

学祭でのパズルの解説

岩井雅崇 (大阪大学)

October 31, 2025, version 0.01

展示用のパズルの解説書です.¹

1 岩井のパズル

1.1 タイル1.

図1のようなチェス盤は, 図2のような 2×1 のタイルで埋め尽くすことができないことを示せ.
ただし 2×1 のタイルは重なり合ってはいけないしはみ出てはいけない.

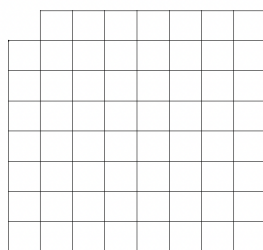


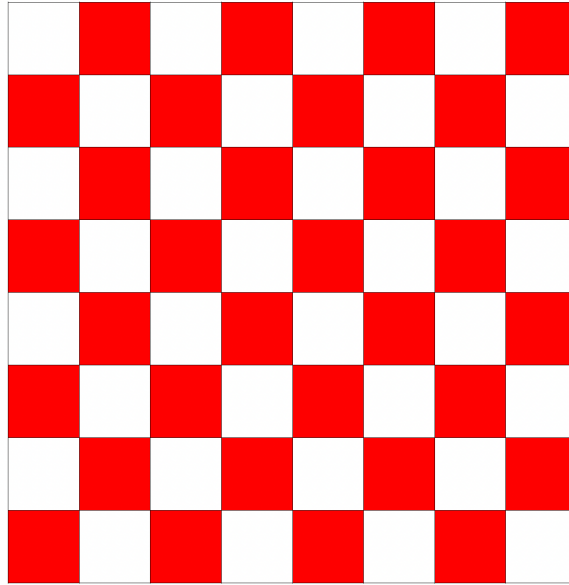
図1



図2

[答え] 下のように市松模様を描いたら, 赤色が32個, 白色が30個配置される. そして 2×1 のタイルをどこに配置しても, 赤色と白色一つずつなくなっていく. よってもし 2×1 のタイルで埋め尽くされればそれは赤色と白色が同数でなければいけないが, この状況ではありえない.

¹メールアドレス masataka.math@gmail.com, masataka@sci.osaka-cu.ac.jp



1.2 タイル 2.

図1のような 8×8 のタイルの上に、 1×1 タイルを好きなところにおく. このとき 1×1 タイルをどこにおいても, 図2のようなタイルで埋め尽くすことができることを示せ.
ただし図2のようなタイルは重なり合ってはいけなしいしはみ出てはいけない.

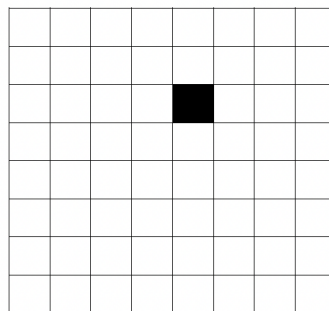


図 1



図 2

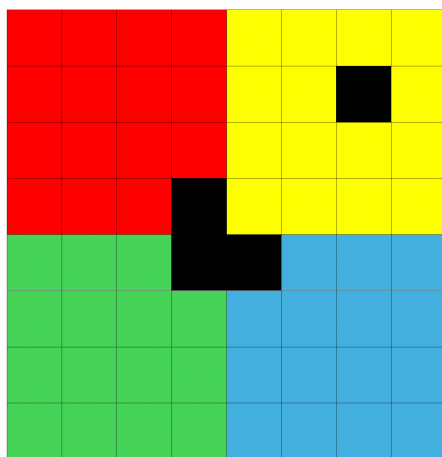
[答え] 実は $2^n \times 2^n$ でもできる.

数学的帰納法を用いる. $n = 2$ の時は明らか.

$n = k$ の時にできると仮定して $n = k + 1$ の時にできることを示す. タイルを $2^k \times 2^k$ タイルが4つになるように中心から4等分する.(下図のように赤緑青黄のように4等分する) さて黄色の部分に 1×1 タイルを置いたとしよう. そして赤緑青に跨るようにタイルを置

くすると, 赤緑青黄の部分は $2^k \times 2^k$ タイルから 1×1 タイルが除かれたものなので, 帰納法の仮定より図 2 のようなタイルで埋め尽くせる.

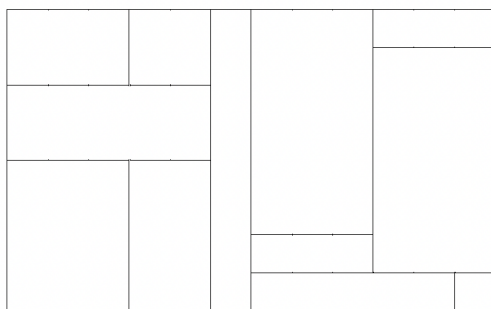
以上よ数学的帰納法でいえた. $k = 3$ の場合が今回欲しい結果である.



1.3 タイル 3.

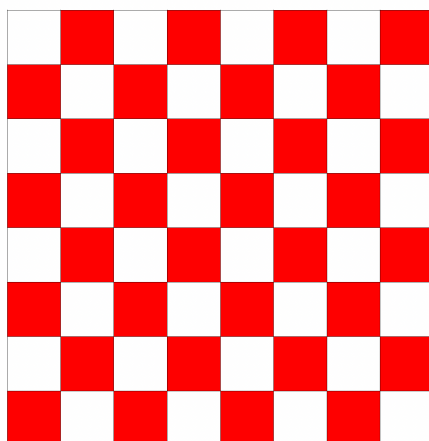
大きなタイルをたくさんの (有限個の) 小さな長方形に分割した. その際全ての小さな長方形の縦の長さもしくは横の長さのどちらか (あるいは両方とも) 整数であった.

このとき, 大きな長方形の縦の長さもしくは横の長さのどちらか (あるいは両方とも) 整数であることを示せ.



[答え] 一番簡単なのは下のように $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ずつ区切って, 市松模様を描く方法である. すると長方形の縦の長さもしくは横の長さのどちらか (あるいは両方とも) 整数ならば, 赤色と白色が同じ面積を持つことがわかる. 逆に, 長方形の縦の長さや横の長さがどちらも整数でなければ, 赤色と白色が同じ面積を持たない.

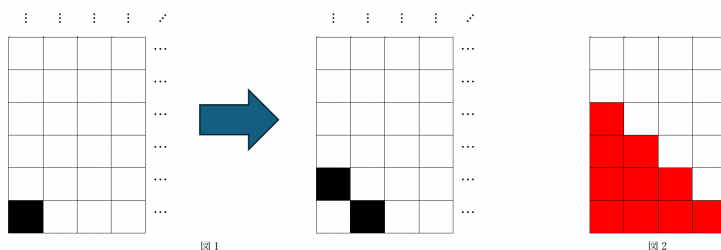
以上より, 小さな長方形の縦の長さもしくは横の長さのどちらか (あるいは両方ともが) 整数なので, 赤色と白色が同じ面積を持つ. よって長方形の縦の長さや横の長さがどちらも整数でないことはありえない.



1.4 Kontsevich のパズル

図 1 のようにタイルが無限に並んでいて, 左下のみ黒で他は白であるものを考える. 次の操作を何回やっても, 図 2 の赤色の部分に黒のタイルがあることを示せ.

[操作] 図 1 のように上も右も白であるような黒のタイルを選び, それを白タイルに変えて, その上も右も黒のタイルに変える.



[答え] 下図のように数を書いていく. (数学的にいうと, (i, j) 成分のところに $\frac{1}{2^{i+j-2}}$ を書く) すると黒色のタイルが乗っている部分に書かれた数を全てたすと, 必ず 1 になる. (つまり操作によってこの量は不変である)

あとは背理法. もし図 2 の赤色の部分に黒のタイルがなければ, その時の黒色の部分の総和 S は, 図 2 の赤色の部分以外の和以下なので,

$$S \leq \frac{5}{16} + \frac{6}{32} + \frac{7}{64} + \cdots = \frac{3}{4}$$

しかし黒色の部分の総和は1でないといけなないので矛盾.

$1/8$	$1/16$	$1/32$	$1/64$
$1/4$	$1/8$	$1/16$	$1/32$
$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$
1	$1/2$	$1/4$	$1/8$

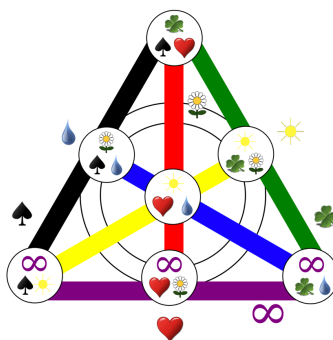
1.5 ドブル

7色 (赤, 橙, 黄, 緑, 青, 藍, 紫) のペンと7枚のカードある. 次のルールを考える.

1. どのカードにも相異なる3色の●印がある.
2. どの2枚のカードを取っても, 1つだけ共通する色の●印がある.

上のルール2つを満たすように色ペンを使ってカードに●印を書くことはできるだろうか?

[答え (簡単版)] まあ7個なので下の図が答えになる. なお <https://math.stackexchange.com/questions/36798/what-is-the-math-behind-the-game-spot-it> の画像を拝借した.



[com/questions/36798/what-is-the-math-behind-the-game-spot-it](https://math.stackexchange.com/questions/36798/what-is-the-math-behind-the-game-spot-it) の画像を拝借した.

この図が言っていることは以下の通り.

- 7点にカードを対応させる.

- 直線や円に色 (赤, 橙, 黄, 緑, 青, 藍, 紫) を対応させる.

[答え (難しい版)] p を素数として, その 2 次元射影空間 $X = F_p \mathbb{P}^2$ を考える. X の点の個数は $\frac{p^3-1}{p-1} = p^2 + p + 1$ である. そこで次を考える.

- X の点にカードを対応させる.
- X の直線に色を対応させる.

すると次がわかる.

- 相異なる直線 3 つを通る点はただ一つに定まる. これは”どのカードにも相異なる 3 色の $\bullet$ 印がある”に対応する.
- 二つの異なる点を結ぶ直線はただ一つに定まる. これは”どの 2 枚のカードを取っても, 1 つだけ共通する色の $\bullet$ 印がある”に対応する.

今 $p = 3$ の場合は $2^2 + 2^1 + 1 = 7$ よりできる.

なお $p = 7$ の時は $7^2 + 7^1 + 1 = 57$ である. ポケモンのダブルに出てくるポケモンの数は 57 匹である. (ちなみにカード数はなぜか 55 枚である. 57 枚でもできる.)

1.6 11111.....

p を 2 や 5 でない素数とする. $11111 \cdots 111$ という 1 が何個か並んだ形の p の倍数が存在することを示せ.

[答え] a_n を 1 が n 個並んだ数を p で割ったあまりとする. すると $a_1, a_2, \dots, a_p, a_{p+1} \in \{0, \dots, p-1\}$ であるので, 鳩の巣論法より, $a_i = a_j$ となる $i < j$ が存在する (もし全て異なっていたら $\{0, \dots, p-1\}$ の中に $p+1$ の数が含まれてしまう!)

そこで

$$\underbrace{11111 \cdots 111}_{j \text{ 個}} - \underbrace{11111 \cdots 111}_{i \text{ 個}}$$

を考える. するとこれを p で割ったあまりは $a_j - a_i$ に等しく, それは 0 となる. よって

$$\underbrace{11111 \cdots 111}_{j \text{ 個}} - \underbrace{11111 \cdots 111}_{i \text{ 個}} = \underbrace{11111 \cdots 111}_{j-i \text{ 個}} \times 10^i$$

を p で割ったあまりも 0 となる.

p を 2 や 5 でない素数なので 10^i は p で割り切れない. よって $\underbrace{11111 \cdots 111}_{j-i \text{ 個}}$ が p で割り切れる.

1.7 2010 年大阪大学理系第 3 問

l, m, n を 3 以上の整数とする. 等式

$$\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right) l = 2$$

を満たす l, m, n の組を全て求めよ.

[解説] おそらく有名な問題なので解答は割愛する. 答えは

$$(l, m, n) = (4, 3, 3), (6, 3, 4), (8, 4, 3), (12, 3, 5), (20, 5, 3)$$

である. 要は正多面体が 5 個しかないことの整数的な解釈となる. まあこの問題の答えや正多面体の話はネットにいっぱい乗っているのだから, 別の話をする.

この問題の要はオイラーの多面体定理である. ざっくりゆくと

球と同相な多面体の面の数 F , 辺の数 E , 頂点の数 V とすると

$$F - E + V = 2$$

が成り立つ

数学科の展示に正多胞体がある. この場合には

$$\text{胞 (立体) の数} - \text{面の数} + \text{辺の数} - \text{頂点の数} = 0$$

となる. この右辺に現れる 2 や 0 は実は n 次元球面 S^n のオイラー数である.

$$S^2 \text{ のオイラー数} = 2 \quad S^3 \text{ のオイラー数} = 0$$

である. 実は一般に m を整数として, S^{2m} のオイラー数 $= 2$, S^{2m+1} のオイラー数 $= 0$ である. なので, 5 次元に行った場合でも

$$5 \text{ 次元立体の数} - 4 \text{ 次元立体の数} + 3 \text{ 次元立体の数} - \text{面の数} + \text{辺の数} - \text{頂点の数} = 0$$

となる.

ちなみにこの式だけで正多胞体を分類することはできない. 4 次元の正多胞体を

$$\text{胞 (立体) の数} - \text{面の数} + \text{辺の数} - \text{頂点の数} = 0$$

を用いて分類すると 11 種類の可能性が出てくる. しかしあり得るのは 6 種類である. なので残りの 5 種類は幾何学的な条件 (シュレフリー条件) を満たさないで弾かれる.

1.8 コイン 1

テーブル上に 10 個の硬貨が一行に並んでいる。その硬貨の額は 1 円か 5 円か 10 円である。

あなたと私の二人で次のルールの下、以下のゲームを行う。

- 列のうち左端か右端の硬貨を取る。その後次の人に手番をわたす。
- とった硬貨の総額が多い方が勝ち。同じであれば引き分け。

ゲームに”負けたくない”あなたなら先手・後手どちらを選べば良いだろうか？ またその際どのような戦略を取れば良いだろうか？



[答え] やはり市松模様を考える。するとこのルールの元では一回赤色の上のコインをとると、ゲームが終わるまで赤色のコインを取り続けることになる。

なのでゲームに”負けたくない”あなたは先手を選び、赤色の上のコインの総額と白色の上のコインの総額のうち大きい方を選べば、負けることはない(ただし引き分けはありうる)



1.9 コイン 2

テーブル上に 25 個の 1 円玉がある。あなたと私の二人で次のルールの下、以下のゲームを行う。

- テーブルの上の 1 円玉から、1 枚か 2 枚か 3 枚のコインを取る。その後次の人に手番をわたす。
- 最後の 1 円玉を取った人が負け。

ゲームに”負けたくない”あなたなら先手・後手どちらを選べば良いだろうか？ またその際どのような戦略を取れば良いだろうか？

[答え] こういう問題は 1 円玉の枚数が少ない状態から始めるのが吉である。



- 1 枚の時. この場合は先手の負けである.
- 2 枚の時. この場合は先手には次の 2 つの手がある.
 1. 1 枚とる. この時後手は”1 枚の状況になる (負けの状況)”になるので, 先手の勝ち (後手の負け)
 2. 2 枚とる. 負けが確定.

よってこの場合は先手の勝ちで, 初手で 1 枚取れば良い.
- 3 枚の時. 先手には次の 3 つの手がある.
 1. 1 枚とる. この時後手は”2 枚の状況になる (勝ちの状況)”になるので, 先手の負け (後手の勝ち)
 2. 2 枚とる. この時後手は”1 枚の状況になる (負けの状況)”になるので, 先手の勝ち (後手の負け)
 3. 3 枚とる. 負けが確定.

よってこの場合は先手の勝ちで, 初手で 1 枚取れば良い.
- 4 枚の時. (省略すると) 先手の勝ち
- 5 枚の時. (省略すると) 先手の勝ち 先手には次の 3 つの手がある.
 1. 1 枚とる. この時後手は”4 枚の状況になる (勝ちの状況)”になるので, 先手の負け (後手の勝ち)
 2. 2 枚とる. この時後手は”3 枚の状況になる (勝ちの状況)”になるので, 先手の負け (後手の勝ち)
 3. 3 枚とる. この時後手は”2 枚の状況になる (勝ちの状況)”になるので, 先手の負け (後手の勝ち)

よってこの場合は先手の負けである.

よってコインの枚数を n として, $g(n)$ を W (先手の勝ち) か L (先手の負け) とした場合

- $g(n-1) = L$ か $g(n-2) = L$ か $g(n-3) = L$ ならば $g(n) = W$ とする. これは先手が n 枚から 1 ~ 3 枚取れば, 後手が必ず負けるような枚数になっているから.
- $g(n-1) = g(n-2) = g(n-3) = W$ ならば $g(n) = L$ これは先手が n 枚から 1 ~ 3 枚をどう取っても, 後手が必ず勝つ枚数になっているから.

というように $g(n)$ を定める.

下の図は $g(n) = L$ を赤色にした図である

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

この図を見ると $g(25) = L$ より先手は負ける (後手必勝) 後手の動き方は”相手が $g(l) = L$ ” となるような l 枚の状況になるように石を取る. もっと平たくいうと必勝法は

先手が赤色のコインを必ず取るように, コインをとっていく

である. つまり赤色の直前のコインまで取れば良い.

1.10 コイン 2'

テーブル上に 25 個の 1 円玉がある. あなたと私の二人で次のルールの下, 以下のゲームを行う.

- テーブルの上の 1 円玉から, 1 枚か 3 枚か 4 枚 のコインを取る. その後次の人に手番をわたす.
- 最後の 1 円玉を取った人が負け.

ゲームに”負けたくない”あなたなら先手・後手どちらを選べば良いだろうか? またその際どのような戦略を取れば良いだろうか?

[答え]

よってコインの枚数を n として, $g(n)$ を W (先手の勝ち) か L (先手の負け) とした場合

- $g(n-1) = L$ か $g(n-3) = L$ か $g(n-4) = L$ ならば $g(n) = W$ とする. これは先手が n 枚から 1, 3, 4 枚取れば, 後手が必ず負けるような枚数になっているから.
- $g(n-1) = g(n-3) = g(n-4) = W$ ならば $g(n) = L$ これは先手が n 枚から 1, 3, 4 枚をどう取っても, 後手が必ず勝つ枚数になっているから.

というように $g(n)$ を定める.

下の図は $g(n) = L$ を赤色にした図である

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

この図を見ると $g(25) = W$ より先手は勝つ後手の動き方は”相手が $g(l) = L$ ”となるような l 枚の状況になるように石を取る. もっと平たくいうと必勝法は

後手が赤色のコインを必ず取るように, コインをとっていく

である. つまり赤色の直前のコインまで取れば良い.

1.11 コイン 3

1 円玉が裏向きに 5×5 の正方形に並んでいる. 次の操作を考える.

- 縦か横に連続する 3 枚の 1 円玉を同時にひっくり返す.

この操作を何回かして全ての 1 円玉を表向きにできるか?



[答え] できない. 下のように赤青白で塗る. 赤は 9 枚, 青白 8 枚である.

もしできたとすると, 赤の上のコインをひっくり返すのには奇数回かかることになる. 一方で青・白の上のコインをひっくり返すのには偶数回かかることになる.

しかしこの操作では赤青白のコインが一斉にひっくり返るので、コインをひっくり返す回数の偶奇は赤・青・白で一致しないといけないので、矛盾.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1.12 $1 + \sqrt{2}$

$(1 + \sqrt{2})^{2025}$ の小数第 100 位を求めよ.

[答え]

$$(\sqrt{2} + 1)^{2025} - (\sqrt{2} - 1)^{2025}$$

は整数である. よって $(\sqrt{2} + 1)^{2025}$ はある整数から $(\sqrt{2} - 1)^{2025}$ を足したものである.

$$\sqrt{2} - 1)^{2025} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2000} = \left(\frac{1}{1024}\right)^{200} = 10^{-600}$$

なので, $(\sqrt{2} - 1)^{2025}$ は小数第 600 位くらいに初めて 0 でない数字が来るかもしれない(くらい) 小さい. よって小数第 100 位は 0 である.