW23] で, ”RC は dence entire curve を持つこと”がわかっている. special ならば dence entire curve を持つは未解決だが, semiabelian variety と birational なら

ば言えている (らしい?).[40]

[40] これは 2024 年の多変数冬セミナーで山ノ井先生が講演していた.

3 Voison のサーベイ

はじめに

Claire Voisin の Fibrations in algebraic geometry and applications のサーベイ [Voi] をまとめた．が，このサーベイかなり難しく，読めない部分が多かった．なので読んでいるときにわからなかった部分をあえて赤字で残すことにした．[41]

3.1 Introduction

Definition 3.1. *$f : X \dashrightarrow Y$ を projective manifold かコンパクト複素多様体の射とする．$f : X \dashrightarrow Y$ が fibration とは，ファイバー連結な dominant map となること．*

fibration$f : X \to Y$ のいいところは X の性質が Y や fiber F に遺伝する (逆も然り) ところである．

1. Y と全てのファイバー F が Brody (resp. algebraically) hyperbolic ならば，X もそう．[42]
2. Y と一般ファイバー F が general type ならば，X もそう．(Iitaka conjecture がこのときは成り立つから)
3. Y と一般ファイバー F が RC ならば，X もそう．(多分 Graber-Harris-Star [GHS03]??)

このサーベイでは 3 つの fibration を扱う

1. Iitaka Fibration
2. MRC fibration と Shafarevich map (Γ-reduction)
3. Core fibration

3 つ目については次の予想から来ている

Conjecture 3.2. *general type ならば，Kobayashi pseudometric が一般点で非退化? $K_X \equiv 0$ ならば，Kobayashi pseudometric が常に 0?*

[KL22] など Hyper-Kahler の場合に研究が進んでいるらしい．

Conjecture 3.3. *Special ならば，Kobayashi pseudometric が常に 0?*

[41] ただ著作権的にいいのかどうかわからないので，やばいのであれば削除します．
[42] これは一般に言えてる??

projective/コンパクト Kähler の仮定は,「コンパクト閉代数 (解析) 集合のパラメーター空間 (CHow-Barlet space) がコンパクトになるという部分で役にたつ (Fujiki の定理) Kähler の仮定を外しても local deformation の部分は大丈夫だが, コンパクト性はもはや成り立たない.

3.2 Fibrations and holomorphic forms

3.2.1 General facts on fibrations and holomorphic forms

X, Y projective manifold/コンパクト Kähler manifold とし, $f : X \to Y$ を全射とする.

Remark 3.4. $f : X \to Y$ の Stein 分解 $f_{st} : X \to Y_{st}$ を取る. $f_{st} : X \to Y_{st}$ は with connected fiber となる. よってほとんどの場合において f は fibration であると仮定して良い.

ただ Y_{st} は normal なだけなので, Y の滑らかさが必要な場合はこの議論は適応できない.

Lemma 3.5. *[Voi, Lemma 1.2]* $f : X \to Y$ を *proper* 射とするとき次を満たす.

1. $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ について, $f_*(\pi_1(X)) \subset \pi_1(Y)$ は有限位数を持つ. さらに *with connected fiber* ならば, $f_*(\pi_1(X)) = \pi_1(Y)$
2. $f^* : H^i(Y, \mathbb{Q}) \to H^i(X, \mathbb{Q})$ は *Hodge* 構造における単射である.
3. 一般ファイバーが X_s が連結かつ, 任意の $i > 0$ で $H^0(X_s, \Omega^i_{X_s}) = 0$ ならば, $f^* : H^0(Y, \Omega^i_Y) \to H^0(X, \Omega^i_X)$ は $i \geq 0$ で同型である.

Proof. [1] $U \subset Y$ を dense Zariski open で $f_U : X_U \to U$ が smooth になるものをとる. f_U は位相的に locally trivial なので

$$1 \to \pi_1(F) \to \pi_1(X_U) \to \pi_1(U) \to 1$$

である. Y が smooth だと $\pi_1(U) \to \pi_1(Y)$ が全射になる. これより言える. [43]

[2, 3] この状況下では, $\mathbb{R}$ 係数の cohomology の left inverse

$$f^* : H^i(X, \mathbb{R}) \to H^i(Y, \mathbb{R}) \quad \alpha \mapsto f_*(\omega^d \cup \alpha)$$

が存在する. ここで $d := \dim X - \dim Y$ かつ, ω を X の Kähler form でファイバー上で volume 1 となるものとする. ($H^i(Y, \mathbb{R}) \cong H^{\dim Y - i}(Y, \mathbb{R})^\vee$ と poincare duality で同一視しているので, 上のような pushforward が取れる.) よって $f^* : H^i(Y, \mathbb{Q}) \to H^i(X, \mathbb{Q})$ は単射になる.

また一般点 $s \in Y$ について,

$$0 \to f^*\Omega_Y \to \Omega_{X|X_s} \to \Omega_{X_s} \to 0, \tag{3.1}$$

[43] $\pi_1(X_U) \to \pi_1(X)$ の部分は？

から, $\Omega^i_{X|X_s}$ の filtration を誘導する．仮定から $H^0(X_s, \Omega^i_{X_s}) = 0$ なので

$$H^0(X_s, \Omega^i_{X|X_s}) = H^0(X_s, f^*\Omega^i_Y).$$

である．X 上の正則 i-form α は, 正則値 $Y^0 \subset Y$ 上の $f^*\Omega^i_Y$ の正則 i-formβ と同一視される．この β は Y 上に

$$\beta' = f_*(\omega^d \wedge \alpha)$$

として, 拡張される．$\alpha = f^*\beta'$ が $X^0 = f^{-1}(Y^0)$ 上で成り立つので, X 上でも成り立つ． $\square$

Remark 3.6. [Voi, Remark 1.4] 3.1 の完全系列は,

$$0 \to N^*_{X_s/X} \to \Omega_{X|X_s} \to \Omega_{X_s} \to 0, \tag{2}$$

の特別な場合である．$s \in Y$ が general ならば $N_{X_s/X} = f^*T_{Y,s}$ となる．

X の d-次元多様体 $\mathcal{X}_s \subset X$ による covering family による以下のような図式を考える．ここで f を fibration, ϕ を generically finite dominant map とする．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

Lemma 3.7. *[Voi, Lemma 1.5] fibration $f : X \to Y$ について, $K_{X|_{X_s}} = K_{X_s}$ となる．また covering family $(\mathcal{X}_s)_{s \in Y}$ について, general member $\mathcal{X}_s$ について,*

$$K_{\mathcal{X}_s} = K_{X|_{\mathcal{X}_s}} + D$$

となる．ここで D は $\mathcal{X}_s$ 上 effective divisor である．

Proof. 一般点 $s \in Y$ について,

$$0 \to f^*\Omega_Y \to \Omega_{X|X_s} \to \Omega_{X_s} \to 0, \tag{3.2}$$

であり, $f^*\Omega_Y$ は X_s に沿って自明であるので, det をとれば

$$K_{X|_{X_s}} \underset{\mathrm{def}}{\cong} \det \Omega_{X|X_s} \underset{(3.2)}{\cong} \det f^*\Omega_Y|_{X_s} \otimes \det \Omega_{X_s} \underset{f^*\Omega_Y|_{X_s}\text{ が自明}}{\cong} \det \Omega_{X_s} \underset{\mathrm{def}}{\cong} K_{X_s}$$

ϕ は generically finite なので, (X が smooth であることも使って), ある ramification divisor R があって, $K_{X'} = \phi^*K_X + R$ となる．よって, $X_s \not\subset R$ となる X_s について $D = R|_{X_s}$ とすれば良い． $\square$

Lemma 3.8. *[Voi, Lemma 1.6] holomorphic pluridifferential forms(多重正則形式?), つまり $k \in \mathbb{Z}_+$ について $H^0(X, \Omega_X^{\otimes k})$ は compact Kähler 多様体の上の双有理不変量である.*

Proof. X, Y を compact Kähler 多様体とし, $\phi : X \dashrightarrow Y$ を双有理射とする. Zariski open $U \subset X$ で, $\operatorname{codim} X \setminus U \geq 2$ かつ $\phi|_U : U \to Y$ が well-defined であるものを取る. すると

$$\phi^* : H^0(Y, \Omega_Y^{\otimes k}) \to H^0(U, \Omega_U^{\otimes k}).$$

という写像は, $\phi : U \to Y$ が非退化であり微分が消えないので単射である. Hartogs の定理から, $H^0(U, \Omega_X^{\otimes k}) = H^0(X, \Omega_X^{\otimes k})$ である. 同様のことを X と Y を入れ替えれば, 同型が言える. □

3.2.2 Iitaka fibration

X projective manifold, L line bundle とする.

$$M(L) := \{k \in \mathbb{N} \mid H^0(X, kL) \neq 0\}$$

という部分集合を定義する. これは $\mathbb{N}$ の部分 monoid となる.[44]よって, ある $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ があって, 十分大きな $M(L)$ の元は k_0 の倍数となる.

以下 $k_0 \neq 0$ とする. 定義から $m \gg 0$ かつ k_0 の倍数ならば, $H^0(X, kL) \neq 0$ である. 次の例から $k_0 > 1$ となりうる

Example 3.9. E 楕円曲線, Y projective manifold とする. L_0 を 位数 $k_0 > 1$ の E 上の torsion line bundle, L_Y を L_Y の ample line bundle とする. $X = E \times Y$, $L = L_0 \boxtimes L_Y$ とおくと $k_0 > 1$ となる.

Iitaka 次元 $\kappa(L)$ を $k \in M(L)$ において $|kL|$ の線形系で定義される写像

$$\phi_{kL} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$$

の像の最大次元とする. ただし $M(L) = \{0\}$ のときは $\kappa(L) = -\infty$ とする. $L = K_X$ の Iitaka 次元を X の Kodaira 次元という

例えば $\kappa(L) = 0$ であることは, $M(L) \neq \{0\}$ かつ任意の $k \in M(L)$ で $h^0(X, kL) = 1$ が成り立つことと同値である.

Theorem 3.10. *[Voi, Theorem 1.7 (Iitaka)] ある fibration*

$$\phi_L : X \dashrightarrow Y$$

[44] N が monoid とは $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ と単位元の存在を満たすもの. $M \subset N$ が部分 monoid とは $x, y \in M$ ならば $x \cdot y \in M$ なるもの

で次を満たすものが存在する

1. $\dim Y = \kappa(L)$.
2. $\tilde{\phi}_L : \tilde{X} \to Y$, $\tau : \tilde{X} \to X$ を ϕ_L の不確定点解消とし, $\tilde{\phi}_L$ の一般ファイバーを F とする. $\tau^* L|_F$ の *Iitaka* 次元は 0 となる.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\tilde{\phi}_L"] \arrow[d, "\tau"'] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "\phi_L"'] & \end{tikzcd}$$

さらにこの *fibration* ϕ_L は Y の *birational*を除いて一意である. この *fibration* $\phi_L : X \dashrightarrow Y$ を *Iitaka fibration* という.

$L = K_X$ の場合, 3.8 から任意の $r \in \mathbb{Z}_+$ について $H^0(\widetilde{X}, K_{\widetilde{X}}^{\otimes r}) \cong H^0(X, K_X^{\otimes r})$ である. つまり $\tilde{\phi}_{K_X} : \tilde{X} \to Y$ が $K_{\tilde{X}}$ の Iitaka Fibration と同一視できる. さらに 3.7 から, 一般ファイバー F について $K_{\tilde{X}}|_F = K_F$ となる. よって以上より下を得る.

Corollary 3.11. *[Voi, Corollary 1.8] 0 以上の Kodaira 次元 κ を持つ多様体において, canonical fibration $\phi_{K_X} : X \dashrightarrow Y$ で Y の次元は κ で, 一般ファイバーは Kodaira 次元 0 を持つものが存在する.*

Proof of 3.10. 任意の $k \in M(L)$ について, ある $0 \neq \sigma \in H^0(X, k_0 L)$ をとって包含写像 $\sigma : H^0(X, kL) \hookrightarrow H^0(X, (k+k_0)L)$ がある. よって次の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\phi_{(k+k_0)L}"] \arrow[d, equal] & \mathbb{P}^{N'} \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, dashed, "\phi_{kL}"] & \mathbb{P}^N \end{tikzcd}$$

右の $\pi : \mathbb{P}^{N'} \to \mathbb{P}^N$ は linear projection である. よって k を十分大きくすれば,

$$\dim \operatorname{Im} \phi_{kL} = \kappa(L) \tag{3.3}$$

となり π が generically finite rational map

$$\operatorname{Im}(\phi_{(k+k_0)L}) \dashrightarrow \operatorname{Im} \phi_{kL},$$

を引き起こす. これらは X で支配されるので, k が十分大きければ birational となる.

さて k_0 で割り切れる十分大きな k を取り, Y を $\operatorname{Im} \phi_{kL}$ の smooth model とする. さらに $\phi : \tilde{X} \to Y$ を $\phi_{kL} : X \dashrightarrow Y$ の不確定点解消とする.

示すべきことは以下の二つである.

(a) ϕ の一般ファイバーが既約となること.
(b) $\widetilde{X}$ 上の line bundle $\tilde{L} = \tau^* L$ を一般ファイバーに制限したとき, その Iitaka 次元は 0.[45]

$Y_k = \mathrm{Im}\,\phi_{kL}$ とし, $\mathcal{O}_{Y_k}(1)$ を $Y_k \subset \mathbb{P}^N$ としたときの $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ の引き戻しとする. すると定義から $H^0(X, L^{\otimes k} \otimes \phi_{kL}^* \mathcal{O}_{Y_k}(-1))$ に 0 でない section がある.(σ を使う.) よって 0 でない section

$$\alpha \in H^0(\widetilde{X}, \tilde{L}^{\otimes k} \otimes \phi^* \mathcal{O}_Y(-1))$$

がある. ただし, $\mathcal{O}_Y(1)$ は $\mathcal{O}_{Y_k}(1)$ の Y への引き戻しとする. $\mathcal{O}_Y(1)$ は big なので, 任意の $r \geq 0$ について, ある $s > 0$ があって,

$$\phi_*(\tilde{L}^{\otimes r}) \otimes \mathcal{O}_Y(s)$$

は Y 上で generically globally generated である. (Kodaira 分解 $\mathcal{O}_Y(1) \sim_{\mathbb{Q}} A + E$ を使えば E 以外で ample なので) よって ϕ の一般ファイバー F について,

$$H^0(\widetilde{X}, \tilde{L}^{\otimes r} \otimes \phi^* \mathcal{O}_Y(s)) \twoheadrightarrow H^0(F, \tilde{L}^{\otimes r} \otimes \phi^* \mathcal{O}_Y(s)|_F) = H^0(F, \tilde{L}^{\otimes r}|_F)$$

は全射である.

さて (a), (b) を示す. (b) が成り立たないとすると, 1 次独立な section $\sigma_1, \sigma_2 \in H^0(F, \tilde{L}^{\otimes r}|_F)$ がある. これより, X への拡張 $\tau_1, \tau_2 \in H^0(\widetilde{X}, \tilde{L}^{\otimes r} \otimes \phi * \mathcal{O}_Y(s))$ がある. α^s を twist して 1 次独立な section$\tau_1', \tau_2' \in H^0(\widetilde{X}, \tilde{L}^{\otimes r+sk})$ が作れる. これは (3.3) 付近のように k を十分大きくとったことに矛盾する. よって $H^0(F, \tilde{L}^{\otimes r}|_F)$ はたかだか一つの section を持つ. (section を持つのは α を制限すれば良い) よって (b) がいえた. (a) も同様で, もし既約でないのであれば上のように 1 次独立な section が作れてしまうためである. □

3.2.3 Castelnuovo-de Franchis and Bogomolov theorems

Lemma 3.12. *[Voi, Lemma 1.10] X を projective manifold/ コンパクト Kähler manifold とする. $\alpha, \beta \in H^0(X, \Omega_X^1)$ を二つの 1 次独立な 1-form で*

$$\alpha \wedge \beta = 0 \text{ in } H^0(X, \Omega_X^2)$$

であるものとする. このとき, 種数 2, 以上の smooth projective curve C への射 $\phi : X \to C$ と, C 上の正則 1-formsα_0, β_0 があって,

$$\alpha = \phi^* \alpha_0 \quad \text{and} \quad \beta = \phi^* \beta_0$$

[45] semiample のときと違い, $\tilde{L}$ は Y の line bundle の引き戻しになるとは限らない

となる．より一般に g 個の X 上の *1* 次独立な $(1,0)$-*form* α_i で，

$$\alpha_i \wedge \alpha_j = 0 \ \ in\ H^0(X, \Omega_X^2)$$

を満たすならば，種数 g 以上の *smooth projective curve* C, *morphism* $\phi : X \to C$ があって，α_i は C 上の正則 *1-forms* の引き戻しになる．

Proof. X がコンパクト Kähler なので，正則 1 次形式ならば closed である．これは $\overline{\partial}$-closed ならば Kahler より harmonic となり，d-closed となるから．

2 つの 1-form α, β は各点で平行である．よって rational map $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ があって，

$$\alpha = f\beta$$

とかける．（可縮な近傍をとってドラームコホモロジーを見る）正則 1-form は d-closed なので，$d\alpha = df \wedge \beta = 0$ となる．よって df もまた α, β と各点で平行である．

そこで $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ を考える．すると，f の fiber 上で α と β は消えている．[46] そこで次を考える．

- $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{P}^1$ を f の resolution
- $F : \tilde{X} \to C$, $r : C \to \mathbb{P}^1$ を $\tilde{f}$ の Stein factorization
- $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ を α, β の引き戻しとする．これは閉正則 1 次形式であり，これらは，$F|_U : U \to C$ のヤコビ行列の階数が最大となる U 上では $F^*\Omega_C \subset \Omega_{\tilde{X}}$ の section となる．

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & C \arrow[d, "r"] \\
X \arrow[r, dashed, "f"] & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

今 $\tilde{X}$ 上の Kähler form ω で F の fiber で体積が 1 となるものをとって

$$\alpha_0 := F_* \omega^{d-1} \wedge \tilde{\alpha}$$

とする．すると α_0 は C 上の正則 1 次形式であり，$\tilde{\alpha} = F^*\alpha_0$ となる．[47]よって，$g(C) \geq 2$ である．C は有理曲線を含まないので，$F \circ \pi^{-1} : X \to C$ は morphism となる．([KM98, 1.1 節参照]) □

Theorem 3.13. *[Voi, Theorem 1.11, Catanese]* X をコンパクト *Kähler manifold* とする．*2* つの *1* 次独立な $\beta, \beta' \in H^1(X, \mathbb{C})$ で

$$\beta \wedge \beta' = 0 \ \ in\ H^2(X, \mathbb{C})$$

[46] これはなぜかわからんかった．
[47] これ C 上正則？

となるものがあるとき, ある種数 *2* 以上の曲線 C への射 $f : X \to C$ で β, β' は $H^1(C, \mathbb{C})$ の元の引き戻しになるものが存在する.
より一般に C は種数 g 以上の曲線への射 $f : X \to C$ の存在は, g 次元ベクトル空間 $V \subset H^1(X, \mathbb{C})$ であって

$$\wedge^2 V \equiv 0 \ \mathit{in} \ H^2(X, \mathbb{C})$$

となるものの存在と同値である. (上に関しては $\wedge^2 H^1(X, \mathbb{C}) \to H^2(X, \mathbb{C})$ と見ている)

Proof. 簡単のため $g = 2$ とする. β, β' の Hodge 分解を

$$\beta = \beta^{1,0} + \beta^{0,1} \in H^{1,0} \oplus \overline{H^{1,0}} \quad \beta' = \beta'^{1,0} + \beta'^{0,1} \in H^{1,0} \oplus \overline{H^{1,0}}$$

とする. ここで $\beta^{1,0}, \overline{\beta^{1,0}}, \beta'^{1,0}, \overline{\beta'^{1,0}} \in H^{1,0}$, つまり正則 1 形式である.[48] $\beta \wedge \beta' = 0$ の仮定から

$$\beta^{1,0} \wedge \beta'^{1,0} = 0 \quad \overline{\beta^{0,1}} \wedge \overline{\beta'^{0,1}} = 0 \text{ in } H^0(X, \Omega^2_X).$$

$$\beta^{1,0} \wedge \beta'^{0,1} + \beta^{0,1} \wedge \beta'^{1,0} = 0 \text{ in } H^{1,1}(X). \tag{3.4}$$

である. 3.12 より以下の場合に帰着できる. (そうでない場合は 3.12 から $X \to C$ が存在する).

$\beta'^{1,0} = \lambda\beta^{1,0}$, $\beta'^{0,1} = \mu\beta^{0,1}$ となる $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ が存在する.

β と β' は一次独立なので $\lambda \neq \mu$ である. 3.4 に代入すると,

$$\mu\beta^{1,0} \wedge \beta^{0,1} + \lambda\beta^{1,0} \wedge \beta^{0,1} = 0 \text{ in } H^{1,1}(X)$$

を得る. $\mu \neq \lambda$, なので,

$$\beta^{1,0} \wedge \beta^{0,1} = 0 \text{ in } H^{1,1}(X). \tag{3.5}$$

である. そこで

$$\eta := \beta^{1,0} \wedge \overline{\beta^{0,1}} \text{ in } H^{2,0}(X).$$

とおく. 実は $\eta = 0$ である. なぜなら 3.5 から, $\eta \wedge \overline{\eta} = 0$ in $H^{2,2}(X)$ である. すると ω を Kähler form として, Hodge-Riemann bilinear relation から

$$H^{2,2}(X, \mathbb{R}) \overset{\wedge\omega^{n-2}}{\to} H^{n,n}(X, \mathbb{R})$$

が正定値であるので, $\eta = 0$ となる. よって 3.12 より, $X \to C$ が存在する. □

[48] $(p, 0)$ 調和形式と正則 p-form は compact Kähler では同じ

Corollary 3.14. *[Voi, Corollary 1.12, Beauville, Siu]* *X をコンパクト Kähler manifold とする．種数 2 以上の曲線 C への定数でない写像 $F : X \to C$ が存在することは，群準同型 $\alpha : \pi_1(X) \to \pi_1(C)$ で像が有限指数であるものが存在することと同値．*

Proof. C は $K(\pi, 1)$ 空間である[49] よって α は連続写像 $f : X \to C$ を誘導する．(作り方は X 上の主 π 束 $X_{\mathrm{univ}} \times C_{\mathrm{univ}}/\pi_1(X)$ を作れば，分類空間の定義から $X \to C$ が作れる)．

仮定から $\mathrm{Im}\,\alpha \subset \pi_1(C)$ は有限指数なので，

$$f_* : H_1(X, \mathbb{Z}) = \pi_1(X)^{ab} \to H_1(C, \mathbb{Z}) = \pi_1(C)^{ab}$$

は有限の cokernel を持つ．($\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$ したら全射になる) これより pull-back $f^* : H^1(C, \mathbb{C}) \to H^1(X, \mathbb{C})$ は単射になり，次の図式を得る．($\wedge$ は cup-product を意味する)

$$\begin{tikzcd}
H^1(C,\mathbb{C}) \otimes H^1(C,\mathbb{C}) \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "f^* \otimes f^*"'] & H^2(C,\mathbb{C}) \arrow[d, "f^*"] \\
H^1(X,\mathbb{C}) \otimes H^1(X,\mathbb{C}) \arrow[r, "\wedge"] & H^2(X,\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

さて $V := f^* H^{1,0}(C) \subset H^{1,0}(X)$ を考えると，f^* は単射なので，これは $g(C)$ 次元である．さらに $\alpha, \alpha' \in H^{1,0}(C)$ について

$$\alpha \wedge \alpha' = 0 \text{ in } H^2(C, \mathbb{C})$$

であるので上の図式から

$$f^*\alpha \wedge f^*\alpha' = 0 \text{ in } H^2(X, \mathbb{C})$$

よって 3.13 より種数 2 以上の曲線 C への定数でない写像 $F : X \to C$ が存在する．逆に関しては，3.5 より． □

Theorem 3.15. *[Voi, Theorem 1.13. Bogomolov and Campana]* *X をコンパクト Kähler manifold, $L \subset \Omega_X^k$ を line bundle とする．(ただし saturated であるとは限らない)．*
$\kappa(L) \geq k$ ならば，ある rational map $\phi : X \dashrightarrow B$, があって，$B$ は k 次元の projective manifold であり，L はある X の Zariski open 上で $\phi^* K_B \subset \Omega_X^k$ と一致する．

Proof. Step1. L の Iitaka fibration が $0 \neq s_0, \ldots, s_N \in H^0(X, L)$ で与えられる場合を考える．その dominant rational map $\phi : X \dashrightarrow B \subset \mathbb{P}^N$ で $\dim B = k$ なものがある．$H^0(X, L) \subset H^0(X, \Omega_X^k)$ によって，ある正則 k 形式 α_i があって，

$$s_i = \alpha_i \text{ in } H^0(X, \Omega_X^k)$$

[49] 基本群が π でそれ以外のホモトピー群が全て自明な空間． http://pantodon.jp/index.rb?body=Kpi1 離散群の分類空間ともみれて，X 上の主 π 束と連続写像 $X \to K(\pi, 1)$ が一対一に対応する．

するとある有理関数 ϕ_i で $\alpha_i = \phi_i \alpha_0$ となる．($\phi_i = \frac{s_i}{s_0}$ である)

3.12 と同様に X が compact Kähler なので，$d\alpha_i = d\alpha_0 = 0$ である．よって $d\phi_i \wedge \alpha_0 = 0$ なので

$$\mathcal{F} := (d\phi_1, \ldots, d\phi_N) \subset \Omega_X$$

とすると，これは X の一般点で Ω_X のランク k の部分束である．つまり $\mathcal{F} = \phi^* \Omega_B$ が一般点で成り立つ．

Lemma 3.16. *[Voi, Lemma 1.16]* W をベクトル空間，$0 \neq u \in \wedge^k W$ とするこのとき

$$V := \{v \in W, v \wedge u = 0\} \subset W$$

は次元 k 以下である．さらに $\dim V = k$ であることは，u が $\wedge^k V$ の生成元であること *(*つまり u が分解可能*)* と同値である．

よって X の一般点で，L と $\wedge^k(\phi^* \Omega_B) = \phi^* \Omega_B^k$，が一致する．

Step2．一般の場合．$s \in H^0(X, L^{\otimes N})$ について，generically finite dominant map $r : X' \to X$ と $s' \in H^0(X', r^* L)$ であって，

$$r_*(\operatorname{div} s') = \operatorname{div} s.$$

となるものが存在する．これは X の位数 N で $\operatorname{div} s$. に沿って分岐する cyclic cover をとって，それを resolution したものとして構成する．

これを繰り返すと次をえる

- generically finite cover $r : X' \to X$
- $r^* L \subset \Omega_{X'}^k$．さらに $r^* L$ の Iitaka fibraiton が $H^0(X', r^* L)$ で与えられる．
- (Step 1 の議論から) $\phi' : X' \dashrightarrow Y'$ で Y' は k 次元の projective manifold で，$r^* L = \phi'^* \Omega_{Y'}^k$ が X' の一般点で成り立つ．
- $\phi_L : X \dashrightarrow Y$ を L の Iitaka fibration とする．

$s \in Y$ を一般点としたとき，$r^{-1}(X_s)$ の既約成分上において，$r^* L$ は Iitaka 次元 0 である．よって次の可換図式をえる．

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, dashed, "\phi' = \phi_{|r^* L|}"] \arrow[d, "r \text{ gen. fin.}"'] & Y' \arrow[d, "r'"] \\ X \arrow[r, dashed, "\phi_L"'] & Y \end{tikzcd}$$

そして $L = \phi_L^* \Omega_Y^k$. が X の一般点で成り立つ．$\square$

Definition 3.17. [Voi, Definition 1.17] $k > 0$ を整数とする．rank 1 subsheaf $\mathcal{L} \subset \Omega_X^k$ で $\kappa(\mathcal{L}) = k$ となるものを，*Bogomolov subsheaf* と呼ぶ

Remark 3.18. [Voi, Remark 1.18] 3.8 から，Bogomolov sheaf の存在は bimeromorphically/birationally invariant である．詳しく言うと，rank 1 の saturated subsheaf $\mathcal{L} \subset \Omega_{X,}^k$, 任意の birational map $\phi : X' \dashrightarrow X$, について，$\phi^*\mathcal{L} \subset \Omega_{X'}^k$ の saturation が，$\mathcal{L}$ と同じ Iitaka 次元を持つ．

3.3 Fibrations from families of cycles

3.3.1 Generalities about Hilbert schemes and Chow varieties

Theorem 3.19. *[Voi, Theorem 2.1] X を complex projective variety とする．このとき高々可算個の，projective schemes $\mathcal{Z}$ と projective scheme Y への flat 射 $f : \mathcal{Z} \to Y$ と射 $\phi : \mathcal{Z} \to X$ があって，*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & \xrightarrow{\phi} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

f のファイバー上で $\phi : \mathcal{Z}_y \hookrightarrow X$ は埋め込みであり，任意の部分 scheme $Z \subset X$ について，ある点 $y \in Y$ があって，$Z = f(\mathcal{Z}_y)$ となる．

ちょっとわかりずらいので，[GPRG94] を参照すると以下の通り．

Corollary 3.20. *[GPRG94, Ch.8 Corollary 1.2] X を解析空間とする．このときある解析空間 $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathcal{O}]_X)$ と subspace $Y \subset \mathcal{D} \times X$ が存在して次を満たす．*

1. *Y は $\mathcal{D}$ 上で flat かつ $pr_2|_Y : Y \to X$ は proper.*
2. *(universal property) S が有限次元解析空間，$Z \subset S \times X$ を subspace とする．さらに Z は S 上で flat かつ $pr_1|_Z : Z \to X$ は proper とする．このとき，正則写像 $f : S \to \mathcal{D}$ がただ一つ存在して，$Z \cong S \times_{\mathcal{D}} Y$ となる*

要は 3.19 の Y が Hilb や Chow に相当して，$\mathcal{Z}$ が universal familiy $\{(y, x) \in Y \times X \mid x \in y\}$ (Y の元は X の subvariety に相当する) である．

この結果は X がコンパクト Kähler でも成り立つ．その場合”subschemes”の部分を”closed analytic subsets”にかえる必要がある．またその場合 Y は Kähler とは限らず，Fujiki class になる．

3.19 において，”X が”コンパクト”や，”projective/Kähler”は必要である詳しくいうと closed subvariety/analytic space の”local な存在”には必要ない (Barlet など) しかしコンパクト性には Fujiki Class が必要 (Bishop の定理を使うから)

Theorem 3.21. *[Voi, Theorem 2.4] X を projective manifold/compact Kähler manifold とし，$x \in X$ を very general point とする．$Z \subset X$ が x を通る closed subvariety ならば，ある covering family*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

で次を満たすものが存在する

- $f : \mathcal{X} \to Y$ *fibration*
- $\mathcal{X}, Y$ *projective manifold* /コンパクト *Kähler,*
- $\phi : \mathcal{X} \to X$ 全射
- ある $s \in Y$ があって，$\phi|_{\mathcal{X}_s} : \mathcal{X}_s \to X$ は $\widetilde{Z} \to X$ と同一視できる．ここで $\widetilde{Z}$ は $Z \subset X$ の特異点解消である．

よく使う方法は以下の通り (ただし X は全て $\mathbb{C}$ 上で定義されているとする．$\overline{\mathbb{Q}}$ だと可算なので使えない)

- [CH24]．$X \dashrightarrow Z$ を MRC とする．一般点 $x \in X$ について，X_x をファイバーとすると $Chow(X)$ は可算個の成分しか持たないので，$Y \subset Chow(X)$ で very general な $x \in X$ について X_x をパラメトライズするものがある．よって universal family を $\mathcal{Z}$ とすれば上の写像が作れる (よく使うのはそっから正規化をとるもの)
- [AD13], [Wan22]．$\mathcal{F} \subset T_X$ という algebraically integrable foliation が存在するとき．この場合定義から，任意の (もしくは一般の)$x \in X$ について L_x という leaf で $L_x \subset \overline{L_x}^{\text{zar}}$ が open なので，$x \in X$ についい subvariety $\overline{L_x}^{\text{zar}}$ を対応できる．よって上と同じ方法で $Y \subset Chow(X)$ で very general な $x \in X$ について $\overline{L_x}^{\text{zar}}$ をパラメトライズするものがある．

Proof. 3.19 より高々可算個の projective scheme $\psi : \mathcal{Z} \to X$ で，X の subvariety/subscheme をパラメトライズするものが存在する．$\mathcal{Z}_i$ を $\mathcal{Z}$ の既約成分する．$\psi : \mathcal{Z}_i \to X$ は projective 射なので，像は Zariski closed である．そこで

$$B := \bigcup_{i | \psi(\mathcal{Z}_i) \subsetneq X} \psi(\mathcal{Z}_i)$$

とする．$X \setminus B$ の点は X の very general point となる．

$x \in X \setminus B$, $Z \subset X$ を x を通る subvariety とする．すると

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f"'] & X \\ Y \end{tikzcd}$$

で Z はある fiber $\mathcal{Z}_y \hookrightarrow X$ と同一視できる.

そこで特異点解消をとって, Y は smooth にして良い．また $\psi : \mathcal{Z} \to X$ は全射である．よって $\mathcal{Z}$ の特異点解消を $\mathcal{X}$ とすれば欲しいものが得られる. □

Remark 3.22. もし $Z \subset X$ が smooth ならば, $\mathcal{Z}$ は $\mathcal{Z}_y$ に沿って smooth であるので, $\mathcal{Z}_y$ に沿って $\mathcal{X} \cong \mathcal{Z}$ であり, つまり $\mathcal{X}_y \cong \mathcal{Z}_y \cong Z$ である.

Remark 3.23. $\mathcal{Z} \to X$ は generically finite になる.(必要ならば Y を制限し, 特異点解消させることにより)

$z \in \mathcal{Z}$ を

- Y は $y = f(z)$ で smooth
- $\mathcal{Z}_y$ で z を通るものも smooth
- $\psi : \mathcal{Z} \to X$ は z で submersion

このとき $\psi|_{\mathcal{Z}_y} : \mathcal{Z}_y \hookrightarrow X$ は immersion であり $k := \operatorname{codim} \mathcal{Z}_y$ 次元ベクトル部分空間 $V \subset T_{Y,y}$ について

$$\psi_* : f_*^{-1}(V) \to T_{X,\phi(z)}$$

が同型になる.

つまり任意の k 次元 subvariety $Y' \subset Y$ で tangent space が y で V になるものについて, $\phi|_{\mathcal{Z}_{Y'}} : \mathcal{Z}_{Y'} \to X$ は generically finite となる.

3.4 MRC and Γ-fibrations

3.4.1 Rationally connected varieties

Definition 3.24. [Voi, Definition 3.1] projective variety X が RCC(rationally chain connected) であるとは, 任意の 2 点 $x, y \in X$ について, ある有理曲線の chain, つまり

$$f_i : \mathbb{P}^1 \to X \; i = 1, \ldots, N \quad f_1(0) = x, f_N(\infty) = y, f_i(\infty) = f_{i+1}(0) \; i = 1, \ldots, N-1$$

となるものが存在すること.
X が RC(rationally connected) とは任意の 2 つの一般点が一つの有理曲線で結べること.

Example 3.25. [Voi, Example 3.2] projective variety X の projective cone C_X は RCC. (vertex 使えば二つで結べる) C_X の resolution$\widetilde{C_X}$ は X 上の $\mathbb{P}^1$ 束になるので, $\widetilde{C_X}$ は RCC とは限らない.(例えば X が種数 2 のリーマン面の時など) よって RCC は birationally invariant ではない.

また C_X は RC とは限らない. 例えば X そのものが有理曲線を持たないとき, RC とは限らない. (例えば C_X の resolution を取って X に落とせば X に有理曲線が存在してしまう) なお RC は birationally invariant である.

Theorem 3.26 (KMM92, Campana, [Voi, Theorem 3.3])**.** X を $\mathbb{C}$ 上の *projective manifold* とする. 次は同値

- X *RCC.*
- X *RC*
- ある有理曲線 $f : \mathbb{P}^1 \to X$ で f^*T_X が $\mathbb{P}^1$ 上の *positive* ベクトル束である*.*

特に $\mathbb{C}$ 上の *projective variety* が *RC* であることは, ある *(*任意の*)* 特異点解消 $\widetilde{X} \to X$ について $\widetilde{X}$ が *RCC(RC)* であることと同値である*.*

ここで $\mathbb{P}^1$ 上のベクトル束 E が positive とは, Grothendieck の定理から $E = \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ と分解したときに $a_i > 0$ となることとする.

$x \in X$ とし, 有理曲線 $\mathbb{P}^1 \to X$ で $f(0) = x$ となるものが存在するとする. 以下は Debarre の本 [Deb01, Section 2.3] を参照.

$$Mor(\mathbb{P}^1, X) := \{g : \mathbb{P}^1 \to X\} \quad Mor(\mathbb{P}^1, X, f|_0) := \{g : \mathbb{P}^1 \to X \mid g(0) = f(0)\}$$

とする. これらは scheme/analytic space となる. $Mor(\mathbb{P}^1, X, f|_0)$ は別の見方ができる. evaluation map

$$\rho : Mor(\mathbb{P}^1, X) \to Mor_(\{0\}, X) \cong X \quad g \mapsto g(0)$$

の $f(0) = x$ でのファイバーともみれる. さて $[g] \in Mor(\mathbb{P}^1, X)$ での接空間は [Deb01, Proposition 2.4] より

$$T_{Mor(\mathbb{P}^1,X),[g]} \underset{[\text{Deb01},Proposition 2.4]}{\cong} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{H}om(g^*\Omega^1_X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})) \underset{X\text{ smooth}}{\cong} H^0(\mathbb{P}^1, g^*T_X) \tag{3.6}$$

となる. 同様にして, $Mor_(\mathbb{P}^1, X, f|_0)$ は

$$T_{Mor(\mathbb{P}^1,X,f|_0),[g]} \underset{\text{tangent map}}{\cong} \mathrm{Ker} H^0(\mathbb{P}^1, g^*T_X) \to H^0(\{0\}, g^*T_X) \underset{0\to\mathcal{I}_0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}/\mathcal{I}_0\to 0}{\cong} H^0(\mathbb{P}^1, g^*T_X \otimes \mathcal{I}_0) \tag{3.7}$$

となる.[50] さて [Deb01, Theorem 2.6] より

$$\dim_{[g]} Mor(\mathbb{P}^1, X) \underset{X \text{ smooth}}{\geq} \dim H^0(\mathbb{P}^1, g^*T_X) - \dim H^1(\mathbb{P}^1, g^*T_X)$$

となる.[51] 同様にして, ([Deb01, Section 2.3] 参照)

$$\dim_{[g]} Mor(\mathbb{P}^1, X, f|_0) \geq \dim H^0(\mathbb{P}^1, g^*T_X \otimes \mathcal{I}_0) - \dim H^1(\mathbb{P}^1, g^*T_X \otimes \mathcal{I}_0) \tag{3.8}$$

[Voi] に戻ると, $f(0) = x \in X$ なる有理曲線で f^*T_X が positive なものが存在するとする. すると

$$\begin{aligned}\dim_{[f]} Mor(\mathbb{P}^1, X, f|_0) &\underset{3.8}{\geq} \dim H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X \otimes \mathcal{I}_0) - \dim H^1(\mathbb{P}^1, f^*T_X \otimes \mathcal{I}_0) \\ &= \dim H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) - \dim H^1(\mathbb{P}^1, f^*T_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \\ &\underset{f^*T_X \text{positive}}{=} \dim H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))\end{aligned}$$

となる. つまり $Mor(\mathbb{P}^1, X, f|_0)$ は $[f]$ の近くで $h^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X \otimes \mathcal{I}_0)$ 次元 (以上) を持っている. [52]そこで evaluation map

$$\rho_\infty : Mor(\mathbb{P}^1, X, f|_0) \to Mor(\{\infty\}, X) \cong X \quad g \mapsto g(\infty) \tag{3.9}$$

を考えると, での differential map (tangent map) は 3.7 と同様にして

$$T_\rho : H^0(\mathbb{P}^1, f^*T_X \otimes \mathcal{I}_0) \to (f^*T_X \otimes \mathcal{I}_0)|_\infty \quad s \mapsto s(\infty)$$

となる. f^*T_X positive より上の写像は全射である.

よって Sard の定理から ρ_∞ の正則値 (ヤコビ行列のランクが full ランクである X の点たち) は一般点となる[53]これより代入写像 $\rho_\infty : Mor(\mathbb{P}^1, X, f|_0) \to X$ は X の一般点において全射になる. (正則値ならば local に射影になるので) これはつまり

一般点 $y \in X$ について, ある $g \in Mor(\mathbb{P}^1, X, f|_0)$ で $g(\infty) = y$ となるものが存在する

ということである. $g : \mathbb{P}^1 \to X$ かつ $g(0) = f(0) = x$ より X は RC となる.

逆に RC だったら, f^*T_X positive な有理曲線の存在も同じで示す. ([Deb01, Proposition 4.9] がそれにあたる 代入写像 $\rho_\infty : Mor(\mathbb{P}^1, X, f|_0) \to X$ が X の一般点において全射を言い変えて, differential T_ρ が全射をいう.)

---

[50] $H^0(\mathbb{P}^1, g^*T_X) \to H^0(\{0\}, g^*T_X)$ は要するに $0 \in \mathbb{P}^1$ を代入する写像. $H^0(\{0\}, g^*T_X) \cong \mathbb{C}^{\mathrm{rk}\, g^*T_X}$ である.

[51] おそらく $Mor(\mathbb{P}^1, X, f|_0), [g]$ は $[g]$ の周りで singular になりうるので tangent space の次元とは一致しない. [Deb01, Theorem 2.6] の主張では, $Mor(\mathbb{P}^1, X)$ は $[g]$ の周りで $\dim H^0(\mathbb{P}^1, g^*T_X)$ 次元の nonsingular variety の $\dim H^1(\mathbb{P}^1, g^*T_X)$ 個の方程式の 0 点集合となる.

[52] [Deb01, Theorem 2.6] の主張から, 実は $Mor(\mathbb{P}^1, X, f|_0)$ は $[f]$ で smooth であることがわかる. $\dim H^0(\mathbb{P}^1, g^*T_X)$ 次元の nonsingular variety の $0 = \dim H^1(\mathbb{P}^1, g^*T_X)$ 個の方程式の 0 点集合となるので

[53] 一般の Sard の定理だと臨界値 (X から正則値を抜いたもの) がルベーグ測度 0 ということだが, 一般点となるのは代数的/解析的だから？

3.26 の残っているのは RCC ならば RC の部分である．まず次の Lemma を見る

Lemma 3.27. *[Voi, Lemma 3.4] X を $\mathbb{C}$ 上の smooth projective variety で RCC, $x \in X$ very general point とする．このとき $f : \mathbb{P}^1 \to X$ を x を通る有理曲線とするとき，f^*T_X semi-positive.*

Proof. X RCC なので，任意の $x \in X$ について x を通る有理曲線が存在する．よって

$$ev : \mathbb{P}^1 \times Mor(\mathbb{P}^1, X) \to X \quad (s, f) \mapsto f(s)$$

は全射になる．$Mor(\mathbb{P}^1, X) = \bigcup B_i$ と既約分解する．今 $Mor(\mathbb{P}^1, X)$ は高々可算個の scheme なので，3.21 と同じく

$$C = \bigcup_{i | ev(\mathbb{P}^1 \times B_i) \subsetneq X} ev(\mathbb{P}^1 \times B_i) \cup \bigcup_{i | ev(\mathbb{P}^1 \times B_i) = X} \{x \in X \mid ev : \mathbb{P}^1 \times B_i \to X \text{ において } x \text{ は臨界値 }\}$$

とすると，$X \setminus C$ は X の very general point となる．

さて $x \in X \setminus C$, $f : \mathbb{P}^1 \to X$ かつ $f(0) = x$ とする．C の定義から，既約成分 $B \subset Mor(\mathbb{P}^1, X)$ で $[f] \in B$ かつ

$$ev : \mathbb{P}^1 \times B \to X$$

は全射かつ $(0, [f])$ で正則点となるものが存在する．ev の $(0, [f])$ での微分は

$$T_{B,f} \to H^0(\mathbb{P}^1, f * T_X) \to (f * T_X)|_\infty$$

でこれが全射になるので，f^*T_X は generically globally generated となり semipositive となる[54] □

Remark 3.28. f^*T_X semi-positive となる有理曲線を free rational curve となる．free rational curve の存在は uniruled(任意の一般点に対してそれを通る有理曲線が存在する) と同値なので，この補題は RCC ならば uniruled を示している．

3.26 の難しい部分は有理曲線の chain から有理曲線を作る部分である．x を y を結ぶ有理曲線の chain C_1, C_2 があるとする (簡単のため 2 つにする)．3.27 より $f_i^*T_X$ semipositive を仮定して良い．$f_i^*T_X$ semipositive だけだと，RC のような有理曲線，つまり (3.9) の微分写像が全射になるような曲線は作れない．

なので有理曲線の normal bundle の positivity を増やすような free rational curve を作ることで，C_1, C_2 を繋ぐ rational curve(”leg”) を作っていく．[55]

[54] ここわからんかった．$T_{\mathbb{P}^1 \times Mor(\mathbb{P}^1, X), (0,[f])} = \mathbb{C} \times H^0(\mathbb{P}^1, f * T_X)$ になるのでは?(3.6 参照)

[55] ここもわからなかった．多分 [CW23] でもあるような Comb smoothing の話??

3.4.2 The MRC fibration

以下基礎体は $\mathbb{C}$ とする.

Theorem 3.29 (KMM92, Campana, [Voi, Theorem 3.6])**.** *projective manifold* X *について, ある rational map* $\phi : X \dashrightarrow B$ *で次を満たすものが存在する.*

1. *very general point* $x \in X$*, general point* $y \in X_{\phi(x)}$*, および任意の有理曲線* $C \subset X$ *で* y *を通るものについて,* $C \subset X_{\phi(x)}$*.*
2. ϕ *のファイバーは RC*
3. ϕ *almost holomorphic. つまり, general fiber で well-defined である (不確定点が* B *全体を覆わない)*

3 の性質より, ϕ の一般ファイバーは smooth である. この 3 の性質が本質的であり, 1 の条件よりもっと強いことが言える

$(1')$ very general point $x \in X$ と有理曲線 $C \subset X$ で $C \cap X_{\phi(x)} \neq \varnothing$ ならば, $C \subset X_{\phi(x)}$.

Sketch proof of 3.29 X non-uniruled のときは $\phi = id_X$ とすればいいので, X uniruled を仮定する. 3.27 より, very general point $x \in X$ について, ある free rational curve $f : \mathbb{P}^1 \to X$ で x を通るものがある.

$x' \in C_x = f(\mathbb{P}^1)$ となる very general point は X においても very general なので, 3.27 を x' にも適応して, free rational curve$C'_{x'} := \mathrm{Im} f', f' : \mathbb{P}^1 \to X$ で x' を通るもので C と異なるものがある. よって, $S_x = \bigcup_{x' \in \mathbb{P}^1} C'_{x'}$ という x を通る曲面ができる. これは RCC となる. 実は実際には RC である. (ここには議論がいるが free であることが効く)

Lemma 3.30. *[Voi, Lemma 3.9]* $f : \mathbb{P}^1 \to X, f' : \mathbb{P}^1 \to X$ *を二つの free rational curves で* $f(0) = f'(0')$ *となるものとする. このとき* $C'' = C \cup C'$ *(* $0 = 0'$ *でくっつける) のある* $(f, f') : C'' \to X$ *の smoothification がある.*
つまり, ある射 $g : \mathcal{C} \to X$ *で* $\phi : \mathcal{C} \to B$ *は曲線* B *上の滑らかな曲面で, smooth fiber は* $\mathbb{P}^1$ *かつ, ある* $b_0 \in B$ *で* $C_{b_0} \cong C''$ *かつ* $g|_{C_{b_0}} = (f, f')$ *となるものが存在する.*
さらに $g_b : \mathbb{P}^1 \to X$ *は一般点* $b \in B$ *について free である.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi"'] & X \\
B &
\end{tikzcd}$$

この補題は weak gluing lemma と言われる (Miyaoka-Peternell[?] 参照) これより $C \cup C'$ を含む曲面 S_x で任意の一般点は x と free rational curve で結ばれるものが存在する.

これを繰り返して (C_x を S_x に取り替えて) very general point $x \in X$ について, ある varietyX_x で x を通り, (1) を満たすようなものが存在する. また (2) も成り立つ. 実際に very general point $x' \in X_x$ について, $X_{x'} = X'_x$ で general point $y \in X_x$ は x' と有理曲線で結ばれる. よって X_x は RC となる. (というかこれは構成からそうなるのでは？)

あとは fibration を作れば良い. これは 3.31 の応用である. 上の構成から $\tilde{\phi} : \tilde{X} \to B$ という fibration が作れる, ここで $\tau : \tilde{X} \to X$ を X の blowup の列とする. [56] τ の 1 次元以上の fiber は RC なので, $E := \mathrm{Ex}(\tau)$ は B に dominate しないか, $\phi : E \to B$ が τ を経由するかである. これから B の一般点上で ϕ は well-defined となる. □

(3) に関しては Campana の別証明もある.(多分こっちは Douady space 使うはず.)

Theorem 3.31 (Graber-Harris-Starr [GHS03], [Voi, Theorem 3.10])**.** *X projective manifold $\phi : X \dashrightarrow B$ MRC fibration とするとき, B は non-uniruled.*

Theorem 3.32. *[Voi, Theorem 3.12] $f : Y \to C$ projective 射で一般ファイバーが RC, C を smooth curve とする. このとき f の section $C \to Y$ がある. もっと強く f の section で f の一般ファイバーの一般点を通るものが存在する.*

Proof of 3.32 ⇒ 3.31 $\phi : X \dashrightarrow B$ MRC fibration, $b \in B$ を一般点とする. resolution をとって, $\phi : X \to B$ が射であると仮定して良い.

B が uniruled とすると, 一般点 $b \in B$ について, ある定数でない $\alpha : \mathbb{P}^1 \to B$ で $b \in B$ を通るものが存在する. $\alpha(0) = b$ として良い. $X_\alpha := X \times_B \mathbb{P}^1$ とする. $b \in B$ が general なので, 既約成分 $X_{\alpha,d} \subset X_\alpha$ で

$$\phi_\alpha : X_{\alpha,d} \twoheadrightarrow \mathbb{P}^1$$

が dominant になるものがある. さらに $X_{\alpha,d} \to \mathbb{P}^1$ は 0 のファイバーで smooth として良く, 0 のファイバーは $X_b = \phi^{-1}(b)$ と同一視される. よって resolution を

$$\tilde{\phi}_\alpha : \tilde{X}_{\alpha,d} \to \mathbb{P}^1$$

をとって, 3.32 を適応すると, $\tilde{X}_{\alpha,d}$ には有理曲線 C で $C \not\subset \tilde{\phi}_\alpha^{-1}(0)$ かつ $\tilde{\phi}_\alpha^{-1}(0)$ の一般点を通るものが存在する.

$$\tilde{X}_{\alpha,d} \to X_\alpha \xrightarrow{p_1} X$$

という合成写像によって, X にも 有理曲線 C で, $C \not\subset X_b$ かつ X_b の一般点を通るものが存在する. これは MRC の (1) に矛盾する. □

[56] ここちょっとわからん. B は上の B??

3.4.3 Mumford's conjecture

Lemma 3.33. *[Voi, Lemma 3.13] X RCならば, $H^0(X, \Omega_X^{\otimes k}) = 0$ for $k > 0$.*

Proof. 3.26 より, very free rational curve, つまり $f : \mathbb{P}^1 \to X$ で

$$f^* T_X = \oplus_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i) \quad \text{and} \quad a_i > 0$$

なものが存在する. この evaluation map

$$\rho : \mathbb{P}^1 \times Mor(\mathbb{P}^1, X, f|_0) \to Mor(\{pt\}, X) \cong X \quad (t, g) \mapsto g(t)$$

の $(t, g) \mapsto g(t)$ での differential map (tangent map) は 3.7 と同様にして

$$(T_\rho)_{(t,g)} : T_{\mathbb{P}^1, t} \times H^0(\mathbb{P}^1, g^* T_X \otimes \mathcal{I}_0) \to (f^* T_X \otimes \mathcal{I}_0)|_{g(t)} \quad (v, s) \mapsto v \cdot s(g(t)) \tag{3.10}$$

となる. ここで $s(g(t)) \in \mathbb{C}$ とは section s に $g(t) \in X$ を代入したもので, 代数的にいえば $\mathcal{O}_{X,g(t)}/m_{X,g(t)} \cong \mathbb{C}$ への行き先の値である.

$g^* T_X \otimes \mathcal{I}_0 \cong \oplus_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i - 1)$ で $a_i - 1 \geq 0$ なので, 3.10 の $(T_\rho)_{(t,g)}$ は全射である. よって Sard の定理から, T_ρ は X の一般点で全射になる. つまり言い換えると, 一般点 $x \in X$ について, ある $h \in Mor(\mathbb{P}^1, X, f|_0)$ で $h^* T_X$ が positive なものが存在する.

さて $s \in H^0(X, \Omega_X^{\otimes k})$ とする. 一般点 $x \in X$ について, 上の $h : \mathbb{P}^1 \to X$ をとると, $h^* s \equiv 0$ である. よって $s_x = 0$ である. x は一般点なので $s \equiv 0$ となる.

□

Conjecture 3.34 (Munford conjecture [Voi, Conjecture 3.14])**.** *$H^0(X, \Omega_X^{\otimes k}) = 0$ for $k > 0$ ならば, X RC?*

この予想は下の予想 (nonvanishing conjecture) に帰着される.

Conjecture 3.35. *[Voi, Conjecture 3.15] $\kappa(X) = -\infty$ ならば, X uniruled?*

BDPP よりこの予想は「K_X psef ならば $\kappa(X) \geq 0$」と同値である. なので激ムズ予想である.

Proof of 3.35 implies 3.34. $H^0(X, \Omega_X^{\otimes k}) = 0$ for $k > 0$ とし, $X \dashrightarrow B$ を MRC とする. $\dim B > 0$ として矛盾を示す. すると $l > 0$ について,

$$H^0(B, K_B^l) \hookrightarrow H^0(X, \Omega_X^{\otimes l \cdot \dim B})$$

となるので, $H^0(B, K_B^{\otimes l}) = 0$ for $k > 0$ が言える. 3.35 が正しいとすると, B は uniruled になる. 一方 3.31 より B non-uniruled に矛盾する. □

Theorem 3.36 ([BDPP13], [Voi, Theorem 3.16]). *K_X not psef ならば X uniruled.*

3.4.4 An application to Calabi-Yau manifolds

以下, K_X が自明な projective manifold について次にように定義する.

- X が Calabi-Yau(CY) とは次元 k で holonomy $SU(k)$ となるもの.
- X が hyper-Kähler(HK) とは次元 $2k$ で holonomy $Sp(k)$ となるもの.

Theorem 3.37. *[Voi, Theorem 3.17] X 既約単連結 CY とする. このとき任意の dominant rational map $\varphi : X \dashrightarrow Y$ について, Y が projective manifold かつ $0 < \dim Y < \dim X$ ならば Y は RC*

Proof. Step 1. Y が uniruled であることを示す.

3.36 の BDPP より, K_Y が psef でないことを示せば良い. 背理法. K_Y psef と仮定する. rank 1 subsheaf $\varphi^*\Omega_Y^k (k = \dim Y)$ を考えることで, ある line bundle $D \subset \Omega_X^k$ で

$$D = (\varphi^*\Omega_Y^k)^{\mathrm{sat}} \subset \Omega_X^k$$

となるものが存在する. 今 ample line bundle H について, X CY なので,

- Ω_X is H-stable
- Ω_X^k is H-polystable

となる. これはもっと厳密に言えば

- $SU(n)$ holonomy の場合 (CY の場合), Ω_X^k stable
- $Sp(n)$ holonomy の場合 (HK の場合), σ_X という正則 2 形式を使って

$$\Omega_X^k = \bigoplus_{2r \le k} \sigma_X^r \wedge \Omega_{X,0}^{k-2r},$$

  と分解される. ここで $2n = \dim X$ かつ $\Omega_{X,0}^{k-2r} := \mathrm{Ker}(\wedge(\sigma_X)^{n-k+2r+1} : \Omega_X^{k-2r} \to \Omega_X^{2n-k+2r+2})$ である. この $\Omega_{X,0}^{k-2r}$ は stable である.

今 $D \subset \Omega_X^k$ psef なので $\mu_{H^{n-1}}(D) \ge 0$ である. よって

- CY の場合, Ω_X^k stable より起こり得ない
- HK の場合, ある r があって $D = \sigma_X^r \wedge \Omega_{X,0}^{k-2r}$ とならざるを得ない. よって D が rank 1 より $r = \frac{k}{2}$ となる (k は偶数も仮定される) $D = \sigma_X^{\frac{k}{2}} \wedge \Omega_{X,0}^0$ は起こり得ない, というのも

$$\Omega_{X,0}^0 := \mathrm{Ker}(\wedge(\sigma_X)^{n+1} : \Omega_X^0 \to \Omega_X^{2n+2}) = \mathcal{O}_X$$

である. よって $D \cong \sigma_X^{\frac{k}{2}} \cdot \mathcal{O}_X \subset \Omega_X^k$ である.

以上より CY の場合は起こり得ない.

Step 2. Y が RC となること. $\varphi : X \dashrightarrow Y$ において Y uniruled なのでこのとき

$$\varphi' = f \circ \varphi : X \overset{\varphi}{\dashrightarrow} Y \overset{f\ \mathrm{MRC}}{\dashrightarrow} B$$

を考える. すると $\varphi : X \to B$ について Step 1 を使えば B も uniruled となる. よって 3.31 より $\dim B = 0$ となる. つまり Y は RC. □

3.4.5 Shafarevich maps (or Γ-reductions) and Shafarevich conjecture

複素多様体 M が正則凸 (holomorphically convex) とは, Stein 空間への proper 正則写像 $M \to U$ を有することである.

Conjecture 3.38 (Shafarevich conjecture, [Voi, Conjecture 3.18]). *X projective manifold/コンパクト Kähler manifold とする. その普遍被覆 $\widetilde{X}$ は正則凸である.*

普遍被覆ではなく, intermediate covers なら反例がある (Napier 90, due to Narasimhan) general lattice $\mathbb{Z}^4 \simeq \Lambda \subset \mathbb{C}^2$, $X := \mathbb{C}^2/\Lambda$ general complex torus とする. general rank 3 submodule $\Lambda' \subset \Lambda$ で, $\mathbb{C}^2/\Lambda' \to X$ という cover を考えると, これは 正則凸ではない, というのも, $\mathbb{C}^2/\Lambda'$ はコンパクトではないが非定数正則関数を持たない.

さて普遍被覆 $\widetilde{X}$ が正則凸であるとする. すると $\widetilde{X}$ の正則関数によって, proper 射 $F : \widetilde{X} \to U$ で F のファイバーがコンパクト closed analytic subsets となるものが存在する. $\pi : \widetilde{X} \to X$ とする. すると任意の closed analytic subsets $Z \subset X$ で

$$\pi_1(Z') \to \pi_1(X) \text{ has finite image}$$

となるもの ($Z' \to Z$ は resolution とする) は, $\widetilde{X}$ に引き戻すと F のファイバーに入る. そしてその逆も然りである. [57]

[57]厳密にいうと $\pi_1(Z') \to \pi_1(X)$ has finite image であっても, $\widetilde{Z} \subset \widetilde{X}$ という $\widetilde{X}$ への引き戻しは closed コンパクト subset の高々加算個の union ということしか言えないらしい. 実際 Bogomolov-Katzarkov 98 では Shafarevich conjecture への negative な意見 (!) もある.

より一般に群準同型 $\rho : \pi_1(X) \to \Gamma$ によって,

$$\pi_1(Z') \to \pi_1(X) \xrightarrow{\rho} \Gamma \text{ has finite image}$$

という closed analytic subsets $Z \subset X$ を潰す map がある．それが Campana-Kollár の Γ-reduction(Shafarevich map) である．

Theorem 3.39. *[Voi, Theorem 3.19] X projective manifold/コンパクト Kähler manifold とし, 群準同型 $\rho : \pi_1(X) \to \Gamma$ とする．*
このとき fibration $\varphi_\rho : X \dashrightarrow Y$ で次を満たすものが, Y の双有理同値を除いて一意に存在する．

1. *very general point $x \in X$ について, x を通る φ_ρ のファイバー X_x は*

$$\pi_1(\widetilde{X_x}) \to \pi_1(X_x) \to \pi_1(X) \xrightarrow{\rho} \Gamma \text{ has finite image}$$

   となる．ここで $\widetilde{X_x} \to X_x$ は特異点解消である．

2. *very general point $x \in X$, $x \in Z \subset X$ なる subvariety について,*

$$\pi_1(\widetilde{Z}) \to \pi_1(Z) \to \pi_1(X) \xrightarrow{\rho} \Gamma \text{ has finite image}$$

   ならば, $Z \subset X_x$. ここで $\widetilde{Z} \to Z$ は特異点解消である．

3. *φ_ρ は almost holomorphic である．*

Remark 3.40. [Voi, Remark 3.20] (3) から φ_ρ の一般ファイバーは smooth である．よって (1) において, $\widetilde{X_x} = X_x$ として良い．

Sketch of proof of 3.39. (3) は (2) からでる．$\tau : \widetilde{X} \to X$ を φ_ρ の不確定点除去とする．

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{\varphi_\rho}"] \arrow[d, "\tau"'] & Y \\
X \arrow[ur, dashed, "\varphi_\rho"] &
\end{tikzcd}$$

φ_ρ が almost holomorphic でないと仮定する．ある例外因子 $E \subset \widetilde{X}$ で $\widetilde{\varphi_\rho}(E) = Y$ となるものがある．$\tau|_E : E \to X$ のファイバーは φ_ρ で潰されない．そのファイバーは RC より, 有理曲線 $\mathbb{P}^1 \simeq R \to \widetilde{X}$ で, $R \subset (\tau|_E)^{-1}(x)$ となり,

$$\mathbb{P}^1 \simeq R \to \widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{\varphi_\rho}} Y \tag{3.11}$$

が Y の very general point を通るものが存在する．そこで

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{X}_R \arrow[r, "\text{resolution}"] \arrow[rr, bend left, "p_1"] & R \times_Y \widetilde{X} \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[d] \\
 & \widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{\varphi_\rho}"] & Y
\end{tikzcd}
$$

とする． ここで φ_ρ の一般ファイバーは既約なので，$R \times_Y \widetilde{X}$ はたった一つの既約成分で R に dominant するものがある．そいつの resolution を $\widetilde{X}_R$ とする．

$R^0 \subset R$ を $p_1 : \widetilde{X}_R \to R \times_Y \widetilde{X} \to R$ の regular locus とする．すると

$$\pi_1(\widetilde{X}_t) \to \pi_1(\widetilde{X}_{R^0}) = \pi_1(p_1^{-1}(R_0)) \twoheadrightarrow \pi_1(R^0) \to 1, \quad t \in R^0. \tag{3.12}$$

である．一方 $R \subset X$ なので，ある曲線 $R' \subset \widetilde{X}_R$ で R に落ちるものがある．

$R \subset (\tau|_E)^{-1}(x)$ なので，$R'^0 \to R^0 \to \{x\}$ となる，つまり R' は τ で潰されるので，

$$\pi_1(R'^0) \to \pi_1(R'^0) \to \pi_1(X)$$

という map は自明である．一方で

- $\pi_1(R'^0) \to \pi_1(R^0)$ の像は finite index，特に $\pi_1(R^0) \to \Gamma$ は有限の像を持つ
- $\pi_1(\widetilde{X_t}) \to \Gamma$ は有限の像を持つ

であるので，(3.12) から

$$\pi_1(\widetilde{X}_{R^0}) \to \Gamma \text{ has finite image}$$

である．$\widetilde{X}_R$ smooth なので $\pi_1(\widetilde{X}_R) \to \pi_1(\widetilde{X}_{R^0})$ は全射になる．よって

$$\pi_1(\widetilde{X}_R) \to \Gamma \text{ has finite image}$$

である．

(2) から $\widetilde{X}_R$ は $\varphi_\rho : \widetilde{X} \to Y$ のあるファイバーに入る．これは R の取り方，3.11 の付近に矛盾する (R は Y の一般点を通る) これは (2) の最大性に矛盾する．その際に $\pi_1(\widetilde{X}_R) \to \pi_1(\widetilde{X}_{R^0})$ が全射と $\widetilde{X}_R$ が smooth を使う．

fibration を作るには，次の補題がいる．

Lemma 3.41. *[Voi, Lemma 3.21] $Z \subset X$ subvariety, $\varphi_W : \mathcal{W} \to X, \pi : \mathcal{W} \to B$ を X の closed subvariety $W_b \subset X$ の族で，quasi-projective な B でパラメトライズされているとする．*
さらに次を仮定する．

1. 一般の $b \in B$ について,
$$\rho \circ (i_b)_* : \pi_1(\widetilde{W_b}) \to \pi_1(W_b) \to \pi_1(X) \xrightarrow{\rho} \Gamma \text{ has finite image}$$
ここで $i_b : \widetilde{W_b} \to W_b \to X$ を *resolution* と包含写像の合成写像とする;
2. 任意の $b \in B$ について, $W_b \cap Z \neq \varnothing$.
3. $$\rho \circ j_* : \pi_1(\widetilde{Z}) \to \pi_1(Z) \to \pi_1(X) \xrightarrow{\rho} \Gamma \text{ has finite image}$$
ここで $j : \widetilde{Z} \to X$ を *resolution* と包含写像の合成写像とする;

このとき $W := \overline{\cup_{b \in B} W_b}^{\mathrm{zar}} \subset X$ とすると, *smooth projective model* $\widetilde{W} \to W$ について, $\pi_1(\widetilde{W}) \to \Gamma$ *has finite image* である.

要は Z が has finite image かつ W_b が has finite image ならばそれらを union した $W := \overline{\cup_{b \in B} W_b}^{\mathrm{zar}} \subset X$ もまた has finite image ということ.

Proof. $\widetilde{\varphi_W} : \widetilde{\mathcal{W}} \to X$ を $\mathcal{W}$ の smooth projective model とする. blowup をとりまくって, $\widetilde{\varphi_W} : \widetilde{\mathcal{W}} \to X$ は $\psi_W : \widetilde{\mathcal{W}} \to \widetilde{W}$ を経由するとして良い.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathcal{W}} \arrow[rr] \arrow[d, "\psi_W"'] \arrow[rrd, "\widetilde{\varphi_W}"] & & \mathcal{W} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi_W"] & B \\
\widetilde{W} \arrow[r] & W := \overline{\cup_{b \in B} W_b}^{\mathrm{zar}} \arrow[r, hook] & X &
\end{tikzcd}$$

3.5 から $\rho \circ \varphi_{W*} : \pi_1(\widetilde{\mathcal{W}}) \to \pi_1(\widetilde{W})$ has finite image なので,
$$\rho \circ \varphi_{W*} : \pi_1(\widetilde{\mathcal{W}}) \to \Gamma \text{ has finite image} \tag{3.13}$$
を示せば良い.

$\widetilde{\mathcal{W}}$ は, Zariski open set $\widetilde{\mathcal{W}}^0$ で $\mathcal{W}$ の resolution になり, $\widetilde{\mathcal{W}}^0 \to B$ が smooth proper fibration となるものを持つ. open に制限すると, π_1 は全射 $\pi_1(\widetilde{\mathcal{W}}^0) \twoheadrightarrow \pi_1(\widetilde{W})$ になるので, 初めから, $\widetilde{\mathcal{W}}^0 = \widetilde{\mathcal{W}}$ を仮定して良い.

(ii) の仮定から, subvariety $\Sigma \subset \widetilde{W}$ で B へ dominant に写るものがある.Σ を blowup しまくって, Σ は smooth かつ, $\varphi_\Sigma : \Sigma \to Z$ は $\psi_\Sigma : \Sigma \to \widetilde{Z}$ を経由するとして良い.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, equal] \arrow[d, "\psi_\Sigma"] & \Sigma \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "\varphi_\Sigma"] & B \\
\widetilde{Z} \arrow[r] & Z &
\end{tikzcd}$$

$\pi_* : \pi_1(\Sigma) \to \pi_1(B)$ has finite index image. (3) より,

$$\rho \circ \varphi_{W*} : \pi_1(\Sigma) \to \rho \circ j_*(\pi_1(\widetilde{Z})) \subset \Gamma \text{ has finite image} \tag{3.14}$$

よって, $\widetilde{\mathcal{W}} \to B$ は smooth と仮定した (上の議論) ので,

$$\pi_1(\widetilde{\mathcal{W}_b}) \to \pi_1(\widetilde{\mathcal{W}}) \to \pi_1(B) \to 1$$

が成り立つ. 3.14(とその上) より $\pi_1(B) \to \Gamma$has finite image, また (1) より $\pi_1(\widetilde{\mathcal{W}_b}) \to \Gamma$ has finite image である. よって

$$\pi_1(\widetilde{\mathcal{W}}) \to \Gamma \text{ has finite image}$$

よって 3.13 より言えた. □

3.39 の証明続き. $x \in X$ について, 既約 closed subvariety $Z_x \subset X$ で $x \in Z_x$ かつ, $\pi_1(\widetilde{Z_x}) \to \Gamma$ has finite image となる最大のもの (一番次元が大きいもの) とするすると very general point $x \in X$ について $k = \dim Z_x$ となる $k \in \mathbb{Z}_+$ が存在する.

この Z_x が唯一で, u $X \dashrightarrow B$ のファイバーとなっていることを示す. 3.21 から

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ Y & & \end{array}$$

で $f : \mathcal{Z} \to Y$ proper, $\varphi : \mathcal{Z} \to X$ dominant となるものがある. very general point $x \in X$ について, ある $y \in Y$ があって, Z_x と $\mathcal{Z}_y$ が同一視される. $\mathcal{Z}$ の resolution $\widetilde{\mathcal{Z}}$ を取り, $\widetilde{\mathcal{Z}} \to \mathcal{Z} \xrightarrow{f} Y$ の regular locus を Y_0 とする.

$x \in X$ が very general より, $Z_x \cong \mathcal{Z}_y$ となる $y \in Y$ は Y^0 の元であると仮定してよく,

$$\pi_1(\widetilde{\mathcal{Z}}_y) \to \pi_1(\mathcal{Z}_y) \overset{\phi_*}{\cong} \pi_1(Z_x) \to \Gamma \text{ has finite image for any } y \in Y^0$$

となる.

$\varphi : \mathcal{Z} \to X$ が birational であることを示す. 背理法. f が birational でないとすると $\mathcal{Z}_y \subset f^{-1}(f(\mathcal{Z}_y)) \subset \mathcal{Z}$ を考えれば, ある既約成分 $T \subset f^{-1}(f(\mathcal{Z}_y))$ で $\phi : T \twoheadrightarrow Z_x$ かつ, $B := f(T)$ が 1 次元以上になるものが存在する. $\mathcal{Z}_B := f^{-1}(B)$ とすると, 3.41 をが適応できて, $\phi(\mathcal{Z}_B) =: Z' \subset X$ が Z_x を真に含み, $\pi_1(Z') \to \Gamma$ has finite image となるものとなる. $x \in Z_x$ で Z_x は最大の次元なので矛盾する. □

Remark 3.42. [Voi, Remark 3.22] S を $K3$ surface , ι_S を自由に作用する involution とする (S/ι_S は Enriques surface となる.) C を超楕円曲線でその involution を ι_C とする.

$$X := S \times C/\langle(\iota_S, \iota_C)\rangle$$

とする．すると次がわかる．

- $\pi_1(X)$ は無限．実際 $S \times C \to X$ が degree 2 の etale cover になり，$\pi_1(S \times C) \cong \pi_1(C)$ で無限であるので．
- $f : X \to C/\iota_C \cong \mathbb{P}^1$ で一般ファイバーが S と同型．K3 曲面 S は単連結なので，$id : \pi_1(X) \to \pi_1(X)$ に対応する Shafarevich map (Γ-reduction map) は f である．

つまりこの例から Shafarevich map $X \to Y$ の base Y について

- Y は general type になりえず，小平次元 $-\infty$ にもなりうる．また，f は smooth 射なので，Orbifold Base を考えても general type になり得ない．
- Y の基本群も無限になり得ない．むしろ単連結になりうる．

Theorem 3.43 (Campana 95, Katzarkov 97, [Voi, Theorem 3.23])**.** $\pi_1(X)$ が *nilpotent* ならば，*Shafarevich fibration* は *Albanese map* $X \to Y \subset \operatorname{Alb} X$ の *Stein factorization* $X \to Y_{st}$ で与えられる．
また $\phi : X' \to Y'$ を $X \to Y_{st}$ の特異点解消 (つまり X' と Y' は *smooth* で ϕ が *morphism* となるもの) について，$\pi_1(X) = \pi_1(X')$ かつ $\phi_* : \pi_1(X') \to \pi_1(Y')$ が全射かつ *kernel* が有限となる．

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & X \arrow[d, "Sha"] \arrow[dr, "Alb"] & \\
Y' \arrow[r, "resol"'] & Y_{st} \arrow[r, "finite"'] & Y \subset \operatorname{Alb} X
\end{tikzcd}$$

$X \to Y_{\mathrm{st}}$ の特異点解消はつまり，$Y' \to Y_{\mathrm{st}}$ が resolution で，X' を $X' \times_{Y_{st}} Y$ の既約成分で X に dominant するものの resolution である．

G が nilpotent であるとは，正規部分群からなる有限の列

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$$

で $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i) = \{z \in G/G_i \mid zg = gz \forall g \in G/G_i\}$ となるものが存在すること．[58] 同値な定義で $G_{i+1} = [G_i, G]$ が有限の長さで自明群になるでもいい．

G が solvable とは”$G_{i+1} = [G_i, G_i]$ が有限の長さで自明群になる”である．よって nilpotent ならば Solvable である. 逆は成り立たない (上三角行列)

Proof. 以下は Campana の証明．基本群などに関して次が言える．

[58] $[G, G_{i+1}] \leq G_i$ でも可．$[G, G_{i+1}] := \langle \{[x, g] \mid x \in G, g \in G_{i+1}\} \rangle$ である．なおこの n の最小値を冪零度 (nilpotency class) という．

- $\phi_* : \pi_1(X') \to \pi_1(Y')$ は全射になる．というのも $\phi : X' \to Y'$ がファイバー連結なので 3.5 より．
- $\phi_* : H_1(X', \mathbb{Z}) \to H_1(Y', \mathbb{Z})$ は全射かつ，finite kernel である． 実際 X smooth なので，$\mathrm{Alb}\, X' = \mathrm{Alb}\, X = Y$ であり，

$$\mathrm{alb}_* : H_1(X', \mathbb{Z}) \to H_1(\mathrm{Alb}\, X', \mathbb{Z})$$

  が finite kernel を持つことから言える．
- $\phi^* : H^2(Y', \mathbb{Q}) \to H^2(X', \mathbb{Q})$ 単射である．3.5(2) から．

$H := \pi_1(Y')$ について

$$n_{Y'} : H^2(H, \mathbb{Q}) = H^2(\pi_1(Y'), \mathbb{Q}) \to H^2(Y', \mathbb{Q})$$

が単射であることを示す．(多分これは一般に言える．) $E_H \to B_H = E_H/H$ を H の分類空間とする．E_H は可縮である．すると 普遍被覆 $\widetilde{Y'} \to Y'$ が主 H 束なので，$Y \underset{\text{homotopic}}{\sim} (\widetilde{Y'} \times E_H)/H$ である．そこで $u_{Y'} : Y \sim (\widetilde{Y'} \times E_H)/H \to B_H$ とする．すると $n_{Y'}$ は

$$u_{Y'}^* : H^2(B_H, \mathbb{Q}) \to H^2(Y', \mathbb{Q}) = H^2((\widetilde{Y'} \times E_H)/H, \mathbb{Q}).$$

に等しい.$u_{Y'}$ の fiber は $\widetilde{Y'}$ で単連結である．よって，$u_{Y'}$ の Leray spectral sequence を計算すれば $u_{Y'}^* : H^2(B_H, \mathbb{Q}) \to H^2((\widetilde{Y'} \times E_H)/H, \mathbb{Q})$ は単射となる．
よって $\phi_* : H_1(X', \mathbb{Q}) \to H_1(Y', \mathbb{Q})$ は単射なので上と合わせて

$$\phi_* : H_2(X', \mathbb{Q}) \to H_2(Y', \mathbb{Q}) \to H_2(H, \mathbb{Q})$$

は全射の合成で全射になる．$G = \pi_1(X')$ とすると，$\phi_* : H_2(G, \mathbb{Q}) \to H_2(H, \mathbb{Q})$ も全射である．これは以下の可換図式が成り立つため:

$$\begin{array}{ccc} H_2(X', \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H_2(Y', \mathbb{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_2(G, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H_2(H, \mathbb{Q}) \end{array}$$

以上より

- $\phi_* : H_1(G, \mathbb{Q}) \to H_1(H, \mathbb{Q})$ 同型.
- $\phi_* : H_2(G, \mathbb{Q}) \to H_2(H, \mathbb{Q})$ 全射.

であるので，3.44 より

$$\pi_1(X') \to \pi_1(Y')$$

は有限の kernel を持つ.(全射であることは前から言えてる) [59] ∎

Lemma 3.44. *[Voi, Lemma 3.24] $\alpha : G \to H$ を有限生成群の準同型とする. $H_1(G, \mathbb{Q}) \simeq H_1(H, \mathbb{Q})$ 同型かつ, $H_2(G, \mathbb{Q}) \twoheadrightarrow H_2(H, \mathbb{Q})$ 全射ならば, 任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ について, $G/G_n \to H/H_n$ は finite kernel and cokernel を持つ.*
ここで群 Γ について, n-th lower central series を $\Gamma_n = [\Gamma, \Gamma_{n-1}]$ とする.

Corollary 3.45. *[Voi, Corollary 3.25] $\pi_1(X)$ が virtually nilpotent ならば, Shafarevich conjecture は正しい.*

Proof. finite étale cover を取ることで, $\pi_1(X)$ が nilpotent であるとして良い. 3.43 と同じ記号を使う

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & X \arrow[d, "\mathrm{Sha}"] \arrow[dr, "\mathrm{Alb}"] & \\
Y' \arrow[r, "\mathrm{resol}"'] & Y_{\mathrm{st}} \arrow[r, "\mathrm{finite}"'] & Y \subset \mathrm{Alb}\, X = \mathrm{Alb}\, Y'
\end{tikzcd}$$

$\widetilde{A} \to \mathrm{Alb}\, X = \mathrm{Alb}\, Y'$ を普遍被覆とし, $Y'_{\mathrm{alb}} := Y' \times_{\mathrm{Alb}(X)} \widetilde{A}$ とする. $\widetilde{A} \cong \mathbb{C}^{\dim Y}$ である. すると

$$Y'_{\mathrm{alb}} := Y' \times_{\mathrm{Alb}(X)} \widetilde{A} \to \widetilde{A} \cong \mathbb{C}^{\dim Y}$$

は proper である. よって Y'_{alb} は正則凸

3.43 より $\phi_* : \pi_1(X') \to \pi_1(Y')$ は全射かつ, kernel は有限である. そこで $X'_{\mathrm{univ}}, Y'_{\mathrm{univ}}$ を X', Y' の普遍被覆とし,

$$\phi_{\mathrm{univ}} : X'_{\mathrm{univ}} \to Y'_{\mathrm{univ}}$$

を induced map とする. "kernel は有限" ということから $X'_{\mathrm{univ}} \to X' \times_{Y'} Y'_{\mathrm{univ}}$ という finite etale cover が存在する. 特に ϕ_{univ} は proper である. よって Y'_{univ} が正則凸を示せば良い. これは $Y'_{\mathrm{univ}} \to Y'_{\mathrm{alb}}$ も proper なのでいえた.[60] ∎

もっと強く次が言える. これは Eyssidieux らによる.

[59] なおここで証明が終わっていた.Shafarevich map になることは Katzarkov の論文 https://arxiv.org/pdf/alg-geom/9510009 参照. Albanese morpshim$X \to Y$ の Stein factorization に $f : X' \to Y$ について, $f(Z) = pt$ であることと $H_1(Z, \mathbb{Z}) \to H_1(X, \mathbb{Z})$ has finite image であることが同値. (高山先生のサーベイなど参照) よって $\pi_1(X)$ が Abel の場合, は Albanese map から Shafarevich map が作られる

[60] ここの proper 性がわからなかった. $Y_{st} \to Y$ finite だけで言える? なお [Voi] では"$Y' \times_{\mathrm{Alb}(X)} \widetilde{A}$ が Stein なので..." と続いていたが, これは嘘だと思う. 流石に正則凸くらいしかいえない. あとは $Y \subset Alb(X)$ の場合に Shafarevich conjecture が成り立つことが言えれば良いような気もする.

Theorem 3.46. *[Voi, Theorem 3.26]* $\pi_1(X)$ が *faithful linear representation* を持つならば, $\widetilde{X}$ は正則凸

3.5 Special varieties and the core

3.5.1 Morphisms of general type

Campana [Cam04] の初めにある例から見ていく

Lemma 3.47. *[Voi, Lemma 4.1]* C を種数 2 以上の超楕円曲線で *involution* を ι とする. さらに E を楕円曲線 E で $\eta \in E$ を *non-zero* な *2-torsion point* とする.
すると *involution* $\sigma := (\iota, \eta)$ は $C \times E$ に自由に作用するので, 曲面 $\Sigma := C \times E/\sigma$ で楕円曲線 E/η への射と, $f : \Sigma \to \mathbb{P}^1 = C/\iota$ でファイバーが楕円曲線 E であるものが存在する.

$$\begin{tikzcd}
C \times E \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "\pi"] & C \arrow[d, "r"', "\text{degree 2 finite}"] \\
\Sigma := C \times E/(\iota, \eta) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathbb{P}^1 = C/\iota \\
E/\eta &
\end{tikzcd}$$

1. Σ は *general type* B への全射 $\phi : \Sigma \to B$ を持たない.
2. $D \subset \mathbb{P}^1$ を $C \to \mathbb{P}^1$ の分岐因子とする. このとき D の *degree* は $2g + 2$ であり, $f : \Sigma \to \mathbb{P}^1$ は D 上で 2 重の *multiple fibre* を持つ
3. $\pi : C \times E \to \Sigma$ を商写像とする. このとき $\pi^* f^* K_{\mathbb{P}^1}(\frac{1}{2}D) = \mathrm{pr}_1^* K_C$ である.

Proof. (1) $f : \Sigma \to \mathbb{P}^1$ のファイバーは楕円曲線であるので, 曲面の分類から $\kappa(\Sigma) = 1$ である. よって general type surface への全射は存在しない.

今 $\phi : \Sigma \to B$ を種数 2 以上の曲線 B への全射とする. f のファイバーは楕円曲線なので, 任意の $x \in \mathbb{P}^1$ について $\phi(f^{-1}(x))$ は B 上の点となる. (楕円曲線から B への射は存在し得ない). よって剛性定理から, $\mathbb{P}^1 \twoheadrightarrow B$ という射が作れるが, それはあり得ない.

(2) Hurwitz の公式から $2g - 2 = 2 \cdot (-2) + \sum_{q : C \to \mathbb{P}^1 \text{ の分岐点}} (e_q - 1)$ で $e_q = 1$ より, 分岐点の個数は $2g + 2$ 個である. よって $\deg D = 2g + 2$ である. また $\sigma = (\iota, \eta)$ は固定点を持たないので, f は locally に $f \circ \pi : C \times E \to \mathbb{P}^1$ と同じである. よって $p \in D$ について $f \circ q$ は multiples fibers $2E \times p$ を持つ.

(3) $r : C \to \mathbb{P}^1$ を商写像とすると, Hurwitz の公式から $K_C = r^* K_{\mathbb{P}^1}(\frac{1}{2}D)$ となり言える. □

hyperbolicity の観点からすると Σ と $C \times E$ は同様の振る舞いをする．実際 disk や $\mathbb{C}$ から Σ への正則写像は $C \times E$ に lift する．よって Σ の小林擬距離は退化するけれども恒等的に 0 にはなり得ない．

Definition 3.48. [Voi, Definition 4.2] X, Y を projective manifold /コンパクト Kähler, $\phi : X \to Y$ を dominant proper 射かつ, $k := \dim Y$ とする．
ϕ が general type であるとは, 次の saturated rank 1 subsheaf

$$\mathcal{L}_\phi := (\phi^* K_Y)_{\mathrm{sat}} \subset \Omega_X^k$$

について $\kappa(\mathcal{L}) = k$ となること．
rational map $\phi : X \dashrightarrow Y$ について, ϕ が general type であるとは, ある ϕ の特異点解消 $\widetilde{\phi} : \widetilde{X} \to Y$ が general type とすることとする．

ある ϕ の特異点解消の部分は”任意”にしても実際は問題ない．

Remark 3.49. [Voi, Remark 4.3] Bogomolov の定理 3.15 から $\kappa((\phi^* K_Y)_{\mathrm{sat}}) \leq k$ はわかっている．

$\phi : X \to Y$ や $\phi : X \dashrightarrow Y$ が general type であっても Y に関してはあまりよくわからない．が, Campana のアイデアは, ϕ にある条件をつければ, orbifold 構造を考えることで, Y が log general type になる．

$\phi : X \to Y$ を射とする．ϕ によって定まる Y の orbifold structure を, Y 上の $\mathbb{Q}$-divisor Δ_ϕ を以下に定めることで定義する．任意の prime divisor $D \subset Y$ について effective divisor を

$$\phi^*(D) = \sum_E m_E E + D'$$

と分解する．ここで D' は D を dominant しないものとする．そこで

$$m_D := \inf_{E \subset X} m_E \quad \text{and} \quad \Delta_\phi := \sum_{D \subset Y} \frac{m_D - 1}{m_D} D.$$

として定義する．

簡単な例は X, Y が曲線のとき．$\phi : X \to Y$ が locally に $v : U \to V, z \mapsto z^l$ とかけているとき, local multiplicity は l であり,

$$v^*(K_V) = K_U(-(l-1)[0]) \quad \text{and} \quad v^*([0]) = l[0]$$

であるので, $v^*(K_V(\frac{l-1}{l}[0])) = K_U$ となる．

$\phi : X \to Y$ が finite のとき, 構成から $K_X - (\phi^* K_Y(\Delta_\phi))$ は effective である．一方 $\dim X - \dim Y > 0$ のとき, birational map で変換したら, 同様のことは成り立つ．一般には (Y, Δ_ϕ) の Kodaira 次元は (X, ϕ) の birational invariant ではない．

Definition 3.50. [Voi, Definition 4.4] 射 $\phi : X \to Y$ が *neat* であるとは, ある birational morphism $u : X \to Z$ があって, Z が smooth であり任意の divisor $D \subset X$ が, $\phi : X \to Y$ で潰される (つまり $\operatorname{codim}_Y \phi(D) \geq 2$ となる) ならば, $u : X \to Z$ でも潰される.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "u"] & Y \\ Z & \end{tikzcd}$$

Lemma 3.51. *[Voi, Lemma 4.5] 任意の fibration $\phi : X \to Y$ は neat birational model を持つ. つまり, 以下の smooth variety による図式が成り立ち, u, v' が birational, $\phi' : X' \to Y'$ が neat となるようなものが存在する.*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "u"] & Y' \arrow[d, "v'"] \\ X \arrow[r, "\phi"'] & Y \end{tikzcd}$$

Proof. 次の手順で構成する.

1. ϕ の flattening をとる. つまり, $X_1 \to X, Y_1 \to Y$ が projective birational で $\phi_1 : X_1 \to Y_1$ が flat となるものをとる.
2. $Y_2 \to Y_1$ を resolution とする
3. $X_1 \times_{Y_1} Y_2$ の既約成分で X_1 を dominant する成分を取り, その resolution したものを $\tau : X_2 \to X_1$ とする.

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, "\mathrm{bir}"', "\tau"] & Y_2 \arrow[d, "\mathrm{bir}"] \\ X_1 \arrow[r, "\phi_1", "\mathrm{flat}"'] \arrow[d, "\mathrm{bir}"'] & Y_1 \arrow[d, "\mathrm{bir}"] \\ X \arrow[r, "\phi"'] & Y \end{tikzcd}$$

X_2, Y_2 は smooth である. よってあとは $\phi_2 : X_2 \to Y_2$ が neat であることを言えば良い. $D \subset X_2$ で ϕ_2 で潰されるとする. $X_2 \to X$ で潰されることを示す.

もし D が τ で潰されないとすると, $\tau(D) \subset X_1$ は $\phi_1 : X_1 \to Y_1$ で潰される. しかしそれは ϕ_1 が flat なのであり得ない. なぜなら $\phi_1 : \tau(D) \to \phi_1(\tau(D))$ に関して, [GPRG94, Thm 2.1.18] や

[GPRG94, Prop 2.2.11] より

$$\begin{aligned}\dim_x \tau(D) &\underset{\text{常に成り立つ}}{\leq} \dim_{\phi_1(x)} \phi_1(\tau(D)) + \dim_x \tau(D)|_{\phi_1^{-1}\phi_1(x)} \\ &\underset{\tau(D)|_{\phi_1^{-1}\phi_1(x)} \subset \phi_1^{-1}\phi_1(x)}{\leq} \dim_{\phi_1(x)} \phi_1(\tau(D)) + \dim_x \phi_1^{-1}\phi_1(x) \\ &\underset{\text{flat ならば equidimensional(open)}}{=} \dim_{\phi_1(x)} \phi_1(\tau(D)) + \dim X - \dim Y\end{aligned}$$

よって $\dim_x \tau(D) = \dim X - 1$ より $\dim Y - 1 \leq \dim_{\phi_1(x)} \phi_1(\tau(D))$ を得る. □

Proposition 3.52. *[Voi, Proposition 4.6]* $\phi : X \to Y$ が *neat* ならば,

$$\kappa(Y, \Delta_\phi) = \kappa(\mathcal{L}_\phi)$$

ここで $\mathcal{L}_\phi := (\phi^* K_Y)_{\mathrm{sat}} \subset \Omega_X^p, p := \dim Y$ とする.

Proof. 十分大きな割り切れる m について, $H^0(X, \mathcal{L}_\phi^{\otimes m})$ と $H^0(Y, m(K_Y + \Delta_\phi))$ の $\phi : X \to Y$ による pullback が同一視できることを示せば良い. ここで $D \subset Y$divisor について,

$$\phi^*(D) = \sum_E m_E E + D' \quad \text{and} \quad m_D := \inf_{E \subset X} m_E \quad \text{and} \quad \Delta_\phi := \sum_{D \subset Y} \frac{m_D - 1}{m_D} D. \tag{3.15}$$

と定義したが, m は m_D で割り切れ, $m(K_Y + \Delta_\phi)$ が divisor になることを要請する.

$$\mathcal{L}_\phi := \mathrm{Ker} : \Omega_X^p \to \Omega_X^p/(\phi^* K_Y) \to \frac{\Omega_X^p/(\phi^* K_Y)}{\mathrm{tor}}$$

であるので, $\mathcal{L}_\phi$ と $\phi^* K_Y$ が codimension 1 でどのような違いが出るかを見る.

(1). $\phi : X \to Y$ で潰される divisor E について. $\phi : X \to Y$ が neat なので 3.50 のような birational morphism $u : X \to Z$ をとる

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "u"] & Y \\ Z & \end{tikzcd}$$

$E = \sum_i n_i E_i$ で $\phi : X \to Y$ で潰されるものを取る. 3.50 より E_i は $u : X \to Z$ で潰される. Zsmooth なので, 3.8 より

$$H^0(X \setminus \mathrm{Supp}(E), \Omega_X^p) \overset{u^*}{\cong} H^0(Z \setminus u(E), \Omega_Z^p) \underset{\mathrm{codim}\, u(E) \geq 2}{\cong} H^0(Z, \Omega_Z^p) \underset{3.8}{\overset{u^*}{\cong}} H^0(X, \Omega_X^p)$$

となる. よってこの divisor E では違いが出ない.

(2). $\phi : X \to Y$ で潰されない divisor について．$D \subset \mathrm{Supp}(\Delta_\phi) \subset Y$ となる divisor D をとる．D を既約として良い．generic point でどうなるか見る．

$$\phi^*(D) \underset{(3.15)}{=} \frac{m_D - 1}{m_D}\phi^* D \underset{(3.15)}{=} \sum_{E \subset X, \mathrm{codim}_Y \phi(E)=1} m_E \cdot \frac{m_D - 1}{m_D} E + \frac{m_D - 1}{m_D} D'$$

(D' は ϕ で潰されるもの) となる．そこで $E_1 \subset X$ で $\mathrm{codim}_Y \phi(E_1) = 1$ かつ $m_E = m_D$ となるとする．すると，$m(K_Y + \Delta_\phi)$ の section の pullback と $\mathcal{L}_\phi^{\otimes m}$ の section は，$\phi^* D - m_{E_1} E_1$ が $\phi^{-1}(D) \to D$ の fiber に沿って effective になるので，一致する．[61] □

Lemma 3.53. *[Voi, Lemma 4.7] $\phi : X \dashrightarrow Y$ が general type ならば，almost holomorphic.*

Proof. ϕ の不確定点除去を $\widetilde{\phi} : \widetilde{X} \to Y$ とし，$\pi : \widetilde{X} \to X$ は smooth center $Z \subset X$ の blowup で得られるとする．$E \subset \widetilde{X}$ を例外因子とする．示すことは $\widetilde{\phi}(E) \neq Y$ である．

背理法．もし $\widetilde{\phi}(E) = Y$ ならば，saturated sheaf

$$\mathcal{L}_\phi := (\phi^* K_Y)_{\mathrm{sat}} \subset \Omega_{\widetilde{X}}^{\dim Y}$$

を E に制限することで，$\Omega_E^{\dim Y}$ は Iitaka 次元が $\dim Y$ の rank 1 subsheaf $\mathcal{L}$ を持つ．完全系列

$$0 \to \pi|_E{}^* \Omega_Z \to \Omega_E \to \Omega_{E/Z} \to 0.$$

を考える．$\pi|_E : E \to Z$ は projective bundle なので，$\mathcal{L} \to \Omega_E^{\dim Y}$ は Z から来る．(ここには $E \to Z$ の fiber が $\mathbb{P}^l$ であり，$\mathbb{P}^l$ は pluridifferential forms を持たないことを使う)

すると $\widetilde{\phi}|_E E \to Y$ は $Z \dashrightarrow Y$ を経由する．よって Z の general point で ϕ が定義されてしまい，これは Z が ϕ の不確定点であることに矛盾する．[62] □

3.51 と 3.52 より次がわかる．

Definition 3.54 ([Cam04, Section 2], [Voi, Definition 4.8])**.** projective manifold X が *special* であるとは次の同値な 3 条件を満たすこと．

1. X の任意の birational model $\widetilde{X}$ が general type な射 $\widetilde{X} \to Y$ を持たない．(つまり X が general type rational map を持たないということ)

[61] この部分は [Cam04, Section 1] の方がわかりやすい．$\phi_0 : X_0 \to Y_0$ を smooth fibration となる locus$Y_0 \subset Y$ とすると,$H^0(X_0, \mathcal{L}_\phi^{\otimes m})$ と $H^0(Y_0, m(K_Y + \Delta_\phi))$ の $\phi : X \to Y$ による pullback が同一視できる．よってあとは $X \setminus X_0$ でどうなるかを見る．$E \subset X \setminus X_0$ の divisor に関して ϕ で潰される divisor$E$ は (1) の議論から無視できて，ϕ で潰されない divisor$E$ は (2) でうまいことなっているんだと思う．neat の条件は ϕ で潰される divisor$E$ を制御するために必要らしい．

[62] この証明も [Cam04, Section 2] の方がわかりやすい，[Cam04] の証明は不確定点 Z から Y への写像が誘導されてしまうことからわかる．

2. X の任意の birational model $\widetilde{X}$ と $\dim Y > 0$ となる射 $\phi : \widetilde{X} \to Y$ について, $\kappa(Y, \Delta_\phi) < \dim Y$.
3. X が??での Bogomolov subsheaf を持たない

上の定義から special は birational invariant である.

3.47 での surface Σ は $f : \Sigma \to \mathbb{P}^1$ で $D_f := \frac{1}{2}D$ とすれば $\deg(K_{\mathbb{P}^1} + \frac{1}{2}D) = g - 1 > 0$ より

$$\kappa(\mathbb{P}^1, \Delta_f) = \kappa(K_{\mathbb{P}^1} + \frac{1}{2}D) = 1 = \dim \mathbb{P}^1$$

であるので, 3.54 の (2) に反して special ではない.

Lemma 3.55. *[Voi, Lemma 4.9] RC や $K_X \equiv 0$ ならば special.*

Proof. X を RC とする. $\mathcal{L} \subset \Omega_X^p$ rank 1 saturated sheaf について, $\kappa(L) = -\infty$ である. なぜならば任意の $s \in H^0(X, L)$ について, $s \in H^0(X, \Omega_p)$ だが, X RC なので, 3.33 と同じ証明により $s = 0$ である. よって Bogomolov sheaf は存在しないので special.

$K_X \equiv 0$ とし, H ample line bundle とする. すると KE が存在するので, Ω_X^p は H-polystable である. よって $\mathcal{L} \subset \Omega_X^p$ rank 1 saturated sheaf について,

$$L \cdot H^{n-1} \underset{\text{polystable}}{\leq} \frac{c_1(\Omega_X^p) H^{n-1}}{\operatorname{rk} \Omega_X^p} = 0$$

となる. よって常に $\nu(L) \leq 0$ であるので, $\kappa(L) \leq 0$ となり Bogomolov sheaf は存在しない □

もっと強く $\kappa(X) = 0$ ならば special である. この証明は Iitaka 予想型の定理 3.57 を core fibration に使う.

3.5.2 The core fibration

Theorem 3.56. *[Voi, Theorem 4.10] projective manifold X について, ある fibration $\phi : X \dashrightarrow Y$ が存在して次を満たす.*

1. *ϕ は general type. 特に ϕ は 3.53 より almost holomorphic.*
2. *ϕ の一般ファイバーは special.*
3. *任意の very general point $x \in X$ と subvariety $x \in X' \subset X$ について, X' の 特異点解消が special ならば, X' は ϕ の x を通る fiber に含まれる.*
4. *(universality) 任意の rational map $X \dashrightarrow Y'$ で general type なものは, Y を通る. .*

Sketch of the proof. p を Bogomolov subsheaf$\mathcal{L} \subset \Omega^p_X$ が存在するようなもので最大の整数とする. 存在しないときは $p=0$ とする.[63]

$p=0$ ならば X special であり, core map は定数写像である. $p>0$ のとき 3.15 より, rational map $X \dashrightarrow Y$ で general type かつ $\dim Y = p$ のものが存在する.

(2) の性質を示す. general fiber が special でないと仮定して矛盾を示す. 次元による帰納法を用いて, relative core

$$X \overset{\psi}{\dashrightarrow} Y' \overset{\chi}{\dashrightarrow} Y.$$

があるとして良い. relative core fibration とは, very general point $t \in Y$ について, $\psi_t : X_t \dashrightarrow Y'_t$ が X_t の core fibration となるものとする. X_t が special でないので $\dim Y'_t > 0$ となり, $\dim Y' > \dim Y$ である.

ψ の birational model を取ることで次を仮定して良い.

- Y' は orbifold structure Δ_ψ をもち, general fiber で (Y'_t, Δ_{ψ_t}) は of general type
- $\chi : Y' \to Y$ は neat.

よって $X \to Y$ が of general type なので $Y' \to Y$ もそうなる. 3.57 から, (Y', Δ_ψ) が of general type になるが, それは $\dim Y$ の最大性に矛盾する. □

Theorem 3.57. *[Voi, Theorem 4.11] (Y', D) orbifold, $Y' \to Y$ general type neat morphism とする. このとき次が成り立つ.*

$$\kappa(Y', D) \geq \kappa(Y'_t, D_t) + \dim Y.$$

3.5.3 Conjectures

Conjecture 3.58 (Green-Griffiths, [Voi, Conjecture 4.12])**.** *projective manifold X が general type ならば, Zariski dense entire curve $\mathbb{C} \to X$ は存在しない.*

K_X ample でも open である (rational curve が存在するかもしれないので)

Abelian variety の subvarieties なら, Kawamata, Ochiai より成り立つ. この場合は Abelian variety$A$ の Brody curve が, 普遍被覆 の affine line の射影になる. よってその A での Zariski closure は abelian subvariety の translate となる.

数論的な Green – Griffiths conjecture の類似は次である

[63] この構成は [Cam04, Section 5] での構成方法. 最大の of general type fibration が core map になるというもの. ただこの構成あってるかがわからない.(relative core などを帰納法で構成している)

Conjecture 3.59 (Lang-Bombieri, [Voi, Conjecture 4.13]). *X general type / number field K. このとき K-points は Zariski dense ではない.*

Abelian variety の subvariety の場合は Faltings の定理.

$\kappa \leq 0$ ならば, Kobayashi 擬距離が 0 だと予想されている. 数論的な類似は次のとおり.

Conjecture 3.60 (Campana, [Voi, Conjecture 4.14]). *X projective variety/number field K このとき, X の有理点は potentially dense である. つまり有限体拡大 L/K があって, L-点が Zariski dense.*

"potential density" は proper étale cover で不変である (Chevalley – Weil の定理). Lang – Bombieri 予想は次を意味する.

Conjecture 3.61. *[Voi, Conjecture 4.15] X projective manifold である étale cover $X' \to X$ で X' が general type への dominant rational map を持つとする. このとき X は potentially dense ではない.*

上の状況では, X' 並びに X は special ではない (special も proper étale cover で不変)

Conjecture 3.62 (Campana, [Voi, Conjecture 4.16]). *projective manifold / number field において, potentially dense と special は同値*

Conjecture 3.63 (Campana, [Voi, Conjecture 4.17]). *projective manifold / number field において, 小林擬距離が消えることと special は同値*

Weakly special という概念もあって, それは"任意の finite étale cover が of general type への dominant rational map を持たない"という定義である. special ならば weakly special である. (special も proper étale cover で不変) ただ逆は成り立たない. 以下の Bogomolov-Tschinkel の例がある. よって Conjecture 4.15 の仮定は nonspecial より強い.

Example 3.64. [Voi, Example 4.18] Weakly special だけど special ではない例[64] elliptic threefold$\phi : X \to B$ で B が elliptic surface であり次を満たすものがある.

1. $\pi_1(X) = \{1\}$.
2. (B, Δ_ϕ) of general type.

[作り方]

[64] Bogomolov-Tschinkel の例なのだが代数幾何学が難しすぎて全くわからなかった. 教えてください.

- 単連結 elliptic surface $E \to \mathbb{P}^1$ で $\infty \in \mathbb{P}^1$ で重複度 2 のファイバーを持つものをとる.
- elliptic surface S と rational map $f : S \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ given by an ample enough Lefschetz pencil of curves on S and smooth fiber S_∞ over ∞.
- B を S の blowup で $f' : B \to \mathbb{P}^1$ が well defined になるものとする.
- $X = B \times_{\mathbb{P}^1} E, \phi : X \to B$

さて Δ_ϕ は B_∞ を重複度 $\frac{1}{2}$ で含む. F を $\tau : B \to S$ の exceptional divisor とすると,

$$B_\infty = r^* S_\infty - (F) \quad \text{and} \quad K_B = r^* K_S(F)$$

である. よって

$$K_B(\tfrac{1}{2}B_\infty) = r^*(K_S(\tfrac{1}{2}S_\infty)) + \tfrac{1}{2}F$$

よって S_∞ をを poritive にすると, (B, Δ_ϕ) の小平次元を 2 にすることができ, さらに X を単連結にできる.

[Weakly special だけど special ではないこと] Special ではないので (2) より.

Weakly special に関しては X は自明な finite etale cover しか持たない. よって X が of general type への dominant map を持たないことを言えば良い. 今 dominant rational map $X \dashrightarrow T$ で T が of general type になるものとする. eliitptic curve から T への morpshim は自明よって, $B \dashrightarrow T$ という dominant morpshim をえるが, やっぱりこれも自明になってしまい, $\dim T = 0$ となる.

4 Campana-Winkelman 23 まとめ

4.1 1. Introduction

Theorem 4.1. *[CW23, Theorem A] X rationally connected complex projective manifold, M を高々可算この点からなる集合, D を reduced hypersurface D, $\pi : Y \to X$ 非自明な ramified cover とする.*
このときある正則写像 $c : \mathbb{C} \to X$ (entire curve) があって次を満たす.

1. *$c(\mathbb{C})$ は X 上で dense.*
2. *$M \subset c(\mathbb{C})$,*
3. *$c(\mathbb{C})$ は D とどこでも transversally に交わる.*
4. *c は Y 上の entire curve には lift しない*
5. *order ρ_c (Nevanlinna 理論の意味で) は 0 である.*

"non-liftability" に関しては, Corvaja-Zannier の予想の解決 (らしい)

Lang 予想の逆版として, X を number field$k$ 上の projective manifold とするとき, "Zariski-dense entire curve の存在" が" ある有限拡大 k'/k があって, $X(k')$ は Zariski dense" と同値というものがある. X が RC でも不明である.

4.1 において, 実は entire curve を growth order $\rho_f = 0$ としてとることができる. 実際, 任意の RCX は dense entire curves $h : \mathbb{C} \to X$ で $\rho_h = 0$ なものを有する. 逆に [CW16] で示した通り. n 次元の complex projective manifold X が non-degenerate な正則写像 $F : \mathbb{C}^n \to X$ で order $\rho_F < 2$ のものを有するとき, X は RC である.

X が KLT surface(normal projective surfaces with only quotient singularities) のとき次が言える:

ある effective non-zero $\mathbb{Q}$-divisor Δ で $K + \Delta \sim_{\mathbb{Q}} 0$ かつ (X, Δ) log terminal ならば, ある dense entire curve $h : \mathbb{C} \to X$ で $h(\mathbb{C}) \subset X_{\mathrm{reg}}$ となるものがある.

証明は 2 次元の MMP を使う.

4.2 2. Review of rationally connected manifolds

Definition 4.2. X を projective manifold とする.

1. X rational とは, X が $\mathbb{P}^n$ と birational となること,
2. X unirational とは, ある non-degenerate (dominant) な meromorphic$\Phi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow X$ が存在すること.

3. X が rationally connected とは, 任意の二つの X の一般点 X が有理曲線で結ばれること.
4. X が Fano とは, $-K_X$ ample なること.

1 3 は birational invariant である.

$$\text{rational} \Longrightarrow \text{unirational} \Longrightarrow \text{rationally connected}.$$

$$\text{Fano} \Longrightarrow \text{rationally connected}.$$

である. 曲線なら全て同値. 2 次元なら「rational $\Longrightarrow$ unirational $\Longrightarrow$ rationally connected.」は同値である.

3 次元なら unirational な rational でないものは存在する. ただ RC だが, unirational な例は不明.

4.3 3. Brief review of special manifolds

X を n-次元連結コンパクト complex Kähler manifold とする. Kodaira 次元 を $\kappa(X)$ とする.

Definition 4.3 ([Cam04, Definition 2.24 and Theorem 2.27]). コンパクト Kähler manifold X が *special* であるとは, 任意の $p > 0$, 任意の rank 1 coherent sheaf $L \subset \Omega_X^p$ について, $\kappa(L) < p$ となること.

わかっていることは次のとおり

- RC または $\kappa(X) = 0$ は special. しかし $\kappa = -\infty, 1, \dots, n-1$ について, $\kappa = k$ となる special variety, non-special variety が共に存在する.
- Core map の存在.
- [Cam04, Corollary 8.11], $\mathbb{C}^n$-dominable (ある meromorphic $\mathbb{C}^n \to X$ である点で submersive) ならば special. 逆は成り立たないと思われる (が弱いよそうならある.)

Conjecture 4.4 ([Cam04, 9.2, 9.8, 9.5 and 9.20]). コンパクト *Kähler manifold X* について次は同値であるだろう

1. *special.*
2. *Kobayashi pseudo-metric $d_{kob,X}$* は常に *0*
3. *entire curve $h : \mathbb{C} \to X$* で *Zariski-dense* なものが存在
4. *entire curve $h : \mathbb{C} \to X$* で *metrically dense* なものが存在
5. 任意の二つの一般点が *entire curve* で結べる

6. 任意の可算集合がある *entire curve* の像にふくまれる

Conjecture 4.5 (arithmetic analog)**.** *X projective variety /number field K.* 次は同値

1. X は複素多様体と見て *special*
7. X *potentially dense,* つまりある有限拡大 k/K があって, $X(k)$ は *Zariski dense*

ちなみに 2024 年に Campana らの論文でこの予想は weakly special に関しては正しくない (weakly special に関して正しければ,abc 予想と矛盾する) ことがわかった．なので, これかなり怪しいと思う．

Conjecture 4.6 ([Cam04, Conjecture 7.1])**.** *special* ならば $\pi_1(X)$ *almost abelian*

わかっていることは次のとおり

- (5) が意味しているのは"special variety は RC みたいな性質を持つ" ということ．有理曲線の transcendental 版が成り立つ?
- 簡単にわかるのは次のとおり

$$\begin{tikzcd} (6) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (4) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (3) \\ (5) \arrow[r, Rightarrow] & (2) & \end{tikzcd}$$

- X が unirational ならば, 上の 3 つ全ての予想は正しい．
- ある全射正則写像 $p : \mathbb{C}^n \to X$ があるならば, 4.4 は正しい．
- RC ならば (2), (5) は自明に成り立つ．この論文では残りの (3), (4), (6) が成り立つことを示す．??参照．よって RC について 4.4 は正しい．
- "Nevanlinna analog of the Hilbert irreducibility property" ([?] の Corvaja-Zannier で定義されたもの)" についても調べる．complex torus でも成り立つ first Chern class が 0 の場合も調べる．
- [BL00](Buzzard-Lu 00) projective surface が special であることは $\mathbb{C}^2$-dominable と同値．(ただし non-elliptic and non-Kummer K3 surfaces は例外)．3 次元では正しいと思えないらしい.[65]

Remark 4.7 (Vojta conjecture)*.* X projective variety /number field K とする．「k'-rational points

[65] "This might however be a low-dimensional phenomenon, and it is not expected to remain true in dimension 3." とあった．ということは, Oka⇒ Special はもしかしたら正しくない？

がある有限拡大 k'/k で無限 であることは, X が entire curve を含む」という Vojta の予想がある. Vojta’s analogy として"entire curves" と "arithmetic geometry"が関連しているらしい. 上の"Nevanlinna version of the Hilbert property"(Section 9) はこれに近いことらしい.

References

[AD13] Carolina Araujo and Stéphane Druel. On Fano foliations. *Adv. Math.*, 238:70–118, 2013.

[BDPP13] Sébastien Boucksom, Jean-Pierre Demailly, Mihai Păun, and Thomas Peternell. The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension. *J. Algebraic Geom.*, 22(2):201–248, 2013.

[BL00] Gregery T. Buzzard and Steven S. Y. Lu. Algebraic surfaces holomorphically dominable by $\mathbf{C}^2$. *Invent. Math.*, 139(3):617–659, 2000.

[Cam]

[Cam04] Frédéric Campana. Orbifolds, special varieties and classification theory. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 54(3):499–630, 2004.

[CH24] Benoît Claudon and Andreas Höring. Projectivity criteria for Kähler morphisms, 2024. Preprint. arXiv:2404.13927.

[CW09] Frederic Campana and Jörg Winkelmann. A Brody theorem for orbifolds. *Manuscripta Math.*, 128(2):195–212, 2009.

[CW15] Frédéric Campana and Jörg Winkelmann. On the h-principle and specialness for complex projective manifolds. *Algebr. Geom.*, 2(3):298–314, 2015.

[CW16] Frédéric Campana and Jörg Winkelmann. Rational connectedness and order of non-degenerate meromorphic maps from $\mathbb{C}^n$. *Eur. J. Math.*, 2(1):87–95, 2016.

[CW23] Frédéric Campana and Jörg Winkelmann. Dense entire curves in rationally connected manifolds. *Algebr. Geom.*, 10(5):521–553, 2023. With an appendix by János Kollár.

[Deb01] Olivier Debarre. *Higher-dimensional algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[Dem] Jean-Pierre Demailly. Complex analytic and di ﬀ erential geometry. Preprint. Available from the author’s web site https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf.

[Eli90] Yakov Eliashberg. Topological characterization of Stein manifolds of dimension > 2. *Internat. J. Math.*, 1(1):29–46, 1990.

[Fc13] Franc Forstneriˇ c. Oka manifolds: from Oka to Stein and back. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 22(4):747–809, 2013. With an appendix by Finnur Lárusson.

[Fc18] Franc Forstneriˇ c. Holomorphic embeddings and immersions of Stein manifolds: a survey. In *Geometric complex analysis*, volume 246 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 145–169. Springer, Singapore, 2018.

[FcL11] Franc Forstneriˇ c and Finnur Lárusson. Survey of Oka theory. *New York J. Math.*, 17A:11–38, 2011.

[Fuj15] Osamu Fujino. On quasi-albanese maps, 2015.

[GHS03] Tom Graber, Joe Harris, and Jason Starr. Families of rationally connected varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(1):57–67, 2003.

[GPRG94] H. Grauert, Th. Peternell, R. Remmert, and R. V. Gamkrelidze, editors. *Several complex variables VII. Sheaf-theoretical methods in complex analysis*, volume 74 of *Encycl. Math. Sci.* Berlin: Springer-Verlag, 1994.

[GR79] Hans Grauert and Reinhold Remmert. *Theory of Stein spaces. Translated by Alan Huckleberry*, volume 236 of *Grundlehren Math. Wiss.* Springer, Cham, 1979.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[HM07] Christopher D. Hacon and James Mckernan. On Shokurov's rational connectedness conjecture. *Duke Math. J.*, 138(1):119–136, 2007.

[Iwa21] Masataka Iwai. On the structure of a log smooth pair in the equality case of the bogomolov-gieseker inequality, 2021. Preprint arXiv:2103.08779 to appear in Annales de l'institut Fourier.

[Kaw80] Yujiro Kawamata. On Bloch's conjecture. *Invent. Math.*, 57(1):97–100, 1980.

[KL22] Ljudmila Kamenova and Christian Lehn. Non-hyperbolicity of holomorphic symplectic varieties, 2022. Preprint. arXiv:2212.11411.

[KM98] János Kollár and Shigefumi Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, volume 134 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti, Translated from the 1998 Japanese original.

[Kob98] Shoshichi Kobayashi. *Hyperbolic complex spaces*, volume 318 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Kob14] Shoshichi Kobayashi. *Differential geometry of complex vector bundles*. Princeton Legacy Library. Princeton University Press, Princeton, NJ, [2014]. Reprint of the 1987 edition [MR0909698].

[kus21] Yuta kusakabe. 岡多様体と楕円性, 2021. Preprint. Available from the author's web site https://kusakabe.github.io/pdf/MSJ2021_ellipticity.pdf.

[L05́] Finnur Lárusson. Mapping cylinders and the Oka principle. *Indiana Univ. Math. J.*, 54(4):1145–1159, 2005.

[NO90] Junjiro Noguchi and Takushiro Ochiai. *Geometric function theory in several complex variables*, volume 80 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990. Translated from the Japanese by Noguchi.

[NW14] Junjiro Noguchi and Jörg Winkelmann. *Nevanlinna theory in several complex variables and Diophantine approximation*, volume 350 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Tokyo, 2014.

[NWY02] Junjiro Noguchi, Jörg Winkelmann, and Katsutoshi Yamanoi. The second main theorem for holomorphic curves into semi-abelian varieties. *Acta Math.*, 188(1):129–161, 2002.

[NWY07] Junjiro Noguchi, Jörg Winkelmann, and Katsutoshi Yamanoi. Degeneracy of holomorphic curves into algebraic varieties. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 88(3):293–306, 2007.

[RR88] Jean-Pierre Rosay and Walter Rudin. Holomorphic maps from $\mathbf{C}^n$ to $\mathbf{C}^n$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 310(1):47–86, 1988.

[Voi]

[Wan22] Juanyong Wang. Structure of projective varieties with nef anticanonical divisor: the case of log terminal singularities. *Math. Ann.*, 384(1-2):47–100, 2022.

[Yam15] Katsutoshi Yamanoi. Kobayashi hyperbolicity and higher-dimensional Nevanlinna theory. In *Geometry and analysis on manifolds*, volume 308 of *Progr. Math.*, pages 209–273. Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.