連分数 $\dfrac{p}{q} = \cfrac{1}{a_1 + \cdots \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}$

($\dfrac{p}{q} \in (0,1)$ を出す方法)

($p_1 = p,\ q_1 = q$)

$b_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ として帰納的にだす

$$b_n,\ a_n \Rightarrow \begin{array}{l} b_{n+1} = \dfrac{1}{b_n} - a_n \\ a_{n+1} = \left\lfloor \dfrac{1}{b_{n+1}} \right\rfloor \end{array}$$ であるので

$$b_{n+1} = \frac{1}{b_n} - a_n$$

$$= \frac{1}{b_n} - \left\lfloor \frac{1}{b_n} \right\rfloor$$

$$= \frac{q_n - p_n \left\lfloor \frac{q_n}{p_n} \right\rfloor}{p_n} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \quad //$$

$$\therefore \begin{cases} p_{n+1} = q_n - p_n \left\lfloor \dfrac{q_n}{p_n} \right\rfloor \\ \quad (q_n \text{ を } p_n \text{ でわったあまり}) \\ q_{n+1} = p_n \\ a_{n+1} = \left\lfloor \dfrac{q_n}{p_n} \right\rfloor \\ \quad (q_n \text{ を } p_n \text{ でわった商}) \end{cases}$$

なので

$$q_1 = a_1 p_1 + r_1$$

ユークリッドの互除法.

$$(q_1) = q_2 = a_2 p_2 + r_2$$

r_1

$$q_2 = a_3 p_3 + r_3$$

$\vdots$

$$q_l = a_l \cdot p_l + 0$$

よって $\frac{p}{q} = (0; a_1, \ldots, a_n)$ であり

$1 \leq \frac{p}{q}$ のときは $\frac{p}{q} - \lfloor \frac{p}{q} \rfloor = (0; a_1, \ldots, a_n)$ として.

$$\frac{p}{q} = (\underbrace{\frac{p}{q} - \lfloor \frac{p}{q} \rfloor}_{a_0}; a_1, \ldots, a_n)$$

と書く.

唯一性（一般には成立しない）

例 $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+\frac{1}{1}}$ $\left(1 = 0+\frac{1}{1}\right)$

ただし $a_n > 1$（最後のやつ）を仮定すると いえる。

$\boxed{\text{pf}}$ $1 = [1]$ であること

$1 = [a_0 ; a_1, \ldots, a_n]$

$= a_0 + \frac{1}{\boxed{a_1 + \ddots \, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}$ とする。

$> a_0$

> 1

$\Rightarrow a_0 = 0$. よって、これをくりかえして、

$\boxed{a_n > 1 \text{より}}$

$1 = a_{n-1} + \frac{1}{a_n}$ となる

$a_{n-1} = 0$, これはありえない。

一般の場合

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = [b_0; b_1, \dots, b_\ell] = \frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = b_0 = \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor$$

$$\frac{p}{q} - a_0 = \frac{1}{a_1 \cdots}$$ より

$$\frac{1}{p/q - a_0} = \underbrace{a_1}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\boxed{\cdots}}_{0 < \ < 1} = \underbrace{b_1}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\boxed{\cdots}}_{0 < \ < 1}$$ であり

$$\Rightarrow \quad a_1 = b_1$$ あとは帰納的にいえる?

$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ のとき

$$\frac{p}{p+q} = 0 + \cfrac{1}{1 + \boxed{\frac{q}{p}}}$$

・$\frac{p}{q} < 1$ $(a_0 = 0)$ のとき $\frac{q}{p} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 \cdots}$ より

$$1 + \frac{q}{p} = a_1 + 1 + \cfrac{1}{a_2 \cdots}$$ より

$$\frac{p}{p+q} = 0 + \cfrac{1}{a_1 + 1 + \cfrac{1}{a_2 \cdots}} = [0; a_1+1, a_2 \cdots]$$

・$\frac{p}{q} > 1$ なら $(a_0 \neq 0)$

$$0 + \cfrac{1}{1 + \boxed{\frac{q}{p}}} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 \cdots}}}$$ より

$\frac{q}{p} < 1$

$$\frac{p}{p+q} = [0; 1, a_0, \dots, a_n]$$ となる

また $\frac{p+q}{q} = 1 + \frac{p}{q}$ より

$$\frac{p+q}{q} = [a_0+1, a_1, \dots, a_n]$$ となる

$$[0; a_1, \dots, a_n] \qquad \frac{p}{q}$$

$$\frac{p}{p+q}\ [0; a_1+1, \dots, a_n] \qquad\qquad [1; a_1, \dots, a_n]\ \frac{p}{p+q}$$

$(a_0 \neq 0)$

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] \qquad \frac{p}{q}$$

$$\frac{p}{p+q}\ [0; 1, a_0, \dots, a_n] \qquad\qquad [a_0+1; a_1, \dots, a_n]\ \frac{q}{p+q}$$

$\boxed{\text{Th}}$ $\frac{p}{q} \neq \frac{1}{1}$ とする. $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ とする.

nが奇数ならば	nが偶数ならば
左に $a_n - 1$ 回	右に $a_n - 1$ 回
右に a_{n-1} 回	左に a_{n-1} 回
左に a_{n-2} 回	⋮
⋮	
左に a_1 回	左に a_1 回
右に a_0 回	右に a_0 回

例

1 $\frac{1}{1} = [1]$

$2 = [2]$

$3 = [3]$

$\frac{3}{4} = [0; 1, 3]$

$\frac{7}{4} = [1, 1, 3]$

2 $\frac{1}{2} = [0; 2]$

3 $\frac{1}{3}$ $[0; 3]$

4 $\frac{1}{4} = [0; 4]$

5 $\frac{1}{5} = [0; 5]$

6 $\frac{1}{6} = [0; 6]$

7 $\frac{7}{6} = [1; 6]$

8 $\frac{13}{6} = (2; 6)$

9 $\frac{19}{6} = (3; 6)$

10 $\frac{19}{25}$ $(0; 1; 3; 6)$

11 $\frac{19}{44}$ $(0; 2; 3; 6)$

5

3

2

Pf nのサイズによる帰納法

$[a_0 : a_1, \dots, a_n]$ とする

$\boxed{\text{nが奇数のとき}}$

1. $a_0 = 0$ かつ $a_1 = 1$ のとき

$[a_2 : a_3, \dots, a_n]$

$[a_0 : a_1, \dots, a_n]$

左に $a_1 = 1$ 回
右に $a_0 = 0$ 回

よりok.

2. それ以外のとき

左に $a_1 - 1$ 回 $[0 : 1, a_2, \dots, a_n]$

$[0 : a_1, \dots, a_n]$

よりok.

右に a_0 回

$[a_0 ; a_1, \dots, a_n]$

$\boxed{\text{nが偶数のとき}}$

$\boxed{\text{三}}$ じ

$\frac{p}{q}$ がどこにいるかわかる方法.

①　$\frac{p}{q} < 1$ のとき

$$q_1 = a_1 p_1 + r_1$$
$$q_2 = a_2 p_2 + r_2$$
で $a_1, \dots, a_n$ をだす

⋮

$$q_n = a_n p_n$$

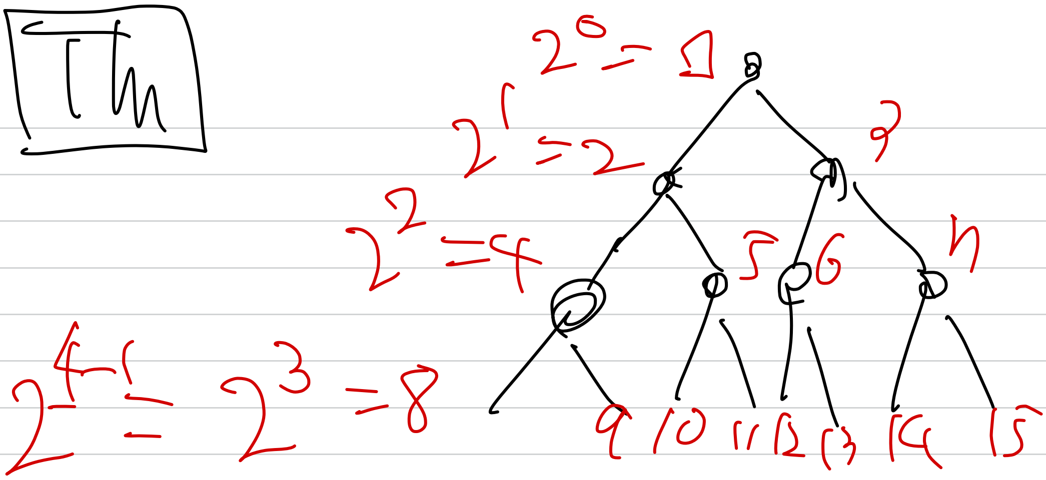
$\frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_n)$ とする

一般の $\frac{p}{q}$ については $a_0 = \frac{p}{q} - \lfloor \frac{p}{q} \rfloor$ とし
$\frac{p}{q} - \lfloor \frac{p}{q} \rfloor$ について $a_1, \dots, a_n$ をとる.

②　$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \dots, a_n)$ について.

nがきすうならば	nが偶数ならば
左に $a_n - 1$ 回	右に $a_n - 1$ 回
右に a_{n-1} 回	左に a_{n-1} 回
左に a_{n-2} 回	⋮
⋮	
左に a_1 回	左に a_1 回
右に a_0 回	右に a_0 回

$\boxed{\text{Th}}$



と数字に
番号つける

このとき $\frac{p}{q} = (a_0; a_1, \ldots, a_n)$ は
2進数であらわすと nがきすうのとき

$$\underbrace{1\,0\cdots 0}_{a_n - 1\text{こ}}\ \underbrace{1\cdots 1}_{a_{n-1}\text{こ}}\ \underbrace{0\cdots 0}_{a_{n-2}\text{こ}}\ \cdots\ \underbrace{0\cdots 0}_{a_1\text{こ}}\ \underbrace{1\cdots 1}_{a_0\text{こ}}$$

nぐうすうのとき

$$1\,\underbrace{1\cdots 1}_{a_n - 1\text{こ}}\ \underbrace{0\cdots 0}_{a_{n-1}\text{こ}}\ 1\cdots\ \underbrace{0\cdots 0}_{a_1\text{こ}}\ \underbrace{1\cdots 1}_{a_0\text{こ}}$$

となる

$\left(2^{a_0+\cdots+a_n} \text{以上の } 2^{a_0+\cdots+a_n+1} - 1 \text{ 以下のかず} \right)$

$\boxed{\text{Pf}}$ 以下2進数表記を

$(c_1 \cdots c_n)_2$ とする

すると

$$
\begin{array}{ccc}
 & (c_1 \cdots c_n)_2 & \\
 \swarrow & & \searrow \\
(c_1 \cdots c_n 0)_2 & & (c_1 \cdots c_n 1)_2
\end{array}
$$

となる

$\boxed{\text{例}}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & (1)_2 & & & \\
 & & \swarrow & & \searrow & & \\
 & (10)_2 & & & & (11)_2 & \\
 \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\
(100)_2 & & (101)_2 & & (110)_2 & & (111)_2
\end{array}
$$

よって二木はろうさをかいたらいえる。

$\boxed{\text{Cor}}$ $\frac{p}{q} = (a_0; a_1, \ldots, a_n)$ は

上から $a_0 + \cdots + a_n$ 段目にある

左からは(それであらわした数字)

$- (2^{a_0 + \cdots + a_n}) + 1$ 番目にある

$\boxed{\text{例}}$ $\frac{19}{44} = [\underset{a_0}{0}; \underset{a_1}{2}, \underset{a_2}{3}, \underset{a_3}{6}]$

$\Rightarrow (1\underbrace{00000}_{\substack{5つ \\ (6-1つ)}}\underbrace{111}_{3}\underbrace{00}_{2つ})_2$

1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

上から $6+2+3=11$ 段目 左から $16+8+4+1$
$= 29$

逆に n番目の数をもとめたいときは T_mをつかえばよい,

また上から m番目左から ℓ番目の数は $n = 2^{(m-1)} + \ell - 1$

より早くもとめられる

例 上から11段目 左から29番目

$\Rightarrow n = 2^{10} + 29 - 1$

$= 2^{10} + 28$

$= 2^{10} + 2^4 + 2^3 + 2^2$

$\Rightarrow n = (10000\ 00\ 11100)_2$

$2^{10}\ 2^9\ \cdot\ 2^5\ 2^4\ 2^2\ 2^1\ 2^0$

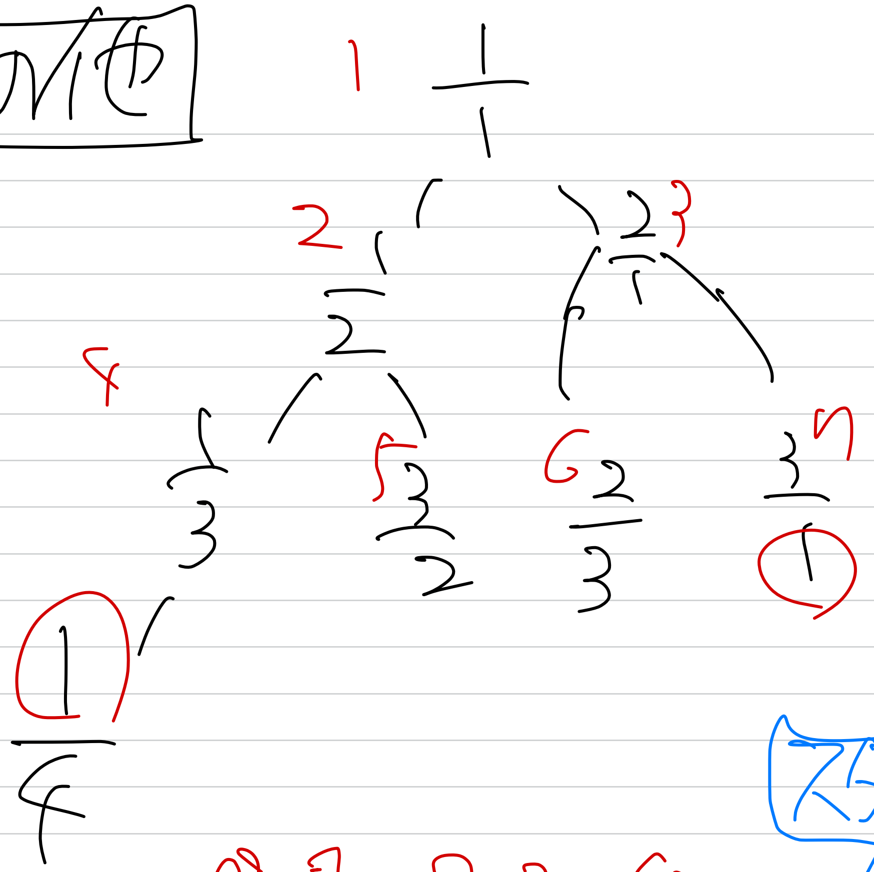
$$\Rightarrow n = (\underbrace{100000}_{5 \,=\, a_3 - 1}\;\underbrace{111}_{3 \,=\, a_2}\;\underbrace{00}_{2 \,=\, a_1}\;\underbrace{}_{0 \,=\, a_0})$$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} = (a_0 ; a_1, a_2, a_3)$$

$$= (0 ; 2, 3, 6)$$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6}}} = \frac{19}{44}.$$

その他



にかんに。

スターンの2原子列

$$S_n = \{\overset{0}{1}, \overset{1}{1}, \overset{2}{2}, \overset{3}{1}, \overset{4}{3}, 2, 3, 1, \cdots\}$$ とおく。

対応は

$$\frac{S_{n-1}}{S_n} = (n\text{番目の有理数})$$

とする

(これがwell-definedは

$$\frac{p}{q} \to \frac{p}{p+q},\ \frac{p+q}{p}$$

と 左はじが $\frac{1}{n}$
右はじが $\frac{n}{1}$ より)

$\boxed{\text{Th}}$ $S(2n+1) = S(n)$

$S(2n+2) = S(n) + S(n+1)$

$\boxed{\text{pf}}$

n番目の有理数 $= \dfrac{S_{n-1}}{S_n}$

$\dfrac{S_{2n-1}}{S_{2n}} =$ $2n$番目の有理数　　$2n+1$番目の有理数 $= \dfrac{S_{2n}}{S_{2n+1}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{2n} = S_n + S_{n-1} \\ S_{2n+1} = S_n \end{cases}$$

//

Def $n \in \mathbb{N}$ について.

$$n = a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + \cdots a_1 2 + a_0$$

$a_i \in \{0, 1, 2\}$ となる

表記を超2進展開とする

Th $h(n)$ を n の超2進展開のこすうとする

このとき $S(n) = h(n)$

例 $6 = 4 + 2$

$= 4 + 1 + 1$ より

$= 2 + 2 + 1 + 1$

$h(6) = 3$

$$S_n = \{1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, \ldots, 4 \ldots\}$$

0 1 2 3 4 5 6 8

$\boxed{\text{pf}}$ $h(0)=1$
$h(1)=1$
$h(2)=2$

$\left(\begin{array}{l} 0=0 \\ 1=1 \\ 2=1+1 \text{ と } 2. \end{array}\right)$

① $h(2n+1)=h(n)$ について.

$n=a_k 2^k + \cdots + a_0$

$\updownarrow$ で一対一になる

$(2n+1)=a_k 2^{k+1} + \cdots + a_0 2 + 1$

② $h(2n+2)=h(n)+h(n+1)$

$\boxed{n\text{ 奇数}}$

$n+1 = \underbrace{(a_k, \ldots, a_1, 0) \text{ or } (a_k, \ldots, 2)}$

$n = (a_k, \ldots, 1)$

$\updownarrow$

$2n+2$ を $(a_k, \ldots, 1, 2)$

$(a_k, \ldots, a_1, 0, 0)$ or $(a_k, \ldots, 2, 0)$

これで1対1対応になる

nぐうすう

$n+1 = (a_k, \ldots, a_1, 1)$

$n = (a_k, \ldots, a_1, a_0)$

$2n+2 \quad (a_k, \ldots, a_1, a_0, 2) \qquad (a_k, \ldots, a_1, 1, 0)$

その2

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1 - \{x\}}$$

とおく

$(\{x\} = x - \lfloor x \rfloor)$

カルキンウィルフツリーは生成される

例

$$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{f} 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8$$

$$1 \to \frac{1}{2} \to \frac{2}{1} \to \frac{1}{3} \to \frac{3}{2} \quad - - - -$$

$\boxed{\text{Pf}}$ くわしくは

天書の証明(19章)より,

Sketchに

$$y$$

1回 ↙　　↘ 1回

$$Q$$

k回 ↓　　↓ k回

$\boxed{n\text{番目}}$　$\boxed{n+1\text{番目}}$

$$n\text{番目} = \frac{1}{1+y} + k = x$$

$$n+1\text{番目} = \frac{y+1}{1+k(y+1)} = f(x)$$

となる

$$\Rightarrow \quad k = \lfloor x \rfloor$$

$$f(x) = \frac{1}{k+1-\left(\frac{y}{y+1}\right)} = \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1 - \{x\}} \quad //$$

(あとはこのツリーにそってN〜Qをたどるとか?)