学祭展示「正多面体・正多胞体」配布用冊子

第 1 部 一般向け / 第 2 部 専門向け

岩井雅崇

2026 年 4 月 28 日

この冊子について

この冊子は, 学祭展示「正多面体・正多胞体」を来場者に配布できるようにまとめたものです. **第 1 部（1, 2 節）**は, 小学生から大人まで読める一般向けの説明で, 模型の見方, 4 次元の入り口をまとめました. **第 2 部（3 節）**は, 数学好きの人や, さらに先まで知りたい人向けの専門的な補足です.

1　一般向け. 正多面体はなぜ特別なのでしょうか

1.1　まずは 5 つの正多面体を見てみましょう

正多面体とは, 面がすべて同じ正多角形でできていて, どの頂点のまわりも同じ見え方をする, とても対称的な立体のことです. 3 次元では, このような立体は次の **5 種類しかありません**.

名前	面の数 F	辺の数 E	頂点数 V
正四面体	4	6	4
立方体（正六面体）	6	12	8
正八面体	8	12	6
正十二面体	12	30	20
正二十面体	20	30	12

やってみましょう

正多面体 5 個を B308 教室のおもちゃ (マジキャップ) を使って作ってみましょう.

1.2　正多面体はなぜ 5 こ？

どの正多角形を使えば正多面体が作れるのかを考えます. 大切なのは, 1 つの頂点のまわりに集まる角の大きさです.

立体になるためには, 1 つの頂点に 3 枚以上の面が集まる必要があります. また, その角度の和が 360° より小さくなければなりません. ちょうど 360° になると, 平らに広がってしまい, 立体として折れ曲がれないからです.

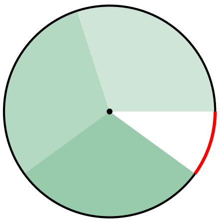
たとえば, 正六角形の 1 つの内角は

$$\frac{(6-2)}{6}180^\circ = 120^\circ$$

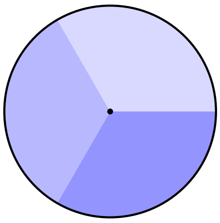
です. これが 3 枚集まると

$$120^\circ \times 3 = 360^\circ$$

となり, ぴったり平らに埋まってしまい, 立体が作れません.



正五角形 3 枚 $108^\circ \times 3 = 324^\circ$
まだすき間があります



正六角形 3 枚 $120^\circ \times 3 = 360^\circ$
平らになってしまいます

したがって, 正六角形だけでは正多面体は作れません. 正七角形以上では 1 つの内角がさらに大きくなるので, やはり正多面体は作れません.

では, 正三角形, 正方形, 正五角形について順に見てみます.

- 正三角形の内角は 60° です. 3 枚集まると 180°, 4 枚集まると 240°, 5 枚集まると 300° です. どれも 360° より小さいので, 立体を作ることができます. しかし 6 枚集まると 360° になり, 平らになってしまいます.
- 正方形の内角は 90° です. 3 枚集まると 270° なので, 立体を作ることができます. しかし 4 枚集まると 360° になり, 平らになってしまいます.
- 正五角形の内角は 108° です. 3 枚集まると 324° なので, 立体を作ることができます. しかし 4 枚集まると 432° となり, 角度が大きすぎるので立体を作れません.

したがって, 可能なのは次の 5 通りだけです.

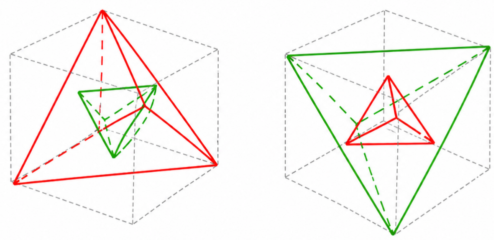
使う正多角形	1 つの頂点に集まる枚数	できる正多面体
正三角形	3 枚	正四面体
正三角形	4 枚	正八面体
正三角形	5 枚	正二十面体
正方形	3 枚	立方体
正五角形	3 枚	正十二面体

このようにして, 正多面体は全部で 5 種類しかないことがわかります.

1.3　双対と Switch Pitch の幾何学

おもちゃの SwitchPitch には, 赤い面と緑の面がそれぞれ 4 つずつあります．この 4 つの面の位置に注目すると, 赤い 4 つの面は正四面体の 4 つの頂点のように並んでいます．同じように, 緑の 4 つの面も別の正四面体の 4 つの頂点のように並んでいます．

SwitchPitch を動かすと, 赤い正四面体が外側に大きく広がるとき, 緑の正四面体は内側に小さく隠れます．反対に, 緑の正四面体が外側に大きく広がると, 赤い正四面体は内側に小さく隠れます．



つまり SwitchPitch は, 赤と緑の 2 つの正四面体が, 互いに入れかわるように動くおもちゃだと見ることができます．

このような関係は, 正多面体の「双対」という考え方と関係しています．正多面体の各面の中心に点を打ち, 隣り合う面の中心どうしを線で結ぶと, 新しい正多面体ができます．このとき, 元の正多面体と新しくできた正多面体は「双対」の関係にあるといいます．簡単にいうと, 双対とは「頂点と面の役割を入れかえる」ような関係です．

- 正四面体は, 双対をとってもまた正四面体になります．つまり正四面体は自分自身と双対です．
- 立方体と正八面体は, 互いに双対です．
- 正十二面体と正二十面体は, 互いに双対です．

SwitchPitch の中で赤と緑の正四面体が入れかわるように見えるのは, 正四面体が自分自身と双対であることと深く関係しています．

1.4　オイラーの多面体定理とは?

多面体では, 頂点の数, 辺の数, 面の数のあいだに, とても不思議な式が成り立ちます．
頂点数を V, 辺の数を E, 面の数を F とすると, 凸多面体ではいつも

$$\text{頂点の数 } V - \text{辺の数 } E + \text{面の数 } F = 2$$

が成り立ちます．これを **オイラーの多面体定理** といいます．

たとえば立方体では

$$V = 8, \qquad E = 12, \qquad F = 6$$

なので,

$$8 - 12 + 6 = 2$$

となります．正四面体でも,

$$4 - 6 + 4 = 2$$

です．正十二面体なら,

$$20 - 30 + 12 = 2$$

です．形がずいぶん違っても, みんな同じ式を満たしています．これがとても面白いところです.

やってみましょう

B308 教室にあるおもちゃを作って多面体を作ってみましょう．その後に次をやってみましょう.

1. まず頂点の数 V を数えます.
2. 次に辺の数 E を数えます.
3. 最後に面の数 F を数えます.
4. 頂点の数 V − 辺の数 E + 面の数 F を計算してみます.

どんな多面体でも, 本当に 2 になるか確かめてみましょう.

1.5 オイラーの多面体定理を使うと, なぜ 5 個しかないのでしょうか?

正多面体では, 各面が正 p 角形で, 1 つの頂点に q 枚の面が集まるとします．このとき, 辺は 2 つの面に共有されますので,

$$pF = 2E$$

が成り立ちます．また, 1 つの頂点には q 本の辺が集まりますので,

$$qV = 2E$$

も成り立ちます.

したがって

$$F = \frac{2E}{p}, \qquad V = \frac{2E}{q}$$

です．これをオイラーの式

$$V - E + F = 2$$

に代入すると,

$$\frac{2E}{q} - E + \frac{2E}{p} = 2$$

となります．左辺をまとめると,

$$E\left(\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1\right) = 2$$

です．辺の数 E は正の数なので，

$$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1>0$$

すなわち

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$$

が必要になります．

さて，$p, q \geq 3$ なので，この不等式を満たす組を調べますと，

$$(p, q)=(3,3),(4,3),(3,4),(5,3),(3,5)$$

の 5 通りしか残りません．つまり正多面体は，

正四面体，立方体，正八面体，正十二面体，正二十面体

の 5 種類しかありません．

宣伝

実はこの内容は阪大の入試で取り上げられました．B313 教室に「算数で解ける阪大入試」の展示があり，この内容も取り扱っております．

1.6 展開図にするために切り開く辺の数は，頂点の数-1

多面体を紙の上に開いて，いくつかの辺を切って，**1 枚の展開図** にしたいとします．
実は，凸多面体では **切り開く辺の数は頂点の数 V から 1 を引いた $V-1$ 本** になります．たとえば立方体では 頂点の数は $V=8$ なので，

$$V-1=7$$

本の辺を切れば，ちょうど 1 枚の展開図にできます．

なぜそうなるのでしょうか?

多面体の辺を X 回切って，1 つの展開図になったとしましょう．この展開図では，すべての面がまだつながっています．ここからさらに面どうしをつないでいる辺を切っていくと，最終的にはすべての面がバラバラになります．面が全部で F 個あるとき，つながった F 個の面をバラバラにするには，ちょうど $F-1$ 回切ればよいです．
つまり，最初に X 回切り，その後さらに $F-1$ 回切ると，すべての面がバラバラになります．このとき切った辺は，結局すべての辺です．したがって，辺の数を E とすると

$$X+F-1=E$$

です．よって

$$X=E-F+1$$

となります．
ここで，オイラーの多面体定理 $V-E+F=2$ を使うと，

$$X=E-F+1=V-1$$

です．よって多面体を 1 つの展開図にするために切る辺の数は 頂点の数 $V-1$ です．

模型でやってみよう

立方体, 正八面体, 正十二面体などについて, 頂点数 V を数えてから「何本切れば 1 枚の展開図になるか」を予想してみましょう．そのあと, 実際の展開図を見て比べると面白いです．

2　一般向け．4 次元の正多胞体をどう見よう?

2.1　4 次元とは何でしょうか?

私たちがふだん暮らしている空間は, 長さ, 幅, 高さの 3 つで表されます．数学では, そこにもう 1 つ座標を加えた空間を考えることができます．それが 4 次元空間です．もちろん, 私たちは 4 次元をそのまま目で見ることはできません．数学的には 4 次元の図形もきちんと研究できます．

2.2　4 次元の図形をどうやって見るのか

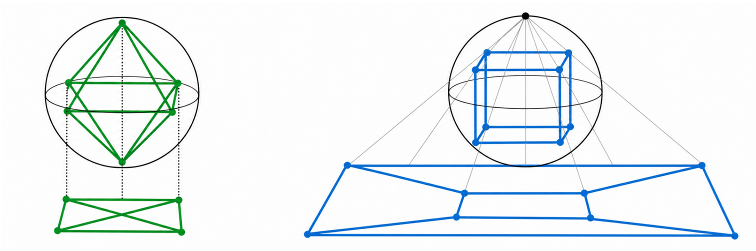
4 次元の図形をそのまま目で見ることはできません．私たちは 3 次元の世界に住んでいるので, 4 次元の図形を見るためには, いったん 3 次元の世界に「影」として写してあげる必要があります．

これは, 3 次元の立体を 2 次元の紙に描くことと似ています．たとえば, 立方体を紙に描くとき, 本物の立方体そのものを紙の上に置いているわけではありません．立方体をある方向から見た「影」や「見取り図」を描いています．それでも, どの頂点とどの頂点が辺でつながっているのか, どんな面があるのかを読み取ることができます．

たとえ話

2 次元の世界の住人にとって, 3 次元の立体はそのままでは見えにくいです．それでも, 影や切り口を見れば, 立体の特徴を知ることができます．4 次元も同じで, 私たちは **影, 断面, 投影** を使って理解します．

3 次元の立体を 2 次元の紙に書く一つの方法として, 球の北極に光源を置き, そこから光を当てて平面に写す方法があります．この方法では, 図形の一部が大きく伸びて見えることがあります．そのため, 見た目は少しゆがんで見えます．この方法を**立体射影**といいます．



4 次元の図形も同じです．本物は 4 次元にあるので直接は見えませんが, 3 次元に影を落とすことで, その形を想像しやすくなります．

この方法には大切な利点があります．頂点と頂点がどのように辺でつながっているか，面がどのようにつながっているか，という構造が見えやすくなります．つまり，長さや角度は変わって見えても，図形の「つながり方」はよくわかるのです．

宣伝

B313 教室では 4 次元の見方に関して詳しく上映しております．気になる方はぜひご覧ください．

2.3　4 次元の" 正多面体"

正多面体の 4 次元バージョンを考えましょう．これは正多胞体と呼ばれます．正多面体は 5 個ありましたが，4 次元の正多胞体は 6 個あることがわかっています．

シュレーフリ記号	名前	胞数 f_3	面数 f_2	辺数 f_1	頂点数 f_0
$\{3,3,3\}$	正 5 胞体	5	10	10	5
$\{4,3,3\}$	正 8 胞体	8	24	32	16
$\{3,3,4\}$	正 16 胞体	16	32	24	8
$\{3,4,3\}$	正 24 胞体	24	96	96	24
$\{5,3,3\}$	正 120 胞体	120	720	1200	600
$\{3,3,5\}$	正 600 胞体	600	1200	720	120

展示されている正多胞体の模型は，4 次元の正多胞体を 3 次元に立体射影したものです．

やってみましょう

B308 教室にある正多胞体の模型を見て，どれが正 5 胞体なのか？，どれが正 120 胞体なのか？ 見つけてみましょう．また正 8 胞体には立方体が 8 個ありますが，その 8 個を模型から見つけてみましょう．

2.4　4 次元ではオイラーの多面体定理はどうなるのでしょうか?

3 次元ではオイラーの多面体定理

$$V - E + F = 2$$

でした．4 次元になると，数えるべきものが 1 つ増えます．頂点，辺，面に加えて，3 次元の部品である **胞** の数も数えます．

4 次元の多胞体では，頂点数を f_0，辺数を f_1，面数を f_2，胞数を f_3 と書きますと，

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = 0$$

という式が成り立ちます．これが 4 次元版のオイラー型公式です．

たとえば正 5 胞体では,

$$f_0 = 16, \qquad f_1 = 32, \qquad f_2 = 24, \qquad f_3 = 8$$

なので,

$$16 - 32 + 24 - 8 = 0$$

となります.

やってみましょう

正 120 胞体, 正 600 胞体 で 4 次元ではオイラーの多面体定理が成り立つか示しましょう.

2.5 5 次元以上になると…?

5 次元以上になると正多胞体は 3 つしかないです. これは 3, 4 次元だけ特別ともいうことができます.

2.6 まとめ

ここまでのまとめ

- 正多面体は, 3 次元では 5 種類しかありません.
- オイラーの多面体定理 $V - E + F = 2$.
- 4 次元も立体投影を用いて理解でき, 模型は立体射影したものです.
- 正多胞体 (4 次元版の正多面体) は 6 個あります.
- 4 次元ではオイラー型公式は $f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = 0$ になります.
- 5 次元以上になると正多胞体は 3 個しかない.

3　専門向けの補足

3.1　基本定義

n 次元の正多胞体 (regular polytope) とは, その $(n-1)$ 次元面 ($n-1$ cell) がすべて 正多胞体 であり, さらに各頂点のまわりに現れる頂点形状 (点の近くできる形) も正多胞体であるような凸多胞体です.

3.2　シュレーフリ記号による定義

n 次元正多胞体はシュレーフリ記号

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\}$$

で表されます. これは再帰的に定義します.

- $\{p\}$ は正 p 角形です.
- $\{p, q\}$ は, 面が正 p 角形で各頂点に q 枚の面が集まる正多面体です.
- 一般に $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ の頂点図形は $\{p_2, \ldots, p_{n-1}\}$ です.

なので正多胞体の定義は,

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\} \text{ が正多胞体} \Leftrightarrow \{p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}\} \text{ と } \{p_2, \ldots, p_{n-1}\} \text{ が正多胞体}$$

と帰納的に定義します.

3.3　3 次元の分類

正多面体 $\{p, q\}$ を考えます. 正 p 角形の内角は

$$\frac{(p-2)\pi}{p} = \pi - \frac{2\pi}{p}$$

です. 1 つの頂点に q 枚集まるとき, 角度和が 2π 以上では立体として折れ曲がれません. したがって

$$q \cdot \frac{(p-2)\pi}{p} < 2\pi$$

が必要です. これを整理すると

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}, \qquad p, q \geq 3$$

を得ます. この整数解を調べますと,

$$p = 3 \Rightarrow q < 6, \quad p = 4 \Rightarrow q < 4, \quad p = 5 \Rightarrow q < \frac{10}{3}, \quad p \geq 6 \Rightarrow \frac{1}{p} \leq \frac{1}{6} \text{ なので不可能}$$

ですから, 可能なのは

$$(3,3),\ (4,3),\ (3,4),\ (5,3),\ (3,5)$$

の 5 組だけです. つまり以下の 5 個しかありません.

記号	名前	面の数 F	辺の数 E	頂点数 V
$\{3,3\}$	正四面体	4	6	4
$\{4,3\}$	立方体（正六面体）	6	12	8
$\{3,4\}$	正八面体	8	12	6
$\{5,3\}$	正十二面体	12	30	20
$\{3,5\}$	正二十面体	20	30	12

3.4 双対

シュレーフリ記号の逆順を双対と言い次で定義します.

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\}^* = \{p_{n-1}, \ldots, p_2, p_1\}.$$

3 次元では

$$\{p, q\}^* = \{q, p\}$$

です. つまり

- 立方体 $\{4,3\}$ と正八面体 $\{3,4\}$ は双対,
- 正十二面体 $\{5,3\}$ と正二十面体 $\{3,5\}$ は双対,
- 正四面体 $\{3,3\}$ は自己双対

3.5 オイラーの多面体公式

凸多面体では

$$V - E + F = 2$$

が成り立ちます. 正多面体 $\{p,q\}$ では,

$$pF = 2E, \qquad qV = 2E$$

ですから,

$$F = \frac{2E}{p}, \qquad V = \frac{2E}{q}$$

となります. これをオイラーの公式に代入すると

$$\frac{2E}{q} - E + \frac{2E}{p} = 2$$

すなわち

$$E\left(\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1\right) = 2$$

を得ます. これを解くと

$$(3,3),\ (4,3),\ (3,4),\ (5,3),\ (3,5)$$

を得ます. よってこの方法でも正多面体は 5 個となります

3.6　4 次元の場合はオイラーの多面体公式では正多胞体が求められない.

4 次元版のオイラー型公式から, 4 次元の多胞体では, 頂点数を f_0, 辺数を f_1, 面数を f_2, 胞数を f_3 と書きますと,

$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 = 0$$

という式が成り立ちます.

4 次元の正多胞体は

$$\{p, q, r\}$$

と書きます. その 3 次元の胞（cell）は $\{p, q\}$ 型の正多面体であり, 1 つの稜のまわりに r 個の胞が集まります. 4 次元版のオイラー型公式を用いて 4 次元の正多胞体 $\{p, q, r\}$ を求めてみましょう. すると

$$\{3,3,3\}, \{3,3,4\}, \{3,3,5\}, \{3,4,3\}, \{4,3,3\}, \{4,3,4\}, \{4,3,5\}, \{3,5,3\}, \{5,3,3\}, \{5,3,4\}, \{3,3,5\}$$

の 11 こが出ます.

しかし実際は 6 個しかありません. なぜでしょうか？

3.7　4 次元の正多胞体は 6 個

実は $\{p, q, r\}$ が正多胞体 4 次元になるためには

$$\sin\frac{\pi}{p}\,\sin\frac{\pi}{r} > \cos\frac{\pi}{q}$$

という条件が必要です. これをシュレーフリ条件といいます. この条件によって, 11 個の候補から 6 個のみが正多胞体になります.

記号	名前	胞数	面数	辺数	頂点数
$\{3,3,3\}$	正 5 胞体	5	10	10	5
$\{4,3,3\}$	正 8 胞体	8	24	32	16
$\{3,3,4\}$	正 16 胞体	16	32	24	8
$\{3,4,3\}$	正 24 胞体	24	96	96	24
$\{5,3,3\}$	正 120 胞体	120	720	1200	600
$\{3,3,5\}$	正 600 胞体	600	1200	720	120

3.8　5 次元以上の分類

シュレーフリの定理によれば, $n \geq 5$ では regular polytope は次の 3 系列しか存在しません:

$$\begin{aligned}
&\{3, 3, \ldots, 3\} && (n\text{-正単体, simplex}),\\
&\{4, 3, \ldots, 3\} && (n\text{-正測体, hypercube}),\\
&\{3, \ldots, 3, 4\} && (n\text{-正軸体, cross polytope}).
\end{aligned}$$

3.9　平面・球面・双曲平面との関係

3 次元の分類で現れた不等式

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$$

や 4 次元の分類で現れたシュレーフリ条件

$$\sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{\pi}{r}>\cos\frac{\pi}{q}$$

は曲率と深く関係しています.

3 次元の分類で現れた不等式

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$$

については

- $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$ のとき, 球面的で正多面体が現れます.
- $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$ のとき, トーラスの正多面体が現れます. これはユークリッド平面の正則敷き詰めと同じです.
- $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\frac{1}{2}$ のとき, 双曲平面の正多面体が現れます.

探してみよう

この説明と似たようなことを言っているパネルを探してみよう.

例えば以下がわかります.

- $\{3,5\}$, つまり各面が正 3 角形で各頂点に 5 枚の面が集まると, 球面的で正二十面体になります.
- $\{3,6\}$, つまり各面が正 3 角形で各頂点に 6 枚の面が集まると, トーラスの正多面体になります. これはユークリッド平面の正則敷き詰めと同じです.
- $\{3,7\}$, つまり各面が正 3 角形で各頂点に 7 枚の面が集まると, 双曲平面の正多面体が現れます.

実は B308 教室にあるおもちゃのワミーを使うと, 正 3 角形で各頂点に 7 枚の面が集まる図形が作れます.

作ってみよう

おもちゃのワミーを使って, 各面が正 3 角形で各頂点に 7 枚の面が集まる図形を作ってみよう.

実は B308 教室のおもちゃやパネルのほとんど多くは正多面体に関わるものです. 気づきましたかね? 私は最初気づきませんでした.