Campana の Special vaeirty まとめ

Masataka IWAI

December 17, 2025, version 0.01

Abstract

Campana の Special variety を要約します

Contents

はじめに

[Cam04a] の要約書です．[Cam04a] のわかったところだけ要約・解説を加えてます．また Claire Voisin のサーベイ [Voi]"Fibrations in algebraic geometry and applications" の内容も適宜つけ加えております．

0.1 用語に関して

出てくる解析空間の性質に関して, 必要な理由としては以下の通り．

- おそらく reduced・irreducible でない場合は reduced 化や既約成分や取ればその場合に帰着できる (と思う)．あと reduced・irreducible でない場合に meromorphic map, fibration をどう定義すればいいかちょっとわからない．
- normal は meromorphic map $\varphi : X \dashrightarrow Y$ の不確定点が codimension 2 以上になることを使ってるので必要．これは 1 章の neat fibration などを考えるときに必要だと思う．
- コンパクトに関しては Kodaira-Iitaka 次元を考えるので必要．
- Fujiki は core map の構成に必要．理由は Chow-Barlet 空間 (サイクルの空間) の既約成分がコンパクトになる必要があり, コンパクト+Fujiki の二つの条件は必要 (Fujiki の定理)．
- smooth に関しては Ω^p_X など余接束を考えるときに必要である．他にもこの論文で smooth を仮定しているものがあるが, 多分それは KLT(Kawamata Log terminal) まで拡張できると思

う (該当する部分があれば書いていく．)

以下このまとめに出てくる解析空間はreduced かつ irreducibleとする．また射 (morphism) $f : X \to Y$ とは全て正則写像のことを指す．

Definition 0.1. [Uen75, Definition 2.1] X, Y を解析空間とする．$f : X \to Y$ が proper modification であるとは

- f proper(コンパクトの逆像がコンパクト) かつ全射
- dence でない解析的部分集合 $M \subset X, N \subset Y$ が存在して，$f : X \setminus M \to Y \setminus N$ は双正則である．

X, Y がコンパクトのときは単に modification という．

Definition 0.2. [Uen75, Definition 2.2] X, Y を解析空間とし，$P(Y)$ を Y の冪集合とする．$\varphi : X \to P(Y)$ が meromorphic map とは

- グラフ $G_\varphi := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in \varphi(x)\}$ が $X \times Y$ の既約な解析的集合である．
- 射影 $p : G_\varphi \to X$ が proper modification である．

以下 meromorphic map を $\varphi : X \dashrightarrow Y$ とかく．
また不確定点 $I(\varphi)$ を $p : G_\varphi \setminus p^{-1}(I(\varphi)) \to X \setminus I(\varphi)$ が双正則になる最小の解析的集合とする．(X, Y が normal だと codimension 2 以上の集合になる．[Uen75, Theorem 2.5])

Remark 0.3. 上の定義はわかりづらいが，次と同値である．

ある $X \times Y$ の既約な解析的集合 $G \subset X \times Y$ が存在して，$p : G \to X$ が proper modification である．

対応としては次のとおり．

- meromorphic map φ について，$G := G_\varphi$ を対応させる．
- 既約な解析的集合 $G \subset X \times Y$ について $\varphi(x) := q(p^{-1}(x)) \in P(Y)$ を対応させる．ただし $q : G \to Y$ を射影とする．

そのため Hironaka の特異点解消 (不確定点除去) を用いると次が言える．

任意の meromorphic map $\varphi : X \dashrightarrow Y$ について，ある複素多様体 $\widetilde{X}$，proper modification $\pi : \widetilde{X} \to X$，射 $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \to Y$ があって次の図式を満たす．

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X \arrow[ru, dashed, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

Definition 0.4. [Uen75, Definition 2.6, 2.7] X, Y を解析空間とし, $\varphi : X \dashrightarrow Y$ を meromorphic map, $G \subset X \times Y$ をそのグラフとする.

- $y \in Y$ について, $p(q^{-1}(y)) \subset X$ を y のファイバーという. $\varphi^{-1}(y)$ や X_y とかく.
- $q : G \to Y$ が全射であるとき, $\varphi : X \dashrightarrow Y$ を dominant(or generically surjective) であるという.
- $q : G \to Y$ が proper modification であるとき, $\varphi : X \dashrightarrow Y$ を bimeromophic であるという.

ファイバーの定義は文献によって少し異なるかもしれない ([Cam04a] の定義と違うふうに定義した).

Example 0.5.

$$\varphi : \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^1 \quad [x : y : z] \mapsto [y : z]$$

とする. すると不確定点は $I(\varphi) = \{(1 : 0 : 0)\}$ である. これの特異点解消 (不確定点除去) は $\mathbb{CP}^2$ を $(1 : 0 : 0)$ で blow up $\pi : F_1 \to \mathbb{CP}^2$ して次の図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{CP}^1 \\
\mathbb{CP}^2 \arrow[ur, dashed, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

$F_1 \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(1))$ という Hirzebruch surface であり, $\widetilde{\varphi} : F_1 \to \mathbb{CP}^1$ は $\mathbb{CP}^1$ 束の構造を持つ. よって任意の $(y : z) \in \mathbb{CP}^1$ について $\varphi^{-1}((y : z))$ は $(1 : 0 : 0)$ と $(0 : y : z)$ を通る line($\cong \mathbb{CP}^1$) となる.

Definition 0.6. X を解析空間とする.

- ある性質 P が general な $x \in X$ で成り立つ (general point $x \in X$ で成り立つ) とは, ある真の解析集合 $Z \subset X$ があって, 任意の $x \in X \setminus Z$ で性質 P が成り立つこととする.
- ある性質 P が very general な $x \in X$ で成り立つ (or very general point $x \in X$ で成り立つ) とは, ある可算個の真の解析集合 $Z_i \subset X$ があって, 任意の $x \in X \setminus \cup_{i \in \mathbb{Z}_+} Z_i$ で性質 P が成り立つこととする.

Definition 0.7. [Uen75, Definition 3.3], [Cam04a, Subsection 1.1.2] X, Y を解析空間とし, $\varphi : X \dashrightarrow Y$ を meromorphic map とする. φ が fibration であるとは次の二つの条件を満たすこととする.

- $q : G \to Y$ が proper かつ全射である (特に $\varphi : X \dashrightarrow Y$ は dominant である.)

- general point $y \in Y$ について, X_y が連結である.

X, Y がコンパクトならば, $q : G \to Y$ が proper という条件は自動的に満たされる.

Lemma 0.8. *X, Y を解析空間で normal であると仮定する. このとき meromorpshic map $\varphi : X \dashrightarrow Y$ が fibration ならば $q : G \to Y$ は proper, 全射, ファイバー連結 (with connected fiber) である.*
特に射 $\varphi : X \to Y$ が fibration であることは, proper, 全射, ファイバー連結と同値である.

Remark 0.9. 普通 fibration と言ったら 0.8 での定義が普通である. ただ [Cam04a] では"general point $y \in Y$ について, X_y が既約である"と定義していた. これあんまり聞いたことがないので, 多分間違っている (or 一般的でない) と思う.

Proof. 示すことは"$q : G \to Y$ の任意のファイバーが連結である"こと. q が proper なので, Stein 分解が取れる.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "q"'] & Y' \arrow[d, "v"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

$u : G \to Y'$ はファイバー連結であり, $v : Y' \to Y$ は finite である. よって $y \in Y$ について $v^{-1}(y)$ の個数は, $q^{-1}(y)$ の連結成分の個数と一致する.

q は一般の点においてファイバーが連結であるので, $v : Y' \to Y$ は一般の点 $y \in Y$ において同型になる. つまり, $v : Y' \to Y$ は bimeromorphic である. よって Zariski main Theorem より Y が normal なので, v はファイバー連結である. v は finite なので, v は双正則写像になる. よって q はファイバー連結になる. (実際には Y の normal 性で十分である.) □

Lemma 0.10. *(cf. [Deb01, Lemma 1.15]) X, Y, Z を normal 解析空間, $f : X \dashrightarrow Y, g : X \dashrightarrow Z$ を fibration とする.*

- *一般の $z \in Z$ について $f(g^{-1}(z))$ が一点集合ならば, fibration $h : Z \dashrightarrow Y$ で $h \circ g = f$ となるものが存在する.*
- *f, g が正則写像で任意の $z \in Z$ について $f(g^{-1}(z))$ が一点集合ならば, fibration $h : Z \to Y$ で $h \circ g = f$ となるものが存在する.*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, dashed, bend left, "\exists h"] & X \arrow[l, dashed, "g"'] \arrow[r, dashed, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Proof. 証明は [Deb01, Lemma 1.15] に同じ．特異点解消をとって, 以下の図式を得る.

$$\begin{tikzcd} Z & & X \arrow[ll, dashed, "g"'] \arrow[rr, dashed, "f"] & & Y \\ & & \widetilde{X} \arrow[u, "\pi"] \arrow[ull, "\widetilde{g}\text{ fibration}"] \arrow[urr, "\widetilde{f}\text{ fibration}"'] & & \end{tikzcd}$$

そこで $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ のグラフ $G(\widetilde{g}, \widetilde{f}) := \{(\widetilde{g}(x), \widetilde{f}(x)) \mid x \in X\} \subset Z \times Y$ をとって次の図式をえる．

$$\begin{tikzcd} Z & G(\widetilde{g}, \widetilde{f}) \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] & Y \\ & \widetilde{X} \arrow[u, "(\widetilde{f}, \widetilde{g})"] & \end{tikzcd}$$

0.3 から, この $p : G(\widetilde{g}, \widetilde{f}) \to Z$ が proper modification であることを示せば良い.

任意の $z \in Z$ について,

$$p^{-1}(z) := \{(z, y) \in Z \times Y \mid \exists x \in \widetilde{X} s.t. z = \widetilde{g}(\widetilde{x}), y = \widetilde{f}(\widetilde{x})\} = \{z\} \times \widetilde{f}(\widetilde{g}^{-1}(z))$$

である. これより proper がわかる．仮定から, 真の解析的集合 $W \subset Z$ で, 任意の $z \in Z \backslash W$ について, $\widetilde{f}(\widetilde{g}^{-1}(z))$ が一点集合となるものが存在する．よって 0.8 の証明から $p : G(\widetilde{g}, \widetilde{f}) \setminus p^{-1}(W) \to Z \setminus W$ はファイバー連結で, ファイバーは一点なので, 双正則である．よって p は modification である.

最後の主張は $W = \varnothing$ と取れることからわかる. □

1 1. Orbifold base of a fibration

以下断りがなければ

$$\text{complex manifold(複素多様体)} = \text{smooth reduced and irreducible complex space}$$

である．また出てくる解析空間は

$$\text{compact normal reduced and irreducible complex space}$$

とする．つまりコンパクト・normal は常に仮定する.

1.1 Fibrations [Cam04a, 1.1]

Example 1.1. [Cam04a, Example 1.1] E を 楕円曲線 , C を超楕円曲線とし $X_0 := E \times \mathbb{CP}^1$ とする．t を E 上の位数 2 の変換 ($a \in E$ を位数 2 の元として, $t : E \to E$ を $x \mapsto x + a$ とする) h を C 上の involution, つまり次数 2 の finite 射 $C \to \mathbb{CP}^1$ から誘導される involution とする．

$\tilde{X} := E \times C$ とし, $\tilde{X}$ 上の involution $j := t \times h$ とおいて, $X := \tilde{X}/j$ とおく.

すると X_0 も X も general fiber が E であるような $\mathbb{CP}^1$ への自然な fibration をもつ.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} := E \times C \arrow[r] \arrow[d] & X_0 := E \times \mathbb{CP}^1 \arrow[d, "\text{gen. fib. } E"] \\
X := \tilde{X}/j \arrow[r, "\text{gen. fib. } E"] & \mathbb{CP}^1
\end{tikzcd}$$

よって, X_0 と X は，上記の情報だけからは区別することができず, Kodaira 次元，基本群，Kobayashi pseudo-metric などが以下のように異なる.

- $\kappa(X_0) = -\infty$, $\pi_1(X_0) = \mathbb{Z}^2$, $K_{\mathrm{Kob},X_0} \equiv 0$. ちなみに special である.
- $\kappa(X) = 1$, $\pi_1(X)$ は指数 2 の部分群に $\mathbb{Z}^2 \times \pi_1(C)$ を含む (特に almost Abelian になり得ない), $K_{\mathrm{Kob},X} \not\equiv 0$ [1]), ちなみに nonspecial であり, $X \to \mathbb{CP}^1$ が core map を与える.

ただ fibration$f : X \to \mathbb{CP}^1$ に関して multiple fiber を考慮に入れれば, $X \to \mathbb{CP}^1$ の base は本当の意味での $\mathbb{CP}^1$ ではなく， general type の orbifold C/h であるとみなせる.

Lemma 1.2. *1. f は general type B への dominant 射 $f : X \to B$ を持たない.*

2. $D \subset \mathbb{CP}^1$ を $C \to \mathbb{CP}^1$ の branched divisor とする. このとき D の次数は 6 であり, $f : X \to \mathbb{CP}^1$ は D 上で 2 重の multiple fiber を持つ

3. $\pi : C \times E \to X$ を商写像とする. このとき $\pi^* f^* K_{\mathbb{CP}^1}(\frac{1}{2}D) = \mathrm{pr}_1^* K_C$ である.

Proof. (1) $f : X \to \mathbb{CP}^1$ の fiber は楕円曲線であるので, 曲面の分類から $\kappa(X) = 1$ である. よって general type 曲面への dominant 射は存在しない.

今 $\phi : X \to B$ を種数 2 以上の射影代数曲線 B への dominant 射とする. f の fiber は楕円曲線なので, 任意の $x \in \mathbb{CP}^1$ について $\phi(f^{-1}(x))$ は B 上の点となる. (楕円曲線から B への射は存在し得ない). よって 0.10 から, $\mathbb{CP}^1 \twoheadrightarrow B$ という射が作れるが, それはあり得ない.

(2) Hurwitz の公式から

$$2 \cdot 2 - 2 = 2 \cdot (-2) + \sum_{q : C \to \mathbb{CP}^1 \text{ の分岐点}} (e_q - 1)$$

で $e_q = 2$ より, 分岐点の個数は 6 個である. よって $\deg D = 6$ である. また $j = (t \times h)$ は固定点を持たないので, f は局所的に $f \circ \pi : C \times E \to \mathbb{CP}^1$ と同じである. よって $p \in D$ について $f \circ q$ は multiples fiber $2E \times p$ を持つ.

(3) $r : C \to \mathbb{CP}^1$ を商写像とすると, Hurwitz の公式から $K_C = r^* K_{\mathbb{CP}^1}(\frac{1}{2}D)$ となり言える. □

[1] $\tilde{X} \to X$ が etale なので. $X \to Y$ etale ならば $K_{\mathrm{Kob},Y}(p,q) = \inf K_{\mathrm{Kob},X}(\tilde{p},\tilde{q})$ となる. $\tilde{p}$ などは p の逆像である.

1.2 Neat fibrations. Prepared fibrations. [Cam04a, 1.1.3.]

Definition 1.3. [Cam04a, Definition 1.2] $f : X \to Y$ を複素多様体上の fibration とする.

- X 上の既約 Weil divisor D について, その像 $f(D)$ の Y における codimension が 2 以上であるとき，D は f*-exceptional* であると言う.
- X から 複素多様体 X' への bimeromorphic 正則写像 $u : X \to X'$ が存在して，

  X 上の f-exceptional divisor D は全て u-exceptional である

  とき，$f : X \to Y$ は *neat* であると言う.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle u} & & \\ X' & & \end{array}$$

- f が *prepared* であるとは, normal crossing divisor $D \subset Y$ があって, $f^{-1}(D) \subset X$ も normal crossings divisor かつ $f : X \setminus f^{-1}(D) \to Y \setminus D$ が smooth となること.

Divisor が normal crossing とは局所的に $z_1 \cdots z_k = 0$ という零点でかけることである.

Remark 1.4. neat や prepared はこの後に出てくる証明を簡単にするために必要な概念である. 実際次の補題から, 逆に証明に興味がなければ, 上の概念は無視して良い.

Lemma 1.5. *[Cam04a, Lemma 1.3]* 任意のコンパクト *normal* 解析空間上の *fibration* $f_0 : X_0 \dashrightarrow Y_0$ について, ある複素多様体 X, Y からの *bimeromorphic map* $u : X \dashrightarrow X$, $v : Y \dashrightarrow Y_0$ および *fibration* $f : X \to Y$ が存在して, f は *neat* かつ *prepared* であり, 任意の f*-exceptional divisor* は u*-exceptional* である.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ X_0 & \overset{f_0}{\dashrightarrow} & Y_0 \end{array}$$

要するに何か証明するときは, resolution をとって, neat かつ prepared を仮定して良い.

Proof. Hironaka の特異点解消によって, X_0, Y_0 を smooth として良い. また $f_0 : X_0 \to Y_0$ を射にして良い. neat fibration に関しては次の手順で構成する.

1. f_0 の flattening をとる. つまり, $X_1 \to X_0, Y_1 \to Y_0$ が projective かつ bimeromorphic で $f_1 : X_1 \to Y_1$ が flat となるものをとる.

2. $Y_2 \to Y_1$ を resolution とする
3. $X_1 \times_{Y_1} Y_2$ の既約成分で X_1 を dominant する成分を取り，その resolution したものを $u_2 : X_2 \to X_1$ とする．

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "bir"', "u_2"] & Y_2 \arrow[d, "bir"] \\
X_1 \arrow[r, "f_1", "flat"'] \arrow[d, "bir"'] & Y_1 \arrow[d, "bir"] \\
X_0 \arrow[r, "f"'] & Y_0
\end{tikzcd}$$

X_2, Y_2 は smooth である．よってあとは $f_2 : X_2 \to Y_2$ が neat であることを言えば良い．$D \subset X_2$ で f_2 で潰されるとする．$X_2 \to X$ で潰されることを示す．

もし D が u で潰されないとすると，$u(D) \subset X_1$ は $f_1 : X_1 \to Y_1$ で潰される．しかしそれは f_1 が flat なのであり得ない．なぜなら $f_1 : u(D) \to f_1(u(D))$ に関して，[GPRG94, Thm 2.1.18] や [GPRG94, Prop 2.2.11] より

$$\begin{aligned}
\dim_x u(D) &\underset{\text{常に成り立つ}}{\leq} \dim_{f_1(x)} f_1(u(D)) + \dim_x u(D)|_{f_1^{-1}f_1(x)} \\
&\underset{u(D)|_{f_1^{-1}f_1(x)} \subset f_1^{-1}f_1(x)}{\leq} \dim_{f_1(x)} f_1(u(D)) + \dim_x f_1^{-1}f_1(x) \\
&\underset{\text{flat ならば equidimensional(open)}}{=} \dim_{f_1(x)} f_1(u(D)) + \dim X - \dim Y
\end{aligned}$$

よって $\dim_x u(D) = \dim X - 1$ より $\dim Y - 1 \leq \dim_{f_1(x)} f_1(u(D))$ を得る．

$f_2 : X_2 \to Y_2$ の smooth にならない locus を $Z_2 \subset Y_2$ とする．この Z_2 が normal crossing になるように resolution $Y \to Y_2$ をとって，$f : X \to Y$ と上と同様に，$X_2 \times_{Y_2} Y$ の既約成分で X_2 を dominant する成分を取り，その resolution したものを $X \to X_2$ とすれば，f は prepared になる．これは neat である．　□

1.3 Multiplicity divisor of a fibration. [Cam04a, 1.1.4]

Definition 1.6. $f : X \to Y$ をコンパクト複素多様体の間の fibration とする．Y の任意の既約 divisor D に対し，

$$f^*(D) := \sum_{j \in J(f,D)} m_*(f, D_j)\, D_j + R$$

と書く．ここで

- $j \in J(f, D)$ について, $D_j \subset f^*(D)$ の 既約成分で，$f(D_j) = D$ となるもの
- R は f-exceptional である, つまり $f(R)$ は cosimension 2 以上となるものとする.

そこで

$$m(f, D) := \inf\{\, m_*(f, D_j) \mid j \in J(f, D) \,\}$$

と定め *multiplicity* と呼ぶ.
f の *multiplicity divisor* $\Delta(f)$ を $\mathbb{Q}$-divisor として次のように定める：

$$\Delta(f) = \sum_{D \subset Y} \left(1 - \frac{1}{m(f, D)}\right) D,$$

ここで D は Y 上のすべての既約 Weil divisor を動く.

D が $\mathbb{Q}$-divisor とは

$$D = \sum a_i D_i$$

で D_i が divisor かつ $a_i \in \mathbb{Q}$ となるものである.

Example 1.7. 1.1 での fibration

$$f : X := \tilde{X}/j = E \times C/t \times h \to C/h = \mathbb{CP}^1$$

について $\Delta(f)$ を計算する. 1.2 からある次数 6 の divisor $D \subset \mathbb{CP}^1$ があって, $f : X \to \mathbb{CP}^1$ は D 上の点で 2 重の multiple fiber を持つ.
$D = \sum_{i=1}^{6} [p_i]$ とし, $F_i := f^{-1}(p_i)$ を集合論的な逆像とすると

$$f^*[p_i] = 2[F_i] \quad m(f, [p_i]) = 2$$

であるので

$$\Delta(f) = \sum_{\{p\} \subset \mathbb{CP}^1} \left(1 - \frac{1}{m(f, [p])}\right)[p] = \sum_{i=1}^{6} \left(1 - \frac{1}{2}\right)[p_i] = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{2}[p_i]$$

となる. ここで

$$\deg(K_{\mathbb{CP}^1} + D) = -2 + \frac{6}{2} = 1$$

である. よって $K_{\mathbb{CP}^1} + D$ は ample である.
実はこの $f : X \to \mathbb{CP}^1$ が後の core map の例になっている. つまり　以下がわかる.

- f の fiber は楕円曲線 (特に special)
- f の base は, divisor を組に考えると $(\mathbb{CP}^1, D)$. これは $K_{\mathbb{CP}^1} + D$ が ample なので log general

type.

1.4 Orbifold base of a fibration. [Cam04a, 1.2.2]

Definition 1.8. [Cam04a, Definition 1.5, 1.6] $f : X \to Y$ をコンパクト複素多様体の間の fibration とし, $\Delta(f)$ を f の multiplicity divisor とする．このとき $(Y/\Delta(f))$ を f の *orbifold base* と呼ぶ.
$(Y/\Delta(f))$ を orbifold base とする．その *(ログ)* 標準束 を Y 上の $\mathbb{Q}$-divisor

$$K_{Y/\Delta(f)} := K_Y + \Delta(f)$$

として定める．またその Kodaira 次元 を次で定める.

$$\kappa(Y/\Delta) := \kappa(Y, K_Y + \Delta)$$

Remark 1.9. D を Y 上の $\mathbb{Q}$-divisor とする．divisor との組 (Y, D) を"Orbifold"と呼ぶのは Campana ぐらいで, 普通は"log pair"と呼ぶと思う ([KM98] 参照)

Definition 1.10. [Laz04, Section 1][Fuj20, Remark 2.3.17] コンパクト複素多様体 Y とその divisor L について, Kodaira-Iitaka 次元 $\kappa(L)$ を

$$\kappa(L) := \limsup_{m\to\infty} \frac{\log h^0(Y, L^{\otimes m})}{\log m} \in \{-\infty, 0, 1, \ldots, \dim Y\}$$

と定義する．また $\kappa(L) = \dim Y$ となる divisor L を巨大 (big) と言う.

"雑に"にいえば $m \gg 0$ について

$$h^0(Y, L^{\otimes m}) = O(m^{\kappa(L)})$$

が (だいたい) 成り立つ．$\kappa(L)$ は $h^0(Y, L^{\otimes m})$ の増大度を表している．$\kappa(L) = -\infty$ とは大域切断が全くないことを言う.

Example 1.11. C を次元 1 の滑らかな射影代数曲線とする.

- $\kappa(K_X) = -\infty \Leftrightarrow \deg K_X < 0 \Leftrightarrow X \cong \mathbb{CP}^1$
- $\kappa(K_X) = 0 \Leftrightarrow \deg K_X = 0 \Leftrightarrow X$ は楕円曲線
- $\kappa(K_X) = 1 \Leftrightarrow \deg K_X > 0 \Leftrightarrow X$ の種数 $g \geq 2$

1.5 The Kodaira dimension of a fibration. [Cam04a, 1.3]

Definition 1.12. [Cam04a, Definition 1.7] コンパクト normal 解析空間 X, Y の間の fibration $f : X \dashrightarrow Y$ に対して

$$\kappa(Y, f) := \inf\{\kappa(\widetilde{Y}/\Delta(\widetilde{f}))\},$$

と定める．ここで inf は f と双有理な fibration $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ をうごく．つまり inf は

- $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ コンパクト複素多様体
- bimeromorphic map $\widetilde{X} \to X, \widetilde{Y} \to Y$
- fibration $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$

であって次の図式が可換になるものを全て動く．

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d] & \widetilde{Y} \arrow[d] \\
X \arrow[r, dashed, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

X, Y をコンパクト複素多様体, $f : X \to Y$ を fibration とする．

$$\kappa(Y, f) = \kappa\big(Y, K_Y + \Delta(f)\big)$$

が成り立つとき，f が *admissible* であると言う．

この $\kappa(Y, f)$ は"bimeromorhic invariant"である．つまりコンパクト解析空間 X', Y' の間の fibration $f' : X \dashrightarrow Y'$ と bimeromorphic map $X' \to X, Y' \to Y$ で次の図式が可換になるとする．

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\
X \arrow[r, dashed, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

このとき $\kappa(Y, f) = \kappa(Y', f')$ である．

Example 1.13. $f = id$ でも $\kappa(X, id) \neq \kappa(K_X)$ であることがありうる．実際 [Keu08] により normal 曲面 X(KLT singularity を持つ) であって

- K_X が big. つまり $\kappa(K_X) = 2$
- ある resoluion $\pi : \widetilde{X} \to X$ があって $\kappa(K_{\widetilde{X}}) = 1$.

となるものが存在する．この場合

$$\kappa(X, id) \underset{\text{def}}{\leq} \kappa(K_{\widetilde{X}}) = 1 \neq 2 = \kappa(K_X)$$

である．これが起こりうる理由は, ある effective divisor E, G で

$$K_{\widetilde{X}} \sim_{\mathbb{Q}} \pi^* K_X + E - G$$

と書くときに $G \neq 0$ となることから由来している．

逆に言うとこういった異常なことは X が複素多様体の場合は起こり得ない (もっと強く canonical でもいいと思う．Campana も canonical ぐらいなら大丈夫だと論文で何度も言及している.)

この例は次のことも言っている

K_X が big でも, X が general type (ある resolution $\widetilde{X} \to X$ があって $K_{\widetilde{X}}$ が big) とは限らない.

1.6 Generically finite maps. Statement of main result. [Cam04a, 1.3.2]

Theorem 1.14. *[Cam04a, Theorem 1.8, 1.14]* コンパクト *normal* 解析空間の *fibration* f, f' からなる可換図式

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "v"'] & Y \end{tikzcd}$$

を考える．

1. さらに u, v が *bimeromorphic* であるとき
   (a) $\kappa\big(Y/\Delta(f \circ u)\big) = \kappa\big(Y/\Delta(f)\big)$ かつ $\kappa\big(Y'/\Delta(f')\big) \leq \kappa\big(Y/\Delta(f)\big)$ が成り立つ．
   (b) さらに $\kappa(Y) \geq 0$ ならば，上記の不等式は実は等式となり，$\kappa\big(Y/\Delta(f)\big) = \kappa(Y, f)$ が成り立つ．
2. u, v が *generically finite* かつ 全射 であると仮定すると，
   (a) $\kappa(Y', f') \geq \kappa(Y, f)$.
   (b) u が *étale* であり，かつ X, X' が *smooth* であるときは，$\kappa(Y', f') = \kappa(Y, f)$.
3. $\kappa(Y) \geq 0$ と仮定する．

証明は見たかんじ係数の計算だけである．

Corollary 1.15 (1.13)**.** コンパクト *normal* 解析空間 X, Y の間の *fibration* $f : X \dashrightarrow Y$ に対して

- $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ コンパクト複素多様体
- *bimeromorphic map* $\widetilde{X} \to X, \widetilde{Y} \to Y$
- *fibration* $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ で f は *neat, prepared, addmisible*

であって次の図式が可換になるものがあって,

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d] & \widetilde{Y} \arrow[d] \\ X \arrow[r, dashed, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

次の等式を満たすものが存在する.

$$\kappa(Y, f) = \kappa(\widetilde{Y}, \widetilde{f}) = \kappa(\widetilde{Y}/\Delta(\widetilde{f}))$$

Proof. $\kappa(Y, f) = \inf\{\kappa(\widetilde{Y}/\Delta(\widetilde{f}))\}$ なので, inf を達成する $f' : X' \to Y'$ が存在する. すると

$$\kappa(Y, f) \underset{\text{bimero inv.}}{=} \kappa(Y', f') \underset{\text{def}}{\leq} \kappa(Y'/\Delta(f')) \underset{\text{inf を達成}}{=} \kappa(Y, f) \tag{1.1}$$

であることがわかる

1.5 を適応して, ある neat かつ prepared な $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ で次を可換にするものが存在する.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\text{bimero}"] & \widetilde{Y} \arrow[d, "\text{bimero}"] \\ X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

1.14 より

$$\kappa(Y, f) \underset{\text{bimero inv.}}{=} \kappa(\widetilde{Y}, \widetilde{f}) \underset{\text{def}}{\leq} \kappa(\widetilde{Y}/\Delta(\widetilde{f})) \underset{1.14(1)}{\leq} \kappa(Y'/\Delta(f')) \underset{1.1}{=} \kappa(Y, f)$$

であるので $\kappa(Y, f) = \kappa(\widetilde{Y}, \widetilde{f}) = \kappa(\widetilde{Y}/\Delta(\widetilde{f}))$ である. 定義から addmisible である. $\square$

1.7 The sheaf of differential forms determined by a fibration. [Cam04a, 1.4]

Definition 1.16. [Cam04a, Definition 1.19] X をコンパクト複素多様体, Y を p 次元コンパクト normal 解析空間とする. $f : X \dashrightarrow Y$ を fibration とする.
$Y_0 \subset Y$ を Y の regular locus として, Ω_X^p の rank 1 subsheaf F_f を,

$$F_f := (f^*(K_{Y_0}))^{sat} \subset \Omega_X^p$$

として定まる. ここで sat とは Ω_X^p での saturation である. そして $\kappa(f)$ を

$$\kappa(f) := \kappa(X, F_f)$$

として定める. これは f の"bimeromorphic invariant"である.

$f^*(K_{Y_0})$ の定義については resolution を次にとる

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[d, "\pi \text{ bimero}"'] \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & \\ X \arrow[r, dashed, "f'"] & Y \end{tikzcd}$$

そして $f^*(K_{Y_0}) := (\pi_*(\widetilde{f}^* K_{Y_0}))^{\vee\vee}$ として定める.

Definition 1.17. X を解析空間, $\mathcal{F}$ を torsion free sheaf とする. $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ の $\mathcal{G}$ での saturation を

$$\mathcal{G}^{sat} := (\mathrm{Ker} : \mathcal{F} \to (\mathcal{F}/\mathcal{G})/\mathrm{Tor})$$

として定義する.

色々と $\kappa(f)$ など出てきてややこしいが結局は次が言える.

Proposition 1.18. *[Cam04a, Proposition 1.25]* X コンパクト複素多様体とし, $f : X \dashrightarrow Y$ を *fibration* とする. このとき

1. $\kappa(f) = \kappa(Y, f)$,
2. Y が *smooth* で f が *neat* であれば, $\kappa(f) = \kappa(Y/\Delta(f))$.

つまりはこう言うことである

$f : X \dashrightarrow Y$ コンパクト normal 解析空間の写像とする

- X が smooth ならば, $\kappa(Y, f) = \kappa(f)$,
- X, Y smooth かつ f neat ならば $\kappa(f) = \kappa(Y/\Delta(f))$.
- f addmissible ならば $\kappa(Y, f) = \kappa(Y/\Delta(f))$.

また任意のコンパクト normal 解析空間の写像 $f : X \to Y$ について, ある

- $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ コンパクト複素多様体
- bimeromorphic map $\widetilde{X} \to X, \widetilde{Y} \to Y$
- fibration $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ で f は neat, prepared, addmisible

であって次の図式が可換になるものがあって,

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d] & \widetilde{Y} \arrow[d] \\
X \arrow[r, dashed, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

次の等式を満たすものが存在する.

$$\kappa(Y, f) = \kappa(\widetilde{Y}, \widetilde{f}) = \kappa(\widetilde{Y}/\Delta(\widetilde{f})) = \kappa(\widetilde{f})$$

要するに resolution とれば全ての量は一致する.

以下 1.18 の証明

Definition 1.19. [Cam04a, Definition 1.20, 1.21] X, Y をコンパクト複素多様体, Y を p 次元, $f : X \to Y$ を fibration とする.

$$F(f) := f^*(K_Y) \otimes \mathcal{O}_X\big([f^*(\Delta(f))]\big)$$

と定める. ここで $\mathbb{Q}$-divisor $D = \sum a_i D_i$ について

$$[D] := \sum [a_i] D_i$$

と定める.
$S \subset X$ 上の effective divisor について

- $f(S) \neq Y$

- $T \subset f(S)$ となる既約 divisor について, ある既約 divisor $S' \subset f^{-1}(T)$ があって

$$S' \neq S \quad \text{and} \quad f(S') = T$$

を満たすとき, S は f の fiber 上に *partially supported* されていると言う.

partially supported はわかりづらいが, 次の状況で使う. $f : X \to Y$ を fibration とする. 既約 divisor $D \subset Y$ について

$$f^*D = m_1 D_1 + m_2 D_2 + (f\text{-exceptional})$$

となっているとする. ここで $m_1 < m_2$ は整数, $f(D_i) = D$ とする. このとき D_1, D_2 はともに partially supported である.

Proposition 1.20. *[Cam04a, Proposition 1.22, 1.23, 1.24]* X, Y *をコンパクト複素多様体,* $f : X \to Y$ *を fibration とする.*

1. S *を* f *の fiber 上に partially supported されている* X *上の divisor とする.* L *を* Y *上の 直線束とすると, sheaf の自然な射*

$$L \subset f_*\bigl(f^*(L) + S\bigr)$$

は同型射である.

2. *ある codimension が少なくとも 2 であるような Zariski 閉集合* $A \subset Y$ *が存在して,*

$$(X - B) := f^{-1}(Y - A)$$

上では $F(f) + S'$ *と* F_f *が自然に同型である. ここで* S' *は* f *の fiber 上に partially supported されているある* X *上の divisor とする.*

3. $m > 0$ *を十分大きく可除な整数とする. このとき (2) での* $F(f) + S'$ *と* F_f *の* $(X - B)$ *上での自然な同型は,*

$$H^0\bigl(X, F_f^{\otimes m}\bigr) \hookrightarrow H^0\bigl(X, m(F(f) + S')\bigr) \simeq H^0\bigl(Y, m(K_Y + \Delta(f))\bigr)$$

と言う単射に拡張される. さらに もし f *が neat ならば, この単射は同型である.*

Proof. (1). Y 上で局所的な話なので, Y は座標近傍で L を自明と仮定してよい. 示すべきことは

$$f_*\bigl(\mathcal{O}_X(S)\bigr) \simeq \mathcal{O}_Y$$

である.

ある effective divisor $T \subset Y$ で $S \subset f^*(\mathcal{O}_Y(T))$ となるものをとる. $T = (t = 0)$ とみなして良い. $\mathcal{O}_Y(T)$ の local section は T で極を持つ有理型関数なので, $f^*(\mathcal{O}_Y(T))$ の local section は Y 上の正則関数 u を用いて $f^*(u/t)$ とかける.

さて, $f_*\big(\mathcal{O}_X(S)\big)$ の local section s をとる. s は S でのみ極を持つ有理型関数である. $S \subset f^*(\mathcal{O}_Y(T))$ より $s = f^*(u/t)$ とかける. 今 S は partially supported なのである $S' \subset X$ divisor で，$S' \neq S, f(S') = T$ となるものがある. よって

$$s|_{S'} = f^*(u/t)|_{S'}$$

である. $s|_{S'}$ は S' で極を持たないので, u は t を割り切らないといけない (そうでないと $s|_{S'}$ は S' で極を持ってしまう) よって s は $\mathcal{O}_Y$ の local section になる (つまり極を持たない)

(2).

$$A := (\mathrm{Supp}\Delta(f) \text{ の特異点集合}) \cup (\text{全ての } f\text{-exceptional divisor の } f \text{ の像})$$

として定める. これは A の codimension 2 以上集合である.

S' を以下のように定める. $\Delta_i \subset \Delta(f)$ について,

$$f^*\Delta_i = \sum_j m_{ij} D_{ij} + R_i$$

とする. $f(D_{ij}) = \Delta_i$, R_i は f-exceptional とする. また $m_i = \inf_j m_{ij}$ とする.

$$\Delta(f) = \left(1 - \frac{1}{m_i}\right)\Delta_i + (others)$$

となる. 一般点 $x \in D_{ij}$ と $y = f(x) \in \Delta_i$ の座標近傍を以下のようにとる:

$$(x) = (x_1, \ldots, x_n), \qquad (y) = (y_1, \ldots, y_p), \qquad f(x) = (y_1 := x_1^{m_{ij}}, y_2 := x_2, \ldots, y_p := x_p)$$

ここで $D_{ij} = (x_1 = 0), \Delta_i = (y_1 = 0)$ である. このとき

- $f^*(K_Y)$ の local section は $f^*(dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_p) = x_1^{m_{ij}-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$ である.
- $\Delta(f) = \left(1 - \frac{1}{m_i}\right)\Delta_i$ であるので, $f^*(\Delta(f))$ の local section は

$$f^*\left(\frac{1}{{y_1}^{1-\frac{1}{m_i}}}\right) = x_1^{-m_{ij}+\frac{m_{ij}}{m_i}}$$

以上より $[f^*(K_Y + \Delta(f))]$ は

$$f^*(dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_p) \cdot f^*\left(\frac{1}{{y_1}^{1-\frac{1}{m_i}}}\right) = x_1^{\frac{m_{ij}}{m_i}-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$$

で生成される．そこで

$$S' = \sum_j (m_{ij}/m_i) - 1]D_{ij}$$

とすると，S' は partially supported となり，$[f^*(K_Y+\Delta(f))]+S'$ の local section は $dx_1\wedge\cdots\wedge dx_p$ であり，F_f と一致する．(F_f は saturation をとっているので $dx_1\wedge\cdots\wedge dx_p$ で生成される．)

以下 $f^*(K_Y+\Delta(f))]+S'$ と F_f の (divisor としての) 差が $X\setminus B = f^{-1}(Y\setminus A)$ 上で 0 であることを示す．既約 divisor$D\subset X$ について，D が f-exceptional ならば $D\subset B$ より，D は f-exceptional でないとして良い．$f(D)\not\subset\Delta(f)$ ならば D の一般点で f は smooth なので，そもそも $f^*K_Y = F_f$ である．$f(D)\subset\Delta(f)$ ならば S' の取り方から言える．[2]

(3) m が十分大きいと $\mathbb{Q}$-divisor を整数係数にできる．(1) より

$$H^0\big(X, m(F(f)+S')\big) \simeq H^0\big(Y, f_*\mathcal{O}_Y(m(F(f)+S'))\big) \underset{(1)}{\simeq} H^0\big(Y, m(K_Y+\Delta(f))\big)$$

である．以上より

$$H^0(X\setminus B, F_f^{\otimes m}) \underset{(2)}{\simeq} H^0(Y\setminus A, m(K_Y+\Delta(f))) \underset{\text{Hartogs}}{\simeq} H^0(Y, m(K_Y+\Delta(f))) \underset{\text{上の同型}}{\simeq} H^0\big(X, m(F(f)+S')\big)$$

となる．これより制限写像を用いて $H^0(X, F_f^{\otimes}) \hookrightarrow H^0\big(X, m(F(f)+S')\big)$ を得る．

f が neat の場合，ある複素多様体 X' への bimeromorphic map $u : X \to X'$ があって，$u(B)$ が codimension 2 以上の Zariski 閉集合 になる．よって

$$\begin{tikzcd} H^0(X', F_{f'}^{\otimes m}) \arrow[r, "\text{isom}"] \arrow[d, "u^*"] & H^0(X'\setminus u(B), F_{f'}^{\otimes m}) \arrow[d, "u^*\text{isom}"] \\ H^0(X, F_f^{\otimes m}) \arrow[r, "f"] & H^0(X\setminus B, F_f^{\otimes m}) \end{tikzcd}$$

という図式が成り立ち 特に $H^0(X, F_f^{\otimes m}) \to H^0(X\setminus B, F_f^{\otimes m})$ は全射 (同型) になる．よっていえた． □

1.18 の証明．(2) は (1) の言い換え．(1) は f を neat かつ addmisible と仮定してよく，

$$\kappa(Y, f) \underset{\text{addmisible}}{=} \kappa(Y/\Delta(f)) \underset{\text{neat}}{=} \kappa(f)$$

となりわかる． □

[2] ここ Campana の証明も雰囲気しか言っていないので，なんて言えばいいかわからない．いい言い方があれば教えてください．

2 Special fibrations and general type fibrations

2.1 Special or general type fibrations. [Cam04a, 2.1]

Definition 2.1. コンパクト解析空間が "in Fujiki class C" であるとは, コンパクト Kähler 多様体と bimeromorphic であること.

Definition 2.2. $f : X \dashrightarrow Y$ を fibration とし，X, Y はコンパクト解析空間 とする.

1. fibration $f : X \dashrightarrow Y$ が *general type* であるとは，$\kappa(Y, f) = \dim(Y) > 0$ が成り立つこと.
2. X が *special* であるとは, general type meromorphic fibration $f : X \dashrightarrow Y$ を持たないこと.
3. fibration $f : X \dashrightarrow Y$ が *special* であるとは, その一般ファイバーが special であることをいう.

定義から special は bimeromorphic な性質である.

この定義だと special がわかりづらい. が, 逆に"special でない"の方がわかりやすい.

コンパクト normal 解析空間 X がspecial ではないとは,

- $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ コンパクト複素多様体
- bimeromorphic map $\widetilde{X} \to X$
- fibration $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ で f は neat, prepared, addmisible かつ $\dim \widetilde{Y} > 0$

なものであって,

$$\dim Y = \kappa(\widetilde{Y}/\Delta(\widetilde{f}))$$

となるものが存在すること. (上の量は $\kappa(\widetilde{Y}, \widetilde{f})$ や $\kappa(\widetilde{f})$ と一致する.)

Example 2.3. [Cam04a, Example 2.3] 以下に special 多様体 のいくつかの例を挙げる（ほとんどの証明には後で展開する道具が必要なので，後で与える）.

0. コンパクト解析空間 X が general type ならば special ではない. ここで X が general type とはある resolution $\widetilde{X} \to X$ があって, $K_{\widetilde{X}}$ が big であること. これは $id : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ が general type 射になるから.
1. X がリーマン面 (滑らかな射影代数曲線) であるとき以下は同値
   - X が special

- 種数が 0 または 1
- Kodaira 次元 が高々 0
- 基本群 が abelian
- Kobayashi hyperbolic ではない.

これは射影代数曲線の間の有理写像は正則写像になるから.

2. rationally connected (有理連結, RC) ならば special. ここで解析空間 X が rationally connected であるとは, 「一般の $x, y \in X$ についてある有理曲線 $f : \mathbb{CP}^1 \to X$ が存在して $x, y \in \mathbb{CP}^1$」となること. 証明は $H^0(X, \Omega_X^p) = 0$ からわかる (2.21) よって特に $\mathbb{CP}^n$ や Fano 多様体は special.
3. $\kappa(K_X) = 0$ となる 多様体は special (5.1). 特に $c_1(X) = 0$ ならば special (この場合は別証明がある 2.21) よってトーラスは special.
4. special 多様体は, 弱い意味で rationally connected であるか，あるいは Kodaira 次元 が 0 である 多様体から構成される[3]
5. 任意の $d > 0$ と $k \in \{-\infty, 0, \dots, d-1\}$ に対して，次元 d かつ Kodaira 次元 k を持つ special 射影多様体 が存在する. (2.8) よって小平次元と special 多様体は関係がほぼほぼない.
6. $\mathbb{C}$-dominable ならば special. ここで解析空間 X が $\mathbb{C}$-dominamble とは非退化な 射 $\mathbb{C}^n \to X$ が存在すること[4] これは Kobayashi-Ochiai の定理 (の拡張版) からわかる. (8.4)

6'. Oka 多様体ならば $\mathbb{C}$-dominable なので, special である.

7. $-K_X$ が nef, もしくは T_X が psef ならば special. もっと強く T_X が generically nef ならば special. 証明は Matsumura-Qing 25 参照
8. 代数次元が 0(すなわち $a(X) = 0$) である 多様体 X も special である. これは次の定理から. [5]

Theorem 2.4. *[Cam04a, Theorem 2.4] X をコンパクト normal 解析空間 in Fujiki's class とする. $a_X : X \dashrightarrow \mathrm{Alg}(X)$ を X の algebraic reduction とする. このとき a_X の一般ファイバーは special である.*

[3] [Cam04a, Section 6.5] に説明があるが, よくわからんかった.

[4] 非退化とは微分写像が全射な点が存在すること. 同値な条件として, 写像が正則である点において submersive であること. これはサードの定理から全射 (dominant) と同値になる. 実は dominant rational map$\mathbb{C}^n \dashrightarrow X$ が存在すれば special である.

[5] この証明もよくわからなかった. fibration の族の極大をとるっぽい議論である.

2.2 Special fibrations dominate general type fibrations. Statements. [Cam04a, 2.2]

Theorem 2.5. *[Cam04a, Theorem 2.6] X, Y, V, Z をコンパクト normal 解析空間 とする.*

- *$h : V \dashrightarrow Z$ を一般ファイバーは special となる fibration*
- *$f : X \dashrightarrow Y$ を general type fibration*
- *$g : V \dashrightarrow X$ を meromorphic dominant map*

とする. このときある $k : Z \dashrightarrow Y$ が存在して $f \circ g = k \circ h$ が成り立つ.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "g\ dominant"] \arrow[d, dashed, "h\ special"'] & X \arrow[d, dashed, "f\ gen.type"] \\ Z \arrow[r, dashed, "\exists k"'] & Y \end{tikzcd}$$

使い方としては $V = X$ の場合よく使う. ただ証明はかなり込み入る. (途中 Chow-Barlet space が出てきてかなりよくわからなかった.)

Proposition 2.6. *[Cam04a, Proposition 2.10] X, Y, Z, Y' をコンパクト normal 解析空間とする.*

- *$f : X \dashrightarrow Y$ を general type fibration とする.*
- *$j : Z \dashrightarrow X$ を meromorphic map, $f \circ j : Z \dashrightarrow Y$ dominant.*
- *$f \circ j = g \circ h$ を $f \circ j$ の Stein 分解とし, $h : Z \dashrightarrow Y'$ は fibration $g : Y' \dashrightarrow Y$ は (generically?) finite とする.*

このとき h は general type fibration である.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, dashed, "j"] \arrow[d, dashed, "h\ fibration"'] \arrow[dr, dashed, "f\circ j\ dominant"] & X \arrow[d, dashed, "f\ gen.type"] \\ Y' \arrow[r, dashed, "g\ finite"'] & Y \end{tikzcd}$$

これは $\Delta(f \circ j) \geq \Delta(f)$ であることを用いて示す.

これらを認めると次がわかる. [6]

[6] 実際は論理展開が逆で 2.9 などを示してから, 上の 2.6 を示す.

Lemma 2.7. *[[Cam04a](#), Lemma 2.9, 2.17] X, X', Y, Z をコンパクト normal 解析空間 とする.*

1. *$g : X' \dashrightarrow X$ を dominant meromorphic map とする. X' が special ならば, X も special である*
2. *X, X' が special ならば, $X \times X'$ も special.*
3. *$f : X \dashrightarrow Y$ を special fibration, $j : Z \dashrightarrow X$ meromophic map で $f \circ j : Z \dashrightarrow Y$ が dominant となるものとする. もし Z が special ならば, X も special である.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rd, dashed, "f\ \mathit{special}"] & \\
Z \arrow[u, dashed, "j"] \arrow[r, dashed, "f\circ j\ \mathit{dominant}"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Proof. (1). X が special でないとすると, $f : X \dashrightarrow Y$ general type fibration で $\dim Y > 0$ となるものがある. 2.5 を $V = X', Z = pt$ に対して適応すれば, f は定数写像となる. よって $\dim Y = 0$ となり矛盾.

(2). $X \times X'$ が special でないとすると, $f : X \times X' \dashrightarrow Y$ general type fibaration で $\dim Y > 0$ となるものがある. 2.5 を $V = X' \times X \to Z = X'$ に対して適応すれば, $k : X' \to Y$ を誘導する. よって $j : X' \to X \times X'$ を $a \in X$ のある点をとって $x' \mapsto (a, x')$ と定義すれば次の図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "j"] \arrow[rd, dashed, "k=f\circ j\ \mathrm{dominant}"'] & X \times X' \arrow[d, dashed, "f\ \mathrm{gen.\ type}"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

よって 2.6 を用いて $X' \dashrightarrow Y'$ という $\dim Y' = \dim Y > 0$ の general type fbration を作れ, X' が special であることに矛盾する.

(3). X が special でないとすると, $h : X \dashrightarrow T$ general type fibaration で $\dim T > 0$ となるものがある. 2.5 から $g : Y \dashrightarrow T$ が存在する.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dashed, "h\ \mathrm{gen.type}"] \arrow[rd, dashed, "f\ \mathrm{special}"] & T \\
Z \arrow[u, dashed, "j"] \arrow[r, dashed, "f\circ j\ \mathrm{dominant}"'] & Y \arrow[u, dashed, "\exists g"']
\end{tikzcd}$$

すると $g \circ f \circ j : Z \dashrightarrow T$ が dominant なので, 2.6 を用いて $h' : Z \dashrightarrow T'$ general type fibaration で $\dim T' = \dim T > 0$ となるものがある. これは Z が special であることに矛盾する. □

Example 2.8. [Cam04a, Example 2.19] 任意の $d > 0$ および $k \in \{-\infty, 0, \ldots, d-1\}$ に対して, 次元 d かつ Kodaira 次元 が k である special 射影多様体 $X_{d,k}$ が存在する特に special 多様体は

Kodaira 次元とほぼほぼ関係がない．

$k=-\infty$ の場合は $\mathbb{CP}^d$ をとればよいので，以下 $k\geq 0$ とする．$P:=\mathbb{CP}^{d-k+1}\times\mathbb{CP}^k$ 上の線形系

$$X_{d,k}\in|\mathcal{O}_P(d-k+2,m)|$$

の一般元で $pr_2:X_{d,k}\to\mathbb{CP}^k$ に関して section $\sigma:\mathbb{CP}^k\to X_{d,k}$ が存在するものを取る．[7]

$X_{d,k}$ は $F(z,w)$ で $z\in\mathbb{CP}^{d-k+1}$ に関して $d-k+2$ 次，$w\in\mathbb{CP}^k$ に関して m 次の斉次代数方程式を使って

$$X_{d,k}=\{(z,w)\in P\mid F(z,w)=0\}$$

となるものである．これは adjunction formula $K_D\sim(K_X+D)|_D$ を使えば

$$K_{X_{d,k}}\sim(m-k-1)pr_2^*H_{\mathbb{CP}^k}\}$$

となるので $\kappa(K_{X_{d,k}})=k$ となる．

$X_{d,k}$ が special なのは，

- $pr_2:X_{d,k}\to\mathbb{CP}^k$ の fiber は $\mathbb{CP}^{d-k+1}$ 内の $d-k+2$ 次の零点集合なので，$c_1=0$ であり special．よって $pr_2:X_{d,k}\to\mathbb{CP}^k$ は special fibration
- $pr_2\circ\sigma:\mathbb{CP}^k\dashrightarrow\mathbb{CP}^k$ は dominant
- $\mathbb{CP}^k$ は special (rationally connected)

なので 2.7 (3) より special が言える．

Remark 2.9 (2.18)*.* Y が special，$f:X\dashrightarrow Y$ が special fibration でも X が special であるとは限らない（例えば 1.1 参照）ただ f のファイバーが rationally connected であるときは成り立つ（3.26）．

2.3 A uniqueness result. [Cam04a, 2.4]

2.5 から次がわかる．[8]

Corollary 2.10. *[Cam04a, Corollary 2.20] X を normal コンパクト解析空間 in Fujiki class とする．X 上に定義された fibration $f:X\dashrightarrow Y$ であって special かつ general type であるものは (bimeromorphic を除いて) 高々一つしか存在しない．*

そのような fibration $f:X\dashrightarrow Y$ は

[7] これの存在は $\varphi:\mathbb{C}^k\to\mathbb{C}^{d-k-1}$ で $F(\varphi(w),w)=0$ となるものが存在すれば良いと思う．多分 section と書いているが，rational section $\mathbb{CP}^k\dashrightarrow X_{d,k}$ のことだと思う．

[8] [Cam04a, Corollary 2.20] では X が Fujiki class であることを仮定していたが，これ必要な理由がわからない．

- X 上の最小の special fibration かつ
- X 上の最大の general type fibration

である．後々 (3 章) でわかるが X が smooth の場合は存在し core map という．つまり

$$\text{Core map} = \text{special かつ general type である fibration}$$

ということがわかる．

2.4 A result on almost holomorphic maps. [Cam04a, 2.5]

Definition 2.11. [Cam04a, Definition 2.21] $f : X \dashrightarrow Y$ を normal コンパクト 解析空間の dominant fibration とする．f の不定値集合を $I(f)$ とする．
$f(I(f)) \neq Y$ であるとき，f を *almost holomorphic* であると言う．

正確にいうと，$G_f \subset X \times Y$ を f のグラフとし，$p : G_f \to X, q : G_f \to Y$ を射影としたときに

$$f(I(f)) := q(p^{-1}(I(f)))$$

とする．

Example 2.12. MRC fibration, Core map, Shafarevich map など，Chow-Barlet space(cycle space) を使って作る map は大概 almost holomorphic である．(なので Campana が作った map はほぼ almost holomorphic である．)

0.5 における fibration

$$\varphi : \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^1 \quad [x : y : z] \mapsto [y : z]$$

は almost holomorpshic ではない．

Theorem 2.13. *[Cam04a, Theorem 2.22] $f : X \dashrightarrow Y$ を general type fibration とする．$X \in C$ が smooth (もっと強く KLT) であるならば，f は almost holomorphic である．特に Y が曲線であれば，f は正則写像である．*

Remark 2.14. [Cam04a, Remark 2.23] X が smooth でない場合はなりたたない．Y を K_Y が big な射影多様体とする (例えば種数 2 以上のリーマン面) など．

X を 1 点 v の Y 上の projective cone とする．$\pi : \widetilde{X} \to X$ を v での blowup とすると $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \to Y$ は $\mathbb{CP}^1$-束になる

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}\ \mathbb{CP}^1\text{-束}"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\
X \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

すると $\varphi : X \dashrightarrow Y$ は general type fibration である．しかし上の 0.5 と同じ理由で almost holomorphic ではない．

この例は次の理由で非常によく出てくる．

- X は rationally chain connected (有理曲線の和で繋げる) が，rationally connected (有理曲線で繋げる) ではない．[9]
- X は LC やそれより悪い特異点を持つ (上の場合は KLT ではない)
- X の core map は定数写像だが，X は special ではない．(3 章参照)

Proof. $\pi : \widetilde{X} \to X$ を f の resolution とし，$\widetilde{f} := f \circ u : \widetilde{X} \to Y$ を誘導される正則写像とする．

f が almost holomorphic でないと仮定する．すると π の例外因子のある既約成分 $V \subset \mathrm{Ex}(\pi)$ が存在して，

- $\widetilde{f}(V) = Y$ 　かつ
- $\pi : V \to Z = \pi(V) \subset I(f)$

となるものが存在する．

今 X が smooth(より強く KLT) であれば， [HM07] より $z \in Z$ について $\pi^{-1}(z)$ は rationally connected である．特に π は special fibration である．

よって 2.5 と 2.6 を用いて $h : Z \dashrightarrow Y$ で $h \circ \pi = \widetilde{f}$ という meromorphic map が存在する．これは $Z = \pi(V) \subset I(f)$ に矛盾する (Z の general point で f が定義されてしまう!) □

2.5 General type fibrations and Bogomolov sheaves. [Cam04a, 2.6]

Definition 2.15. [Cam04a, Definition 2.24] X を複素多様体 in Fujiki class とする．$p > 0$ とし， rank 1 subsheaf $F \subset \Omega_X^p$ であって $\kappa(X, F) = p$ を満たすものを，X 上の（p-次元の）*Bogomolov sheaf* と呼ぶ．

Remark 2.16. Bogomolov-Sommese 消滅定理から，任意の rank 1 subsheaf $F \subset \Omega_X^p$ について $\kappa(X, F) \leq p$ が成り立つ．Bogomolov sheaf はその等号が成り立つものだとわかる．

また $f : X \dashrightarrow Y$ が general type であれば，$F_f := (f^* K_{Y_0})^{sat} \subset \Omega_X^{\dim Y}$ は X 上の Bogomolov sheaf である．これは

$$\kappa(X, F_f) \underset{\text{def}1.16}{=} \kappa(f) \underset{1.18}{=} \kappa(Y, f) \underset{\text{general type}}{=} \dim Y$$

[9] smooth(もっと強く KLT) ならば rationally chain connected と rationally connected は同値である．めちゃくちゃ非自明な結果である．(Kollar-Miyaoka-Mori, Hacon-Mckernan [HM07] など)

Theorem 2.17. *[Cam04a, Theorem 2.25] X を複素多様体 in Fujiki class, $F \subset \Omega_X^p$ を Bogomolov sheaf とする.*
このとき $m > 0$ を十分大きく割り切れる整数として，線形系 $|L^{\otimes m}|$ によって定まる fibration を $f_F : X \dashrightarrow Y_F$ とおく．このとき

$$F = f_F^*(K_{Y_F})$$

が Y_F の一般点において成り立つ.

projective の場合は Bogomolov 79 の結果である．$p = 1$ のときは Castelnuovo-de Franchis の定理だと思う．あとでこの証明を [Voi] のサーベイに基づいた解説を入れる．以下は [Cam04a] の証明を原論文そのまま載せた. (がこれでわかんですかね??)

Proof. Bogomolov 79 の covering trick を用いることで，$m = 1$ の場合に帰着できるので，これを扱う．

F の解析的に独立な（すなわち，それらが定める線形系は Stein 分解を除けば f_F であり，したがって像が p-次元である）$(p+1)$ 個のセクション s_i（$i = 0, \ldots, p$）を取ることができる.F の階数が 1 であることから，ある meromorphic y_i（$i = 1, \ldots, p$）が存在して

$$s_i = y_i s_0$$

と書ける．Hodge 理論により，X 上の正則 p-form s_i（$i = 0, \ldots, p$）はいずれも閉形式である. したがって

$$ds_0 = 0, \qquad dy_i \wedge s_0 = 0, \quad i = 1, \ldots, p$$

を得る．最後の等式は簡単な代数的議論から， ある meromorphic g が X 上に存在して

$$s_0 = g\,(dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_p)$$

と書けることを示す. 最初の等式は， ある meromorphic h が Y 上存在して $g = f^*(h)$ となることを示す. よって主張が従う．なお，同じ議論は $i > 0$ に対しても適用できる. □

よって上の定理から次の二つがわかる.

Theorem 2.18. *[Cam04a, Theorem 2.26] X を複素多様体 in Fujiki class とする．X 上の Bogomolov sheaf $F \subset \Omega_X^p$ と, general type fibration $f : X \dashrightarrow Y$ のあいだには次のような対応がある.*

1. *$f : X \dashrightarrow Y$ が general type であれば，$F_f := (f^* K_{Y_0})^{sat} \subset \Omega_X^{\dim Y}$ は X 上の Bogomolov sheaf である.*

2. $F \subset \Omega_X^p$ が X 上の *Bogomolov sheaf* であれば，$f_F : \dashrightarrow Y$ は *general type fibration* である.

Theorem 2.19. *[Cam04a, Theorem 2.27] X を複素多様体 in Fujiki class とする．X が special であることと，X 上に Bogomolov sheaf が存在しないことは同値である.*

special であることはは bimeromorphic invariant なので, special を次のように定義しても良い

Definition 2.20 (Special の別の言い換え)**.** X を複素多様体 in Fujiki class とする.
X が special とは Bogomolov sheaf が存在しないこと, 同値的に任意の $p > 0$, rank 1 subsheaf $F \subset \Omega_X^p$ について, $\kappa(X, F) < p$ であることとして定義する.
X が normal コンパクト 解析空間で Fujiki class であるときは, ある resolution $\widetilde{X} \to X$ があって, $\widetilde{X}$ が special であるとして定義する．これは resolution の取り方によらない.

Corollary 2.21. *[Cam04a, Corollary 2.28] X を複素多様体 in Fujiki class とする.*

1. *X が rationally connected ならば special*
2. *X がさらに Kähler であり $c_1(X) = 0$ ならば special.*

(2) については, より弱い条件 $\kappa(K_X) = 0$ だけでも X が special であるのに十分である.

Proof. (1) rationally connected ならば $H^0(X, \Omega_X^p) = 0$ であるため (例えば [Deb01] 参照).
(2)．α を Kähler class とする．$c_1(X) = 0$ ならば Ω_X^p は α^{n-1}-semistable である．つまり任意の torsion free sheaf $\mathcal{E} \subset \Omega_X^p$ について

$$\frac{c_1(\mathcal{E})\alpha^{n-1}}{\operatorname{rk}\mathcal{E}} \leq \frac{c_1(X)\alpha^{n-1}}{n} = 0$$

が言える．rank 1 subsheaf $F \subset \Omega_X^p$ とする．もし $\kappa(F) \geq 0$ ならば $c_1(F) = 0$ となるので, $\kappa(F) = 0$ となる. □

Remark 2.22. [Cam] では

$$\kappa^+(X) := \sup\{\kappa(X, F) \mid F \subset \Omega_X^p\}$$

を定義している．定義から $\kappa^+(X) \leq 0$ ならば special である．よって RC や $c_1 = 0$ ならば $\kappa^+(X) \leq 0$ なので 2.21 が言える．が $\kappa^+(X)$ を使っているのは Campana か Peternell くらいなのであまり気にしなくても良い[10]

[10] 最近の Campana のサーベイでは κ^{++} というものもある.

(2) の証明を洗練すると

- 任意の torsion free sheaf $\mathcal{E} \subset \Omega_X^p$ について $c_1(\mathcal{E})\alpha^{n-1} \leq 0$

という仮定がなりたてば X は special であることがわかる．この仮定は「T_X が generically nef」と同値である ([IM22], [IMZ23] など参照) 例えば $-K_X$ nef だったり T_X が psef ならば T_X が generically nef になる．([Ou23], [IMZ23] など参照) つまり以下が成り立つ．

$$-K_X \text{ nef or } T_X \text{ psef} \Rightarrow T_X \text{ generically nef} \Rightarrow X \text{ special}$$

2.6 2.17 の証明の補足

以下は [Voi] のサーベイ 1 章の内容を引用した．ただこの証明がわかりやすいというわけではない．また以下はコンパクト Kähler 多様体についての主張である．

Theorem 2.23. *[Voi, Theorem 1.7 (Iitaka)] X をコンパクト Kähler 多様体, L を直線束とする.*
ある fibration

$$\phi_L : X \dashrightarrow Y$$

で次を満たすものが存在する

1. *$\dim Y = \kappa(X, L)$.*
2. *$\tilde{\phi}_L : \tilde{X} \to Y$, $\tau : \tilde{X} \to X$ を ϕ_L. の不確定点解消とし, $\tilde{\phi}_L$ の general fiber を F とする. $\tau^* L|_F$ の Iitaka 次元は 0 となる.*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, "\tilde{\phi}_L"] \arrow[d, "\tau"'] & Y \\
X \arrow[ur, dashed, "\phi_L"']
\end{tikzcd}$$

さらにこの fibration は Y の bimeromorphic を除いて一意である. この $\phi_L : X \dashrightarrow Y$ を Iitaka fibration という.

Lemma 2.24. *[Voi, Lemma 1.10] X をコンパクト Kähler 多様体 とする. $\alpha, \beta \in H^0(X, \Omega_X^1)$ を二つの 1 次独立な 1-form で*

$$\alpha \wedge \beta = 0 \text{ in } H^0(X, \Omega_X^2)$$

であるものとする.

このとき, 種数 2 以上の射影代数曲線 C, 射 $\phi : X \to C$, C 上の正則 *1-form* α_0, β_0 があって,

$$\alpha = \phi^*\alpha_0 \quad \textit{and} \quad \beta = \phi^*\beta_0$$

となる. より一般に g 個の X 上の *1* 次独立な $(1,0)$-*form* α_i で,

$$\alpha_i \wedge \alpha_j = 0 \ \textit{in} \ H^0(X, \Omega_X^2)$$

を満たすならば, 種数 g 以上の射影代数曲線 C, 射 $\phi : X \to C$ があって, α_i は C 上の正則 *1-form* の引き戻しになる.

Proof. X はコンパクト Kähler なので, 正則 1 次形式ならば, $\overline{\partial}$-closed で harmonic になり, d-closed である. 2 つの 1-form α, β は各点で平行である, つまりある rational/meromorphic f があって,

$$\alpha = f\beta$$

とかける. これは可縮な近傍をとってドラームコホモロジーを見れば良い. 正則 1-form は d-closed なので, $d\alpha = df \wedge \beta = 0$ となる. よって df もまた α, β と各点で平行である.

そこで $f : X \dashrightarrow \mathbb{CP}^1$ を考える. すると, f の fiber 上で α と β は消えている. そこで次を考える.

- $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{CP}^1$ を f の resolution
- $F : \tilde{X} \to C$, $r : C \to \mathbb{CP}^1$ を $\tilde{f}$ の Stein 分解
- $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ を α, β の引き戻しとする. これは閉正則 1 次形式であり, $F|_U U :\to C$ のヤコビ行列の階数が最大となる locus U 上では $F^*\Omega_C \subset \Omega_{\tilde{X}}$ の section となる.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\tilde{f}"] & C \arrow[d, "r"] \\
X \arrow[r, dashed, "f"] & \mathbb{CP}^1
\end{tikzcd}$$

今 $\tilde{X}$ 上の Kähler form ω で F の fiber で体積が 1 となるものをとって

$$\alpha_0 := F_*\omega^{d-1} \wedge \tilde{\alpha}$$

とする. すると α_0 は C 上の正則 1 次形式であり $\tilde{\alpha} = F^*\alpha_0$ 　となる. よって, $g(C) \geq 2$ である. C は有理曲線を含まないので, $F \circ \pi^{-1} : X \to C$ は正則写像となる. ([KM98, 1.1 節参照]) □

Theorem 2.25. *[Voi, Theorem 1.13. Bogomolov and Campana]* X をコンパクト *Kähler* 多様体, $L \subset \Omega_X^k$ を *(saturated* とは限らない*)* 直線束とする.
$\kappa(L) \geq k$ ならば, ある *meromorohic map* $\phi : X \dashrightarrow B$, があって, B は k 次元の射影多様体

であり，L はある X の *Zariski open* 上で $\phi^* K_B \subset \Omega_X^k$ と一致する．

Remark 2.26. [Voi, Remark 1.14] B は general type であるとは限らない．ただ ϕ が"general type in the sense of Campana"である．理由としては $\phi^* K_B \subset \Omega_X^k$ が saturated とは限らないから．L の saturation L の方が Iitaka 次元が $\phi^* K_B$ より大きくなる．

Remark 2.27. [Voi, Remark 1.15] 2.25 から，L は"generically"にランク k の部分層 $F \subset \Omega_X$ を用いて $\bigwedge^k F$ に等しいことがわかる．($F = \phi^* \Omega_B \subset \Omega_X$ とする.)

Proof. Step1. L の Iitaka fibration が $0 \neq s_0, \dots, s_N \in H^0(X, L)$ で与えれる場合を考える．その dominant meromorohic map $\phi : X \dashrightarrow B \subset \mathbb{P}^N$ で $\dim B = k$ なものがある．$H^0(X, L) \subset H^0(X, \Omega_X^k)$ によって，ある正則 k 形式 α_i があって，

$$s_i = \alpha_i \text{ in } H^0(X, \Omega_X^k)$$

するとある meromorohic map ϕ_i で $\alpha_i = \phi_i \alpha_0$ となる．($\phi_i = \frac{s_i}{s_0}$ である)

2.24 と同様に，X はコンパクト Kähler より $d\alpha_i = d\alpha_0 = 0$．よって $d\phi_i \wedge \alpha_0 = 0$．以上より

$$\mathcal{F} := (d\phi_1, \dots, d\phi_N) \subset \Omega_X$$

とすると，これは X の一般点で Ω_X の rank k の部分束である．特に $\mathcal{F} = \phi^* \Omega_B$ が general point で成り立つ．さて次の線形代数の事柄を思い出す．

Lemma 2.28. *[Voi, Lemma 1.16]* W をベクトル空間，$0 \neq u \in \wedge^k W$ とするこのとき

$$V := \{v \in W, v \wedge u = 0\} \subset W$$

は次元 k 以下である．
さらに $\dim V = k$ であることは，u が $\wedge^k V$ の *generator* であること *(*つまり u が分解可能*)* と同値である．

よって X の general point で，L と $\wedge^k(\phi^* \Omega_B) = \phi^* \Omega_B^k$, が一致する．

Step2. 一般の場合．$s \in H^0(X, L^{\otimes N})$ について，generically finite dominant map $r : X' \to X$ と $s' \in H^0(X', r^* L)$ であって，

$$r_*(\operatorname{div} s') = \operatorname{div} s.$$

となるものが存在する．これは X の位数 N で $\operatorname{div} s$. に沿って分岐する cyclic cover をとって，それを resolution したものとして構成する．

これを繰り返すと次をえる

- generically finite cover $r : X' \to X$

- $r^*L \subset \Omega^k_{X'}$ と r^*L の Iitaka fibraiton が $H^0(X', r^*L)$ で与えられる.
- (Step 1 の議論から) $\phi' : X' \dashrightarrow Y'$ で Y' は k 次元の射影多様体で, $r^*L = \phi'^*\Omega^k_{Y'}$ が X' の general point で成り立つ.
- $\phi_L : X \dashrightarrow Y$ を L の Iitaka fibration とする.

$s \in Y$ を general point としたとき, $r^{-1}(X_s)$ の既約成分上において, r^*L は Iitaka 次元 0 である. よって次の可換図式をえる.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, dashed, "\phi'=\phi_{|r^*L|}"] \arrow[d, "r\ \text{gen. fin.}"'] & Y' \arrow[d, "r'"] \\ X \arrow[r, dashed, "\phi_L"'] & Y \end{tikzcd}$$

そして $L = \phi_L^*\Omega^k_Y$ が X の general point で成り立つ. □

3 3. The core.

3 章の内容は Chow-Barlet space や Fujiki の定理を使うので, コンパクト性・Fujiki 性は必要である.

3.1 Construction of the core + Appendix の内容

Definition 3.1. [Cam04a, Definition 3.1] X をコンパクト normal 解析空間 in Fujiki class とする. $A := A(X) \subset Chow(X)$ を X の special subvariety 全体からなる族とする. これは Z-regular である. $T(A)$ をその成分の族([Cam04b, Prop 2.4])とし, $c_X : X \dashrightarrow C(X)$ を X の $T(A)$-quotient とする. この almost holomorphic fibration を X の *core* と呼ぶ.

Chow-Barlet space $Chow(X)$ については [GPRG94, 8 章] 参照 (ただこれも難しい) ラフに言えば次のとおりである.

- $Chow(X)$ は X の cycle (subvariety + α) のなす空間 (Chow-Barlet space)　ここにコンパクト Fujiki がいると思う. (Fujiki の定理から $Chow(X)$ の既約成分がコンパクトになるから)
- $A := A(X) \subset Chow(X)$ は　X の special subvariety 全体からなる族とする.
- $T(A)$ は quotient がうまくいくように付け足す. この部分で X が singular だとうまくいかない 3.6 参照.
- $c_X : X \dashrightarrow C(X)$ はほぼほぼ"同値関係による商写像". つまり very general な点 $x, y \in X$ で $x \sim y$ を「x と y が $Z_1, \ldots, Z_l \in T(A)$ となる X の subvariety で結ばれる」として定義し

たときの商写像にちかい[11]

- c_X は special fibration の中で最小 ($\dim C(X)$ が小さい) ものである.

ただこの構成を見たがやっぱりよくわからなかった.

上の 3.1 の主張において, [Cam04b] で用いられている用語に関しては次のとおり. [12]

Theorem 3.2. *[Cam04b, 1.1]* X をコンパクト連結 *normal* 複素空間とし, $S \subset Chow(X)(X)$ を X の *Chow Scheme* の部分集合であって, X の *covering family* とする. $R(S)$ を S によって X 上に誘導される同値関係と書く. つまり $x, y \in X$ が同値であるとは, S によりパラメータ付けられた X の解析的サイクルの族の有限個のメンバーの連結な和の中に x, y が含まれていることとする.
このとき, *"general fiber"*が $R(S)$ の同値類となるような *fibration*

$$q_S : X \dashrightarrow X_S$$

が存在する. さらに q_S は *almost holomorphic* であり, *bimeromorphic* を除いて一意である. q_S を X の S-*quotient* と呼ぶ.

"general fiber" に関しては"very general fiber"だと思う.[13]

Definition 3.3. [Cam04b, Definition 2.1] S を 解析空間, $A \subset S$ を部分集合とする. 既約な Zariski 閉部分集合 $T \subset S$ に対して, $A \cap T$ が T の一般点を含む, あるいは T の Zariski 閉真部分集合の可算和に含まれているとき, A は (S において) Z-regular であると言う. 後者の場合には, A は T において "first Zariski category" であるとも言う.

Proposition 3.4. *[Cam04b, Propsition 2.4]* $A \subset S$ を Z-*regular* とする. このとき, S の *Zariski* 閉既約部分集合 S_i からなる可算 (あるいは有限) 族が存在して, 次をみたす:

1. 各 i について, $A_i := A \cap S_i$ は S_i の一般点を含む.
2. A は A_i 全体の和である.

この族 (S_i) が *irredundant*, つまり $i \neq j$ ならば $S_i \subset S_j$ でも $S_j \subset S_i$ でもない, という意味で互いに包含関係をもたないならば, この族は一意である.
このとき, S_i たちを A の *component* と呼ぶ.

[11] Shafarevich map とか MRC fibration などがまさにそれ. 実は Campana の構成もこれに近い.

[12] Horing の修士論文 `https://math.univ-cotedazur.fr/~hoering/hoering-dea.pdf` も参照.　２章がほぼ [Cam04b] の内容だった

[13] [Cam04a] においては general を very general の意味で使っていた. これは流石にまずいと思う.

Theorem 3.5. *[Cam04b, Theorem 2.5] X をコンパクト normal 解析空間 in Fujiki class, $A \subset \mathcal{C}(X)$ を Z-regular とする．上のように A の components の族を $T := T(A)$ とする．（もし T が covering でなければ，これに X の点からなる族を加える）．*
$q_A := q_T : X \dashrightarrow X_T := X_A$ を X の T-quotient とする．$t \in A$ で，V_t が q_T のある一般 fiber F と交わるものとする．このとき V_t は F に含まれている．写像 q_T を X の A-reduction と呼ぶ．

3.2 Construction of the core as the lowest special fibration. [Cam04a, 3.1]

3.1 における core map$c_X : X \dashrightarrow C(X)$ は X が singular の場合はよくわからない．

Example 3.6. [Cam04a, Example 3.2] 2.14 の通り X を K_Y が big な射影多様体 Y(例えば種数 2 以上のリーマン面) の projective cone とする．$\pi : \widetilde{X} \to X$ を v での blowup とすると $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \to Y$ は $\mathbb{CP}^1$-束になる

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}\ \mathbb{CP}^1\text{-束}"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

すると次がわかる．

- X の core map $c_X : X \dashrightarrow C(X)$ は定数写像である．これは X の任意の点が有理曲線の和で結べ，有理曲線は special であるので．
- $\widetilde{X}$ の core map $c_{\widetilde{X}} : \widetilde{X} \dashrightarrow C(\widetilde{X})$ は $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \to Y$ である．Y が general type で $\widetilde{\varphi}$ のファイバーが $\mathbb{CP}^1$ (特に special) であるので．
- X は special ではない．$\widetilde{X}$ が special ではないので．

特にこの例が言っているのは

$$c_X \text{ のファイバーは special ではない．} \quad \text{and} \quad 0 = \dim C(X) \neq \dim C(\widetilde{X}) = 1$$

である．

ただしこのようなことは X が smooth なら起こり得ない．

Theorem 3.7. *[Cam04a, Theorem 3.3] X を複素多様体 in Fujiki class とし，$c_X : X \dashrightarrow C(X)$ を X の core map とする．このとき次が成り立つ．*

1. *c_X の一般ファイバーは special である．特に c_X は special fibration*
2. *F を c_X の very general ファイバーとし，$Z \subset X$ を F と交わる X の special subvariety とする．このとき Z は F に含まれる．*

3. 写像 c_X は *almost holomorphic* である．

要は core map は”special な部分多様体を潰した map で $\dim C(X)$ が一番小さいもの”という感じである．証明は [Cam04a] や [Cam04b] を参照．”stability”などが出てくる．

Remark 3.8. [Cam04a, Remark 3.4] ??から，core map は general type fibration であることがわかる．多分上の結果は X が smooth でなくても KLT でも成り立つはず??

relative な状況においても core map も存在する．

Theorem 3.9. *[Cam04a, Theorem 3.8] X, Y をコンパクト normal 解析空間 in Fujiki class, $f : X \dashrightarrow Y$ fibration とする．*
このとき 2 つの fibration $c_f : X \dashrightarrow C(f)$ と $g_f : C(f) \dashrightarrow Y$ によって

$$f = g_f \circ c_f$$

と一意に分解される．ここで $y \in Y$ を一般点とするとき，制限 $c_f : X_y \dashrightarrow C(f)_y$ は X_y の core である．この分解 $f = g_f \circ c_f$ を f の core と呼ぶ．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "c_f"] \arrow[dr, dashed, "f"'] & C(f) \arrow[d, dashed, "g_f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

3.3 Functoriality properties. [Cam04a, 3.2]

一般に X が normal だと core map は bimeromorphic invariant ではない．3.6 がその例である．しかし X が smooth なら bimeromorphic invariant である．

Definition 3.10. X を複素多様体 in Fujiki class とするとき，core map $c_X : X \dashrightarrow C(X)$ として

$$\mathrm{ess}(X) := \dim C(X)$$

とおき，X の essential dimension と呼ぶ．

X が smooth のとき，$\dim \mathrm{ess}(X) = 0$ は X は special であることと同値であり，$\dim \mathrm{ess}(X) = \dim X$ は X が general type であることと同値である．(5.10 参照).

Theorem 3.11. *[Cam04a, Theorem 3.9]* X を複素多様体 *in Fujiki class* とする．$c_X : X \dashrightarrow C(X)$ をその *core* とし，$a_X : X \dashrightarrow A(X)$ をその *algebraic reduction* とする．このとき $c_X = b_X \circ a_X$ を満たす c_X の分解 $b_X : A(X) \dashrightarrow C(X)$ が存在する．特に，$C(X)$ は常に *Moishezon* である．

証明は $a(X) = 0$ ならば special であることから.[14] これより bimeromorphic model で取り替えて $C(X)$ は projective と仮定して良い.

Proposition 3.12. *[Cam04a, Proposition 3.10]* X, Z を複素多様体 *in Fujiki class* とする．$h : Z \dashrightarrow X$ *meromorphic map* で $h(Z)$ が ある c_X*-general fiber* と交わると仮定する．このとき，自然な *meromorphic map*

$$c_h : C(Z) \dashrightarrow C(X)$$

であって

$$c_h \circ c_Z = c_X \circ h$$

をみたすものが存在する．

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, dashed, "c_Z"] \arrow[d, dashed, "h"] & C(Z) \arrow[d, dashed, "c_h"] \\ X \arrow[r, dashed, "c_X"] & C(Z) \end{tikzcd}$$

Proof. 一般点 $z \in Z$ に対して，$V_z := h(c_Z^{-1} c_Z(z)) \subset X$ を考える．すると, V_Z は 2.7 より special で, 仮定から, c_X-general fiber F と交わる．よって core map の性質 (2) より $V_z \subset F$ が従う．0.10 から c_h の存在が得られる． □

Corollary 3.13. *[Cam04a, Corollary 3.11]* $h : Z \dashrightarrow X$ を上の *3.12* の仮定をみたす写像とする．このとき c_h は次の場合に存在する．

1. 写像 $c_X \circ h : Z \dashrightarrow C(X)$ が全射である場合．
2. $Z_t \subset X$ が $t \in T$ でパラメトライズされていて, $c_X(Z_t)$ たちが $C(X)$ を被覆するような部分多様体族 $(Z_t)_{t \in T}$ の *general member* である場合．
3. $Z \subset X$ が, ある *fibration* $\psi : C(X) \dashrightarrow Y$ に対し $\psi \circ c_X$ の *general fiber* である場合． このとき c_Z は単に c_X の Z への *restriction* になる．

[14] very general fiber に関して ridigity lemma 0.10 を使う (と思う) なお 3.11 では X normal となっていたが, 多分 smooth の間違いだと思う.

Proposition 3.14. *[Cam04a, Proposition 3.12] X を複素多様体 in Fujiki class とし, $f : X \dashrightarrow Y$ を general type かつ special fibration とする. このとき $f = c_X$ である (正確にいうと core map と bimeromorphic である.)*

実際にはもっと強く, X 上には special かつ general type である fibration が常に存在し, それは coremap であることがわかる. (が今の段階で coremap が general type であることが非自明である).

Proof. f が special であるので, $g : Y \dashrightarrow C(X)$ であって $g \circ f = c_X$ をみたす分解が存在する. これは f の general fiber F は special であり, c_X のある general fiber C と交わるので, core map の性質 (2) から $F \subset C$ となる.

一方 f は general type であり, 2.5 により $h : C(X) \dashrightarrow Y$ であって $f = h \circ c_X$ をみたす分解が存在する. したがって $f = c_X$ が従う. □

Corollary 3.15. *[Cam04a, Corollary 3.14] X を複素多様体 in Fujiki class で general type とする. このとき c_X は X の恒等写像であり, $\mathrm{ess}(X) = \dim(X)$ である.*

id_X に上を適応すれば良い. 逆も 5.10 より成り立つ.

Corollary 3.16. *[Cam04a, Corollary 3.16] X を複素多様体 in Fujiki class とし, $n := \dim(X)$ とする. 次の二つの場合には $\mathrm{ess}(X) = n - 1$ である.*

(a) $\kappa(X) = n - 1$ であり, X の Iitaka fibration J_X が general type fibration である場合. このとき $c_X = J_X$ である.

(b) X の rational quotient (MRC fibration) $r_X : X \dashrightarrow R(X)$ について, $R(X)$ が次元 $n - 1$ の general type である場合.

逆も 5.11 より成り立つ.

Proof. (a) の場合, J_X の fiber が $\kappa = 0$ で special である. よって, core map は J_X を通るが, 次元勘定すれば $c_X = J_X$ である. (b) も同じである. □

Corollary 3.17. *[Cam04a, Corollary 3.18] X を複素多様体 in Fujiki class, C を滑らかな射影代数曲線, $f : X \dashrightarrow C$ を special fibration とする. このとき次のどちらかが成り立つ.*

(a) f が general type かつ $f = c_X$ である.

(b) f が general type ではなく, X が special である.

Proof. f が general type ならば, 3.14 より (a) が成立する．よって f が general type でないとする．X が special を示せば良い．

背理法．$h : X \dashrightarrow T$ という general type fibration があるとする．2.5 より，h は f を経由し，$C \dashrightarrow Z$ という写像がある C は curve で $\dim C \geq \dim Z > 0$ より，$C \to Z$ は同型になる．よって f が general type になり矛盾する． □

3.4 Rationally connected manifolds [Cam04a, 3.3]

[Cam04a, Subsection 3.3] は次のように書かれていた

> コンパクト解析空間 X は，X の任意の二つの generic point が X の rational chain（これは X の connected projective curve であり，その全ての既約成分が（特異かもしれない）有理曲線である）に含まれるとき，rationally connectedであると言う．

読んでいてびっくりした．

これは rationally "chain" connected の定義

である．正しい定義を述べると次のとおり．

> **Definition 3.18.** (cf. [Deb01, Chapter 4 Section 4.1, 4.5]) X をコンパクト解析空間とする．
>
> - X が rationally connected(有理連結, RC) とは任意の general point $x, y \in X$ が有理曲線 $\mathbb{CP}^1 \to X$ で結ばれること．
> - X が rationally chain connected (RCC) とは任意の general point $x, y \in X$ が何本かの有理曲線 $\mathbb{CP}^1 \to X$ の和で結ばれること．

成り立つこととは以下の通り

- 次が成り立つ:

  $$\text{Fano } (-K_X \text{ ample}) \Rightarrow \text{rationally connected} \Rightarrow \text{rationally chain connected}$$

  である．逆は成り立たない．
- X が smooth(もっと弱く KLT) ならば Rationally chain connected ⇒ rationally connected である．smooth のときは Kollar-Miyaoka-Mori, KLT の場合は Hacon-Mckernan [HM07].
- rationally connected は bimeromorhic invariant だが, Rationally chain connected はそうではない (下の例参照)

Example 3.19. 2.14 の通り X を種数 2 以上のリーマン面 Y の projective cone とする. $\pi : \widetilde{X} \to X$ を v での blowup とすると $\widetilde{\varphi} : \widetilde{X} \to Y$ は $\mathbb{CP}^1$-束になる.

すると X は v を通る有理曲線二つを使って, 任意の 2 点を結べるので Rationally chain connected である. 一方 $\widetilde{X}$ は Rationally chain connected ではない (もしそうなら Y が有理曲線を持ってしまう!). なおこの例の X は KLT より悪い特異点を持つ.

Theorem 3.20 ([Cam04a, Theorem 3.19], [GHS03])**.** *$f : X \to C$ を射影代数曲線 C 上の fibration とし, X は射影多様体で, generic fiber が rationally connected であるとする. このとき f は holomorphic section をもつ.*

次は Kollar-Miyaoka-Mori-Campana による MRCC (Maximally Rationally Chain Connected) fibration もしくは Rational quotient である. [Deb01] 参照.

Theorem 3.21. *[Cam04a, Theorem 3.23] X をコンパクト normal 解析空間 in Fujiki class とする. X の MRCC fibration (Rational quotient) と呼ばれる一意な meromorphic fibration*

$$r_X : X \dashrightarrow R(X)$$

が存在し, 次をみたす.

1. *r_X の general fiber は rationally chain connected である.*
2. *r_X の very general fiber はそれと交わる X 上の任意の有理曲線を含む.*
3. *r_X は almost holomorphic である.*

X が smooth のときは rationally "chain" connected の部分を rationally connected にしても良い.

Corollary 3.22. *$R(X)$ は non-uniruled である. 特に $K_{R(X)}$ は psef である.*

Proof. $R(X)$ を smooth として良い. $R(X)$ を uniruled と仮定する. すると一般点 $z \in R(X)$ について z を通る有理曲線 C が存在する.[15] そこで $r_X : r_X^{-1}(C) \to C$ を考えると (適宜 $r_X^{-1}(C)$ の resolution をとって smooth として良い), 3.20 より $C \to r_X^{-1}(C)$ という section が存在する. それは r_X の 2 番目の条件に矛盾する.

最後の主張は Projective の場合は [BDPP13], コンパクト Kähler の場合は [Ou25] の結果による. □

[15] 一般点に対して有理曲線が存在することが重要. 実際 $R(X)$ に有理曲線が存在することはありうる. (Calabi-Yau など)

Proposition 3.23. *[Cam04a, Proposition 3.25]* X を複素多様体 *in Fujiki class*, Y コンパクト *normal* 解析空間, $f : X \dashrightarrow Y$ を *dominant meromorphic* とする．このとき f は *functorial* な写像

$$f_* : R(X) \dashrightarrow R(Y), \qquad f_* : C(X) \dashrightarrow C(Y)$$

を誘導する．

上の命題で $f := r_X$ とおくと，自然な写像

$$(r_X)_* : C(X) \dashrightarrow C(R(X))$$

を得る．rational quotient の場合は, 一般の special fibration と違って次のことが言える.

Theorem 3.24. *[Cam04a, Theorem 3.26]* X を複素多様体 *in Fujiki class*, $r_X : X \dashrightarrow R(X)$ を X の *rational quotient* とし， $c_{R(X)} : R(X) \dashrightarrow C(R(X))$ を $R(X)$ の *core* とする．
X が *Moishezon* ならば,

$$(r_X)_* : C(X) \dashrightarrow C(R(X))$$

は *bimeromorphic* であり， $c_{R(X)} \circ r_X : X \dashrightarrow C(R(X))$ は X の *core* である．特に $C(R(X)) = C(X)$ である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "c_X"] \arrow[d, dashed, "r_X"] & C(X) \arrow[d, dashed, "(r_X)_*\ bimero"] \\ R(X) \arrow[r, dashed, "c_{R(X)}"] & C(R(X)) \end{tikzcd}$$

Remark 3.25. [Cam04a, Remark 3.27] X が "Moishezon" であるという仮定を, "in Fujiki class" であるという仮定に弱めれるかは不明?[16]

以下の prop は使えるので書いておく.

Proposition 3.26. *[Cam04a, Proposition 3.28]* $f : F \dashrightarrow G$ を *fibration* とし，$F \in \mathcal{C}$ は *smooth*，G は *Moishezon* かつ *special* であり，f の *generic fiber* は *rationally connected* であるとする．このとき F は *special* である．

[16] "そのためには，下の [Cam04a, Lem 3.29] における G に対する仮定を同じように弱めれば十分である．"とこの補足に書いてあったが, そもそも [Cam04a, Lem 3.29] があっているかがわからなかった (腑に落ちない点があった) なので証明も記述しない.

3.5 Surfaces. [Cam04a, 3.5]

以下 Iitaka map を $J_X : X \dashrightarrow J(X)$ と表す.

Theorem 3.27. *[Cam04a, Theorem 3.31] X をコンパクト Kähler 曲面とする. その core c_X は次のように記述される.*

1. $\kappa(X) = 2$ ならば $c_X = \mathrm{id}_X$ であり，$\mathrm{ess}(X) = 2$ である.
2. $\kappa(X) = \dim J(X) = 1$ ならば $c_X = J_X$ であり，$\mathrm{ess}(X) = 1$ である.
3. $\kappa(X) = 1 > \dim J(X) = 0$ ならば X は *special* である.
4. $\kappa(X) = 0$ ならば X は *special* である.
5. $\kappa(X) = -\infty$ かつ $q(X) \geq 2$ ならば $c_X = r_X$ であり，$\mathrm{ess}(X) = 1$ である.
6. $\kappa(X) = -\infty$ かつ $q(X) \leq 1$ ならば X は *special* である.

Proof. $\kappa(X) = 2$ のときは, 3.15 による.

$\kappa(X) = 1$ のとき，$J_X : X \dashrightarrow C = J(X)$ は special fibration であるので, 3.17 からわかる.

$\kappa(X) = 0$ のときは, 5.1 より常に special である.

$\kappa(X) = -\infty$ のとき，曲面の分類から，X は $\mathbb{CP}^1 \times C$ と双有理である.[17] ここで C は $g(C) = q(X)$ を満たす曲線である. $q(X) \geq 2$ ならば r_X は C への射影でありこれが core map になる. $q(X) \leq 1$ ならば, $\mathbb{CP}^1$ も C も special なので, X は special である. □

群 G が almost あるいは almost (virtually) abelian であるとは，有限指数の abelian 部分群をもつことをいう.

Corollary 3.28. *[Cam04a, Corollary 3.32, 3.33] X をコンパクト Kähler 曲面とする. 次のいずれかが成り立つ.*

- X は *special* であり，c_X は定値写像である.
- $\kappa(X) \geq 1$ で $c_X = J_X$（*Iitaka fibration*）である.
- $\kappa(X) = -\infty$ で $c_X = r_X$，すなわち X の *rational quotient* である.

さらに $\mathrm{ess}(X)$ は次のように計算できる.

1. $\mathrm{ess}(X) = 2$ であるのは $\kappa(X) = 2$ のときに限る.(*general type* と同値)
2. $\mathrm{ess}(X) = 1$ であるのは $\kappa(X) \in \{1, -\infty\}$ かつ $\pi_1(X)$ が *virtually abelian* でないときに限る.
3. $\mathrm{ess}(X) = 0$ であるのは $\kappa(X) \leq 1$ かつ $\pi_1(X)$ が *virtually abelian* であるときに限

[17] X は曲線 C 上の $\mathbb{CP}^1$ 束 と双有理である.

る. この場合は *Special* であることと同値である.

特にコンパクト *Kähler* 曲面 X が *special* であることと， *finite étale* 被覆をもち，その被覆が次のいずれかの曲面と双有理であることとは同値である.

(*a*) $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

(*b*) $\mathbb{CP}^1(\mathbb{C}) \times E$（$E$ は 楕円曲線）.

(*c*) *K3* 曲面，または *Abelian* 曲面.

(*d*) 曲線 C 上の *elliptic fibration* で *multiple fiber* の個数が m 個であるもの. ここで C は有理曲線であってそのとき $m \leq 2$，あるいは 楕円曲線であってそのとき $m = 0$ である.

よって X が曲面の場合には次がわかる.

$$\pi_1(X) \text{ が almost(virtually) Abel} \Leftrightarrow \text{Special} \Leftrightarrow \text{weakly special}$$ [18]

また $X \dashrightarrow J(X)$ を K_X の Iitaka map として次がわかる.

	Special	Nonspecial
$\kappa(K_X) = 2$	$\times$	常に nonspecial
$\kappa(K_X) = 1$	(d) $\dim J(X) = 0$, $\pi_1(X)$ が almost Abel	$\dim J(X) = 1$, $\pi_1(X)$ が not almost Abel
$\kappa(K_X) = 0$	(c) 常に nonspecial	$\times$
$\kappa(K_X) = -\infty$	(a, b) $q(X) \leq 1$, $\pi_1(X)$ が almost Abel	$q(X) \geq 2$, $\pi_1(X)$ が not almost Abel

Proof. 基本群に関する主張以外はは 3.27 から直ちに従う.

$\kappa(X) = -\infty$ のとき， X は $\mathbb{CP}^1 \times C$ と双有理同値なので, $\pi_1(X) \simeq \pi_1(C)$ であるので曲線の分類からわかる.

$\kappa(X) = 0$ のとき，分類論から $\pi_1(X)$ は almost abelian であることが知られている. [19]

$\kappa(X) = 1$ のときの主張は，J_X に 3.29 を適応する. □

Lemma 3.29. *[Cam04a, Lemma 3.34]* $f : X \to C$ をコンパクト *Kähler* 曲面 X 上の *relatively minimal elliptic fibration* とする.

[18] X が weakly special であるとは, 任意の finite etale cover(有限被覆空間)X' が general type への dominant rational map を有さないこと. 一般には Special ならば Weakly special だが, 逆は成り立たない.

[19] Minimal model $X \to X_{\min}$ において π_1 は不変であり, $X_{\min}$ が $c_1(X_{\min}) = 0$ であるので, Beauville-Bogomolov 分解から $\pi_1(X_{\min})$ は almost Abelian である.

1. 任意の *scheme-theoretic fiber* X_c を

$$f^*(c) := \sum_{j \in J} m_j D_j$$

と書く. このとき *multiplicity*

$$m(c,f) := \inf\{m_j\}$$

は

$$m^+(c,f) := \gcd\{m_j\}$$

にも等しい.

2. *finite étale* 被覆 $u : X' \to X$ が存在して，$v \circ f' = f \circ u$ が $f \circ u$ の *Stein* 分解であるようにできる. ここで $f' : X' \to C'$ は連結，$v : C' \to C$ は有限である. このとき $g(C') \geq 1$ ならば f' は *multiple fiber* をもたず，C' が有理曲線ならば，高々 *2* 本の *multiple fiber* をもち，それらの *multiplicity* は互いに素である.
3. さらに，上の状況で $g(C') = \kappa(C', f') = \kappa(C, f)$ が成り立つ.
4. X が *special* であることと，$\pi_1(X)$ が *almost abelian* であることとは同値である.

Proof. (1), (2) は曲面のファイバーの分類による. [20]

そこで性質 (3) は，第 2 の等式については 1.14 から，また $g(C') \geq 1$ ならば $m = 0$ であるという事実から従う.

最後に (4) を示す.X が special であると仮定する. このとき $\kappa(C, f) \leq 0$ であり，従って C' は有理曲線か 楕円曲線である. そして下の exact sequence が存在する.

$$\pi_1(F') \to \pi_1(X') \to \pi_1(C') \to 1$$

ここで F' は f' の一般ファイバーであり，F' は 楕円曲線で，$\pi_1(F') \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 2}$ である.

よってもし X' が special ならば $\pi_1(X')$ は almost abelian であり，f' は special であり $\kappa(C', f') = \kappa(C, f)$ であるから，X が special であれば X' も special である. 従って $\pi_1(X)$ は almost abelian である.

逆に，$\pi_1(X)$ が almost abelian であると仮定する. このとき $\pi_1(C')$ も almost abelian であり，C' は有理曲線か 楕円曲線である. 従って $\kappa(C, f) \leq 0$ であり，3.31 から X は special である. □

[Cam04a, Subsection 3.7] では 3 次元の粗い分類もある.

[20] この辺りはよくわからなかった. 曲面論になる??

4 Orbifold additivity

4.1 Iitaka conjecture

IItaka's $C_{n,m}$-conjecture とは次のとおり

Conjecture 4.1. *[Cam04a, Conjecture 4.1] Y, Z を複素多様体 in Fujiki class, $g : Y \to Z$ を fibration とする．このとき*

$$\kappa(K_Y) \geq \kappa(K_F) + \kappa(K_Z)$$

が成り立つ．ここで F は general fiber である．

気になる人は藤野先生の本 [Fuj20] 参照[21] 今の所次の場合に成り立つ．

- $\dim Z = 1$ Kawamata, $\dim Z = 2$ Junyan Cao
- $\kappa(K_Z) = \dim Z$ Viehweg, Kollar?
- Fiber が good Minimal model を有する場合．Kawamata? Kollar? / (Fujino?)
- $q(Z) = \dim Z$ Cao-Paun, Hacon-Popa-Schnell, Juanyong Wang...

[Cam04a] の設定は $\kappa(K_Z) = \dim Z$ の場合に対応している．ただよくわからなかった．[22]パッと見た感じ [Wan21] の方が読みやすし，必要なものは証明されていると思う．

4.2 Orbifold conjecture $C^{\mathrm{orb}}_{n,m}$

一応原文そのままに主定理だけを述べておく．

Theorem 4.2. *[Cam04a, Theorem 4.2] $C^{\mathrm{orb}}_{\mathrm{gt}}$ conjecture Y, Z を複素多様体 in Fujiki class, $g : (Y/H) \to Z$ fibration, Z は projective とする．*
g は prepared かつ high かつ general type，すなわち

$$\kappa\big(Z/\Delta(g, H)\big) = \dim(Z)$$

であると仮定する．このとき

$$\kappa(Y/H) = \kappa((Y/H)_z) + \dim(Z)$$

[21]藤野先生のホームページに”飯高予想”に関する集中講義のノートがある．https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~fujino/sonota.html

[22]仮定の”high”ってなんなんだとなった

が成り立つ．ここで $z \in Z$ は一般点であり，$(Y/H)_z := (Y_z/H_z)$ である．

"high "に関しては [Cam04a, Section 1] を参照．一般的な用語ではない．今後必要な定理だけを抽出する．

Corollary 4.3. *[Cam04a, Corollary 4.6] X, Y, Z を複素多様体 in Fujiki class, $f : X \to Y$ $g : Y \to Z$ を fibration とする．もし $g \circ f$ が general type であれば，*

$$\kappa(Y, f) = \kappa(Y_z, f_z) + \dim(Z)$$

が成り立つ．

Corollary 4.4. *[Cam04a, Corollary 4.7] Y, Z を複素多様体 in Fujiki class, $g : Y \to Z$ を fibration とする．もし g が general type であれば，*

$$\kappa(Y) = \kappa(Y_z) + \dim(Z)$$

が成り立つ．

5 5. Geometric consequences of additivity

5.1 Varieties with $\kappa = 0$ [Cam04a, 5.1]

Theorem 5.1. *[Cam04a, Theorem 5.1] X を複素多様体 in Fujiki class とする．$\kappa(X) = 0$ ならば X は special である．*

Proof. X が special でないとして矛盾を示す．general type fibration $f : X \to Y$ で $\dim Y > 0$ のものがあるとする．4.4 より

$$\kappa(X) = \kappa(X_y) + \dim(Y)$$

となる．これは $\kappa(X) = 0$ と $\dim Y > 0$ に矛盾する． □

Remark 5.2. [Cam04a, Remark 5.2] $\kappa(X) = 0$ のとき X は Bogomolov sheaf を持たないことがわかる．[Cam] では，$\kappa^+(X) := \sup\{\kappa(X, F) \mid F \subset \Omega^p_X\}$ として，

$$\kappa^+(X) = 0 \Rightarrow \kappa(X) = 0 \ ??$$

となると期待されている.[23]なお $c_1(X)=0$ かつ X が Kähler なら Yau の結果から正しい.

5.2 The Albanese map [Cam04a, 5.2]

Definition 5.3. [Cam04a, Definition 9.26] X を複素多様体 in Fujiki class とする. X が *weakly-special*(w-special) であるとは, 任意の finite étale 被覆 $u: X' \to X$ について, X' がいかなる正の次元の general type Y' への dominant meromorphic map $f': X' \dashrightarrow Y'$ を持たないことを言う.

Proposition 5.4. *[Cam04a, Proposition 5.3] X を複素多様体 in Fujiki class とする. X が special ならば, Albanese 写像 $\alpha_X: X \to \mathrm{Alb}(X)$ は全射かつファイバー連結である. またこの主張は X が weakly-special でも正しい.*

Remark 5.5. [Cam04a, Propsition 5.3] では「余次元 1 の multiple fiber を持たない. すなわち $\Delta(\alpha_X)=\emptyset$ である」ということも示されていたが, 後に gap があることがわかった. [24] X が projective の場合は正しい, Kähler のときは不明.

Proof. 以下 X を weakly special と仮定して証明する. $\alpha := \alpha_X$ が全射でないと仮定する. $Z \subset \mathrm{Alb}(X)$ を像とする.

[Uen75, Theorem 10.9](下の定理参照) により, general type W への fibration $g: Z \to W$ が存在する. $g \circ \alpha: X \to W$ の Stein 分解 $X \to W' \to W$ を取ると, $W' \to W$ は finite なので, W' も general type である. よって $X \to W'$ は general type W への fibration となり, X は weakly special なので $\dim W = 0$ となる.

よって Z は subtorus になり, Albanese map の普遍性より $\mathrm{Alb}(X) \to Z$ という写像が唯一に存在する. しかし $\mathrm{Alb}(X) \to Z \hookrightarrow \mathrm{Alb}(X)$ が identity map になって矛盾する. [25]よって α は全射であり $Z = \mathrm{Alb}(X)$ である.

次に $\alpha = \beta \circ \alpha'$ を Stein 分解とする. ここで $\alpha': X \to A'$ はファイバー連結で, $\beta: A' \to \mathrm{Alb}(X)$ は有限である. Kawamata–Viehweg の議論 ([Wan21, Proposition 4.1] 下参照) により, X が weakly special なので, A' は complex torus になり, $A' \to A$ は etale となる. よって Albanese map の普遍性より $A' \to A$ は双正則になり, α はファイバー連結である. □

Theorem 5.6. *[Uen75, Theorem 10.9] B を complex torus A の subvariety とする. このとき $\kappa(B) \geq 0$ である subtorus $A_1 \subset A$ と projective variety W で Abelian variety の subvariety となるものが存在して*

[23]おそらくその期待は Campana だけだと思うが... ただ面白そうなのでこの pdf にも補足として残しておいた
[24]https://arxiv.org/pdf/2109.07147 参照.
[25]背理法を使わず $Z = \mathrm{Alb}(X)$ となることを言った方が良かったかもしれない

1. $B \to W$ は正則ファイバー束で *fiber* が A_1 となる.
2. $\kappa(W) = \dim W = \kappa(B)$.

となるものが存在する. さらに B が *algebraic variety* ならば, *finite etale* $\tilde{B} \to B$, $\tilde{W} \to W$ があって, $\tilde{B} \cong A_1 \times \tilde{W}$ となる.

Proposition 5.7. *[Wan21, Proposition 4.1]* $p : V \to T$ を *finite* 射で V をコンパクト *normal* 解析空間, T を *complex torus* とする.
このとき $\kappa(V) \geq 0$ であり, ある *subtorus* $S \subset T$, *(projective) normal variety general type* W で T/S 上で *finite* なものがあって次を満たす.

1. *fibration* $\phi_p : V \to W$ であって *general fiber* は $\tilde{S}$ である. ここで $\tilde{S}$ は *complex torus* で $\tilde{S} \to S$ という *finite étale cover* を有する.
2. $\kappa(W) = \kappa(V) = \dim W$.

5.3 The decomposition theorem [Cam04a, 5.4]

"本論文の大部分を動機づける主張は次の通りである" [26]

Theorem 5.8. *[Cam04a, Theorem 5.8]* X を複素多様体 *in Fujiki class* とする. X が *non-special* なら, c_X は *general type fibration* である.

よって任意の多様体は X は core map によって

- core map のファイバー (special 多様体)
- core map の base の log general type $(C(X)/\Delta(c_X))$

に分解される. (これが分解定理である) どんな $X \in \mathcal{C}$ に対しても special かつ general type となる fibration を持ち, これは唯一であり, core map である.

Proof. $d := \mathrm{ess}(X)$ に関する帰納法. $d = 0$ は X は special なので 3.7 より明らか.

$d > 0$ とする. X が non-special なので, general type fibration $f : X \dashrightarrow Y$ がある.2.5 より, c_X が special fibration より

$$f = \psi \circ c_X$$

という分解がある. $\psi : C(X) \dashrightarrow Y$ である. 3.13(3) より, general fiber $y \in Y$ について, $c_X|_{X_y} : X_y \dashrightarrow C(X)|_{X_y}$ は X_y の core map である. 帰納法によりその一般ファイバーは general type

[26] [Cam04a] の文章をそのまま載せた.

fibration である．よって, 4.3 より

$$\kappa(X, x_X) \underset{4.3}{=} \kappa(X_y, c_X|_{X_y}) + \dim(Y) \underset{c_X|_{X_y} \text{ gen. type}}{=} \dim(X_y) + \dim(Y) = \dim X$$

となるので, c_X は general type fibration である． □

いくつかの Corollary を示す．

Theorem 5.9. *[Cam04a, Theorem 5.10] X を複素多様体 in Fujiki class, $a_X : X \to \mathrm{Alg}(X)$ を algebraic reduction とする．すると c_X は*

$$c_X = \phi \circ a_X$$

と分解するような $\phi : \mathrm{Alg}(X) \dashrightarrow C(X)$ をもつ．特に $C(X)$ は Moishezon である．

[Cam04a, Theorem 2.39] により, a_X の一般ファイバーは special であるためである．最後の主張は [GPRG94, Chapter 7 Proposition 6.12] より.(Moishezon の全射は Moishezon)

Theorem 5.10. *[Cam04a, Theorem 5.5] X を複素多様体 in Fujiki class とする．$\mathrm{ess}(X) = \dim(X)$ であることと X が general type であることは同値である．*

Proof. $\mathrm{ess}(X) = \dim(X)$ であるとすると, $\Delta(c_X) = 0$ なので, $C(X)$ が general type になる．逆は 3.15 より． □

Theorem 5.11. *[Cam04a, Theorem 5.7] X を複素多様体 in Fujiki class とする．$n := \dim X > 0$ とするとき, $\mathrm{ess}(X) = n - 1$ であることは, 以下の 2 つのいずれかが成立することと同値である．*

(a) $\kappa(X) = n - 1$ かつ J_X は general type fibration である．

(b) X の rational quotient $R(X)$ は $n - 1$ 次元で general type である．

Proof. $\mathrm{ess}(X) = n - 1$ とする．$c_X : X \dashrightarrow C(X)$ が $n - 1$ 次元の像をもつとする．一般ファイバー F は special 曲線で, 従って有理曲線または楕円曲線である．

F が有理曲線なら, MRC fibration r_X が c_X を通るので $C(X) = R(X)$ である．よって 5.9 から $R(X)$ は $n - 1$ 次元の Moishezon である．よって 3.24 より, $R(X) = C(X) = C(R(X))$ なので, $R(X)$ は general type である．

F が楕円曲線なら, Iitaka mapJ_X が c_X を通るので, $c_X = J_X$ である．特に general type fibration である．また X は general type ではないので, $\kappa(X) = n - 1$ が確定する． □

5.4 Finite étale covers [Cam04a, 5.5]

Theorem 5.12. *[Cam04a, Theorem 5.12]* X を複素多様体 *in Fujiki class* とし, $u : X' \to X$ を *finite étale* 被覆とする．$c_u : C(X') \dashrightarrow C(X)$ を誘導される写像とする．このとき c_u は

$$C(X') \dashrightarrow C(X)$$

の上にある被覆である.*(*つまり *generically finite* である*)*
特に *finite etale* 被覆のもとで $\mathrm{ess}(X)$ は不変であり, *special* 多様体 の *finite étale* 被覆が *special* となる.

Proof. $u : X' \to X$ が Galois で, その Galoins 群を G と仮定する．その core map の一意性から, $c_{X'}$ は G-equivariant になる．$h' : C(X') \dashrightarrow Y$ を G-quotient とする．$X' \dashrightarrow C(X')$ を用いて, G-invariance から自然な写像 $h : X \dashrightarrow Y$ を 得る．$h : X \dashrightarrow Y$ の fiber は X' の special 多様体の像なので, 2.7(1) より special である．よって 0.10 から

$$v : Y \dashrightarrow C(X)$$

で $c_X = v \circ h$ となるものが存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[r, dashed, "c_{X'}"] \arrow[d, "u"'] & C(X') \arrow[d, dashed, "c_u \text{ fin. etale } /G"] \arrow[dll, dashed, "h'"'] \\
Y \arrow[rr, dashed, bend right, "v"'] & X \arrow[l, dashed, "h"] \arrow[r, dashed, "c_X"] & C(X)
\end{tikzcd}$$

5.8 より, $c_{X'}$ は general type の fibration である．そして 1.14(2) から u が etale なので, $h : X \dashrightarrow$ も general type である．$c_X : X \dashrightarrow C(X)$ は special fibration なので, 2.5 より

$$w : C(X) \to Y$$

が存在して, $h = w \circ c_X$ を満たす．以上より $Y = C(X)$ であり, $h = c_u$ は (generically に) finite となる． □

5.5 Essential and Bogomolov dimensions [Cam04a, 5.6]

Definition 5.13. [Cam04a, Definition 5.13] X を複素多様体 in Fujiki class とする.

$$B(X) := \max\{p > 0 \mid \Omega_X^p \text{ の部分層として Bogomolov sheaf } F \subset \Omega_X^p \text{ が存在する }\}$$

と定める. Bogomolov sheaf が存在しないときは $B(X) := 0$ とする.

Corollary 5.14. *[Cam04a, Corollary 5.14, 5.15] X を複素多様体 in Fujiki class とするとき, $\mathrm{ess}(X) = B(X)$ である. さらにそれは core map によって max が達成される.*

Proof. F を X 上の次元 $p > 0$ の Bogomolov sheaf とする. これに付随する fibration は general type であり, 2.5 から c_X を通る. よって $\mathrm{ess}(X) \geq p$ である.

逆に, c_X が general type の fibration であるため, その Bogomolov sheaf の次元は $p = \mathrm{ess}(X)$ となる. 以上より等式が従う. □

5.6 Construction of the core as the highest general type fibration [Cam04a, 5.7]

Core map の構成は以下のように構成することもできる. ([Voi] はこの方法で紹介されていた.)

Theorem 5.15. *[Cam04a, Theorem 5.16] X を複素多様体 in Fujiki class とする. このとき X は general type かつ special な fibration を持つ. この fibration は同値を除いて一意であり, X の core である.*

この構成は"general type の fibration $f : X \to Y$ で $\dim Y$ が最大なもの"として core map を構成する.

Proof. general type かつ special な fibration が存在したら, それは 2.10 から唯一である. よって存在のみを示せば良い.

$\dim(X) = n$ に関する帰納法. もし X が special であれば, 定数写像が core map である. そうでなければ, general type fibration $f : X \to Y$ が存在し, その中で $\dim(Y)$ が最大のものを取る.

もし f の general fiber が special であることを示す. そうでない場合と仮定すると. relative core を構成できる.[27]

$$h : X \to Z \quad g : Z \to Y \quad s.t \quad f = g \circ h$$

[27] [Voi] にもそう書いてあったが, これ大丈夫なのかがわからん. 帰納法で"relative core の存在"も仮定している??

となる分解で, general fiber X_y について $h_y : X_y \to Z_y$ は X_y の core map になるものが存在するこれは帰納法の仮定から, general type fibration である.

4.3 より, h 自体が general type の fibration となる. しかし $\dim(Z) > \dim(Y)$ となるため, $\dim(Y)$ が最大性に矛盾. よって f の general fiber が special である. □

6 6 The decomposition of the core.

さっぱりわからなかった. [CW15] を引用すると次のとおり.

Conjecture 6.1. *[CW15, Conjecture 2.4]* X を複素多様体 *in Fujiki class* とする. このとき $c_X = (J \circ r)^{\dim X}$ となる. ここで

- J *Orbifold version of Moishezon map (Iitaka map* の一種*)*
- r *(orbifold??) Rational quotient*

とする. 特に *special* 多様体は $\kappa = 0$ と $\kappa_+ = 0$ で構成される. ここで

$$\kappa_+(X) := \sup\{\kappa(X, \det \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \subset \Omega^p_X \textit{ coherent subsheaf}\}$$

とする.

Theorem 6.2. *Orbifold version of Iitaka Conjecture* が成り立つならば, *6.1* も成り立つ.

Campana の講演動画を見たときには以下のように言っていた

- $X \dashrightarrow R(X)$ の rational quotient (MRC fibration) をとる. $K_{R(X)}$ psef である.
- $K_{R(X)}$ が effective であるとする[28]. すると $R(X) \dashrightarrow J(R(X))$ を Iitaka map とする.

これを繰り返すと core map が得られるという議論である. あっているかがわからない.

ちなみに (orbifold??) Rational quotient に近いものとして Slope rationally connected[29] というものもあるがこれもあっているかがわからない.

ただ最近になってある程度はわかっているようである. 以下を参照のこと.

- Qile Chen, Brian Lehmann, Sho Tanimoto Campana rational connectedness and weak approximation https://arxiv.org/abs/2406.04991
- Enhao Feng, Sara Mehidi Campana separable rational connectedness of toric orbifold https://arxiv.org/abs/2511.22545

[28] ただし大予想である nonvanishing conjecture が解けていると仮定する

[29] https://arxiv.org/abs/1607.07829

7 7. The fundamental group.

7.1 The abelianity conjecture. [Cam04a, 7.1]

Conjecture 7.1 (Abelianity conjecture [Cam04a, Conjecture 7.1]). *X を special とする．このとき $\pi_1(X)$ は almost (virtually) abelian である．*

群が almost (virtually) abelian であるとは, 有限指数の abelian 部分群を持つことをいう．

abelianity conjecture に関しては以下の通り．この予想は多分かなり難しいので解けたら大結果だと思う．

Example 7.2. [Cam04a, Example 7.2]

1. $\dim X \leq 2$ 分類により正しい
2. Rationally connected 多様体．そもそも基本群が自明だから．
3. $c_1(X) = 0$ の多様体の場合 Beauville-Bogomolov 分解により正しい．
4. $a(X) = 0$ or $\kappa(X) = 0$. これらも $\pi_1(X)$ は almost (virtually) abelian であると予想されている．よってこれらは abelianity conjecture の一部である．
5. Orbifold rationally connected の場合． [Cam04a] のときはこの場合は基本群が自明だと予想されていた． これは最近進展があった． Brian-Lehmann さんたちが解決したっぽい． Eric Jovinelly, Brian Lehmann, Eric Riedl Free curves and fundamental groups https://arxiv.org/abs/2510.27031 参照のこと．
6. $-K_X$ nef または T_X psef. これも正しい．構造定理からわかる．[30]
7. (別の)Iitaka conjecture "$\mathbb{C}^n \to X$ という etale covering が存在するとき, X は (finite etale cover を除いて)complex torus である"に関連がある． この予想は, "$\mathbb{C}^n \to X$ という etale covering が存在するならば $\pi_1(X)$ が virtually abelian である" という予想と同値である．よって abelianity conjecture の一部になる．

7.2 Linear and solvable quotients. [Cam04a, 7.2]

Theorem 7.3. *X を複素多様体 in Fujiki class とする．X が weakly special であると仮定する．$\pi_1(X)$ が torsion-free かつ virtually nilpotent であるとき, $\pi_1(X)$ は virtually abelian である*

鍵となるのは 5.4 による"Albanese map が全射かつファイバー連結"であることである．

[30] $-K_X$ nef ならば基本群が almost (virtually) abelian は Paun の結果と Campana の結果を合わせてもわかる．

Proof. [Cam95] の議論による. [Voi, Theorem 3.23] を参考にした.

finite etale 被覆をとって, $\pi_1(X)$ を nilpotent だと仮定して良い. $\alpha : X \to A$ を Albanese map とする.

- $\alpha_* : \pi_1(X) \to \pi_1(A)$ は全射になる. というのも $\phi : X \to A$ がファイバー連結なので (7.4(1) 参照)
- $\alpha_* : H_1(X, \mathbb{Z}) \to H_1(A, \mathbb{Z})$ は全射かつ, finite kernel である. これは Albanese map の性質から
- $\alpha^* : H^2(A, \mathbb{Q}) \to H^2(X, \mathbb{Q})$ 単射である. (7.4(2) 参照)

$H := \pi_1(A) = \mathbb{Z}^{2k}$ とおく.

$$n : H^2(H, \mathbb{Q}) = H^2(\mathbb{Z}^{2k}, \mathbb{Q}) \to H^2(A, \mathbb{Q})$$

という (全) 単射が存在することを示す. $E_H \to B_H = E_H/H$ を H の分類空間とする.[31] E_H は可縮である. すると普遍被覆 $\mathbb{C}^k \to A$ が主 H 束なので, $A \underset{\text{homeo}}{\cong} (\mathbb{C}^k \times E_H)/H$ である. そこで

$$u : A \underset{\text{上の同型}}{\to} (\mathbb{C}^k \times E_H)/H \underset{\text{射影}}{\to} E_H/H = B_H$$

とおく. そして n を以下で定める.[32]

$$n := u^* : H^2(B_H, \mathbb{Q}) \to H^2(A, \mathbb{Q}) (= H^2((\mathbb{C}^k \times E_H)/H, \mathbb{Q}))$$

今の場合 $E_H = \mathbb{R}^{2k} \to B_H = (S^1)^{2k}$ であるので, $A \to B_H$ は $\mathbb{C}^k/\mathbb{Z}^{2k} \to (S^1)^{2k}$ のように複素 torus の複素構造を忘れて, $(S^1)^{2k}$ とみなした写像 (恒等写像) に等しい. よって全単射となる.

よって $\alpha_* : H_1(X, \mathbb{Q}) \to H_1(A, \mathbb{Q})$ は単射なので上と合わせて

$$H_2(X, \mathbb{Q}) \underset{\alpha_*}{\to} H_2(A, \mathbb{Q}) \underset{n=u^*}{\to} H_2(H, \mathbb{Q})$$

は全射の合成で全射になる. $G = \pi_1(X)$ とすると以下の可換図式が成り立つ:

$$\begin{array}{ccc} H_2(X, \mathbb{Q}) & \underset{\alpha_*}{\longrightarrow} & H_2(A, \mathbb{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_2(G, \mathbb{Q}) & \underset{\alpha_*}{\longrightarrow} & H_2(H, \mathbb{Q}) \end{array}$$

よって $H_2(G, \mathbb{Q}) \to H_2(H, \mathbb{Q})$ も全射である. 以上より

- $\alpha_* : H_1(G, \mathbb{Q}) \to H_1(H, \mathbb{Q})$ 同型.

[31] http://pantodon.jp/index.rb?body=BG 参照. 任意の位相空間 X 上の主 H 束 $E \to X$ について, ある連続写像 $h : X \to B_H$ が存在して, h^*E_H と E は同相になる. 例えば $H = \mathbb{Z}$ なら $\mathbb{R} \to S^1$ がそれに当たる.

[32] ここは [Voi, Theorem 3.23] に合わせた. [Voi, Theorem 3.23] ではもっと一般の状況を考えている.

- $\alpha_* : H_2(G,\mathbb{Q}) \to H_2(H,\mathbb{Q})$ 全射.

であるので,$\pi_1(X), \pi_1(A)$ ともに nilpotent であるから, 7.5 より

$$G = \pi_1(X) \to \pi_1(A) = H$$

は有限の kernel を持つ.(全射であることは前から言えてる) □

使った定理をまとめておく.

Lemma 7.4. *[Voi, Lemma 1.2] $f : X \to Y$ は proper で次を満たす.*

1. $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ について, $f_*(\pi_1(X)) \subset \pi_1(Y)$ は *finite index* を持つ. さらにファイバー連結ならば, $f_*(\pi_1(X)) = \pi_1(Y)$
2. $f^* : H^i(Y,\mathbb{Q}) \to H^i(X,\mathbb{Q})$ は *Hodge* 構造における単射である.
3. 一般ファイバー X_s が連結かつ, 任意の $i > 0$ で $H^0(X_s, \Omega^i_{X_s}) = 0$ ならば, $f^* : H^0(Y, \Omega^i_Y) \to H^0(X, \Omega^i_X)$ は $i \geq 0$ で同型である.

Lemma 7.5. *[Voi, Lemma 3.24][Wan22, Proposition 6.2]* $\alpha : G \to H$ を有限生成群の準同型とする. $H_1(G,\mathbb{Q}) \simeq H_1(H,\mathbb{Q})$ 同型かつ, $H_2(G,\mathbb{Q}) \twoheadrightarrow H_2(H,\mathbb{Q})$ 全射ならば, 任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ について, $G/G_n \to H/H_n$ は *finite kernel and cokernel* を持つ.

群 Γ について, n-th lower central series を $\Gamma_n = [\Gamma, \Gamma_{n-1}]$ とする.

以上より次が言える.

Theorem 7.6. *[Cam04a, Corollary 7.7, 7.8, 7.10]* X を複素多様体 *in Fujiki class* かつ *weakly special* とする.

1. $\mu : \pi_1(X) \to G$ が群の全射準同型で, G が *solvable* かつ *torsionfree* であるとする. このとき G は *virtually abelian* である. すなわち, $\pi_1(X)$ の *torsionfree* な *solvable* 商は *almost abelian* である.
2. $\rho : \pi_1(X) \to Gl(N,\mathbb{C})$ を線形表現とする. すると $G := \mathrm{Image}(\rho)$ は *virtually abelian* である. すなわち, $\pi_1(X)$ の線形商は *almost abelian* である.
3. $\pi_1(X)$ が線形（すなわち忠実な線形表現を持つ）ならば, $\pi_1(X)$ は *almost Abelian*

特に *special* ならば *weakly special* なので, 上が成り立つ.

Proof. (1) $\pi_1(X) = G$ のときを証明する[33] $\pi_1(X)$ が solvable だと Arapura-Nori 97 の結果によって virtually nilpotent である．よって 7.3 より almost Abelian である．

(2) G' を G の Zariski closure とする. 適当な étale 被覆で X を置き換えることにより, G' が connected であると仮定してよい. すると群の完全列

$$1 \longrightarrow R \longrightarrow G' \longrightarrow S \longrightarrow 1$$

を持ち, ここで S は semi-simple, R は solvable である.

$S = 1$, つまり G が solvable であることを示す． S が自明でないとすると, [CCE15] によって $\rho' = \sigma \circ \rho : \pi_1(X) \to S$ による Shafarevich map[34]

$$\mathrm{Sha}_{\rho'} : X \dashrightarrow W$$

に関して W が general type になる．これは X が weakly special に矛盾する.

G が solvable であり, 適当な finite étale 被覆を取ることで torsionfree となるので (1) よりいえた.
(3) は (2) の特別な場合である. □

Theorem 7.7. *[Cam04a, Theorem 7.11, 7.12] X を複素多様体 in Fujiki class とする.*
$\mathbb{C}^n \to X$ という全射 etale map が存在と仮定する.
もし $\pi_1(X)$ が solvable か線形であるならば, X は finite etale 被覆で持ち上げると, 複素トーラスになる.

Proof. 8.4 より, X は special であることがわかる．(もしくは [KO75] から weakly special であることがわかる.) よって 7.6 より $\pi_1(X)$ almost abelian である．finite etale 被覆で持ち上げて, $\pi_1(X)$ Abelian と仮定して良い． $\alpha : X \to A$ を X の Albanese 写像とすると, 全射かつ ファイバー連結である.

まず α の一般ファイバーが 0 次元であることを示す．背理法. $\dim(F) > 0$ と仮定し, $i : F \hookrightarrow X$ とする. $\mathbb{C}^d$ は正の次元をもつコンパクト部分多様体を含まないので,

$$\mathrm{image}(i_* : \pi_1(F) \to \pi_1(X)): \text{無限}$$

となる. $\pi_1(X)$ が abelian であるので

$$\mathrm{image}(i_* : H_1(F, \mathbb{Z}) \to H_1(X, \mathbb{Z})): \text{無限}$$

[33] 一般の場合はおそらく 7.3 最後だけ変わるんだと思う．つまり最後の議論から $\pi_1(X)$ の nilpotent completion $\pi_1(X)_{\mathrm{nil}}$ が $\cong \mathbb{Z}^{2k}$ と同型になる．よって $\pi_1(X)_{\mathrm{nil}} \twoheadrightarrow G$ により G は Abel となる.
[34] Shafarevich map に関しては [Voi] 参照.

であることもわかる．よって dual を取って Hodge 分解して (ここに Fujiki を使う), 制限写像

$$i^* : H^0(X, \Omega_X^1) \longrightarrow H^0(F, \Omega_F^1)$$

が零でない．しかしこれは F が α のファイバーであるという事実と矛盾する．実際 $\alpha^* : H^0(A, \Omega_A^1) \to H^0(X, \Omega_X^1)$ は α が全射なので次元が一緒なことから全単射になり，$\alpha^*\omega|_F = 0$ となるためである．

以上より $\dim(F) = 0$ なので, α は birational となる．α が同型でなければ $\alpha^{-1} : A \dashrightarrow X$ を考えれば, X は有理曲線 $f : \mathbb{CP}^1 \to X$ を含むことになる．この f は $C \to \mathbb{C}^d$ に持ち上がるが, これは定数になり矛盾する． □

Remark 7.8. X をコンパクト Kähler 多様体とする．この辺りの話は以下の Shafarevich map と関係している

Conjecture 7.9 (Shafarevich Conjecture). *X の普遍被覆は正則凸か?*

これに関しては高山先生のサーベイ を参照.[35]

$\pi_1(X)$ が linear なら解決している．projective ならば [EKPR12], コンパクト Kähler なら [CCE15] である．

この辺りの話は quasi-projective の場合に関して Ya Deng さんと山ノ井先生が最近いろんな論文を出している．

- Hyperbolicity and fundamental groups of complex quasi-projective varieties https://arxiv.org/abs/2212.12225
- Reductive Shafarevich Conjecture https://arxiv.org/abs/2306.03070
- Linear Shafarevich Conjecture in positive characteristic, Hyperbolicity and Applications https://arxiv.org/abs/2403.16199

quasi-projective の場合の Shafarevich conjecture に関しては, $\pi_1(X)$ が linear なら X の普遍被覆が正則凸の Zariski open set になることがわかっている．[36]

[35]"A SURVEY ON VARIETIES WITH LARGE FUNDAMENTAL GROUPS" https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/items/6e8ed648-5783-4277-9975-513010993e49

[36]Benjamin Bakker, Yohan Brunebarbe, Jacob Tsimerman "The linear Shafarevich conjecture for quasiprojective varieties and algebraicity of Shafarevich morphisms" https://arxiv.org/abs/2408.16441 参照のこと．

8 8. An orbifold generalisation of Kobayashi-Ochiai's extension theorem

8.1 Kobayashi-Ochiai の定理

古典的な Kobayashi-Ochiai の定理は次のとおり．[KO75] または [Kob98, Theorem 7.5.1] を参照.

Theorem 8.1. *[KO75] X, Y を コンパクト 解析空間とする. Y が general type であるならば X から Y への 全射 meromorphic map 全体の集合は有限である.*

Y が general type であるとは resolution $\widetilde{Y} \to Y$ について $K_{\widetilde{Y}}$ が big であるということである.

Theorem 8.2. *X を 解析空間, $A \subset X$ を部分解析空間とする. Y を general type の n-次元 コンパクト 解析空間とする．このとき, 最大階数 n をもつ任意の meromorphic map*

$$f\colon X \setminus A \dashrightarrow Y$$

は, meromorphic map $f\colon X \dashrightarrow Y$ へと延長される.

meromorphic map が最大階数 n をもつとは．f が $X \setminus A$ のある点において正則写像になり, かつその微分 (ヤコビ行列) が階数 n であることを言う．これは f が dominant であることと同値である．f が nondegenerate(非退化) ともいう.

Corollary 8.3. *X, Y を コンパクト 解析空間, $A \subset X$ を部分解析空間とする．このとき, 最大階数 n をもつ meromorphic map*

$$f\colon X - A \dashrightarrow Y$$

全体の集合は有限である.

8.2 Statements [Cam04a, 8.1]

以下の定理は Orbifold version of Kobayashi-Ochiai とも言える

Theorem 8.4. *[Cam04a, Theorem 8.2]*

- *V を連結な複素多様体, $D \subset V$ を reduced divisor, $U := V \setminus D$ とする.*
- *X をコンパクトな解析空間で Fujiki class であるとし．$\phi : U \dashrightarrow X$ を meromorphic map とする.*

- $f : X \to Y$ を *fibration* とし, $\psi := f \circ \phi : U \to Y$ が非退化であるとする. *(*つまりある点において正則写像になり, かつその微分 *(*ヤコビ行列*)* が階数 $\dim Y$ となる*)*

もし $f : X \dashrightarrow$ が *general type fibration* であるならば次が成り立つ.

1. $\psi := f \circ \phi : U \to Y$ は *meromorphic* に $\psi' : V \to Y$ へ延長される.
2. 任意の十分大きく割り切れる整数 $m > 0$ とする. 任意の $s \in H^0(Y, m(K_Y + \Delta(f)))$ に対して, $\psi^*(s)$ は $(\psi')^*(s) \in H^0\big(V, (\Omega_V^p)^{\otimes m}((m-1)D)\big)$ へ延長される. 特に

$$\psi^* : H^0(Y, m(K_Y + \Delta(f))) \to H^0\big(V, (\Omega_V^p)^{\otimes m}((m-1)D)\big) \quad s \mapsto \psi^*(s)$$

が考えられ, これは *(*非退化の仮定から*)* 単射である.

これからわかることは次のとおり.

Definition 8.5. [Cam04a, Definition 8.10] 解析空間 X が $\mathbb{C}^d$-dominable であるとは, 非退化な写像 (dominant map) $\phi : \mathbb{C}^d \to X$ が存在すること.

$\mathbb{C}^d$-dominable という用語は Buzzard-Lu の論文 [BL00] から.

Corollary 8.6. *[Cam04a, Corollary 8.11] X をコンパクト normal 解析空間 in Fujiki class とする. X が $\mathbb{C}^d$-dominable ならば special である. 特に Oka 多様体は special である.*

実は dominant meromorphic map $\phi : \mathbb{C}^d \dashrightarrow X$ が存在するでも良い.

Proof. 背理法. X が special でないとすると, general type fibration $f : X \dashrightarrow Y$ で $p := \dim Y > 0$ となるものが存在する. 2.2 およびその下の補足により, Y 上の $\mathbb{Q}$-divisor $\Delta(f)$ があって $\kappa(K_Y + \Delta(f)) = p > 0$ であることを仮定して良い.

$V = \mathbb{CP}^d, D = \mathbb{CP}^{d-1}$ とすると, $U = \mathbb{C}^d$ となる. よって 8.4 から

$$\psi^* : H^0(Y, m(K_Y + \Delta(f))) \to H^0\big(\mathbb{P}^d, (\Omega_{\mathbb{P}^d}^p)^{\otimes m}((m-1)D)\big)$$

と言う単射を得る. よって次を示せば矛盾を得る.

Claim 8.7. $D \subset \mathbb{CP}^n$ を (1 次) の超平面とするとき, 任意の $p, m > 0$ について

$$H^0\big(\mathbb{P}^n, (\Omega_{\mathbb{P}^n}^p)^{\otimes m}((m-1)D)\big) = 0 \text{[37]}$$

[37] Campana の論文では $H^0\big(V, (\Omega_V^p)^{\otimes m}((m-1)D)\big) = 0$ が常に成り立つ pair(V, D) を log RC と呼んでいる. なお"$(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^{n-1})$ が log RC なのは簡単にわかる"と書いてあった.(簡単なのか?)

[claim の証明] $D \sim \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(1)$ であり, D^{n-1} に関する slope μ_D は以下のように計算できる.

$$\begin{aligned}\mu_D\left((\Omega^p_{\mathbb{CP}^n})^{\otimes m}((m-1)D)\right) &\underset{\text{slope の加法性}}{=} \mu_D\left((\Omega^p_{\mathbb{CP}^n})^{\otimes m}\right) + \mu_D((m-1)D)) \\ &\underset{D^n=1}{=} m\mu_D(\Omega^p_{\mathbb{CP}^n}) + m - 1 \\ &\underset{\text{cf. [Iwa21, Prop. 4.2]}}{=} -m\frac{p(n+1)}{n} + m - 1 < 0\end{aligned}$$

また今 $\mathbb{CP}^n$ は KE 計量を持つので $(\Omega^p_{\mathbb{CP}^n})^{\otimes m}((m-1)D)$ は D-semistable である.

一般に ample 直線束 A について, E が A-semistable vector bundle かつ $\mu_A(E) < 0$ ならば $H^0(X, E) = 0$ である (例えば [Kob14, Chapter 5] 参照) よって言えた.

最後の主張は Oka 多様体ならば $\mathbb{C}^d$-dominable である事実から来ている. □

8.3 Sketch of proof of the Kobayashi – Ochiai's extension theorem. [Cam04a, 8.1]

証明は [KO75] と同じようにやるらしい. ただ現時点で [KO75] の証明もよくわかっていないです. 理解できたら書いていきます...

おそらく $X = \mathbb{D}^n$ 単位円盤の直積, $A = \mathbb{D}^{n-1} \times \{0\}$ と仮定するはずである. (余次元 2 以上なら勝手に拡張する) $\mathbb{D}^n \setminus \mathbb{D}^{n-1} \times \{0\} \to Y$ に関して次の補題を使うはずである. (詳しくは [Kob98, Theorem 7.5.1] 参照)

Lemma 8.8. *[Kob98, Lemma 7.5.8]* $f(z) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_q z^q$ が *punctured disk* $D^* = \{0 < |z| < 1\}$ 上で正則かつ, ある正の整数 m があって,

$$\int_{D^*} |f(z)|^{2/m}\, dxdy < \infty$$

が成り立つとする. このとき, $q \leq -m$ について $a_q = 0$ である.

8.4 での $(\Omega^p_V)^{\otimes m}((m-1)D)$ の $m-1$ は上の補題から来ている. (高々 $m-1$ 位の極しか持たないと言うこと)

9 Relationships with arithmetics and hyperbolicity +おまけ

ここは予想ばっかりなので, 適当に読んでいいと思う. [Voi] のサーベイの方がうまくまとめれらていたのでそっちを引用する.

Conjecture 9.1 ([Cam04a, 9.2, 9.8, 9.5 and 9.20]). *X をコンパクト 複素多様体 in fujiki class としたとき，次は同値か？*

1. *special.*
2. *Kobayashi pseudo-metric $d_{kob,X}$ は常に 0*
3. *entire curve $h : \mathbb{C} \to X$ で Zariski-dense なものが存在．(Zariski dence entire curve の存在)*
4. *entire curve $h : \mathbb{C} \to X$ で metrically dense なものが存在．*
5. *任意の二つの一般点が entire curve で結べる*
6. *任意の可算集合がある entire curve の像にふくまれる*
7. *X が $\mathbb{C}$-connected. つまり任意の $a, b \in Y$ に対し，有限個の $f_j \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, Y)$, $j = 1, \ldots, m$ で*

$$a \in f_1(\mathbb{C}), \quad b \in f_m(\mathbb{C}), \quad f_j(\mathbb{C}) \cap f_{j+1}(\mathbb{C}) \neq \emptyset, \quad j = 1, \ldots, m-1$$

となるものが存在する．

上はかなり難しいので解けたり反例があれば大結果だと思う.[38] なお X が RC だとある程度わかっている．[CW23] 参照．

Conjecture 9.2 (Arithmetic analog). *X projective variety /number field K. 次は同値*

1. *$X_{\mathbb{C}}$ は special ($X_{\mathbb{C}}$ は Spec$\mathbb{C} \to$ Spec$K$ によって base change したもの)*
2. *X potentially dense, つまりある有限拡大 k/K があって，$X(k)$ は Zariski dense*

9.2 に関しては最近進展があった．この予想は Weakly special (5.3) だと正しくなさそうである．

Finn Bartsch, Frédéric Campana, Ariyan Javanpeykar, Olivier Wittenberg "The Weakly Special Conjecture contradicts orbifold Mordell, and thus abc" https://arxiv.org/abs/2410.06643 と言う論文によると

number field 上の ABC 予想を仮定すると，weakly special だが，X が potentially dense でない例が存在する

と言うことである．ただ Weakly special だが special ではない例が Bogomolov-Tschinkel[39]にあるので，予想 9.2 自体に反例があるわけではない

[38] "Zariski dence entire curve ⇒ special or weakly special" が解けたら，Green-Griffith-Lang 予想が解ける．なので上は解くのがほぼ無理な予想だと思う．

[39] https://arxiv.org/abs/math/0303044

なお上の予想は小林双曲性関連の予想と対応している. [40]

Conjecture 9.3. X を射影多様体とする.

- *(Green-Griffith) X general type* ならば任意の $f:\mathbb{C}\to X$ について代数退化 *($\overline{f(\mathbb{C})}^{zar}\neq X$)* である?
- *(Lang) X general type* ならば, ある真の部分代数的集合 $Z\subsetneq X$ 任意の $f:\mathbb{C}\to X$ について代数退化 *($\overline{f(\mathbb{C})}^{zar}\neq X$)* である?
- *X general type* ならばであることは, 任意の閉部分代数多様体が *general type* であることと同値?
- *(Lang) X projective variety /number field K* とする. $X_{\mathbb{C}}$ が小林双曲的ならば, X_K の K-有理点は有限個である?
- *(Kobayashi?) hyperbolic* ならば *K_X amlple (big)??*

9.1 h-special

[CDY22] を見ていると次の定義があった.

Definition 9.4. [CDY22, Definition 1.11 (h-special)] X を smooth quasi-projective variety とする. 二項関係 $x\sim y$ を $x,y\in X$ が正則写像 $f_1,\dots,f_l:\mathbb{C}\to X$ であって, $Z_i:=\overline{f_i(\mathbb{C})}^{zar}$ としたとき,

$$x\in Z_1, Z_1\cap Z_2\neq\emptyset,\dots,Z_{l-1}\cap Z_l\neq\emptyset, y\in Z_l.$$

が成り立つこととする. $R=\{(x,y)\in X\times X; x\sim y\}$ とする.
X が *hyperbolically special* (h-special) とは $R\subset X\times X$ が Zariski dense であることとして定義する.

$$\text{Zariski dense entire curve がある} \Rightarrow \text{h-special}$$

である. よって [CW23] より rationally connected ならば, Zariski dense entire curves があるので $h$special である.

ところでこの h-special は special と関係あるのだろうか?(どちらかというと $\mathbb{C}$-connected と関係ありそう.) 見た感じ special と似たような性質があることが [CDY22, Section 10] を見るとわかる.

[40] この辺りは山ノ井先生のサーベイ"代数多様体の整正則曲線と Nevanlinna 理論"を参考にした. https://www.jstage.jst.go.jp/article/sugaku/59/4/59_4_353/_article/-char/ja/

References

[BDPP13] Sébastien Boucksom, Jean-Pierre Demailly, Mihai Păun, and Thomas Peternell. The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension. *J. Algebraic Geom.*, 22(2):201–248, 2013.

[BL00] Gregery T. Buzzard and Steven S. Y. Lu. Algebraic surfaces holomorphically dominable by $\mathbf{C}^2$. *Invent. Math.*, 139(3):617–659, 2000.

[Cam]

[Cam95] F. Campana. Remarques sur les groupes de Kähler nilpotents. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 28(3):307–316, 1995.

[Cam04a] Frédéric Campana. Orbifolds, special varieties and classification theory. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 54(3):499–630, 2004.

[Cam04b] Frédéric Campana. Orbifolds, special varieties and classification theory: an appendix. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 54(3):631–665, 2004.

[CCE15] Fréderic Campana, Benoît Claudon, and Philippe Eyssidieux. Représentations linéaires des groupes kählériens: factorisations et conjecture de Shafarevich linéaire. *Compos. Math.*, 151(2):351–376, 2015.

[CDY22] Benoît Cadorel, Ya Deng, and Katsutoshi Yamanoi. Hyperbolicity and fundamental groups of complex quasi-projective varieties, 2022. Preprint. arXiv:2212.12225.

[CW15] Frédéric Campana and Jörg Winkelmann. On the h-principle and specialness for complex projective manifolds. *Algebr. Geom.*, 2(3):298–314, 2015.

[CW23] Frédéric Campana and Jörg Winkelmann. Dense entire curves in rationally connected manifolds. *Algebr. Geom.*, 10(5):521–553, 2023. With an appendix by János Kollár.

[Deb01] Olivier Debarre. *Higher-dimensional algebraic geometry.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[EKPR12] P. Eyssidieux, L. Katzarkov, T. Pantev, and M. Ramachandran. Linear Shafarevich conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 176(3):1545–1581, 2012.

[Fuj20] Osamu Fujino. *Iitaka conjecture—an introduction.* SpringerBriefs in Mathematics. Springer, Singapore, [2020] ©2020.

[GHS03] Tom Graber, Joe Harris, and Jason Starr. Families of rationally connected varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(1):57–67, 2003.

[GPRG94] H. Grauert, Th. Peternell, R. Remmert, and R. V. Gamkrelidze, editors. *Several complex variables VII. Sheaf-theoretical methods in complex analysis*, volume 74 of *Encycl. Math. Sci.* Berlin: Springer-Verlag, 1994.

[HM07] Christopher D. Hacon and James Mckernan. On Shokurov's rational connectedness conjecture. *Duke Math. J.*, 138(1):119–136, 2007.

[IM22] Masataka Iwai and Shin-ichi Matsumura. Abundance theorem for minimal compact Kähler manifolds with vanishing second Chern class, 2022. Preprint. arXiv:2205.10613.

[IMZ23] Masataka Iwai, Shin-ichi Matsumura, and Guolei Zhong. Positivity of tangent sheaves of projective varieties – the structure of MRC fibrations, 2023. Preprint. arXiv:2309.09489.

[Iwa21] Masataka Iwai. On the structure of a log smooth pair in the equality case of the bogomolov-gieseker inequality, 2021. Preprint arXiv:2103.08779 to appear in Annales de l'institut Fourier.

[Keu08] Jonghae Keum. Quotients of fake projective planes. *Geom. Topol.*, 12(4):2497–2515, 2008.

[KM98] János Kollár and Shigefumi Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, volume 134 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti, Translated from the 1998 Japanese original.

[KO75] Shoshichi Kobayashi and Takushiro Ochiai. Meromorphic mappings onto compact complex spaces of general type. *Invent. Math.*, 31(1):7–16, 1975.

[Kob98] Shoshichi Kobayashi. *Hyperbolic complex spaces*, volume 318 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Kob14] Shoshichi Kobayashi. *Differential geometry of complex vector bundles*. Princeton Legacy Library. Princeton University Press, Princeton, NJ, [2014]. Reprint of the 1987 edition [MR0909698].

[Laz04] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. II*, volume 49 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Positivity for vector bundles, and multiplier ideals.

[Ou23] Wenhao Ou. On generic nefness of tangent sheaves. *Math. Z.*, 304(4):58, 2023.

[Ou25] Wenhao Ou. A characterization of uniruled compact Kähler manifolds, 2025. Preprint. arXiv:2501.18088.

[Uen75] Kenji Ueno. *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. Notes written in collaboration with P. Cherenack.

[Voi]

[Wan21] Juanyong Wang. On the Iitaka conjecture $C_{n,m}$ for Kähler fibre spaces. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 30(4):813–897, 2021.

[Wan22] Juanyong Wang. Structure of projective varieties with nef anticanonical divisor: the case of log terminal singularities. *Math. Ann.*, 384(1-2):47–100, 2022.