

曲線の曲率

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)) = r \end{aligned} \quad \left| \frac{dr}{dt} \right| = 1 \text{ (仮定 (3) の表示)}$$

$$\frac{dr}{dt} = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \in \mathbb{R}^2$$

$$\therefore \frac{d^2 r}{dt^2} = \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) \theta'(t) \\ \cos \theta(t) \theta'(t) \end{pmatrix} = \theta'(t) \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) \\ \cos \theta(t) \end{pmatrix}$$

$$\theta'(s) = \left(\frac{1}{|r'|} \right) \text{ (曲率)} \quad \chi(s) := \theta(s)$$

$$\chi = \frac{\langle r' \times r'', e_3 \rangle}{|r'|^3} = \langle r' \times r'', e_3 \rangle$$

(↑) $|r'| = 1$

曲面の曲率

$$X = D \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u^1, u^2) \mapsto (x^1(u), x^2(u), x^3(u))$$

$$X_i := \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^i}, \frac{\partial x^2}{\partial u^i}, \frac{\partial x^3}{\partial u^i} \right) \quad i=1,2$$

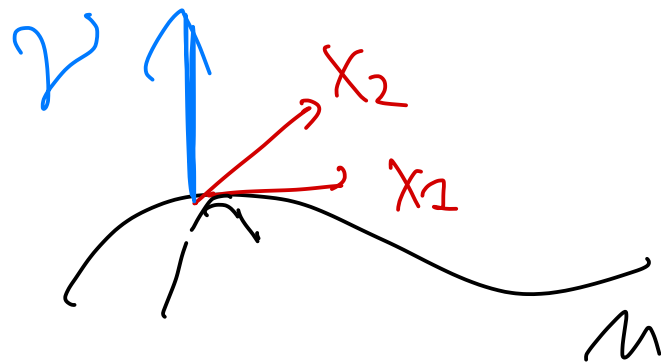
Sym^2

Def 第1基本形式:

$$g \in C^\infty(Sym T_p U), \quad g = \underbrace{(X_i \cdot X_j)}_{\mathbb{R}^3 \text{ の内積}} dx^i \otimes dx^j$$

$\mathbb{R}^3$ の内積

$$g = \begin{pmatrix} X_1 \cdot X_1 & X_1 \cdot X_2 \\ X_2 \cdot X_1 & X_2 \cdot X_2 \end{pmatrix} \quad / \quad X_1, X_2 \in T_p U \subset \mathbb{R}^3$$



また

$$\gamma := \frac{X_1 \times X_2}{|X_1 \times X_2|}$$

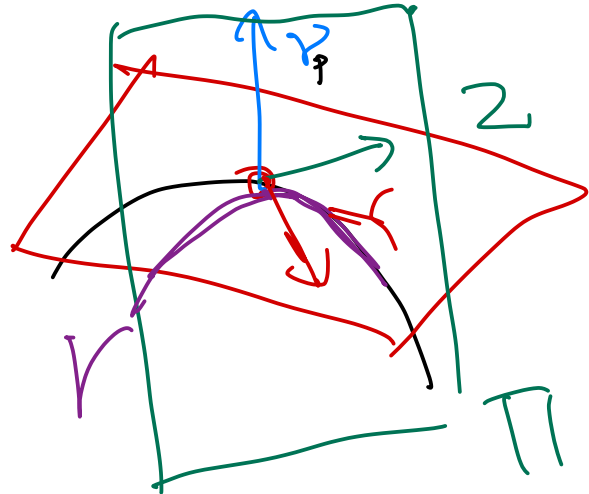
これは単位法線ベクトルという

Def 第2基本内積 h を、
 $h_{ij} = \langle X_j, v_i \rangle$ とする。 $h(w^i X_i, w^j X_j)$
 $= w^i w^j h_{ij}$ とする

Prop $\langle v, v_i \rangle = 0$. ($\because \langle v, v \rangle = 1$) via 2
 $h_{ij} = \langle X_j, v \rangle = -\langle X_i, v_j \rangle = -\langle X_j, v_i \rangle$ ($\because \langle X_i, v \rangle = 0$)

Th M が 1 の非退化 上対称 $\Leftrightarrow h \equiv 0$

Pf M が 1 の非退化 上対称 $\Leftrightarrow v$ case $\Leftrightarrow v_i \stackrel{\text{def}}{=} 0$
 $h \equiv 0 \Leftrightarrow \langle X_j, v_i \rangle = 0 \Leftrightarrow v_i$ は X_1, X_2, v と独立



$T_p M$

$T_p M \ni Z$ を固定し, $(|Z|=1)$

γ と Z をつくる平面を Π とする

γ を Π と M の交点からなる曲線とする

$V = \gamma \times Z$ とする.

$$\gamma = p + tZ + f(t)\gamma_p \text{ とおく.}$$

$$\gamma = X(u^1(t), u^2(t)) \text{ とおくと } \gamma(0) = p. \text{ 2次元 } \gamma' = r', r'', r \text{ は1次元}$$

$$\textcircled{1} \quad \gamma(0) = p + f(0)\gamma_p = p \quad \leadsto \quad f(0) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \gamma'(0) = Z + f'(0)\gamma_p = \frac{du^1}{dt} X_1 + \frac{du^2}{dt} X_2$$

$$\leadsto \quad Z = \frac{du^i}{dt}(0) X_i, \quad f'(0) = 0.$$

$$\textcircled{3} \quad \gamma''(0) = f''(0)\gamma_p = \frac{d^2 u^i}{dt^2} X_i + \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} X_{ij}.$$

$$\text{w } f'(0) = (f'(0)|_{V_p}, \gamma_p)$$

$$((X_2, \gamma_p) = 0) \Leftrightarrow \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} (X_2, \gamma_p)$$

$$= \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} h_{2j} = h(2, 2).$$

2 γ の曲率

$$K = \langle r' X r', e_3 \rangle = \langle 2 X f'(0)|_{V_p}, \gamma \rangle = f'(0) = h(2, 2)$$

また、また

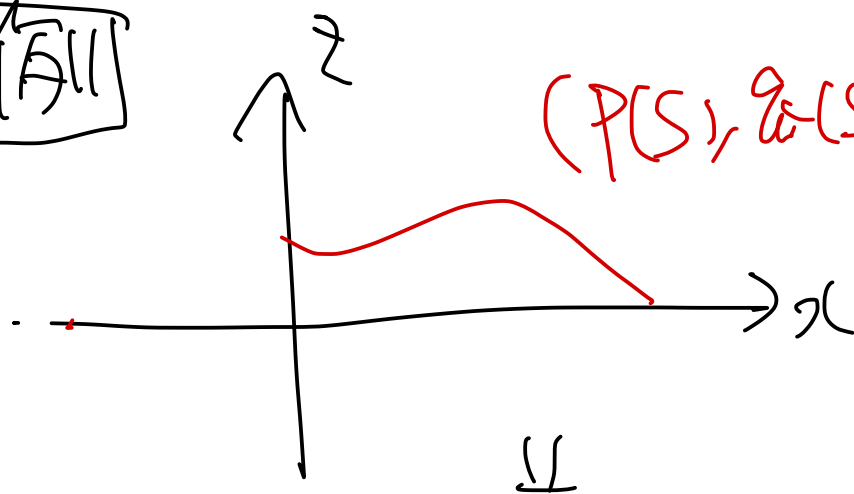
[in] $Z \in T_p M \in \mathbb{R}^2$. γ と Z がなす平面と M の交点
曲率の曲率は $h(2, 2) = W^i W^j h_{2j} \in \mathbb{R}^2$.
($Z = W^i X_i$)

Weingarten map $W: T_p M \longrightarrow T_p^* M$
 $(w \mapsto h(\zeta, w))$
 $\sum_i \zeta_i^2 X_i \longmapsto g^{2j} h_{kj} \sum_i \zeta_i^2 X_i.$

Def W の固有値を主曲率,
 $\quad \quad \quad$ の平均を平均曲率 H
 $\quad \quad \quad$ を Gauss 曲率 K

$g_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow H = \text{tr} h / 2$ 実際 $H = \frac{1}{2} h_{ij} g^{2j}$
 $K = \det h$
 $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
 $K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})}$
 $(\Rightarrow)$ 固有値の平均 $= H = \lambda$
 $\quad \quad \quad$, $\prod \lambda_i = \det$
 $\quad \quad \quad$ ϵf_2^2

例

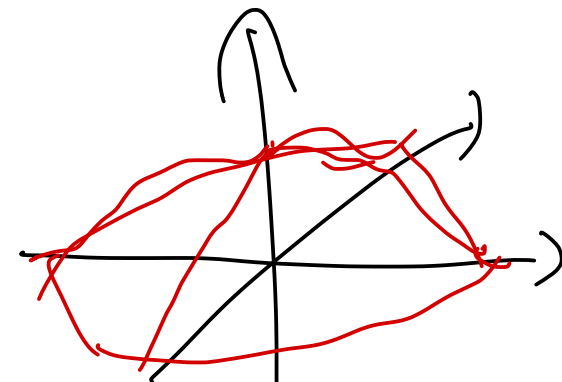


$(p(s), q(s))^{p>0}$ $\in$

2次元に(2)次元空間に存在する
点の集合 $\mathcal{M}$

$$(\sqrt{A}) (p(s), q(s)) = (\cos(s), \sin(s))$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} = \mathbb{R}/2\pi$$



$$X = (p(u') \cos u^2, p(u') \sin u^2, q(u'))$$

$$X_1 = (p'(u') \cos u^2, p'(u') \sin u^2, q'(u'))$$

(p, q は u' の関数)

$$X_2 = (-p(u') \sin u^2, p(u') \cos u^2, 0)$$

$$\sim) \mathcal{G} = \begin{pmatrix} X_1 X_1 & X_1 X_2 \\ X_2 X_1 & X_2 X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'^2 + q'^2 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{G}^{-1} = \begin{pmatrix} (p'^2 + q'^2)^{-1} & 0 \\ 0 & p^{-2} \end{pmatrix}$$

$$\gamma = (-q' \cos u^2, -q' \sin u^2, p')$$

$$X_{11} = (p'' \cos u^2, p'' \sin u^2, q'')$$

$$X_{12} = (-p' \sin u^2, p' \cos u^2, 0)$$

$$X_{22} = (-p \cos u^2, -p \sin u^2, 0)$$

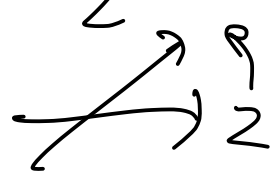
$$h = \begin{pmatrix} \langle X_{11}, X_{11} \rangle & \langle X_{12}, X_{11} \rangle \\ \langle X_{21}, X_{11} \rangle & \langle X_{22}, X_{11} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' q'' - p'' q' & 0 \\ 0 & p q' \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2} \ln \det g = \frac{1}{2} \left(\frac{p' q'' - p'' q'}{p'^2 + q'^2} + \frac{q'}{p} \right)$$

$$K = \frac{\det h}{\det g} = \frac{(p' q'' - p'' q') q'}{p (p'^2 + q'^2)}$$

Prop a 主曲率の方向は 互いに直交 (二つの直交)

$z' =$ 主曲率 $z \in T_1 M$ に対して z の方向に z' の最大値をとる



$$H = \frac{\text{最大} + \text{最小}}{2}$$

$$K = \text{最大} \times \text{最小}$$

$$\boxed{11.2} \quad X = (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$$

$$\Rightarrow X_1 = (1, 0, f_1)$$

$$X_2 = (0, 1, f_2)$$

$$\nu = \frac{(-f_1, -f_2, 1)}{1 + f_1^2 + f_2^2}$$

$$X_{11} = (0, 0, f_{11})$$

$$X_{12} = (0, 0, f_{12})$$

$$X_{22} = (0, 0, f_{22})$$

$$\Rightarrow g = \begin{pmatrix} X_1 X_1 & X_1 X_2 \\ X_2 X_1 & X_2 X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + f_1^2 & f_1 f_2 \\ f_2 f_1 & 1 + f_2^2 \end{pmatrix}$$

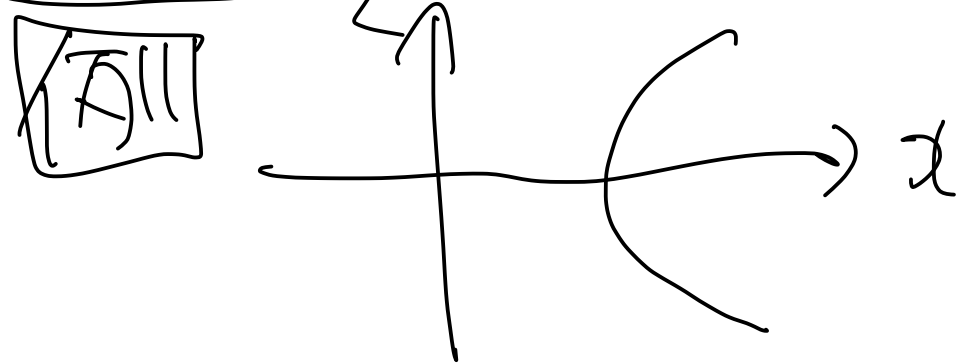
$$h = \begin{pmatrix} X_{11} \nu & X_{12} \nu \\ X_{21} \nu & X_{22} \nu \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + f_1^2 + f_2^2} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

Ex 2 Gauss $\frac{1}{K} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\det \text{Hess} f}$ (locally $\pm$ ba $\nabla f|_{\mathbb{R}^2} \neq 0$)

$K > 0 \Leftrightarrow \cup \cap f$, $K < 0$ 鞍点 $\cap f$?

$H = 0 \Rightarrow K < 0 \Rightarrow$ 鞍点 $\cap f$?

Def 平均曲率 $\equiv 0$ なる曲面を極小曲面と呼ぶ



$$x = \cosh z$$

$$p = \cosh t \quad p' = \sinh t \quad p'' = \cosh t$$

$$q = t \quad q' = 1 \quad q'' = 0$$

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{p'q'' - p''q'}{p'^2 + q'^2} + \frac{q'}{p} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{-\cosh t}{(\sinh t)^2 + 1} + \frac{1}{\cosh t} \right)$$

$$((\sinh t)^2 + 1 = (\cosh t)^2) \rightarrow 0$$

Catenoid

Catenay $z > 0$ $z < 0$

例 4.0.2. 平均曲率一定の回転面は、次の 6 つに分類される (Figure 1 参照) :

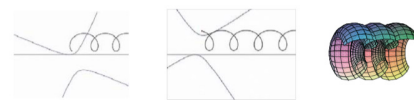
平面, 球面, 円柱, catenoid (懸垂面), unduloid, nodoid.

catenoid, unduloid, nodoid の母線は、それぞれ、放物線、楕円、双曲線を直線に沿って転がしたときの焦点の軌跡として得られる。これは、平均曲率一定回転面の母線が満たす 2 階の常微分方程式を研究することにより証明される。これらの曲面は、この性質を発見した 19 世紀のフランスの数学者 Delaunay にちなんで、Delaunay 曲面と呼ばれる。

21



unduloid の一部 (右図) とその母線



nodoid の一部 (右図) とその母線

$$A(X) = \int_{\Sigma} \sqrt{f\epsilon g} \, du^1 du^2 \text{ は } X \text{ の面積である} \quad (\partial \Sigma = \sqrt{f\epsilon g} \, du^1 du^2)$$

$$X(\varepsilon)(u) = (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$X(0, u) = X(u) \quad \forall u \in \Sigma$$

$$X(\varepsilon, \zeta) = X(\zeta) \quad \forall \zeta \in \partial \Sigma \quad \forall \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$$

$$\delta X := \left. \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \text{ は } X \text{ の変分} \quad \forall \eta \in T_x M$$

$$X(\varepsilon) = X + (\zeta + f\eta)\varepsilon + o(\varepsilon^2) \quad \begin{cases} \zeta \in TM \\ f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Th}} \quad \delta A = \left. \frac{d}{d\varepsilon} (A(X(\varepsilon))) \right|_{\varepsilon=0} = -2 \int_{\Sigma} H f \, d\Sigma$$

$$f = \left\langle \left. \frac{\partial X(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \nu \right\rangle$$

$$\boxed{\text{Cor}} \quad \text{面積が最小} \iff \delta A = 0 \iff \text{面積が極値である.}$$

$$\boxed{\text{pf}} \quad \delta(\sqrt{\det g}) = \frac{1}{2} (\det g)^{-1} \delta \det g = \frac{1}{2} (\det g)^{-1} \delta (g_{11} g_{22} - g_{12}^2) \\ = \frac{1}{2} (\det g)^{-1} [\delta g_{11} g_{22} + g_{11} \delta g_{22} - 2 g_{12} \delta g_{12}]$$

$$\delta g_{2j} = \delta \langle X_2, X_j \rangle = \langle \delta X_2, X_j \rangle + \langle X_2, \delta X_j \rangle \\ = \langle \xi_2 + f \nu_2, X_j \rangle + \langle X_2, \xi_j + f \nu_j \rangle$$

$$\langle \nu, X_2 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \langle \xi_2 + f \nu_2, X_j \rangle + \langle X_2, \xi_j + f \nu_j \rangle$$

$$\langle f \nu, X_j \rangle = f \langle X_2, \nu_j \rangle \rightarrow \langle \xi_2, X_j \rangle + \langle \xi_j, X_2 \rangle - 2 f h_{2j} \\ = -f h_{2j}$$

$$\therefore \delta(\det) = \frac{1}{2(\det g)} \left[g_{22} \{2 \langle \xi_1, X_2 \rangle - 2 f h_{11}\} + g_{11} \{2 \langle \xi_2, X_1 \rangle - 2 f h_{22}\} \right. \\ \left. + 2 g_{12} \{ \langle \xi_1, X_2 \rangle + \langle \xi_2, X_1 \rangle - 2 f h_{12} \} \right]$$

$$= (\langle \xi_2, X_j \rangle g^{2j} - f h_{2j} g^{2j}) d\Sigma$$

$$= (\operatorname{div} \xi - 2f(t)) d\Sigma$$

$$\delta A = \int_{\Sigma} \delta(d\Sigma) = \int_{\Sigma} (\operatorname{div} \vec{\zeta} - 2f(h)) d\Sigma$$

$$\Rightarrow -2 \int_{\Sigma} f(h) d\Sigma$$

$$\left(\int \operatorname{div} \vec{\zeta} d\Sigma = \int_{\partial \Sigma} \langle \vec{\zeta}, n \rangle dS = 0 \right) \text{ because } \vec{\zeta}|_{\partial \Sigma} = 0.$$

Gauss curvature.

$M \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathcal{I}_M = \mathcal{I}_{\mathbb{R}^3}|_M$ Riemann metric

$\Rightarrow$ Levi-Civita Connection

$$\left(\nabla_{X^i} X^j = \underbrace{\Gamma_{ik}^j}_{\text{クリストフェリ}} X^k \right)$$

$\Rightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$ 曲率テンソル

定理 (リーマン幾何学の基本定理) — レヴィ-チヴィタ接続は以下の5つの性質を満たす。
また M 上のベクトル場の組に M 上のベクトル場を対応させる汎関数で以下の5つの性質をすべて満たすものはレヴィ-チヴィタ接続に限られる [\[4\]\[5\]](#) :

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ (関数に関する左線形性)
2. $\nabla_X (aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$ (実数に関する右線形性)
3. $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$ (ライプニッツ則)
4. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (捻れなし)
5. $Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$ (計量との両立)

定理 — リーマン多様体 (M, g) のレヴィ-チヴィタ接続の曲率は以下を満たす [\[32\]](#) :

- $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$
- $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$
- **ビアンキの第一恒等式** : $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
- **ビアンキの第二恒等式** [\[33\]](#) :
 $(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0$

$$R_p = T_p M \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow T_p M$$

定理 — M に局所座標 $(x^1, \dots, x^m)$ を取るとき、以下が成立する (アインシュタインの縮約で表記) :

$$\frac{\nabla}{dt}v(t) = \left(\frac{d}{dt}v^i(t) + \frac{dx^j(t)}{dt}v^k(t)\Gamma_{jk}^i \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \dots (1)$$

where $\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{i\ell} \left(\frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\ell} \right) \dots (2)$

↓

定理 — $R(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^\ell})\frac{\partial}{\partial x^j} = R^i_{jkl}\frac{\partial}{\partial x^i}$ と成分表示すると[注 8]、以下が成立する[34] :

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{\ell j}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^\ell} + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{\ell j} - \Gamma^i_{\ell m}\Gamma^m_{kj}$$

Sectional curvature.

$$g(e_1, R(e_1, e_2)e_2)$$

$$g_{ij}R^a_{jke} \approx \sum_i \sum_j g^i_i g^j_j$$

$e_1 = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ $e_2 = \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j}$
 e_1, e_2 正規直交基底

Gauss 02'''

Gauss curvature = Sectional curvature

断面曲率、リッチ曲率、スカラー曲率 [編集]

∇ をリーマン多様体 (M, g) のレヴィ-チヴィタ接続とし、 P を M の点とし、 $v, w \in T_P M$ とし、
に $e_1, \dots, e_m$ を $T_P M$ の基底とする。

定義 —

- $\text{Sec}_P(v, w) := \frac{g_P(R_P(v, w)w, v)}{g_P(v, v)g_P(w, w) - g_P(v, w)^2}$ を点 P における v, w に関する**断面曲率** (英: sectional curvature) という[39]。
- $\text{Ric}_P(v, w) := \sum_i g_P(R_P(e_i, v)w, e_i)$ を点 P における v, w に関する**リッチ曲率** (英: Ricci curvature) という[40]。
- $S_P := \sum_{i,j} g_P(R_P(e_i, e_j)e_j, e_i) = \sum_j \text{Ric}_P(e_j, e_j)$ を点 P における**スカラー曲率** (英: scalar curvature) という[40]。

Ricci

g^{ij} Ricci

$g^{kl} g^{ij}$ Ricci.

Sectional curvare $\Leftrightarrow$ Griffiths positive

Ricci positive $\Leftrightarrow$ det $\in$ positive

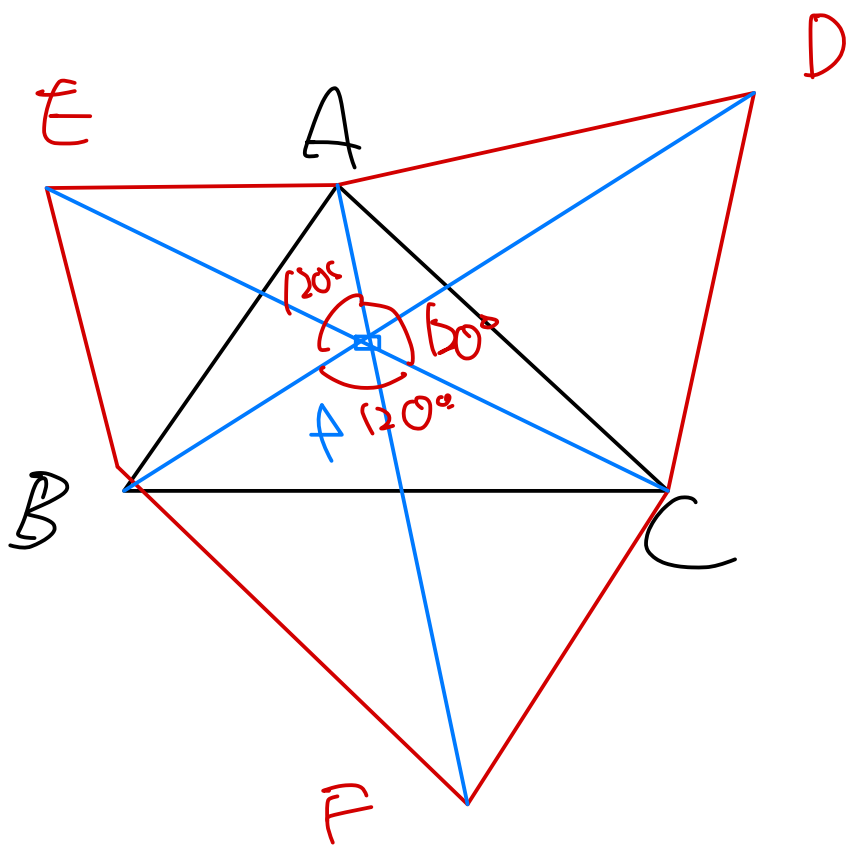
Scalar positive $\Leftrightarrow$ $\text{tr}_g \text{Ric} = g^{kl} R_{kl}$ positive.

$n=1, T$ all like
 $R=0$

$\text{Sec} = \text{Ric}$.

フェルマート-ミウラポイント

Tm 内角がすべて 120° 以下の三角形 ABC には
内部に $AP + BP + CP$ を最小にする点 P があり、
それは下のようにつくられる



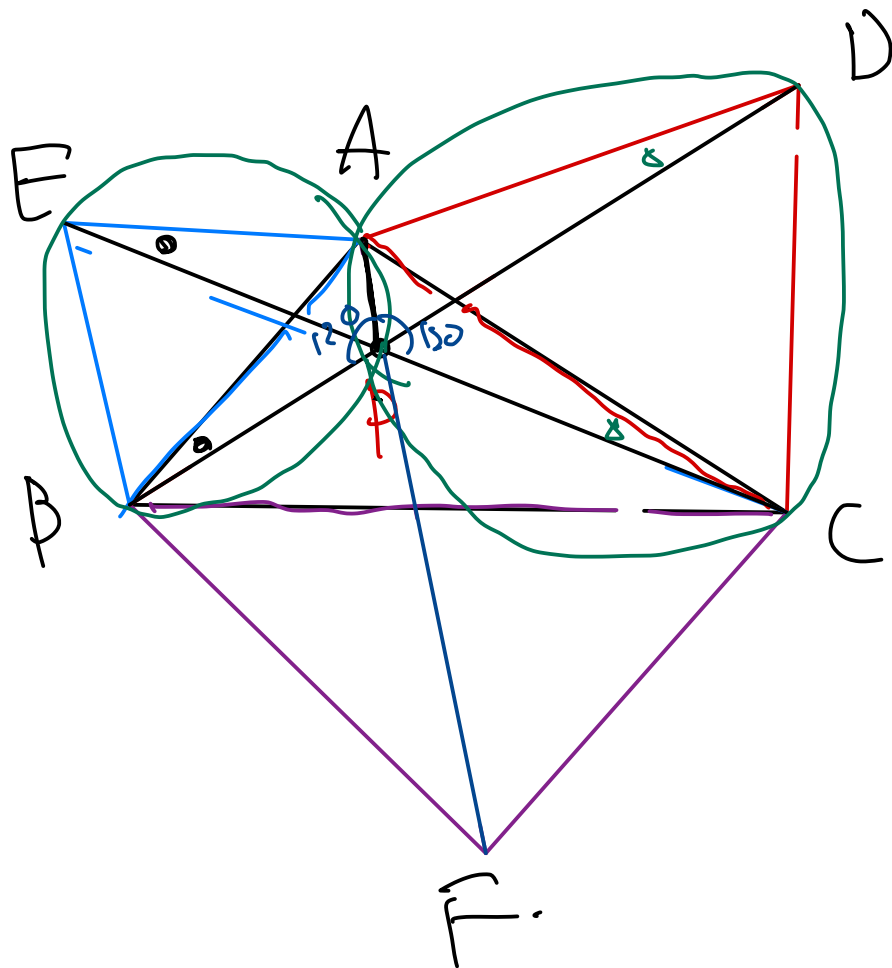
$\triangle ADC, \triangle AEB,$

$\triangle FCB$ 正三角形とし

AF と BD と EC の交点
が P となる。

(120° に等しい角を...))

Pの存在性



$\triangle ACD, \triangle AEC$ 共, $\triangle BCF$ 正三角形,

$$\Rightarrow \triangle ABD \equiv \triangle AEC$$

(π + 同角)

$\Rightarrow$ 同角の逆より $AE \parallel BD$ (同角)

$$\Rightarrow \angle APB = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \text{同様にして } \angle APC = 120^\circ$$

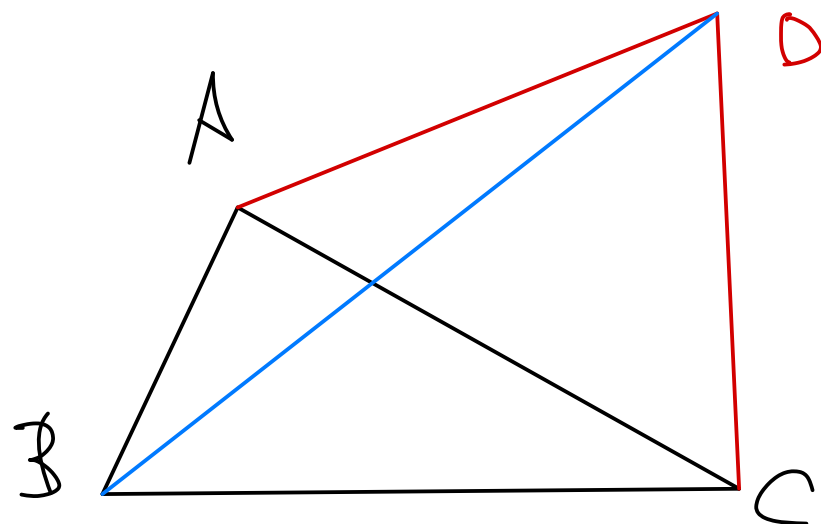
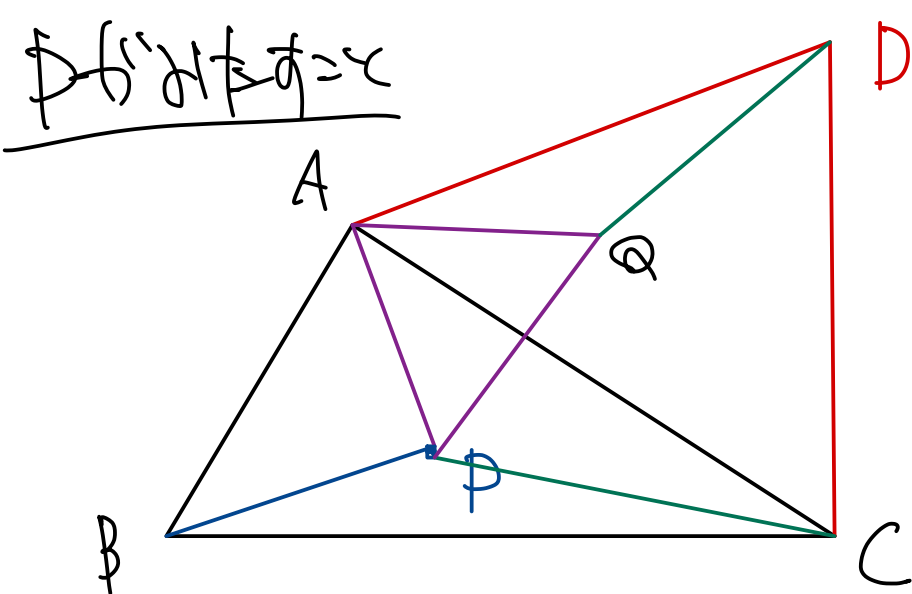
$$\Rightarrow \angle BPC = 120^\circ$$

$\Rightarrow ABPC$ は (2) 円周上にあり (一定)

$$\Rightarrow \angle FPC = \angle FBC = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle APF = \angle APC + \angle CPF = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ 一直線



△ABCの重心G

⇒ △ACDの重心はG
 である

⇒ △APQの重心はG
 である

⇒ △AQD ≅ △APC
 (三辺相等)

$$\Rightarrow AP = PQ, QD = PC$$

$$\Rightarrow BP + AP + CP$$

$$= BP + PQ + QD > BD$$

∴ PはBDの中点である

同様に PはAEの中点である

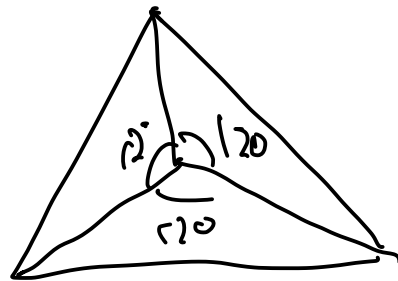
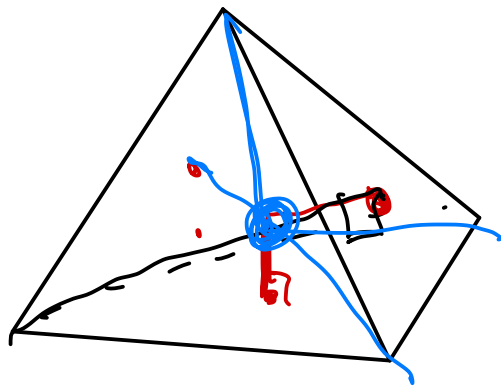
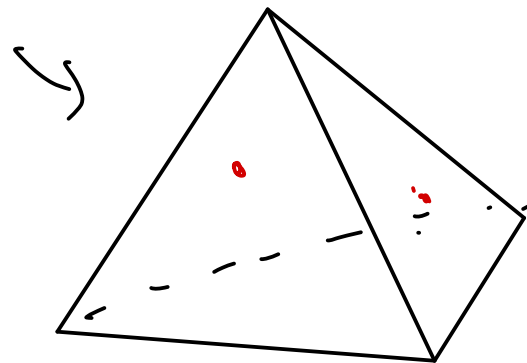
∴ Pは△ABCの重心である

応用

正四面体の場合の石けんまく

どの点からでも 30度/111点に
なる必要がある！

(最短になるから)

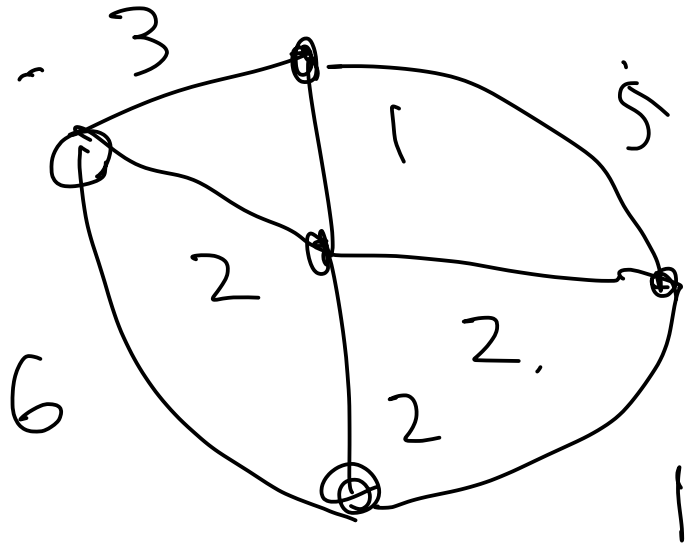


重心 = 30度/111点

正四面体の場合は重心に
かたまる

最小コストの木問題

あたえられた重み付きグラフに (V, E) と $T \subset V A - \text{ツリー}$ に対し、
それをあげた、可成木を $\{$
最も最小のものとする。

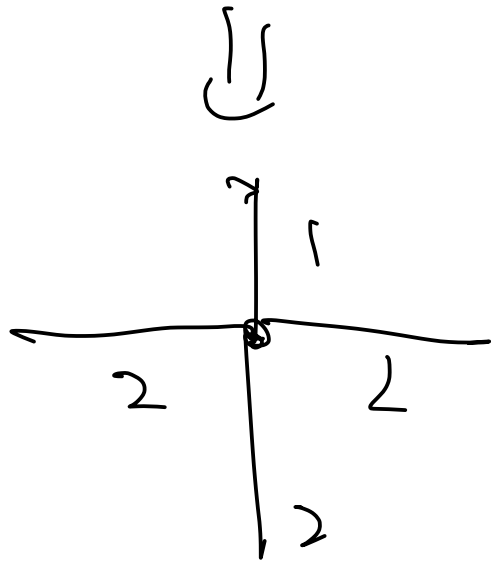


それをあげた、可成木を $\{$
最も最小のものとする。

$T = V$ の最も最小な木で

そのような最も最小のものは、

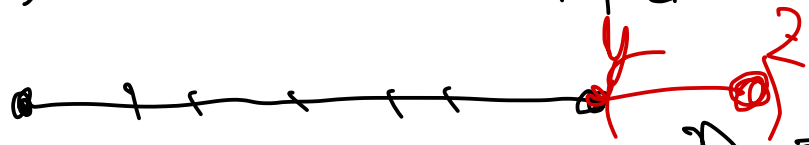
木 (連続で閉路) を作らない。
(クラス法, プリム法)



Thm 1f $\wedge$ いずれか一方は "2つより" の子に ≤ 2 最も多ければ

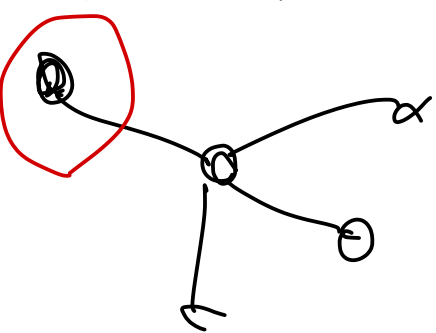
Prop 木 T の点有 $n \Rightarrow$ Σ は $n-1$ である。

Lemma $\forall$ 点 v について Σ が $2 \leq \deg v \leq 2$ についている v からは 閉路が通る。

Proof 最も長いパスを P とする。  $\Rightarrow$ 点 v に v は もう $\deg v = 1$ の点 v からは $\deg v = 2$ ではない $\Rightarrow$ 最も長いパス

Lemma 2 木 $T \Rightarrow \exists$ 点 v , $\deg v = 1$ Proof 上より $\deg v = 1$ である。

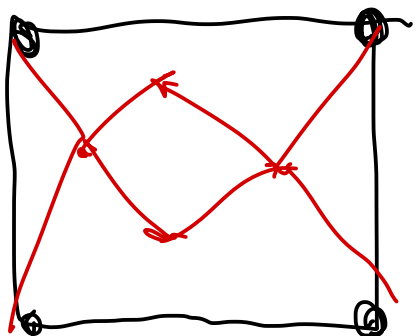
よって T は $\deg v = 1$ の点 v が 1 個 $n-1 \geq 0$ である。



$n = 1$ のとき、 $\deg v = 1$ の点 v と 1 の点 v は " $\deg v = 1$ である。

四点のミコトイ問題

正方形の四点を最短にむかう
点 $A, \dots, A_{n-1}$ はどこにあるか?



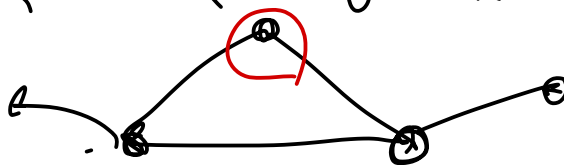
[em] $n=2$

[pf] $4+n$ 点をむすんだらそれは閉路が2つありた、(最初、

$\Rightarrow 4+n$: 木

$\Rightarrow$ 辺は $n+3$:

$\leftarrow$ n 点のには少なくとも3点、有る?

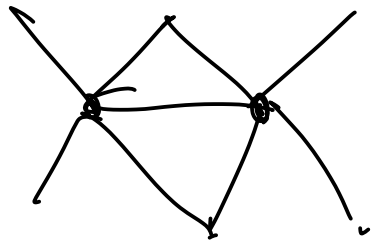


$\Rightarrow$



と最短は、

$$\Rightarrow \sum P \text{ は } \frac{3 \times n + 4}{2} \text{ 以上}$$



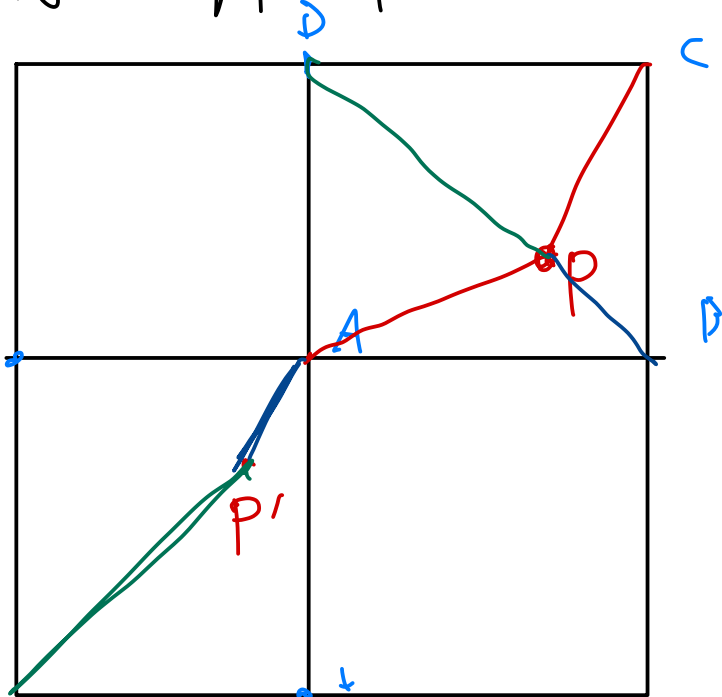
$\sum d = 2n$
 $\sum d = 2n$
 $\sum d = 2n$

double cut

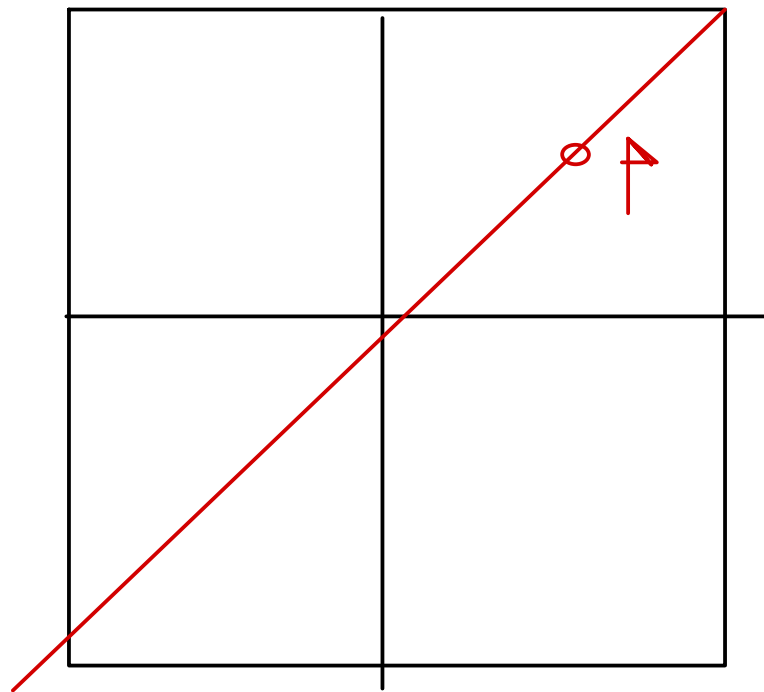
$$\Rightarrow \frac{3n+4}{2} \leq n+3 \Rightarrow n \leq 2.$$

したがって $n=1, 2$ だけが場合あり

$n=1$

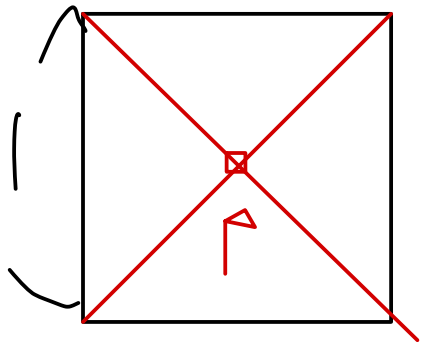


$\Rightarrow$



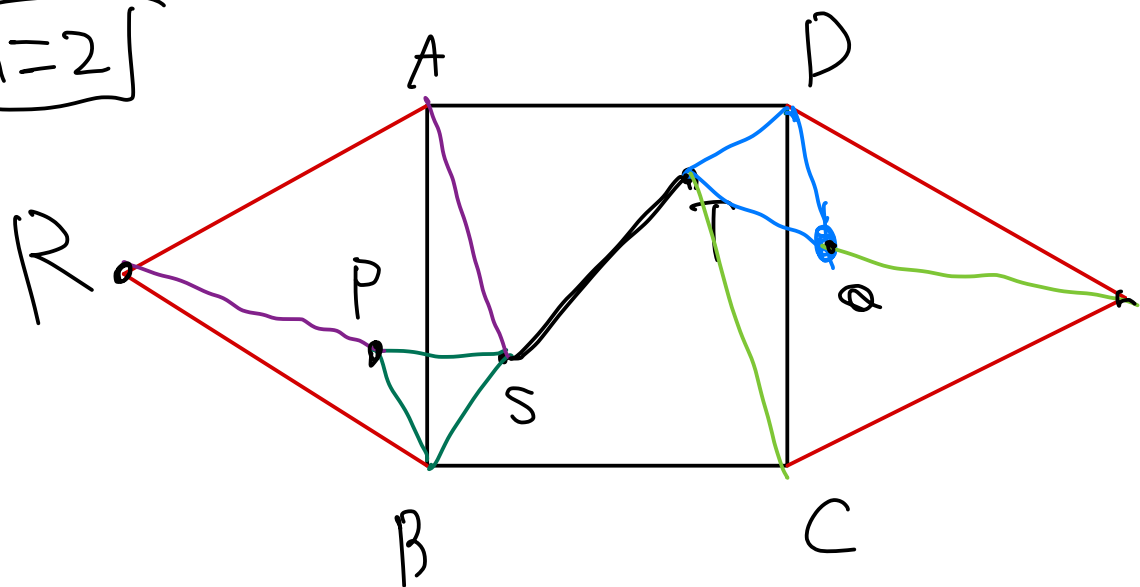
P は対角線上にある

$\Rightarrow$



P は ≈ 2.8 くらい $2\sqrt{2} \approx 2.8$

$(N=2)$



$AS + BS + ST + TD + TC$

$||$

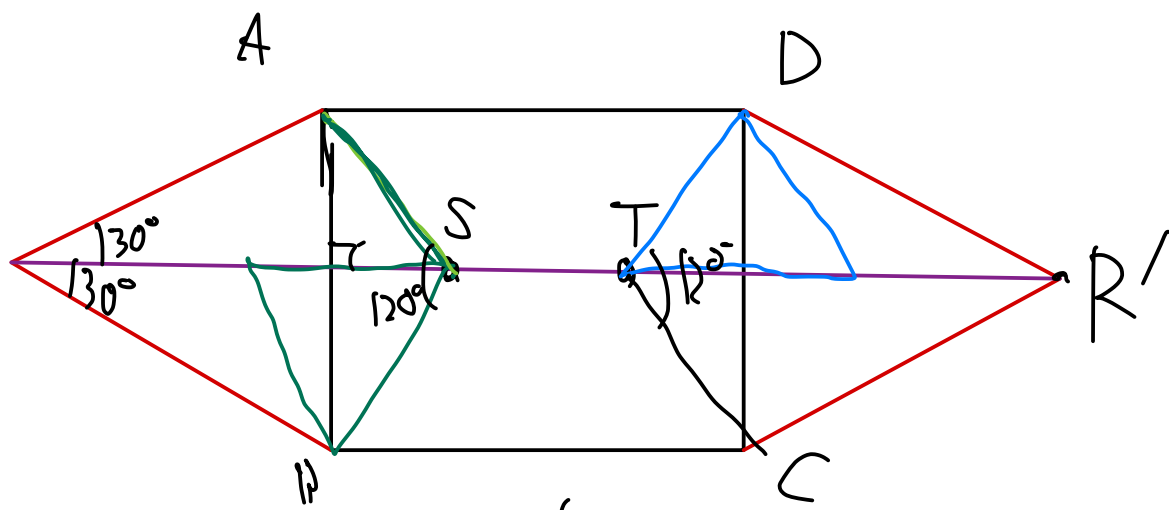
$PR + SP + ST + TQ + QR'$

R'

$R \quad R'$

$\therefore S, T$ は RR' 上にある

↑

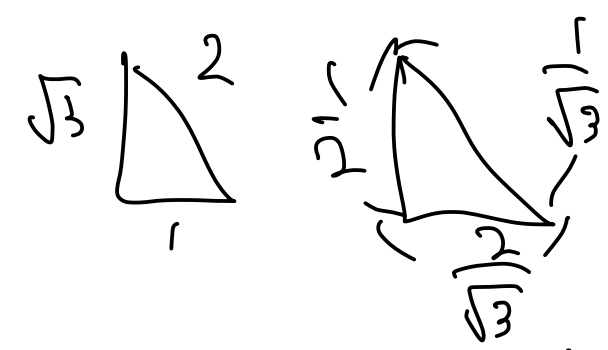
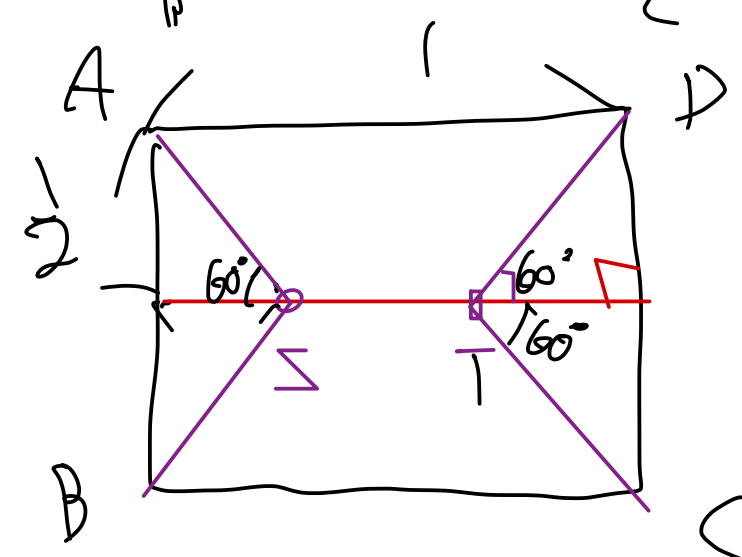


$AS = BS$
(正三角形の性質)

$\Rightarrow \angle ASB = 120^\circ$

ST は 左の三角形に等しい

∴



$AS = BS = CT = DT = \frac{1}{\sqrt{3}}$

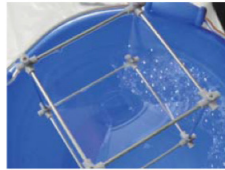
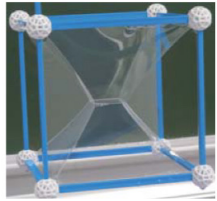
$ST = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow AS + BS + ST + DT + TC = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{3}{\sqrt{3}}$

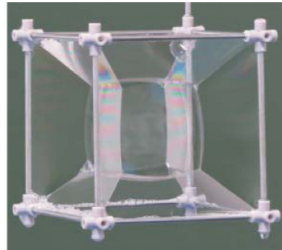
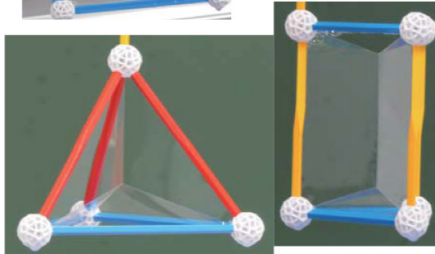
(∴) $n=2$ の場合が 2.6... $= 1 + \sqrt{3} \approx 2.6...$

石けんまくの秘密(2)

石けんまくは、いつも 120° でしか交わらない！



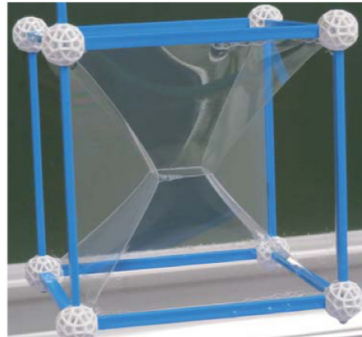
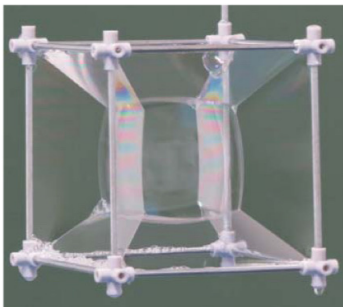
泡も！



今日のお話

下の写真は、立方体の形をした針金のわくに石けんのまくを張らせたものです。

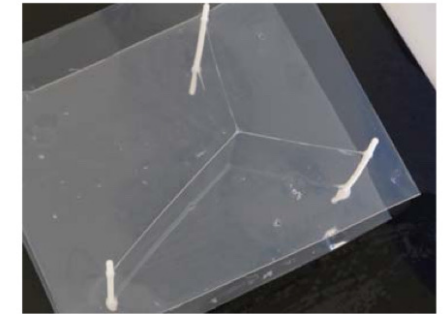
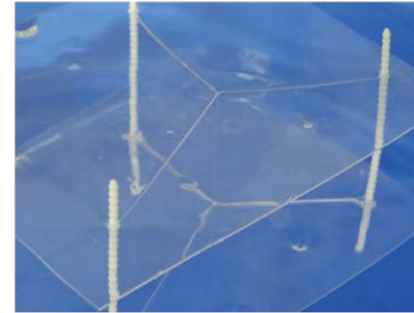
右は中に正方形が、左は中に球形ではないシャボン玉ができています！



今日は、石けんまくやシャボン玉が面積最小という性質を使って上の現象が起こる理由を説明します。

石けんまくは答えを知っている？

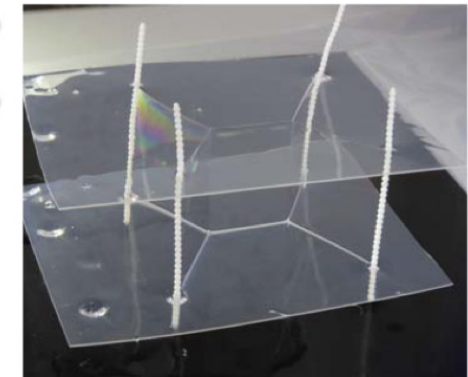
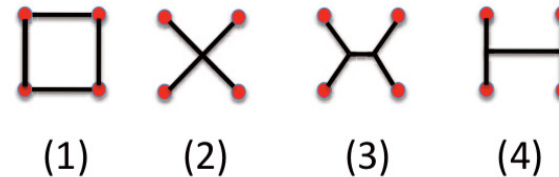
上の3点A, B, Cの状況を、プラスチックの板と棒で作る。それを、石けん液につけてそっと引き上げると、下図のような膜(まく)が張る。石けん膜は、膜にかかる力ができるだけ小さくなるように、すなわち、面積ができるだけ小さくなるよう形になる。したがって、プラスチックの板を上から見たときの膜の線の長さの和が最小になっている！ つまり、**三まいのまくが互いに 120° で交わっている！**



右の図のような四点をつなぐ
最短のネットワークは？

互いに 120° の角を成す線分たちより成ります！

つまり、下の図の(3)が正解です。



右の写真：
石けんまくも答えを知っていますね！

これは 2点 を
おいてみるの！