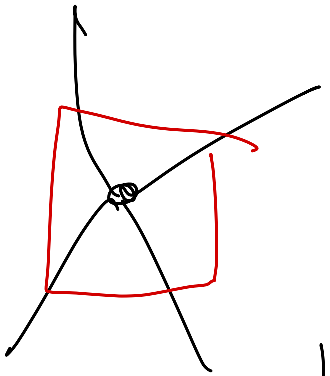
$V \subset \mathbb{R}^n$ regular polytope

$\Leftrightarrow$ $n-1$ cell が regular

$\boxed{\text{頂点形状}}$ も regular

(点のちかくで切る or 中点をつなぐ)



シュレーフリー記号

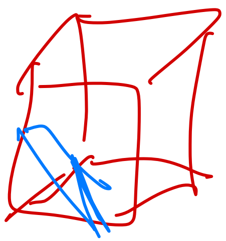
$n=2 \Rightarrow \{p\}.$

$n=3 \Rightarrow \{p, q\}$

- 正p角形でつくられ
- 頂点で切だんすると正q角形になる

ちかくて

ex



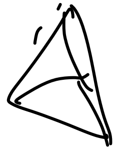
$\{4, 3\}$

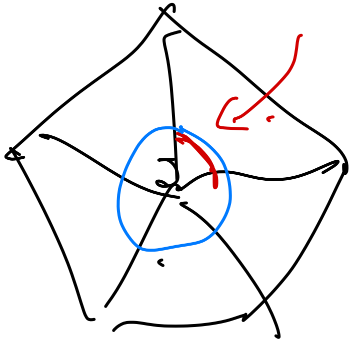
$n=4 \Rightarrow \{p,q,r\}$ s.t. $\{p,q\}$ & $\{q,r\}$ is regular

$n\geq 5$ $\{p_1,\dots,p_n\}$ regular $\overset{def}{\iff}$ $\{p_1,\dots,p_{n-1}\}$, $\{p_2,\dots,p_n\}$ regular

$\boxed{例}$ $n=3$ で $\{p,q\}$, why?

$\Rightarrow$

$\{3,3\}$		4 めん
$\{4,3\}$		6
$\{3,4\}$		8
$\{5,3\}$		12
$\{3,5\}$		20



$$180° \times \left(\frac{p-2}{p}\right) \times q < 360°$$

$180° \times (p-2)$ 内かくの和

$$\Rightarrow \left(1-\frac{2}{p}\right) < \frac{2}{q} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$\boxed{n=4}$ 11とおり かんがえれる

30 / 43

4次元空間の正多胞体(regular polytope)の分類

	シュレフリー記号	3-セル	頂点数
正5胞体	{3, 3, 3}	正4面体	5
正8胞体	{4, 3, 3}	立方体	16
正16胞体	{3, 3, 4}	正4面体	8
正24胞体	{3, 4, 3}	正8面体	24
正120胞体	{5, 3, 3}	正12面体	600
正600胞体	{3, 3, 5}	正4面体	120

シュレフリーにより19世紀半ばに示された.

3 3 3 正5胞体 　 3 4 3 24胞体 　 4 3 3 8胞体 　 ~~3 5 3~~ 　 5 3 3 120胞体

3 3 4 16胞体 　 ~~4 3 4~~ 　 ~~5 3 4~~

3 3 5 600 　 ~~4 3 5~~ 　 ~~5 3 5~~

じっさいに

おこりうるのは 6とおり ← 5 3 (はめたくうかんの) えいきょうはうける.

슐래플리 – Criterion

$\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ n차원 정다 polytope

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & c_1 & & & \\ c_1 & 1 & c_2 & & \\ & c_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & c_{n-1} \\ & & & c_{n-1} & 1 \end{vmatrix} > 0 \qquad c_i = \cos\frac{\pi}{p_i}$$

$$n=3 \iff \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

$$n=4 \iff \sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{\pi}{r} > \cos\frac{\pi}{q}$$

Thm (シュレフリー 1850?)

$\{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\}$ n dim regular polytope $(n \geq 3)$

$\Rightarrow$ $n=3$: $\{3,3\}$, $\{3,4\}$, $\{4,3\}$, $\{3,5\}$, $\{5,3\}$

4, 8, 6, 20, 12

$n=4$: $\{3,3,3\}$, $\{4,3,3\}$, $\{3,3,4\}$, $\{3,4,3\}$, $\{5,3,3\}$, $\{3,3,5\}$

5, 8, 16, 24, 120, 600

$n \geq 5$: $\{3,\ldots,3\}$, $\{3,\ldots,3,4\}$, $\{4,3,\ldots,3\}$

$\boxed{\text{実さいにそんざいする}}$

$\boxed{n=3}$

	めんのかず	へん	ちょうてん
3,3	4	6	4
4,3	6	12	8
3,4	8	12	6
5,3	12	30	20
3,5	20	30	12

Euler Formula (めん)−(へん)+(てん)=2

n=4

	ほう体	めん	へん	てん
333	5	10	10	5
433	8	24	32	16
334	16	32	24	8
243	24	96	96	24
533	120	720	120	600
335	600	1200	720	120

Euler formula

ほう − めん + へん − てん = 0

$\boxed{\text{一般に}}$ $(n-1)\,\text{cell} - (n-2)\,\text{cell}$

$+ (n-3)\,\text{cell} - \quad + (-1)^{n-1}\, 0\,\text{cell}$

$$= 1 + (-1)^{n-1}$$

$\lightning$

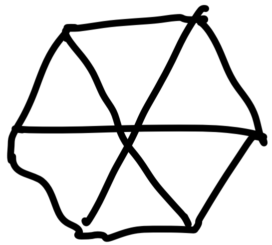
おまけ

① くうかんがまがってれば・・・

$\{p, q\}$ が regulr on トーラス
・双曲

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} & \leftarrow \{3, 6\} \\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} < \dfrac{1}{2} & \leftarrow \{p, q\} \text{ が存在する} \end{cases}$$

タイルばり



② $n=3$ のときは Euler formula がつかえる

めん l コ

へん $ln/2$

てん ln/m

$\{n, m\}$

正n角形でつくる

点は mコはある

$$\Rightarrow \underset{\text{めん}}{l} - \underset{\text{へん}}{\frac{ln}{2}} + \underset{\text{てん}}{\frac{ln}{m}} = 2$$

2010年阪大 理系第3問

[B]オイラーの多面体定理の問題（2010年阪大理系3）

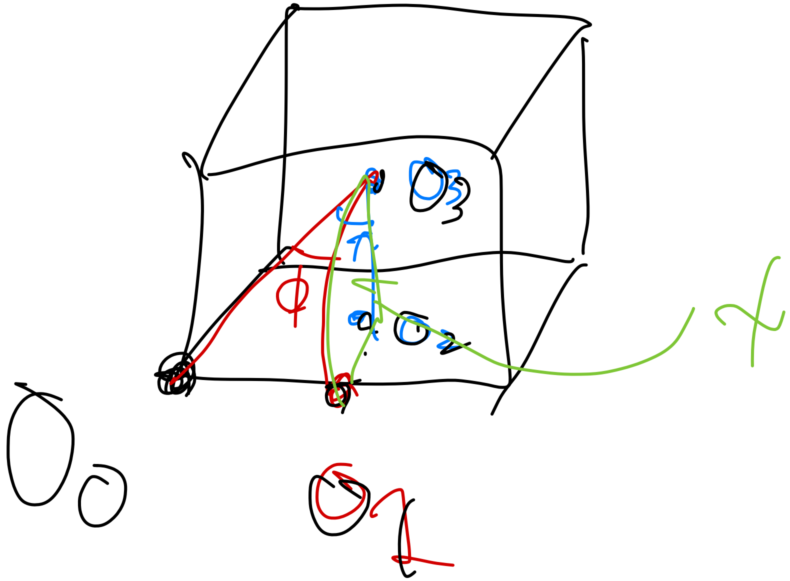
l、m、n を 3 以上の整数とする。等式

$$\left(\frac{n}{m}-\frac{n}{2}+1\right)l=2$$

を満たす l、m、n の組をすべて求めよ。

（2010 年阪大理系 3）

$\boxed{n=4}$



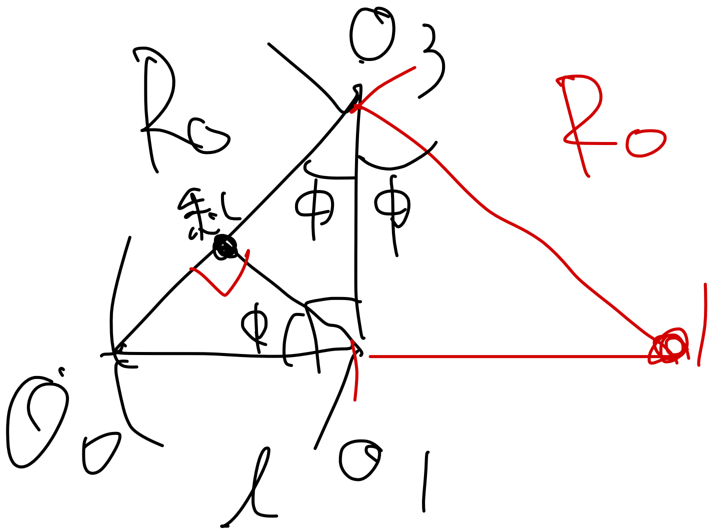
$\phi = O_0 O_n O_1$

$x = O_0 O_n O_{n-1}$

$\alpha = O_{n-2} O_n O_{n-1}$

$O_0 O_1 O_2 O_3$

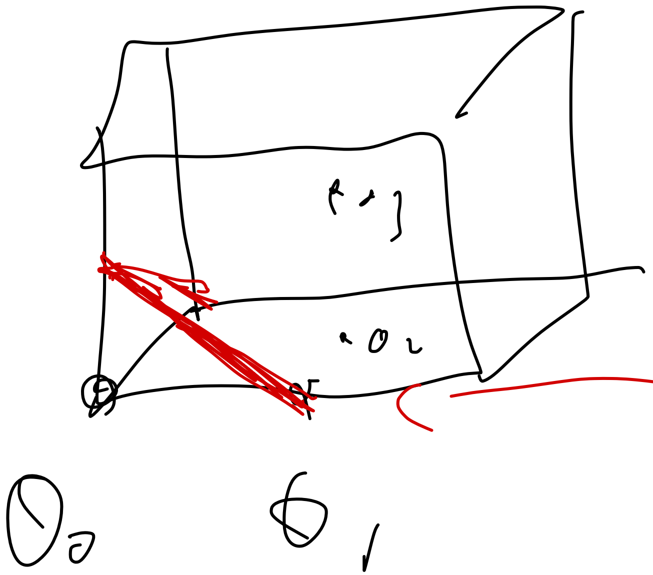
O_n = 「$O_0, O_1, \dots O_{n-1}$」をなす regular polytope の重心

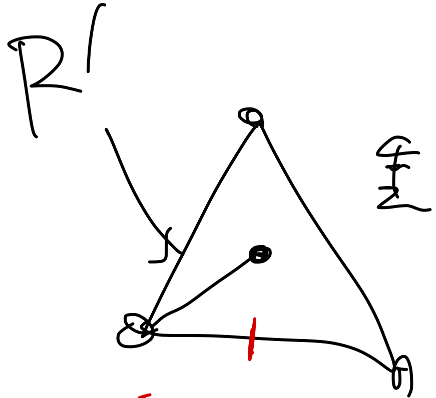


$R_0 = O O_n$

$\boxed{R_0 \sin\phi = O O_1}$

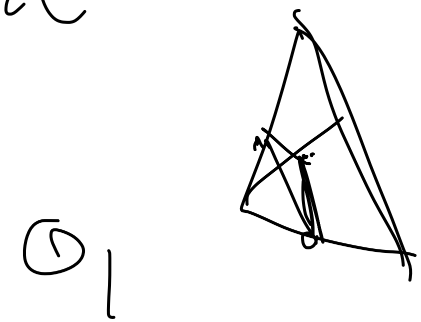
$p=4$





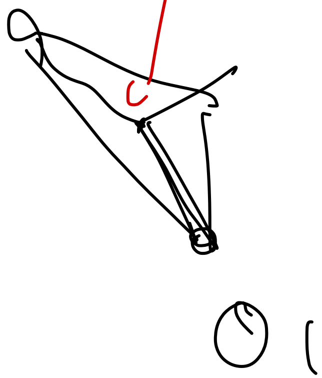
$q=3$

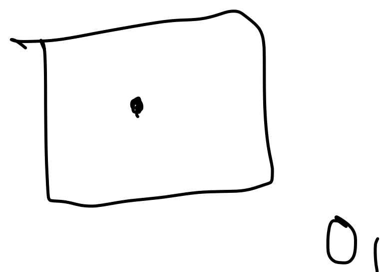
重心



重心 OO_1 その

こうてん





$$R'\sin\phi' = \ell' = OO_1\cos\frac{\pi}{p}$$