みて，さわってひらめく！ 数学パズルの解説

学祭配布用・やさしい解説集

岩井雅崇

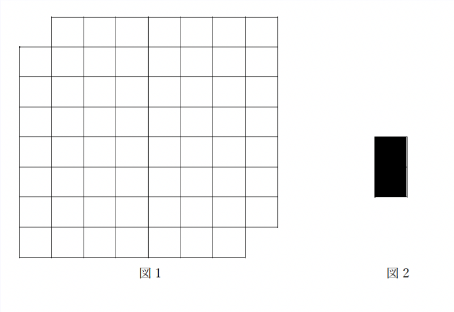
はじめに

ここにあるパズルは岩井のホームページ https://masataka123.github.io/blog3/sub6/ に載っているものです．詳しい引用などはそちらを参照してください．

1. パズル 1. しきつめられる？

問題

たて 2 マスのタイルだけを使って右の形をぴったりうめることはできるかな？ まずは”できそう/ できなさそう”を予想してみよう。

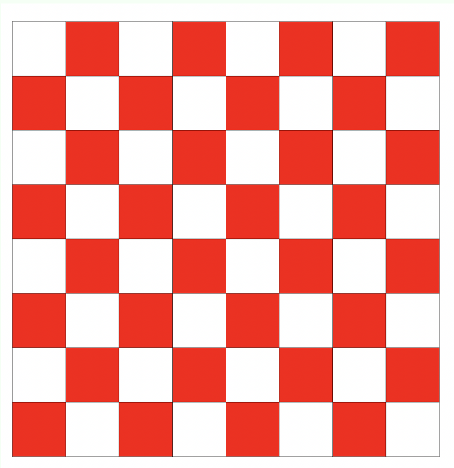


ヒント

ヒント: 白と赤で色ぬりすると、理由が見えてくるかも！

解説

タイルを下の図のように赤色と白色に交互に塗ってみましょう．



すると左上と右下のマスをのぞけば，赤いマスは 32 こ，白いマスは 30 こあります．

一方 2×1 のタイルを 1 枚置くと，赤いマス 1 つと白いマス 1 つをちょうどおおいます．つまり，タイルを何枚置いても，赤と白はいつも同じ数ずつ減っていきます．

ということは，もし全部をうめられるなら，最初から赤マスの数と白マスの数は同じでないといけません．

ところが，この盤面では赤マスと白マスの数がちがいます．だからどんなにがんばっても 2×1 のタイルだけで全部をうめることはできません．

2. パズル 2. 最後を取ったらまけ！

問題

25 枚から、1 回に 1・2・3 枚とる。最後の 1 枚を取った人が負け。先手と後手、どちらが有利かな？

ヒント

ヒント．5 枚の場合は先手と後手，どちらが有利かな？

解説

このゲームでは，いきなり 25 枚の場合を考えるより，まずは少ない枚数から順番に調べるのがコツです．

● コインが 1 枚だけなら，その 1 枚を取った人が負けなので，先手は負けです．

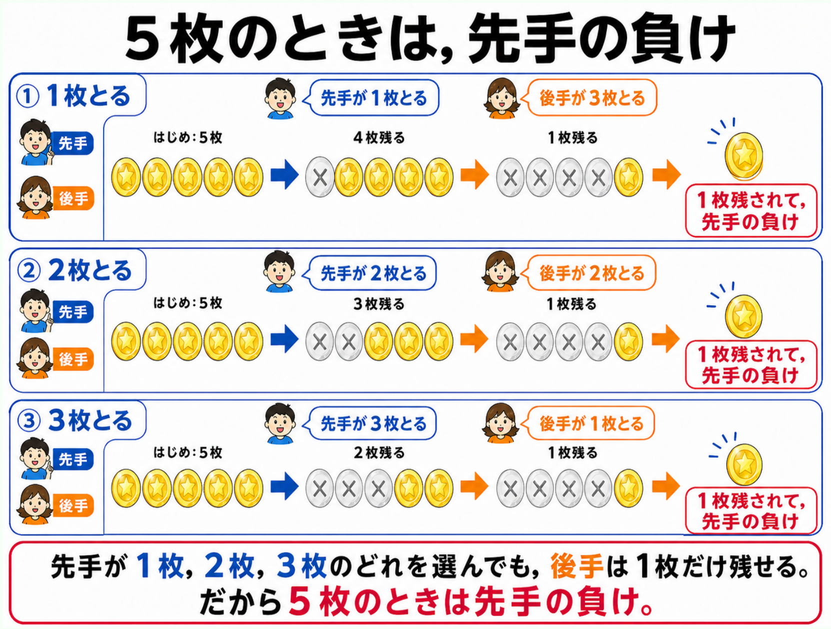
● 2 枚ならどうでしょうか．先手が 1 枚だけ取ると，相手には 1 枚だけ残ります．相手は最後の 1 枚を取るしかないので，先手の勝ちです．

● 3 枚なら先手が 2 枚取り，4 枚なら先手が 3 枚取れば，相手に 1 枚だけ残すことができます．よって 3・4 枚のときは先手の勝ちです．

● では，5 枚ならどうでしょうか．先手は 1 枚，2 枚，3 枚のどれかを取るしかありません．

- 1 枚取ると，相手に 4 枚残ります．
- 2 枚取ると，相手に 3 枚残ります．
- 3 枚取ると，相手に 2 枚残ります．

しかし，2 枚，3 枚，4 枚はどれも「先手が勝てる形」でした．つまり，5 枚のときは，先手がどう取っても，相手に勝てる形を渡してしまいます．したがって，5 枚は先手の負けです．



ここから，次の考え方が見えてきます．

相手に「負けの形」を渡せるなら勝ち．
どう取っても相手に「負けの形」を渡せないなら負け．

このルールで，1 枚から順番に調べていくと，先手が負ける枚数は

$$1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ 25$$

になります．つまり，4 枚ごとに「負けの形」が現れます．下の図では，その「負けの形」を赤色で表しています．

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

25 枚は赤色，つまり「負けの形」です．したがって，このゲームでは後手を選ぶのが有利です．後手は，自分の番が終わったあとに，いつも赤色の枚数

$$1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ 25$$

が残るように取れば勝てます．

3．パズル 3．おそろいはいつも 1 つだけ

問題

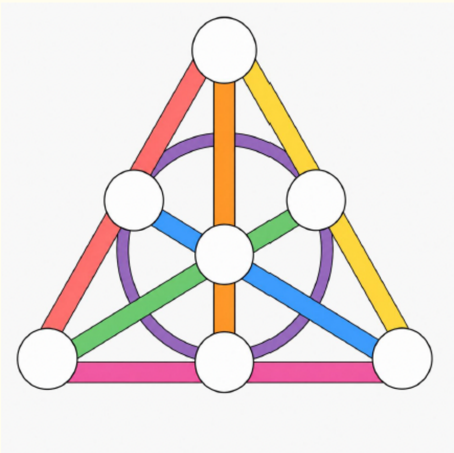
7 まいのカードと 7 色の色で

- どのカードにも 3 色。
- どの 2 まいにも共通の色は 1 つだけ。

というカードは作れるかな？

ヒント

下の図がヒントになるかも！



解説

図が大きなヒントになっています．考え方はこうです．

- カードを「点」だと思う．
- 色を「線」だと思う．

すると，

- 1 枚のカードに 3 色あることは，1 つの点に 3 本の線が集まることに対応します．

- 2 枚のカードに共通の色が 1 つだけあることは，2 つの点を通る線が 1 本だけあることに対応します．

つまり，カードのルールは図形の世界のきれいなルールそのものなのです．これを元にカードを作るとこのようになります．

ひとこと

安田健彦先生の本”ゲームで大学数学入門: スプラウトからオイラー ゲッターまで”に詳しい解説がのっています．一般に素数 p について

$$\text{カードの個数} = \text{色の個数} = p^2 + p + 1$$

ならば，「どのカードにも $p+1$ 色，どの 2 まいにも共通の色は 1 つだけ」となるようなカードが作れます．ポケモンのドブルは $p = 7$ の時で

$$\text{色 (ポケモン) の個数} = 7^2 + 7 + 1 = 57$$

となっています．

もっと難しいことを言うと，これは $\mathbb{F}_p$ 上の射影平面 $\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$ の直線と点がこのカードと色に対応します．($\mathbb{F}_p\mathbb{P}^2$ の点の個数は $p^2 + p + 1$ 個) 気になる人は安田先生の本を読もう！

ちなみに阪大数学科の 2 年生にこの問題を出しましたが，誰も解いてくれませんでした．

4. パズル 4. ルールが変わると？

問題

今度は 25 枚から、1・3・4 枚とれる！ さっきの作戦はそのまま使える？ 先手と後手、どちらが有利かな？

ヒント

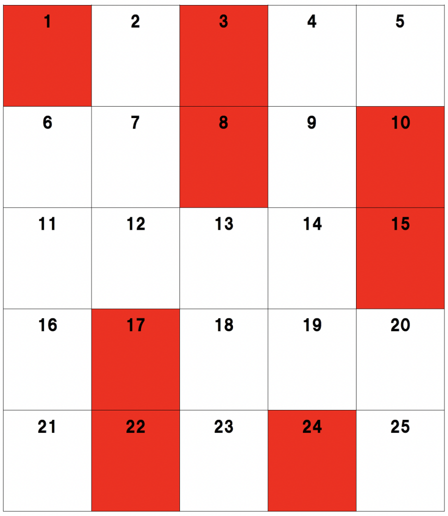
まずは先手が負ける枚数を探してみよう!

解説

考え方はパズル 2 と同じです．

相手に「負けの形」を渡せるなら勝ち．
どう取っても相手に「負けの形」を渡せないなら負け．

1 枚, 2 枚, 3 枚, …と順番に, 勝ちの形か負けの形かを調べていきます．ただし, 取れる枚数が変わったので, 勝ち負けの並び方も変わります．
下の図では, その「負けの形」を赤色で表しています．



今度の 25 枚は「勝ちの形」になります．だから, この場合は先手が有利です．
先手は自分の番が終わったあとに, いつも赤色の枚数

$$1,\ 3,\ 8,\ 10,\ 15,\ 17,\ 22,\ 24$$

が残るように取れば勝てます．

ひとこと

競技プログラミングで有名な問題です．プログラミングコンテストチャレンジブック (通称”あり本”) の Grundy 数の部分に解説が載っていると思います．私も一時期競技プログラミング (AtCoder) をやっていたので，その関連で出してみました．

5. パズル 5. 3 まい返しで全部おもてに？

問題

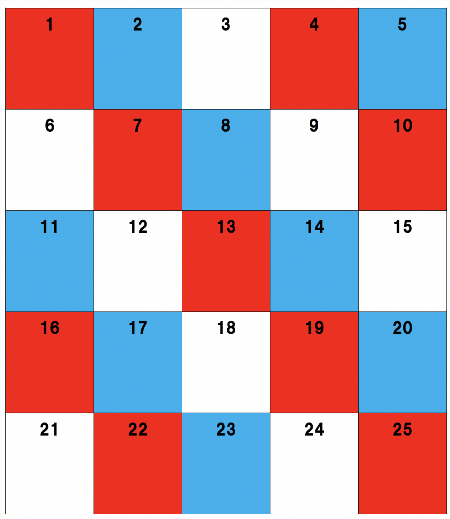
5×5 の 1 円玉は、みんな裏むき。1 回で返せるのは、たてかよこに続く 3 枚だけ。全部表にできるかな？

ヒント

パズル 1 の考え方が使えないかな？

解説

コインを白・赤・青の 3 色に交互に塗りましょう．



赤色は 9 枚，青白 8 枚になります．

考え方のポイントは偶奇に着目することです．たてでもよこでも，連続する 3 枚をひっくり返すと必ず 3 色が 1 枚ずつ動くようにできます．

なので 3 色それぞれについて何回ひっくり返されたかの奇数，偶数がいつもそろうことになります．

しかしながら

- 赤色は 9 枚を表向きにするためには奇数回ひっくり返さないといけません．
- 青 8 枚を表向きにするためには偶数回ひっくり返さないといけません．

なので「3 色の偶奇はそろう」という性質に反します．したがって，全部を表にすることはできません．

6. パズル 6. 1 が並ぶ数

問題

p が 2 と 5 でない素数なら、111…1 の形をした数で p の倍数となるものが必ずあるよ。なぜだろう？

ヒント

大きい数そのものではなく，p で割ったあまりを見ます．

解説

1 が 1 個並んだ数，2 個並んだ数，3 個並んだ数，…を考えましょう．$a_1, a_2, a_3, \ldots$ します．

$$a_i = \underbrace{11\cdots11}_{1\text{ が }i\text{ 個}}$$

となります．

これらを p で割ったあまりを考えます．あまりは

$$0, 1, 2, \ldots, p-1$$

の p 種類しかありません．

なので最初の $p+1$ 個，$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{p+1}$ を考えると，あまりの種類より数のほうが多いので，同じあまりになるものが必ず 2 つあります．これを a_i, a_j としておきます．

この二つの差 $a_j - a_i$ は p で割り切れます．一方その 2 つを引き算すると，途中に 0 がならんだ形になります．つまり，

$$a_j - a_i = \underbrace{11\cdots11}_{1\text{ が }j-i\text{ 個.}} \underbrace{00\cdot00}_{0\text{ が }i\text{ 個.}}$$

という形になります．よって「1 が何個か並んだ数」に 10 のべき乗をかけたものが p で割り切れることがわかります．

ここで p は 2 でも 5 でもないので，10 のべき乗は p で割り切れません．したがって，もとの「1 が何個か並んだ数」そのものが p で割り切れることになります．つまり 1 が $j-i$ 個並んだものが p の倍数になります．

ひとこと

ピーター ウィンクラーの" とっておきの数学パズル" から． AtCoder の evima さんの Youtube" えびまラボ" にも詳しい説明があります．

7. パズル 7. 小数第 100 位は?

問題

$(1+\sqrt{2})^{2000}$ の小数第 100 位は?

ヒント

$(1+\sqrt{2})$ の相方を探そう!

解説

二項定理を用いると

$$(\sqrt{2}+1)^{2000}+(\sqrt{2}-1)^{2000}$$

は整数になります．よって $(1+\sqrt{2})^{2000}$ は整数からとても小さい数 $(\sqrt{2}-1)^{2000}$ を引いたものになるので答えは 9 です．

厳密に証明するなら

$$0<\sqrt{2}-1<\frac{1}{2} \quad 2^{10}=1024>1000=10^3$$

なので，

$$0<(\sqrt{2}-1)^{2000}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2000}=\left(\frac{1}{2^{10}}\right)^{200}<\left(\frac{1}{1000}\right)^{200}=10^{-600}$$

です． $M=(\sqrt{2}+1)^{2000}+(\sqrt{2}-1)^{2000}$ とおけば

$$\underbrace{M}_{\text{整数}}>(1+\sqrt{2})^{2000}=M-(\sqrt{2}-1)^{2000}>\underbrace{M}_{\text{整数}}-10^{-600}$$

なので小数第 100 位は 9 になります．

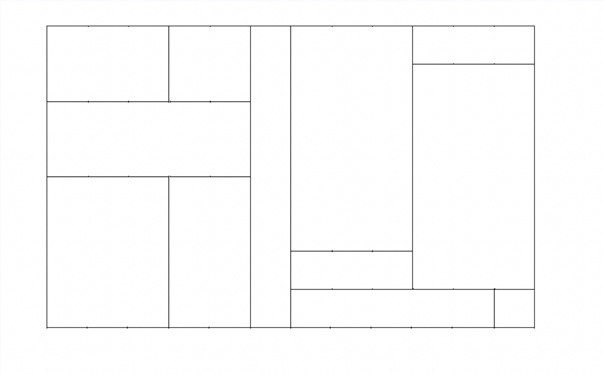
ひとこと

ピーター ウィンクラーの" とっておきの数学パズル" から．岩井が学生の時，一時期大学院生の中でこの問題で大盛り上がりしました．

8. パズル 8. 小さく割ると整数．全体は？

問題

下の図の全ての小さな長方形は、たてかよこのどちらかが整数。



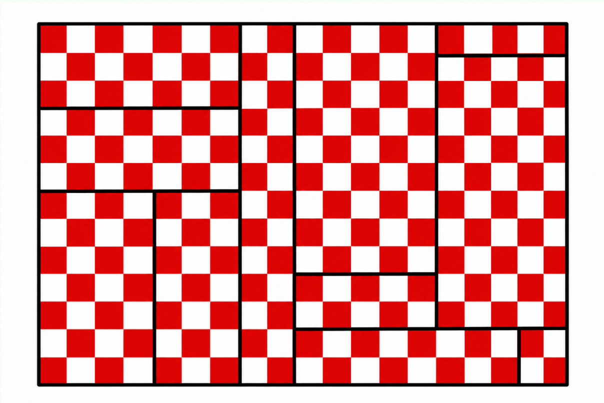
このとき、大きな長方形のたてかよこも整数になる。なぜだろう？

ヒント

パズル 1 の考え方が使えないかな？

解説

実はこれもパズル 1 と同じくして長方形全体を長さ $\frac{1}{2}$ の正方形に細かく区切って, 赤色と白色に交互に塗っていきます.



すると次がわかります.

- 長方形のたてかよこのどちらかが整数なら, 赤い部分と白い部分の面積が同じ.
- 長方形のたてかよこのどちらかも整数出ないなら, 赤い部分と白い部分の面積は異なる.

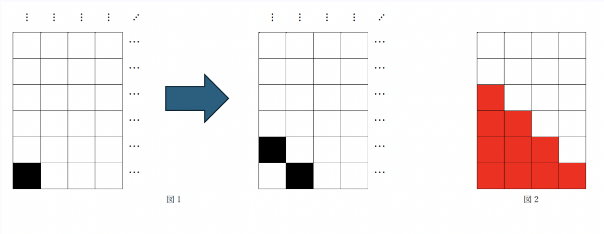
小さな長方形のたてかよこのどちらかが整数なのでその中では赤い部分と白い部分の面積が同じになります. なので全部合わせた大きな長方形でも, 赤と白の面積は同じになるはずです. なので大きな長方形でもたてかよこのどちらかは整数でないといけません.

ひとこと

ピーター ウィンクラーの” とっておきの数学パズル” から．天書の証明や AtCoder の evima さんの Youtube” えびまラボ” にも詳しい説明があります．

9. パズル 9. Kontsevich のパズル

問題



一番左の盤面からスタート。上と右が白マスである黒マスを 1 つ選び、その黒マスを消すかわりに、上と右に黒マスを 1 つずつ増やします。この操作を何回くり返しても、赤い階段の部分から黒マスは消えません。なぜだろう？

ヒント

各盤目に数を振り分けて操作不変量をつくろう!

解説

それぞれのマスに, 数を書いていきます. 一番左下は 1, そこからそのマスの上と右に $\frac{1}{2}$. 以後, あるマスの上と右にはそのマスの $\frac{1}{2}$ 倍の数を書いていきます.

1/8	1/16	1/32	1/64
1/4	1/8	1/16	1/32
1/2	1/4	1/8	1/16
1	1/2	1/4	1/8

すると 1 回の操作をしても黒マスに書かれた数の合計は変わりません. 1 つ消えますが, そのぶん上と右に分かれて, 合計がちょうど同じになるようにしてあるからです.

最初は左下の黒マス 1 つだけなので, 合計は最初からずっと 1 のままです.

では，もし赤い部分に黒マスが 1 つもなかったとしたらどうなるでしょうか．その場合，黒マスは赤い部分の外側にしかありません．でも，外側にある数を全部足しても，合計は 1 より小さくなってしまいます．実際，赤い部分以外の数の和は

$$\frac{5}{16}+\frac{6}{32}+\frac{7}{64}+\cdots=\sum_{k=4}^{\infty}\frac{k+1}{2^k}=\frac{3}{4}<1$$

となります．

これは，合計がずっと 1 だという事実に反します．したがって，赤い部分には必ず黒マスが残ります．

ひとこと

数学者、Kontsevich(コンツェビッチ) が出したパズル”Escape of the Clones” が元ネタです．” ピーター・フランクルの中学生でも分かる大学生にも解けない数学” も参考にしました．Kontsevich はフィールズ賞 (数学のノーベル賞) をとっております．

10. パズル 10. 無限人の囚人は助かるか？

問題

地獄に囚人が 1,2,3,⋯と (可算) 無限人並んでいます。鬼は全員に赤か白の帽子をかぶせます。各囚人は自分の帽子だけ見えません。しかし他の全員の帽子は見えます。

全員が同時に、自分の帽子の色を答えます。ゲーム開始後の相談は禁止。ただし、開始前なら作戦を相談できます。

まちがえた人が有限人だけなら囚人側の勝ち。まちがえた人が無限人なら囚人側の負けです。

どんな帽子のかぶせ方をされても、囚人たちは必ず勝てるでしょうか？

解説

ここでは，数学科 2 年生で学ぶ「集合と位相」程度の集合の扱いを仮定します．また，選択公理を仮定します．なお，選択公理を使わずにこの作戦を作れるかどうかは，ここでは考えないことにします．

$X=\{1,2,3,\ldots\}$ とし，そのべき集合 $\mathfrak{P}(X)$ を考えます．$\mathfrak{P}(X)$ 上に次の関係を入れます．

$$A\sim B \iff (A\setminus B)\cup(B\setminus A)\ \text{が有限集合}$$

と定めます．つまり，$A\sim B$ とは，A と B が有限個の要素を除いて一致する，という意味です．例えば，

$$\text{偶数全体の集合}\sim\text{偶数全体の集合}\cup\{1,3\}$$

となります．これは 2 か所しか違わないからです．この関係 $\sim$ は $\mathfrak{P}(X)$ 上の同値関係になり

ます．$A \subset X$ に対して，

$$C(A) := \{K \in \mathfrak{P}(X) \mid K \sim A\}$$

と書きます．これは A の同値類です．

さて選択公理により，各同値類から代表元をちょうど 1 つずつ選ぶことができます．つまり，ある部分集合 $\mathcal{S} \subset \mathfrak{P}(X)$ であって，次を満たすものが存在します．

$$\mathfrak{P}(X)/\sim = \{C(A) \mid A \in \mathcal{S}\}, \quad A, B \in \mathcal{S},\ A \neq B \Longrightarrow C(A) \neq C(B).$$

このような $\mathcal{S}$ を，商集合 $\mathfrak{P}(X)/\sim$ の完全代表系と呼びます．要するに，$\mathfrak{P}(X) = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} C(A)$ であり，どの帽子の配置も，ちょうど 1 つの代表元 $A \in \mathcal{S}$ と「有限個しか違わない」と思える，ということです．

この完全代表系 $\mathcal{S} \subset \mathfrak{P}(X)$ を囚人たちの作戦書にします．囚人たちは $1, 2, 3, \ldots$ と番号づけて，ゲームの前に，この $\mathcal{S}$ を全員で共有しておきます．鬼が帽子をかぶせたあと，囚人 k は自分より後ろの囚人 $k+1, k+2, k+3, \ldots$ の帽子を見ることができます．そこで囚人 k は，

$$B_k = \{i > k \mid \text{囚人 } i \text{ は赤い帽子をかぶっている}\}$$

を考えます．これは，囚人 k から見えている赤帽子の集合です．$\mathcal{S}$ は完全代表系なので，B_k と同値な代表元がただ 1 つ存在します．つまり

$$B_k \sim A \quad \text{かつ} \quad A \in \mathcal{S}$$

となる $A \subset \mathfrak{P}(X)$ がただ一つ存在します．このとき囚人 k は次のように答えます．

- $k \in A$ ならば，囚人 k は「自分の帽子は赤」と言う．
- $k \notin A$ ならば，囚人 k は「自分の帽子は白」と言う．

これが全員共通の作戦です．

なぜこの作戦で，間違える人は有限人だけになるのでしょうか？ 実際の赤帽子の集合を

$$C = \{i \in X \mid \text{囚人 } i \text{ は赤い帽子をかぶっている}\}$$

とします．囚人 k が見ている集合 B_k は，実際の赤帽子集合 C から最初の k 人分の情報を取り除いたものです．したがって，B_k と C は高々有限個しか違いません．つまり $B_k \sim C$ です．

一方，囚人 k は B_k と同値な代表元 $A \in \mathcal{S}$ を選んだので $A \sim B_k$ です．よって同値関係の推移律から

$$A \sim B_k \sim C \Rightarrow A \sim C$$

です．特に $(A \setminus C) \cup (C \setminus A)$ が有限集合になります．

囚人 k は，$k \in A$ なら赤，$k \notin A$ なら白，と答えていました．一方，実際には，$k \in C$ なら赤，$k \notin C$ なら白です．したがって

囚人 k が間違えるのは, k が A と C の食い違いに入っているときだけ

です. つまり, 間違える囚人全体は $(A \setminus C) \cup (C \setminus A)$ に含まれます. しかしこれは有限集合でした. したがって, この作戦を使えば, 間違える囚人は有限人だけになります.

ひとこと

小澤登高先生の公開講座テキスト" バナッハ=タルスキーのパラドックス" より抜粋しました.
バナッハ=タルスキーのパラドックス (定理) とは

3 次元空間内の半径 1 の球体を有限個（実は 5 個で十分）に分割したのち、それらを別の方法で組み合わせることにより半径 1 の球体を 2 個作ることが出来る.

と言うものです.「球体 1 個を 2 個に増やせる?」と言うのが信じられないと思いますが, これは選択公理を仮定すれば導ける" 定理" です.
ちなみに阪大数学科の 2 年生にこの問題を出しましたが, 誰も解いてくれませんでした.