カレントセミナーのノート

岩井雅崇

February 18, 2026, version 0.01

Contents

1 超関数の定義 **3**

1.1 Topological vector spaces 4

1.2 Separation properties 6

1.3 Types of topological vector space 9

1.4 Bounded linear maps 14

1.5 Seminorms and local convexity 16

1.6 Cauchy Sequence and Completeness 20

1.7 The space $C^\infty(\Omega)$ and $\mathcal{D}_K$ 21

1.8 Space of test functions and distributions 27

2 超関数続き・convolution **37**

2.1 Calculus with Distributions 42

2.2 Weak $*$-topology 46

2.3 Localization 51

2.4 Supports of Distributions 53

2.5 Distributions as Derivatives 58

2.6 Convolutions 64

2.7 Current 78

2.7.1 current 78

2.8 current 続き 82

2.9 カレントの order と order 0 カレントの特徴づけ 91

2.10 Current の例・演算 96

初めに

このノートは現在進行形 (2025 年 $\sim$) で行われている超関数・カレントセミナーのノートです. 聞いているだけだと身につかないので, TeX 形式のノートにしました. 榎園 誠さん, 橋詰 健太さん, 松澤 陽介さんに深く感謝いたします.

Chapter 1

超関数の定義

Introduction

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合として次を定義する.

- $C^\infty(\Omega) := \{\varphi : \Omega \to \mathbb{C} \mid \varphi$ は C^∞ 級 $\}$
- $\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \mathrm{Supp}\ \varphi$ が compact$\}$

Distribution とは $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ で $\mathbb{C}$-線型かつ連続となるものである. ここで, 連続とは"$\mathcal{D}(\Omega)$ 上で $\varphi_i \to \varphi$ ならば $\Lambda(\varphi_\nu) \to \Lambda(\varphi)$ "となることを意味する.

そのためには, $\mathcal{D}(\Omega)$ に次を満たす位相を入れる必要がある:

> $\mathcal{D}(\Omega)$ で $\varphi_i \to \varphi$ であることは, あるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ があって, $\mathrm{Supp}\ \varphi_i \subset K$ であり, 任意の $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ について, 一様に $D^\alpha(\varphi_i - \varphi) \to 0$ となる.

(野口-落合の本 [NO] では, これが既知として書かれていた. ただ収束からは位相がただ一つに定まらない.) この章では, $\mathcal{D}(\Omega)$ に収束が上を意味するような位相をいれる.

Bibliography

[Rud] W. Rudin. *Functional analysis.* 2nd edn. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York. (1991.)

[NO] J. Noguchi, T.Ochiai *Geometric Function Theory in Several Complex Variables* Translations of Mathematical Monographs Volume: 80; 1990; 282 pp

[Rud, Chapter 1, 6], [NO, Chapter 3] を主に参考にしている.

1.1 Topological vector spaces

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, $|\cdot|$ を絶対値とする.

Definition 1.1.1. X を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間, τ を X の位相とする.
(X, τ) がtopological vector space(位相ベクトル空間)とは次を満たすこと.

1. (T_1 条件) 任意の $x \in X$ について, $\{x\} \subset X$ が closed.
2. 加法 $X \times X \to X,\ (x, y) \mapsto x + y$, スカラー倍 $\mathbb{K} \times X \to X,\ (\alpha, x) \mapsto \alpha x$ が (積位相に関して) 連続.

Remark 1.1.2. 位相ベクトル空間は Hausdorff.

Proof. $f : X \times X \to X,\ f(x, y) = x - y$ とおくと (2) より連続. (1) より $\{0\}$ は閉集合. よって $\Delta = f^{-1}(\{0\}) \subset X \times X$ も閉. よって Hausdorff. □

Definition 1.1.3. X: $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間. 以下の用語を定義する.

1. 部分集合 $E \subset X$ がconvexとは, 任意の $t \in (0, 1)$ について, $tE + (1 - t)E \subset E$ となること. (もっと具体的に書くと, 任意の $x, y \in E, t \in (0, 1)$ について, $tx + (1 - t)y \in E$ となること.)
2. 部分集合 $E \subset X$ がbalancedとは, 任意の $\alpha \in \mathbb{K},\ |\alpha| \leq 1$ について, $\alpha E \subset E$ となるこ

と．このとき $0 \in 0 \cdot E \subset E$ である．

3. X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする．部分集合 $E \subset X$ が<u>bounded</u>とは，任意の 0 を含む開集合 $V \subset X$ について，ある $0 < t_0 \in \mathbb{R}$ があって，任意の $t \geq t_0$ について，$E \subset tV$ となること．
4. $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を X の距離とする．d が<u>invariant metric</u>であるとは，任意の $x, y, z \in X$ について，$d(x+z, y+z) = d(x, y)$ を満たすこと．

定義がややこしいが，convex や balanced な集合は $\mathbb{R}^n$ の open ball の代わりの役割を果たしていく．

Remark 1.1.4. Convex, bounded は translation invariant である．つまり，E が convex や bounded ならば，任意の $a \in X$ について $a + E$ もそうなる．

Proof. 以下 $E \subset X$, $a \in X$ とする．

[Convex の場合] E convex とする．1.1.3 から任意の $t \in (0,1)$ について，$tE + (1-t)E \subset E$ である．よって任意の $t \in (0,1)$ について

$$t(a+E) + (1-t)(a+E) = a + tE + (1-t)E \subset a + E$$

となりいえた．

[Bounded の場合] E bounded とする．1.1.3 から $0 \in V \subset X$ open があって，任意の $t \gg 0$ について[1]，$E \subset tV$ である．

よって示すことは任意の $t \gg 0$ について $a + E \subset tV$ である．これは任意の $t \gg 0$ について $\frac{1}{t}a + \frac{1}{t}E \subset V$ を示せば良い．そこで次の合成写像を考える:

$$\begin{aligned} F : K \times X \times (K \times X) &\xrightarrow{f} X \times X \xrightarrow{T} X \\ (a, x, b, y) &\longmapsto (ax, by) \longmapsto (ax + by) \end{aligned}$$

すると次がわかる．

1. $0 \in V$ は開集合なので，$(0,0) \in U \times U \subset X$ となる開集合 $U \subset X$ があって，$U \times U \subset T^{-1}(V)$ となる.(積位相の定義と T の連続性)
2. E bounded より，$t \gg 0$ について $\frac{1}{t}E \subset U$．よってある $\varepsilon > 0$ があって，$\varepsilon E \subset U$ となる．

以上を組み合わせると (ε は必要に応じて小さくして)，$(0, \varepsilon) \times \{a\} \times (0, \varepsilon) \times E \subset F^{-1}(V)$ となる．これは $t \gg 0$ について

$$\frac{1}{t}a + \frac{1}{t}E \subset V$$

を意味する． □

[1] "任意の $t \gg 0$ について"とは，"ある $0 < t_0 \in \mathbb{R}$ があって，任意の $t \geq t_0$ について" を意味する．

Definition 1.1.5. X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする．X の<u>local basis</u>とは, 原点 $0 \in X$ での local basis(開基) のこと, つまり 0 の開近傍からなる集合系 $\mathcal{B}$ で, 「任意の $0 \in U \subset X$ open について, ある $V \in \mathcal{B}$ があって, $0 \in V \subset U$」となる集合系のこと.

Definition 1.1.6. X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする.

1. X が<u>locally convex</u>とは, X が 0 の convex な開近傍からなる local basis を持つこと.
2. X が<u>locally bounded</u>とは, 0 が bounded な開近傍を持つこと.
3. X が<u>locally compact</u>とは, ある 0 の開近傍 $0 \in V \subset X$ で, $\overline{V}$ が compact なものがあること. (通常の locally compact と同じ)
4. X が<u>metrizable</u>とは, ある距離 $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ があって, d の位相が X の位相と同じであること.
5. X が <u>F-space</u>とは, ある完備な invariant 距離 $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ があって, d の位相が X の位相と同じであること.
6. X が <u>Fréchet space</u>とは, X が locally convex かつ F-space なること.
7. X が <u>Heine-Borel Property を持つ</u>とは, 任意の closed bounded が compact なること. (”$\mathbb{R}^n$ の有界閉集合はコンパクト”という Heine-Borel の定理から来ている.)

これは後々使っていく. 1.3.1 で「locally compact $\Rightarrow$ 有限次元」や「locally bounded + Heine-Borel Property $\Rightarrow$ 有限次元」を示す. なので, locally compact などは滅多に起こらないということである.

1.2 Separation properties

Proposition 1.2.1. *X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする. $K \subset X$ を compact, $C \subset X$ を closed とする. $K \cap C = \varnothing$ ならば, ある open set $V \subset X$ で $(K+V) \cap (C+V) = \varnothing$ となるものが存在する.*

Proof. $\alpha : X \times X \times X \to X$ を $\alpha(x, y, z) := x + y - z$ とおく. $K \cap C = \varnothing$ より, $K \times \{0\} \times \{0\} \subset \alpha^{-1}(X \setminus C)$ である. α 連続で, $X \setminus C$open なので, $\alpha^{-1}(X \setminus C)$ も open. よって, K が compact なので, ある open$V \subset X$ で

$$K \times V \times V \subset \alpha^{-1}(X \setminus C)$$

となるものが存在する. よって $K + V - V \subset X \setminus C$ であり, $(K+V) \cap (C+V) = \varnothing$ となる. □

Proposition 1.2.2. *X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする.*

1. *$C \subset X$ convex ならば, $\overline{C}, C^\circ$ も convex.*
2. *$B \subset X$ balanced ならば, $\overline{B}$ も balanced. さらに, $0 \in B^\circ$ であるならば, B° も balanced*
3. *$E \subset X$ bounded ならば, $\overline{E}, E^\circ$ も bounded.*

Proof. (0). 証明において使う事柄をまとめておく

1. $a \in X$ について $f_a : X \to X$, $f_a(x) := a + x$ は同相写像. 連続は明らかで f_{-a} が逆写像になるから. 同様に $s \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ について, $f_s : X \to X$, $f_s(x) := s \cdot x$ も同相写像.
2. $T : X \times X \to X$, $t(x, y) := x + y$ とおくとき, T は開写像. なぜなら $U, V \subset X$open について $T(U \times V) = \cup_{x \in U}(x + V)$ であり, $x + V$ は上より開集合であるので.

(1). 示すことは, 任意の $t \in (0, 1)$ について, $tC^\circ + (1 - t)C^\circ \subset C^\circ$ である ($\overline{C}$ も同じ). $t \in (0, 1)$ を固定する.

[C° について]. C は convex なので,

$$T(tC^\circ \times (1 - t)C^\circ) = tC^\circ + (1 - t)C^\circ \subset C$$

である. T は開写像より, $tC^\circ + (1 - t)C^\circ$ は open なので, C° に含まれる.

[$\overline{C}$ について]. 次の写像を考える.

$$\begin{aligned} F : X \times X &\xrightarrow{\ f\ } X \times X \xrightarrow{\quad T \quad} X \\ (x, y) &\longmapsto (tx, (1 - t)y) \longmapsto tx + (1 - t)y \end{aligned}$$

この F は連続である. よって連続の閉包を用いた同値性[2]より $F(\overline{C \times C}) \subset \overline{F(C \times C)}$ となる. $\overline{C \times C} = \overline{C} \times \overline{C}$ なので, 展開すると

$$t\overline{C} + (1 - t)\overline{C} = F(\overline{C \times C}) \subset \overline{F(C \times C)} = \overline{tC + (1 - t)C} \subset \overline{C}.$$

(2). $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$ とする. $f_\alpha(x) := \alpha x$ とおくと, 連続の閉包を用いた同値性より

$$\alpha\overline{B} = f_\alpha(\overline{B}) \subset \overline{f_\alpha(B)} = \overline{\alpha B} \subset \overline{B}$$

よって balanced である. (最後の $\overline{\alpha B} \subset \overline{B}$ に B が balanced を用いた)

$0 \in B^\circ$ をさらに仮定すると, $0 \cdot B^\circ = 0 \in B^\circ$ であり, 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$ についても, α 倍が同相写像であるので, $\alpha B^\circ = (\alpha B)^\circ \subset B^\circ$ となる. よって balanced.

[2]位相空間の間の写像 $f : X \to Y$ が連続であることと, 任意の $A \subset X$ について $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ であることは同値である.

(3). E° が bounded は $E^\circ \subset E$ より明らか. $\overline{E}$ が bounded を示す. $0 \in V \subset X$ open を固定する. 示すことは任意の $t \gg 0$ について $\overline{E} \subset tV$ である.

当たり前なこととして, $\{\overline{0}\} \cap (X \setminus V) = \varnothing$ である. $\{0\}$ compact, $X \setminus V$ closed より, 1.2.1 から, ある open $0 \in W \subset X$ で

$$\{0\} + W \cap ((X \setminus V) + W) = \varnothing$$

となる. これは, $0 \in W \subset \overline{W} \subset V$ を意味する. (もし $\overline{W} \cap (X \setminus V) \neq \varnothing$ なら, その元の W 近傍が W と交わりをもち, それは上に矛盾する). E は bounded なので, 任意の $t \gg 0$ について $E \subset tW$ 以上より t 倍は同相なので,

$$\overline{E} \subset t\overline{W} = t\overline{W} \subset tV$$

よって $\overline{E}$ は bounded. □

Proposition 1.2.3. *X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする.*

1. *$0 \in U \subset X$ open ならば, ある balanced open W で, $0 \in W \subset U$ となるものがある.*
2. *$0 \in U \subset X$ convex open ならば, ある convex balanced open W で, $0 \in W \subset U$ となるものがある.*

Proof. 以下 $\delta > 0$ に対して, $B_\delta(0) := \{\alpha \in \mathbb{K} | |\alpha| < \delta\}$ とおく.

(1). $f : \mathbb{K} \times X \to X$ を $f(\alpha, x) := \alpha x$ とする. これは連続より, $f^{-1}(U)$ は $(0,0)$ を含む開集合である. よって, ある $\delta > 0$ と $0 \in V \subset X$ となる open があって, $B_\delta(0) \times V \subset f^{-1}(U)$ となる.

$W := f(B_\delta(0) \times V)$ とおく. $W \subset U$ は明らか. また $W = \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha V$ であり, X の開集合である. 任意の $\beta \in \mathbb{K}$, $|\beta| \leq 1$ について, $\beta W \subset \bigcup_{|\alpha|<\delta} \beta\alpha V \subset W$ となる. ($|\alpha\beta| < \delta$ のなので). よって W は balanced である.

(2). $A := \bigcap_{|\alpha|=1,\ \alpha\in\mathbb{K}} \alpha U$ とする. ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ なら S^1 のように回転させて合併をとる)

Claim 1.2.4. *A は convex balanced である.*

Claim の証明. Convex に関しては (元をとって考えれば) 明らか. balanced を示す. $\beta \in \mathbb{K}$, $|\beta| \leq 1$ をとる. $\beta A \subset A$ を示せば良い. $0 \in U$ より, $0 \in A$ である. よって $0 \cdot A \subset A$ である. これより $\beta \neq 0$ として良い. すると $|\alpha| = 1$ ならば $\frac{\beta\alpha}{|\beta|} = 1$ であるので,

$$\beta A = \bigcap_{|\alpha|=1} \beta\alpha U = \bigcap_{|\alpha|=1} \frac{\beta\alpha}{|\beta|}|\beta|U \subset \bigcap_{|\alpha|=1} \frac{\beta\alpha}{|\beta|}U \subset A$$

となる. ($|\beta|U \subset |\beta|U + (1 - |\beta|)U \subset U$ に注意. $0 \in U$ はここにも使う) よって balanced である. □

この A° が欲しい convex balanced open であることを示す (命題の主張の W). そのためには, 1.2.2 より, $0 \in A^\circ$ であることを示せば良い.

$0 \in U$ より, (1) からある balanced open $0 \in V \subset U$ がある. V は balanced なので, $\alpha \in \mathbb{K}, |\alpha| = 1$ について, $\alpha^{-1}V \subset V$ である ($|\alpha^{-1}| = 1$ なので). よって, $V \subset \alpha V \subset \alpha U$ であるので, 共通部分をとって,

$$V \subset \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U = A$$

を得る. V open より, $0 \in V \subset A^\circ$ となりいえた. □

Corollary 1.2.5. *X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする. このとき X は balanced な 0 の開近傍からなる local basis を持つ.*
さらに X が locally convex (1.1.6 参照) ならば, convex balanced な 0 の開近傍からなる local basis を持つ.

Corollary 1.2.6. *X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする. 任意のコンパクト集合 $K \subset X$ は bounded である.*

Proof. $0 \in V \subset X$ open をとる. 任意の $t \gg 0$ について $E \subset tV$ を示す. 1.2.3 から, ある balanced open で $0 \in W \subset V$ となるものがある.

まず $X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} nW$ であることを示す. $X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} nW$ のみを示せば良い. $f : \mathbb{K} \times X \to X$ を $f(\alpha, x) := \alpha x$ とおく. 任意の $y \in X$ について $f(0, y) = 0 \in W$ である. よって f は連続なので, $(0, y) \in f^{-1}(W)$ となる. これより, ある $\delta > 0$ と 0 の開近傍 $U \subset X$ があって $(0, y) \in B_\delta(0) \times (y + U) \subset f^{-1}(W)$ となる. 特に $\frac{1}{n} < \delta$ なる n をとれば $\frac{1}{n} y \in W$ となる. よっていえた

今 $K \subset X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} nW$ で K コンパクトなので, ある n があって $K \subset nW$ となる. W は balanced なので任意の $t \geq n$ について $nW \subset tW$ である. よって任意の $t \geq n$ について

$$K \subset nW \subset tW \subset tV$$

となり K は bounded である. □

1.3 Types of topological vector space

Proposition 1.3.1. *X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする. X が locally compact (1.1.6 参照) ならば, 有限次元.*
特に X が locally bounded かつ Heine-Borel property を持つ (1.1.6 参照) ならば, 有限次元.

Proof. (1). X を locally compact とする．定義からある開集合 $0 \in V \subset X$ で $\overline{V}$ が compact なものが存在する．1.2.6 から，$\overline{V}$ は bounded である．よって V も bounded である．よって，$\{2^{-n}V\}_{n\geq 1}$ が 0 の local basis になる．(任意の open $0 \in W$ について，V bounded なので $V \subset 2^{n_0}W$ となる n_0 が取れるから)

さて $0 \in V$ より，$\overline{V} \subset \bigcup_{x\in\overline{V}}(x + \frac{1}{2}V)$ である．$\overline{V}$ は compact より，ある $x_1, \ldots, x_m \in X$ があって，

$$V \subset (x_1 + \tfrac{1}{2}V) \cup \cdots \cup (x_m + \tfrac{1}{2}V) \tag{1.3.1}$$

となる．そこで次のようにおく．

- $Y := \sum_{i=1}^{m} \mathbb{K}x_i \subset X$
- $d := \dim_{\mathbb{K}} Y$
- $v_1, \ldots, v_d \in Y$ $\mathbb{K}$ 上の基底.

Claim 1.3.2.

$$\begin{array}{ccccccc} f : \mathbb{K}^d & \longrightarrow & (\mathbb{K} \times X)^d & \longrightarrow & X^d & \longrightarrow & X \\ (a_i)_{i=1}^d & \longmapsto & (a_i, v_i)_{i=1}^d & \longmapsto & (a_i \cdot v_i)_{i=1}^d & \longmapsto & \sum_{i=1}^d a_i \cdot v_i \end{array}$$

とおくと $f : \mathbb{K}^d \to X$ は連続写像．そして，$f : \mathbb{K}^d \to Y$ は同相写像で，$Y \subset X$ は X の閉集合

Claim の証明．スカラー倍や足し算が連続なので f は連続．また $f : \mathbb{K}^d \to Y$ は全単射である．これが同相になるのを見るために，f^{-1} を次のように構成する

$S := \{z \in \mathbb{K}^d \mid ||z|| = 1\}, B := \{z \in \mathbb{K}^d \mid ||z|| \leq 1\}$ とおく ($\mathbb{R}^d$ の球面と閉球である) $0 \in S$ で f 連続単射より．$0 \notin f(S) \subset X$ かつ $f(S)$compact である．(X は hausdorff より閉集合でもある)．よって 1.2.3 から，ある balanced open $W \subset X$ で $0 \in W$ かつ $W \subset X \setminus f(S)$ なものが存在する．

$f^{-1}W \subset B$ であることを示す．もし $z \in f^{-1}W \setminus B$ が存在したとする．定義から $||z|| > 1$ である．Wbalanced なので，$f^{-1}W$ も balanced，よって，

$$\frac{1}{||z||} f^{-1}(W) \subset f^{-1}(W)$$

である．これは $\frac{z}{||z||} \in f^{-1}(W)$ となるが，ノルムが 1 なので，$W \subset X \setminus f(S)$ に矛盾する．

特に任意の $r > 0$ について，$f^{-1}(rW) \subset rB$ である．よって任意の $r > 0$ について，$f^{-1}(rW \cap Y) \subset rB$ である．これは $f^{-1} : Y \to \mathbb{K}^d$ が $0 \in Y$ で連続であることを意味する.[3] 任意の点 $y \in Y$ につい

[3]位相空間の写像 $f : X \to Y$ が点 $x \in X$ で連続とは，$f(x)$ の任意の近傍 V に対して，ある x の近傍 U が存在して，$f(U) \subset V$ となること．

ては, 以下の図を考える.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "+y"'] & \mathbb{K}^d \arrow[d, "+f^{-1}(y)"] \\ Y \arrow[r, "f^{-1}"] & \mathbb{K}^d \end{tikzcd}$$

この縦の矢印は同相である. よって, $f^{-1} : Y \to \mathbb{K}^d$ は点 y でも連続である. これより $f : \mathbb{K}^d \to Y$ は同相.

$Y \subset X$ が閉集合を示す. $y \in \overline{Y}$ をとる. $X = \bigcup_{t \in \mathbb{Z}_+} W$ (1.2.6 の証明参照) であるので, $t > 0$ があって $y \in tW$ となる. tWopen なので, $y \in \overline{Y \cap tW}$ である. $f^{-1}(tW) \subset tB$ で $f^{-1} : Y \to \mathbb{K}^d$ が同相なので, $\overline{Y \cap tW} \subset \overline{f(tB)}$ である. 最後に $tB \subset \mathbb{K}^d$ コンパクトより, $f(tB)$ もそう, よって閉集合なので $\overline{f(tB)} = f(tB)$ である. 以上をつなぎ合わせると

$$y \in \overline{Y \cap tW} \subset \overline{f(tB)} = f(tB) \subset Y$$

である. よって $y \in Y$ であり, $Y = \overline{Y}$ で閉集合である. □

証明に戻る. (1.3.1) より Y の定義から $V \subset Y + \frac{1}{2}V$ である. これより

$$V \subset Y + \frac{1}{2}V \subset Y + \left(\frac{1}{2}Y + \frac{1}{4}V\right) = Y + \frac{1}{4}V$$

となる. これを繰り返して, $V \subset \bigcup_{n \geq 1}(Y + \frac{1}{2^n}V)$ を得る. 今 $\{2^{-n}V\}_{n \geq 1}$ が 0 の local basis になることと, Y が閉集合なので,

$$V \subset \bigcap_{n \geq 1}\left(Y + \frac{1}{2^n}V\right) \subset \overline{Y} = Y$$

となる. $X = \bigcup_{k \in N} kV$ なので, $X \subset Y$ となる. よって $Y \cong \mathbb{K}^d$ なので, X は有限次元

(2). X locally bounded かつ Heine-Borel Property を満たすとする. locally bounded なので, ある $0 \in V \subset X$ で bounded open が存在する. 1.2.2 より $\overline{V}$ も bounded. Heine-Borel Property より, $\overline{V}$ はコンパクト. よって, X は locally compact なので有限次元. □

Remark 1.3.3. 上の証明の議論から「$\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間 Y が有限次元ならば, Y は $\mathbb{K}^d$ と同相である」ことがこの議論からわかる.

もっと強く「X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間, $Y \subset X$ を d 次元 $\mathbb{K}$ 部分空間とするとき, ある $f : \mathbb{K}^d \to Y$ で同相かつ $\mathbb{K}$ 線形なものが存在する」ということもわかる.

Proposition 1.3.4. X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする. X の *local base* が高々可算とする (特に第一可算である). このとき次の三つを満たす距離 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が存在する.

1. d は X の位相を誘導する.

2. d は *translation invariant,* つまり $d(x+z, y+z) = d(x, y)$.
3. 任意の $r > 0$ について, $\{x \in X \mid d(x, 0) < r\}$ は *balanced.*

さらに X が *locally convex* であると仮定する. このとき距離 d は, "任意の $y \in X$,, $r > 0$ について $\{x \in X \mid d(x, y) < r\}$ が *convex*" となるようにとることができる.

Proof. 以下 X の local base が高々可算とする. 段階を追って示していく.

(1). translation invariant な距離 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が存在すること. 1.2.3 より, balanced open からなる local base $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ で任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ について

$$V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$$

となるように取れる. そこで

$$D := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n 2^{-n} \mid c_n = 0, 1 \text{ で有限個を除いて } 0 \right\}$$

とおく. $D \subset [0, 1)$ かつ任意の $r \in D$ について $r = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r) 2^{-n}$ となる表示は一意的である. そこで, $r \in D \cup [1, \infty)$ に関して,

$$A(r) := \begin{cases} X & (r \geq 1), \\ c_1(r)V_1 + c_2(r)V_2 + \cdots & (r \in D) \end{cases}$$

と定義する. (下の表示は無限和に見えるが, D の定義から有限和である). このとき $0 \in A(r)$ かつ任意の $r \geq 0$ について $A(r)$ は balanced open である.

そこで次の関数を定義する.

- $f : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \inf\{r \in D \cup [1, \infty) \mid x \in A(r)\}$
- $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x - y)$

d は translation invariant かつ symmetric である. (symmetric なのは, $A(r)$ が balanced なので, $x - y \in A(r)$ は $y - x \in A(r)$ を意味するから)

Claim 1.3.5. 任意の $r, s \in D \cup [1, \infty)$ について, $A(r) + A(s) \subset A(r + s)$ が成り立つ.

Claim の証明. $r + s \geq 1$ の場合は自明. よって, $r + s \in D$ として良い. $r, s, r + s$ を次のように表

示する.

$$
\begin{aligned}
r &= \alpha_1 2^{-1} + \cdots + \alpha_{N-1} 2^{-(N-1)} + \alpha_N 2^{-N} + \cdots \\
s &= \beta_1 2^{-1} + \cdots + \beta_{N-1} 2^{-(N-1)} + \beta_N 2^{-N} + \cdots \\
r + s &= \gamma_1 2^{-1} + \cdots + \gamma_{N-1} 2^{-(N-1)} + \gamma_N 2^{-N} + \cdots
\end{aligned}
$$

Case 1: ある N があって, $\alpha_i + \beta_i = \gamma_i (i = 1, \ldots, N-1)$ かつ, $\alpha_N + \beta_N \neq \gamma_N$ となる場合. このとき, $\alpha_N = \beta_N = 0$ かつ, $\gamma_N = 1$ にならざるを得ない. (これは要するに以下のように

$$
\begin{array}{lcccccc}
\alpha_N: & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\
\beta_N: & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\
\gamma_N: & \underbrace{1}_{1} & \underbrace{1}_{2} & \cdots & \underbrace{1}_{N-1} & \underbrace{1}_{N} & \underbrace{0}_{N+1}
\end{array}
$$

と, $N-1$ まで繰り上がりが起こっておらず, N の時に繰り上がりが起こるパターンである.) 今 $M \geq 2$ について

$$
\alpha_{M-1} V_{M-1} + \alpha_M V_M \subset V_{M-1} + V_{M-1} \subset V_{M-2}
$$

である. 以下 M を十分に大きい整数とすると, $\alpha_{N+2} V_{N+2} + \cdots + \alpha_M V_M \subset V_{N+1}$ である. よって $\alpha_N = 0$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
A(r) &= \alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_{N-1} V_{N-1} + \underbrace{\alpha_N V_N}_{0} + \alpha_{N+1} V_{N+1} + \underbrace{\alpha_{N+2} V_{N+2} + \cdots + \alpha_M V_M}_{\subset V_{N+1}} \\
&\subset \alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_{N-1} V_{N-1} + V_{N+1} + V_{N+1}
\end{aligned}
$$

同様に, $A(s) \subset \beta_1 V_1 + \cdots + \beta_{N-1} V_{N-1} + V_{N+1} + V_{N+1}$ であるので,

$$
\begin{aligned}
A(r) + A(s) &\subset (\alpha_1 + \beta_1) V_1 + \cdots + (\alpha_{N-1} + \beta_{N-1}) V_{N-1} + V_{N+1} + V_{N+1} + V_{N+1} + V_{N+1} \\
&\subset \gamma_1 V_1 + \cdots + \gamma_{N-1} V_{N-1} + \underbrace{\gamma_N}_{1} V_N \\
&\subset A(r+s)
\end{aligned}
$$

Case 2: そのような N がないとき, つまり任意の i で $\alpha_i + \beta_i = \gamma_i$ が成り立つ時は, 自明に $A(r) + A(s) = A(r+s)$ である. □

この Claim より次の三つがわかる.

(a) $r, t \in D \cup [1, \infty)$ について, $r \leq t$ ならば $A(r) \subset A(t)$.
(b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(c) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

特に d は X 上の transrate invariant metric となる.

上の 3 つのことの証明. (a).$t \geq 1$ の場合は明らか. $t < 1$ の場合は, $t - r \in D$ であるので (筆算を考える), 上の Claim から

$$A(r) \subset A(r) + A(t-r) \subset A(t)$$

(b). $x = 0$ ならば

$$f(0) = \inf\{r \in \mathbb{R}_{>0} \mid 0 \in A(r)\} = 0$$

である. 逆に $f(x) = 0$ ならば, 任意の $r \in D$ について, $x \in A(r)$ である, 特に任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ について, $x \in A\left(\frac{1}{2^n}\right) = V_n$ である. X は Hausdorff で $\{V_n\}_{n\geq 1}$ は 0 の local base なので, $x = 0$ である.

(c). $x \in A(r),\ y \in A(s)$ について, $x + y \in A(r) + A(s) \subset A(r+s)$ であるので, $f(x+y) \leq r + s$. よって r, s に関して inf をとれば言える.

また (b) は d の正定値性, (c) は d の三角不等式を表していて, d は symmetric transrate invariant であることはわかっているので, d はほしい距離となる. □

(2). d が X の topology を誘導することを示す. $\delta > 0$ について, $B_\delta(0) := \{x \in X \mid d(x,0) < \delta\}$ と定義する. $d(x,0) = f(x)$ であるので, f の定義から

$$B_\delta(0) = \bigcup_{r<\delta, r\in D\cup[1,\infty)} A(r)$$

である. この表示から $B_\delta(0)$ は X の balanced open set である. また $B_{2^{-n}}(0) \subset A(2^{-n}) = V_n$ である. これより $\{B_\delta(0)\}_{\delta>0}$ は X の local base になり, d は X の位相を誘導する.

また" 任意の $r > 0$ について, $\{x \in X \mid d(x,0) < r\}$ は balanced" はすでに示した. よって d が欲しい距離となる.

X が locally convex ならば, balanced convex となる V_n をとることができる. よって $A(r)$ も balanced convex になり, $B_\delta(0)$ もそうなる. convexity は translation invariant なので, 任意の $y \in Y$ について $B_\delta(y)$ も convex となる.

□

1.4 Bounded linear maps

Definition 1.4.1. X, Y を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする. $\mathbb{K}$-linear map $\Lambda : X \to Y$ が <u>bounded</u>であるとは, 任意の bounded set $E \subset X$ について, $\Lambda(E)$ も bounded であること. (つまり任意の open $0 \in V \subset Y$ について, ある $t_0 > 0$ があって, 任意の $t \geq t_0$ について, $\Lambda(E) \subset tV$ となること.)

Proposition 1.4.2. $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間の線型写像 $\Lambda : X \to Y$ について, 次の条件を考える.

(a) Λ は連続

(b) Λ は *bounded*

(c) 任意の X の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ について, $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ ならば, $\{\Lambda x_n \mid n = 1, 2, \dots\} \subset Y$ は *bounded*

(d) 任意の X の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ について, $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ ならば, Y 上で $\Lambda(x_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

この時 $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ は常に成り立つ.
さらに, X が *metrizable* ならば, $(c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$ が成り立つ. つまり上の条件は同値である. 特に *1.3.4* から, X の *local base* が高々可算ならば, 上の条件は同値である.

Proof. [(a) $\Rightarrow$ (b)] $E \subset X$ bounded とする. $0 \in V \subset Y$ open をとる. Λ は連続なので, $0 \in \Lambda^{-1}(V) \subset X$ open である. よって E bounded なので, $t \gg 0$ について $E \subset t\Lambda^{-1}(V)$ である. よって $t \gg 0$ について $\Lambda(E) \subset tV$ より, $\Lambda(E)$ は bounded となる.

[(b) $\Rightarrow$ (c)] X の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ で $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ となるものを取る. $\{x_n \mid n = 1, 2, \dots\} \subset X$ が bounded であることを示せば良い. $0 \in V \subset X$open をとる. 1.2.3 から, ある $0 \in U \subset V$ なる balanced open がある. $x_n \to 0$ よりある n_0 があって次が成り立つようにできる.

- $n > n_0$ ならば $x_n \in U$. これは $x_n \to 0$ の定義そのもの.
- ある $t_0 > 0$ があって, 任意の $t \geq t_0$ について, $x_1, \dots, x_{n_0} \in tU$. これは 1.2.6 の証明から. ($U$ が balanced はここに使う.)

U は balanced なので, (必要ならば $t_0 > 1$ となるように t_0 を取り替えて), $t \geq t_0$ ならば $U \subset tU$ となる. よって $t \geq t_0$ ならば $\{x_n \mid n = 1, 2, \dots\} \subset tU$ より, bounded である.

[(c) $\Rightarrow$ (d)] X は metrizable とする. すると X は countable local base を持つので, 1.3.4 より, translate invariant metric $d : X \times X \to \mathbb{R}$ で X の位相を生成するものが存在する.

X の点列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ で $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ となるものを取る. ここで k_n を

$$d(x_n, 0) \leq \frac{1}{k_n^2}$$

となる最大の自然数とおく. (ただし $x_n = 0$ なら $k_n := n$) $k_n \to 0$ である. d が translate invariant

なので,

$$\begin{aligned} d(k_n x_n, 0) &\leq d(k_n x_n, (k_n - 1)x_n) + d((k_n - 1)x_n, 0) \\ &= d(x_n, 0) + d((k_n - 1)x_n, 0) \\ &\leq k_n d(x_n, 0) \leq \frac{1}{k_n} \to 0 \end{aligned}$$

よって X 上で $k_n x_n \to 0$ である. (c) の仮定を使って, $\{\Lambda(k_n x_n) \mid n = 1, 2, \dots\} \subset Y$ は bounded である.

さて今から $\Lambda(x_n) \to 0$ を示す. 任意の $0 \in V \subset Y$open をとる. 1.2.3 より balanced を仮定して良い . $\{\Lambda(k_n x_n) \mid n = 1, 2, \dots\} \subset Y$ は bounded なので, ある $t > 0$ があって,

$$\{\Lambda(k_n x_n) \mid n = 1, 2, \dots\} \subset tV$$

となる. $k_n \to \infty$ より, ある n_0 があって, 任意の $n \geq n_0$ について $\frac{t}{k_n} \geq 1$ となる. 今 V は balanced なので, $\frac{t}{k_n} V \subset V$ となる. まとめると $n \geq n_0$ ならば, $\Lambda x_n \in V$ である. よって収束の定義から $\Lambda(x_n) \to 0$ である.

[(d) $\Rightarrow$ (a)] X metrizable とする. Λ が 0 で連続を示せば良い. 背理法. Λ が 0 で連続でないとすると, ある開近傍 $0 \in V \subset Y$ があって, 任意の近傍 $0 \in U \subset X$ について $\Lambda(U) \not\subset V$ である. よって X は距離空間なので, 任意の $n \geq 1$ について, ある $x_n \in X$ があって, $d(x_n, 0) < \frac{1}{n}$ かつ $\Lambda x_n \notin V$ となるものがある. これは $x_n \to 0$ だが, Λx_n は 0 に収束しないので, (d) に矛盾する. □

1.5 Seminorms and local convexity

Definition 1.5.1. X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする. 写像 $p : X \to \mathbb{R}$ が<u>seminorm</u>とは以下の 2 条件を満たすこと.

- 任意の $x, y \in X$ について, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.
- 任意の $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$ について, $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

Berkovich の文脈では, この seminorm は"faithful seminorm"と呼ばれるものらしい.

Proposition 1.5.2. *1.5.1* の記法において, 次が成り立つ. ただし p は *seminorm* とする.

1. $p(0) = 0$.
2. $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$.
3. $p(x) \geq 0$.
4. $\{x \in X \mid p(x) = 0\} \subset X$ は $\mathbb{K}$-線形部分空間

5. $A = \{x \in X \mid p(x) < 1\} \subset X$ は *convex balanced.*
6. $p(x) = \inf\{t > 0 \mid t^{-1}x \in A\}$ である. 以下右の *inf* を $p_A(x)$ と表す.

Proof. (1). $p(0) = p(0 \cdot 0) = |0|\, p(0) = 0$ より.

(2). $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$, $p(y) = p(y - x + x) \leq p(y - x) + p(x)$, $p(y - x) = |-1|p(x - y)$ である. これを組み合わせると言える.

(3). (2) より $p(x) = p(x - 0) \geq |p(x) - p(0)| \geq 0$ なので.

(4). (3) と 1.5.1 より.

(5). convex について. 任意の $x, y \in A,\ t \in (0, 1)$ について, 定義から

$$p(tx + (1 - t)y) \leq tp(x) + (1 - t)p(y) < 1$$

であるので. balanced については, 任意の $x \in A,\ \alpha \in \mathbb{K},\ |\alpha| \leq 1$ について

$$p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x) < 1$$

なので $\alpha x \in A$ となる.

(6). $x \in X,\ t > 0$ に対し

$$t^{-1}x \in A \ \Leftrightarrow\ p(t^{-1}x) < 1 \ \Leftrightarrow\ t^{-1}p(x) < 1 \ \Leftrightarrow\ p(x) < t$$

であるので, $\inf\{t > 0 \mid t^{-1}x \in A\} = p(x)$ が言える. □

Definition 1.5.3. X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする. $\mathcal{P}$ を X の seminorms の族とする. $\mathcal{P}$ が<u>separating</u>とは, 任意の $x \in X \setminus \{0\}$ について, ある $p \in \mathcal{P}$ があって, $p(x) > 0$ となること.

Theorem 1.5.4. X を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする. $\mathcal{P}$ を X の *separating* な *seminorms* の族とする. $p \in \mathcal{P},\ n \in \mathbb{Z}_+$ について, $V(p, n) := \{x \in X \mid p(x) < \frac{1}{n}\}$ とおき,

$$\mathcal{B} := \{V(p_1, n_1) \cap \cdots \cap V(p_r, n_r) \mid r \geq 0, p_i \in \mathcal{P},\ n_i \in \mathbb{Z}_+\}$$

とする. このとき X の位相 τ で次を満たすものがただ一つ存在する.

- (X, τ) は $\mathbb{K}$ 上の *locally convex* 位相ベクトル空間.
- $\mathcal{B}$ は (X, τ) の *local base.*

さらにその位相ベクトル空間 (X, τ) は次を満たす.

(a) 任意の $p \in \mathcal{P}$, $p : X \to \mathbb{R}$ は連続.

(b) 任意の部分集合 $E \subset X$ について, "E が *bounded* である"ことは, "任意の $\in \mathcal{P}$ について, $p(E) \subset \mathbb{R}$ が *bounded* である"ことと同値.

よって separating な seminorm から, ただ一つの locally convex 位相ベクトル空間の構造が定まり, それは seminorm が作る open ball が local base となる. boundedness は p からわかる.

またもし $\mathcal{P}$ が可算ならば, $\mathcal{B}$ は可算. よって 1.3.4 より (X, τ) は metrizable である. 特に Fréchet space, つまり locally convex かつ complete invariant metric を持つ (F-space) 空間となる (1.1.6 参照.)

Proof. τ を"$\mathcal{B}$ の元を並行移動したものの合併集合全体"とする. つまり

$$\tau := \left\{ \bigcup_{i \in \Lambda \in A} (B_i + a_i) \mid B_i \in \mathcal{B}, a_i \in X \right\}$$

とする. ただし $\Lambda = \emptyset$ の場合は $\bigcup_{i \in \Lambda \in A}(B_i + a_i) = \emptyset$ と定める. この τ が位相になることを示す.(これが示されれば唯一性も言える.)

(1). $\varnothing \in \tau$ は自明. $X \in \tau$ も $X = \bigcup_{x \in X}(V(p, 1) + x)$ より.

(2). $U_\lambda \in \tau \ \Rightarrow\ \bigcup_\lambda U_\lambda \in \tau$ は τ の定義から.

(3). $U_1, U_2 \in \tau \ \Rightarrow\ U_1 \cap U_2 \in \tau$. これはかなりややこしいがので丁寧にやる.

$$U_1 = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (x_\alpha + B_\alpha) \quad U_2 = \bigcup_{\beta \in \Lambda'} (y_\beta + B'_\beta)$$

とする.$x_\alpha, y_\beta \in X$ かつ $B_\alpha, B'_\beta \in \mathcal{B}$ である. すると

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{\alpha \in \Lambda, \beta \in \Lambda'} \left[(x_\alpha + B_\alpha) \cap (y_\beta + B'_\beta) \right]$$

よって示すべきことは,$x, y \in X$ かつ $B, B' \in \mathcal{B}$ について $(x + B) \cap (y + B') \in \tau$ である. τ は平行不変より, $y = 0$ としてよい. さらに以下のように B, B' を定める

$$B := V(p_1, n_1) \cap \cdots \cap V(p_r, n_r) \quad B' := V(p'_1, n'_1) \cap \cdots \cap V(p'_{r'}, n'_{r'})$$

$w \in (x + B) \cap B'$ とする. すると $m_i, m'_{i'} \in \mathbb{Z}_+$ を

$$\frac{1}{m_i} < \frac{1}{n_i} - p_i(w - x) \quad \frac{1}{m'_{i'}} < \frac{1}{n'_{i'}} - p_{i'}(w)$$

と定めると, $w + \bigcap_{i=1}^r V(p_i, m_i) \cap \bigcup_{i=1}^r V(p'_i, m'_i) \subset (x + B) \cap B'$ となることを示す. (なおこれが

示されれば $(x+B)\cap(y+B')\in\tau$ は w に関して合併集合をとれば言える．)

$\xi\in w+\bigcap_{i=1}^r V(p_i,m_i)\cap\bigcup_{i=1}^r V(p'_i,m'_i)$ とする．示すことは，

$$p_i(\xi-x)<\frac{1}{n_i}\quad p_i(\xi)<\frac{1}{n'_{i'}}$$

である．1 つ目については，$w\in(x+B)$ と $\xi\in w+\bigcap_{i=1}^r V(p_i,m_i)$ より，seminorm の劣加法性を使って

$$p_i(\xi-x)=p_i(\xi-w+w-x)\le p_i(\xi-w)+p_i(w-x)<\frac{1}{n_i}$$

である．二つ目は $w\in B'$ と $\xi\in\bigcup_{i=1}^r V(p'_i,m'_i)$ を使って上と同様にしめせる．よっていえた．

これより次がわかる．

- 平行移動は (X,τ) で同相写像．これは $U\in\tau\Rightarrow U=\bigcup_i B_i+a_i$ の形に書けるので．
- 任意の $p\in\mathcal{P}$ について，$p:X\to\mathbb{R}$ は連続．これは 1.5.2 より $|p(x+y)-p(x)|\le p(y)$ から，
$$p(x+V(p,n))\subset(p(x)-\tfrac{1}{n},\ p(x)+\tfrac{1}{n})\subset\mathbb{R}$$
であるので．
- 任意の $V\in\mathcal{B}$ について V は balanced convex な 0 の開近傍．これは seminorm の定義からわかる．

以下残りの事柄も示していく．

[$\mathcal{B}$ は (X,τ) での local base なること] $0\in U\subset X$ open，つまり $U\in\tau$ とする．定義からある $x\in X$ と $p_i\in\mathcal{P}$，$n_i\in\mathbb{Z}_+$ があって

$$0\in x+V(p_1,n_1)\cap\cdots\cap V(p_r,n_r)\subset U$$

である．特に $p_i(x)<\frac{1}{n_i}$ なので，$\frac{1}{m_i}<\frac{1}{n_i}-p_i(-x)$ ととると，位相の時の議論と同じくして

$$0\in V(p_1,m_1)\cap\cdots\cap V(p_r,m_r)\subset x+V(p_1,n_1)\cap\cdots\cap V(p_r,n_r)\subset U$$

となる．$V(p_1,m_1)\cap\cdots\cap V(p_r,m_r)\in\mathcal{B}$ なので，$\mathcal{B}$ は 0 の基本近傍系となり，つまり local base である．

[(X,τ) は T_1 空間なること] 平行移動は同相写像なので $\{0\}$ が closed を示せば良い．$\mathcal{P}$ は separating より，任意の $x\in X\setminus\{0\}$ についてある $p_x\in\mathcal{P}$ があって $p_x(x)\neq 0$ である．よって，$\frac{1}{n_x}<p(x)$ となる自然数をとれば，1.5.2 より

$$X\setminus\{0\}=\bigcup_{x\in X\setminus\{0\}}(x+V(p_x,n_x))$$

であることがわかる．よって $X \setminus \{0\}$ は open で，$\{0\}$ は closed.

[足し算は連続なること] $X \times X \to X,\ (x,y) \mapsto x+y$ とする．$(x,y) \in X \times X$ で連続であることを示せば良い．$\mathcal{B}$ は local base なので，任意の $U := V(p_1,n_1) \cap \cdots \cap V(p_r,n_r) \in \mathcal{B}$ について，ある $W \in \mathcal{B}$ があって，

$$(x+W)+(y+W) \subset x+y+U$$

となることを示せば良い．そうなる W として $V(p_1,2n_1) \cap \cdots \cap V(p_r,2n_r)$ を取れば良い．

[スカラー倍は連続なること] $\mathbb{K} \times X \to X,\ (a,x) \mapsto \alpha x\ (a,x) \in \mathbb{K} \times X$ で連続であることを示せば良い．$\mathcal{B}$ は local base なので，任意の $U := V(p_1,n_1) \cap \cdots \cap V(p_r,n_r) \in \mathcal{B}$ について，ある $W \in \mathcal{B}$ と，$a \in \mathbb{K}$ の半径 δ の開球 D があって

$$D \cdot (x+W) \subset ax+U$$

となることを示せば良い．これは $W = V(p_1,m_1) \cap \cdots \cap V(p_r,m_r)$ とおき，$a+\alpha \in D, \xi \in W$ について．

$$a\xi + \alpha(x+\xi) = (a+\alpha)(x+\xi) - ax \in V(p_1,n_1) \cap \cdots \cap V(p_r,n_r)$$

となるように δ, m_i が取れれば良い．これは $|a|\frac{1}{m_i} < \frac{1}{2n_i}$ となるように m_i を十分大きくとった後に $\delta(|x|+\frac{1}{m_i}) < \frac{1}{2n_i}$ となるように δ を十分小さくとれば良い．

以上の結論として次が言える．

1. (X,τ) は $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間．
2. $\mathcal{B}$ は (X,τ) の balanced convex set からなる local base.
3. 上の 1,2 を満たす位相 τ は唯一．
4. 任意の $p \in \mathcal{P}$ について，$p : X \to \mathbb{R}$ は連続．

最後に boundedness の特徴付けに関して．「$E \subset X$ が bounded である」ことは，「任意の $V \in \mathcal{B}$ について，$t \gg 1$ ならば $E \subset tV$ である」ことと同値．それは「任意の $p \in \mathcal{P}$ について，$n \gg 1$ ならば $E \subset tV(p,n)$ である」ことと同値．これは「任意の $p \in \mathcal{P}$ について，$p(E) \subset \mathbb{R}$ が bounded」と同値である．($E \subset tV(p,n)$ は $p(E) < \frac{t}{n}$ と同じ意味であることに注意) □

1.6 Cauchy Sequence and Completeness

Definition 1.6.1. X を $\mathbb{K}$ 上の位相ベクトル空間とする．$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が<u>Cauchy 列</u>とは，任意の open $0 \in V \subset X$ について，ある $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ があって，任意の $n \geq m \geq n_0$ について，$x_n - x_m \in V$ となること．
X が<u>complete</u>とは，任意の Cauchy 列が収束すること．

1.2.3 より Cauchy 列の定義における V は balanced を仮定して良い.

Remark 1.6.2. X が metrizable で invariant metric $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を持つとする.

この時 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy 列であることは, 通常のコーシー列の定義「任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ があって, 任意の $n \geq m \geq n_0$ について, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$」と同値である. 理由は invariant なら $d(x_n - x_m, 0) = d(x_n, x_m)$ であるので.

Remark 1.6.3. Cauchy 列 (のなす集合) は bounded.

Proof. 任意の open $0 \in V \subset X$ をとる. 1.2.3 より, $0 \in W \subset V$ となる balanced open$W$ をとる. ある $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ があって, 任意の $n \geq m \geq n_0$ について, $x_n - x_m \in W$ となる. また $x_1, \ldots, x_{n_0} \in t_0 W$ となるような $t_0 \geq 1$ を取れる. $t \geq 2t_0$ とすると, $n > n_0$ ならば, W は balanced より

$$x_n = x_{n_0} + (x_n - x_{n_0}) \in t_0 W + W \subset (2t_0)W \subset tV.$$

また $n \leq n_0$ ならば $x_n \in t_0 W \subset tV$. よって. よって $t \geq 2t_0$ ならば $x_i \in tV$ である. □

1.7 The space $C^\infty(\Omega)$ and $\mathcal{D}_K$

Definition 1.7.1. Ω を空でない $\mathbb{R}^n$ の開集合, $K \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト集合とする.

- $C^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f$ は C^∞ 級 $\}$
- $\mathcal{D}_K = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \mathrm{Supp} f \subset K\}$

とおく. これらは $\mathbb{C}$-vector space である.

Distributions の定義に $\mathcal{D}_K$ が必要である. この節の目標は次である: (用語に関しては 1.1.6 参照.)

Goal. ある $C^\infty(\Omega)$ の位相で, 次を満たす位相を入れる.

- $C^\infty(\Omega)$ は位相ベクトル空間になる.
- Fréchet space. つまり locally convex かつ complete invariant metric を持つ (F-space)
- Heine-Borel property を持つ.
- 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について, $\mathcal{D}_K \subset C^\infty(\Omega)$ は closed.

以下 Ω を空でない $\mathbb{R}^n$ の開集合とする.

Lemma 1.7.2. あるコンパクト集合の列 $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset \Omega$ があって次を満たすものが存在する.

1. $K_i \subset K_{i+1}^\circ$

2. $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i^{\circ}$

Proof. $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ について, $B(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x-a|| < r\}$ と定める. $\overline{B(a,r)} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x-a|| \leq r\}$ である.

$$\mathcal{B} := \{\overline{B(a,r)} \mid a \in \mathbb{Q}^n \cap \Omega,\ r \in \mathbb{Q}_{>0},\ \overline{B(a,r)} \subset \Omega\}$$

とする. これは可算なので, $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\}$ と添字をふる.

$K_1 := B_1$ とする. 以下 $K_1, \dots, K_m$ が作れた時に, コンパクト集合 $K_{m+1} \subset \Omega$ で $K_m \subset K_{n+1}^{\circ}$ をみたすものを帰納的に構成する. $x \in K_m$ について $B(x, r_x) \subset \Omega$ となる $r_x > 0$ をとる. K_m コンパクトなので, $K_m \subset \bigcup_{j=1}^{l} B(x_j, r_{x_j})$ とできる. 今 $C := \bigcup_{j=1}^{l} \overline{B(x_j, r_{x_j})}$ とおくと, C コンパクトで

$$K_m \subset C^{\circ} \subset C \subset \Omega$$

となる. よって $K_{m+1} := C \cup B_{m+1}$ とおけば良い.

また上の $K_1, \dots, K_m, \dots$ の構成法から, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i^{\circ}$ となる. □

以下 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ について

$$D^{\alpha} := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$$

と定める.

Proposition 1.7.3. *1.7.2* のように $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ をとる. 任意の $N \in \mathbb{Z}_+$ について

$$p_N : C^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{R} \quad f \mapsto p_N(f) = \max\{|D^{\alpha} f(x)| \mid x \in K_N, |\alpha| \leq N\}$$

とおく. この時次が成り立つ.

1. $\mathcal{P} := \{p_N \mid N \geq 1\}$ は $C^{\infty}(\Omega)$ の *seminorm* からなる *separating family*. 特に *1.5.4* から $C^{\infty}(\Omega)$ は *locally convex* かつ *invariant metric* を持つ $\mathbb{C}$ 上の位相ベクトル空間となる.
2. 任意の $x \in \Omega$ について,

$$ev_x : C^{\infty}(\Omega) \to \mathbb{C} \quad f \mapsto ev_x(f) = f(x).$$

   は連続である. 特に任意のコンパクト $K \subset \Omega$ について, $\mathcal{D}_K = \bigcap_{x \in \Omega \setminus K} \mathrm{Ker} ev_x \subset C^{\infty}(\Omega)$ であるので, $\mathcal{D}_K \subset C^{\infty}(\Omega)$ は (1) の位相で *closed* である.
3. $V_N := \{f \in C^{\infty}(\Omega) \mid p_N(f) < \frac{1}{N}\}$ とおくと, $\{V_N \mid N \geq 1\}$ は $C^{\infty}(\Omega)$ の *local base* となる.

4. *(1)* の $C^\infty(\Omega)$ の位相は, $\{K_i\}_{i=1}^\infty$ の取り方によらない.
5. $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ を $C^\infty(\Omega)$ の点列とし, $f \in C^\infty(\Omega)$ とする. "(1) の位相で $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ が f に収束する"ことは, "任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について $D^\alpha f_i$ が $D^\alpha f$ に局所一様収束する"ことと同値である.

$D^\alpha f_i$ が $D^\alpha f$ に局所一様収束するとは, 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について $\sup_{x\in K}\{|D^\alpha f_i - D^\alpha f|\} \to 0$ となること.

Proof. (1). p_N が seminorm となることは簡単にわかる. $\mathcal{P} := \{p_N \mid N \geq 1\}$separating になることを示す. $f \in C^\infty(\Omega) \setminus \{0\}$ とする. 定義から $x \in \Omega$ で $f(x) \neq 0$ となるものがある. よって 1.7.2 より, ある $N \geq 1$ で $x \in K_N$ となるものが存在する. p_N の定義から, $0 < |f(x)| \leq p_N(f)$ となる. よっていえた.

(2). $x \in \Omega$, $f \in C^\infty(\Omega)$ とする. 示すことは「任意の $\varepsilon > 0$ について, ある (1) での位相における開集合 $0 \in V \subset C^\infty(\Omega)$ が存在して, 任意の $g \in V$ について $|ev_x(f+g) - ev_x(f)| < \varepsilon$ となる」である. ($f + V$ は $f \in C^\infty(\Omega)$ の開近傍になる.)

$\varepsilon > 0$ とする. $V := \{g \in C^\infty(\Omega) \mid p_N(g) < \varepsilon\}$ とおく. 1.5.4 より $p_N : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ は (1) の位相で連続になるので, V は (1) での位相における開集合となる. 任意の $g \in V$ について,

$$|ev_x(f+g) - ev_x(f)| = |g(x)| \leq p_N(g) < \varepsilon$$

となりいえた.

(3). 1.5.4 から, $i \in \mathbb{Z}_+, n_i \in \mathbb{Z}_+$ について, $V(p_i, n_i) := \{f \in C^\infty(\Omega) \mid p_i(f) < \frac{1}{n_i}\}$ と定め,

$$\mathcal{B} := \{V(p_{i_1}, n_{i_1}) \cap \cdots \cap V(p_{i_r}, n_{i_r})\}$$

とする. 1.5.4 から $\mathcal{B}$ は local base である. よって示すことは, 「任意の $V := V(p_{i_1}, n_{i_1}) \cap \cdots \cap V(p_{i_r}, n_{i_r})$ について, ある $N \in \mathbb{Z}_+$ があって, $0 \in V_N \subset V$ となる」ことである.

$V := V(p_{i_1}, n_{i_1}) \cap \cdots \cap V(p_{i_r}, n_{i_r})$ とする. $i_1 \leq \cdots \leq i_r$ として良い. $m := \max\{n_{i_1}, \ldots, n_{i_r}\}$ とし $n := \max\{i_r, m\}$ とおく. $p_1 \leq p_2 \leq \cdots$ であることに注意すると

$$V_N = V(p_N, N) \subset V(p_{i_r}, m) \subset V$$

となる. よって $\{V_N\}_{N\geq 1}$ は local base となる.

(4). $\{K_i'\}$ を 1.7.2 を満たす別のコンパクト集合族とし, p_i' を K_i' に対応するものとする. 「任意の $N \geq 1$ について, ある $N' \geq N$ が存在して, $V_{N'}' = V(p_{N'}', N') \subset V(p_N, N) = V_N$ である」ことを示す. これを示せば対称性より逆も成り立ち, 二つの位相が同じことが言える ((3) より $\{V_N\}_{N\geq 1}$ は local base となるので).

$N \geq 1$ とする. $K_N \subset \Omega = \bigcup_{i'\geq 1} K_{i'}'^\circ$ であるので, K_N のコンパクト性より, ある $N' \geq N$ で $K_N \subset K_{N'}'$ となるものがある. よって $p_N \leq p_{N'}'$ であるので, $V(p_{N'}', N') \subset V(p_N, N)$. よってい

えた.

(5). 「$C^\infty(\Omega)$ の位相で $f_i \to f$」は「任意の $N \geq 1$ について, ある $i_0 \geq 1$ があって, 任意の $i \geq i_0$ について, $f_i \in f + V_N$ である」ことと同値である. ($\{V_N\}_{N\geq 1}$ は local base となるので) ここで

$$f_i \in f + V_N \Leftrightarrow \ p_N(f_i - f) < \frac{1}{N} \Leftrightarrow \text{任意の } |\alpha| \leq N \text{ について } K_N \text{ 上で } |D^\alpha f_i - D^\alpha f| < \tfrac{1}{N}$$

であることに注意する.

$C^\infty(\Omega)$ の位相で $f_i \to f$ とする. 任意の $K \subset \Omega$ コンパクトについて, ある $l \geq 1$ があって, $K \subset K_l$ となる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について $N \geq \max(|\alpha|, l)$ なるように N をとる. するとある $i_0 \geq 1$ があって, 任意の $i \geq i_0$ について, $f_i \in f + V_N$ となる. よって $i \geq i_0$ ならば

$$\sup_{x\in K}\{|D^\alpha f_i - D^\alpha f|\} \leq \sup_{x\in K_N}\{|D^\alpha f_i - D^\alpha f|\} \leq p_N(f_i - f) < \frac{1}{N}$$

である. よって K 上で任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について $D^\alpha f_i$ が $D^\alpha f$ に一様収束する.

逆に「任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について $D^\alpha f_i$ が $D^\alpha f$ に局所一様収束」すると仮定する . 特に K_N 上で一様収束する. $|\alpha| \leq N$ となる α は有限なので, $C^\infty(\Omega)$ の位相で $f_i \to f$ が言える. ((5). の証明の初めに言った同値性に注意する.) □

Proposition 1.7.4. *1.7.3* での $C^\infty(\Omega)$ の位相によって, $C^\infty(\Omega)$ は位相ベクトル空間になり, *Fréchet*(*locally convex* かつ *complete invariant metric* を持つ) かつ *Heine-Borel property* を持つ.

Proof. 1.7.2 のように $\{K_i\}_{i=1}^\infty$ をとり. 1.7.3 のように

$$p_N : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{R} \quad f \mapsto p_N(f) := \max\{|D^\alpha f(x)| \mid x \in K_N, |\alpha| \leq N\}$$

をとる. $V_N := \{f \in C^\infty(\Omega) \mid p_N(f) < \frac{1}{N}\}$ とおくと, 1.7.3 から $\{V_N\}_{N\geq 1}$ は local base となる. 1.5.4 から $C^\infty(\Omega)$ は locally convex かつ invariant metric を持つ $\mathbb{C}$ 上の位相ベクトル空間となる. よって残りは完備性と Heine-Borel property である.

[完備性] $\{f_i\}^\alpha \subset C^\infty(\Omega)$ を Cauchy 列とする. 定義から任意の $N \geq 1$ について, ある $i_0 \geq 1$ があって, 任意の $i, j \geq i_0$ について $f_i - f_j \in V_N$ となる. ここで $f_i - f_j \in V_N$ とは,「任意の $|\alpha| \leq N$ となる α について, $\sup_{K_N} |D^\alpha f_i - D^\alpha f_j| < \frac{1}{N}$ となる」ことと同値である.

よって任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について, $|\alpha| \leq N$ ならば, $\{D^\alpha f_i\}$ は K_N 上で一様 Cauchy 列となる. (つまり任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $i_0 \geq 1$ があって, 任意の $i, j \geq i_0$ について, $\sup_{K_N} |D^\alpha f_i - D^\alpha f_j| < \varepsilon$ である.) よって任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について, $\{D^\alpha f_i\}_{i=1}^\infty$ は任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ 上で一様 Cauchy 列となる.

$\alpha = 0$ とすれば, $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ は任意のコンパクト集合上で一様 Cauchy 列より, ある Ω 上の連続関数 f があって, 任意のコンパクト集合上で $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ は f に一様収束する. 次の Claim より, $f \in C^\infty(\Omega)$

となり, 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について $D^\alpha f_i$ が $D^\alpha f$ に局所一様収束する. よって 1.7.3 から $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ は f に収束する.

Claim 1.7.5. $(a,b) \subset \mathbb{R}$ を開区間とし, $f_i : (a,h) \to \mathbb{R}$ を C^1 級関数とする. f, g を連続関数として, (a,b) 上で一様収束 $f_i \to f$, $f_i' \to g$ すると仮定する. この時 f は微分可能かつ $g = f'$ となる.

Proof. $h > 0$ とすると

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)\right| \\
&\leq \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} + \frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - g(x)\right| \\
&\leq \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}\right| + \left|f_n'(x+\theta h) - g(x)\right| \\
&\leq \frac{1}{h}\left|f(x+h)-f_n(x+h)\right| + \frac{1}{h}\left|f(x)-f_n(x)\right| + \left|f_n'(x+\theta h) - g(x+\theta h)\right| + \left|g(x+\theta h) - g(x)\right| \\
&\leq \frac{2}{h}\sup_{x\in(a,b)}\left|f(x)-f_n(x)\right| + \sup_{x\in(a,b)}\left|g(x)-f_n'(x)\right| + \left|g(x+\theta h)-g(x)\right|
\end{aligned}
\tag{1.7.1}
$$

となる. ここで $\theta \in [0,1]$ は $\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} = f_n'(x+\theta h)$ となるようにとる.(平均値の定理より存在する. θ は n, h に依存する)

よって任意の $\varepsilon > 0$ について, $h > 0$ を $\sup_{\theta\in(-1,1)}\left|g(x+\theta h) - g(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ となるように取り, そして n を

$$
\frac{2}{h}\sup_{x\in(a,b)}\left|f(x)-f_n(x)\right| + \sup_{x\in(a,b)}\left|g(x)-f_n'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}
$$

となるように大きくとれば, (1.7.1) より, $\varepsilon > 0$ について, ある $h > 0$ があって, $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)\right| < \varepsilon$ となる. よっていえた. □

[Heine-Borel Property について] 示すことは任意の closed bounded set がコンパクトとなること. $E \subset C^\infty(\Omega)$ closed bounded とする. $C^\infty(\Omega)$ は metrizable より, E もそうである. よってコンパクトであることは点列コンパクトであることと同値である. (E の点列コンパクト性を示していく)

1.5.4 から任意の $N \geq 1$ について, $p_N(E) \subset \mathbb{R}$ は bounded である. よってある $M_N > 0$ があって, 任意の $|\alpha| < N, f \in E$ について, K_N 上で $\sup_{K_N}|D^\alpha f| \leq M_N$ となる.

Claim 1.7.6. $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ とする. 任意の $|\alpha| < N$ となる自然数 N について

$$
\mathcal{F} := \{D^\alpha f \mid f \in E\}
$$

は K_N 上で次を満たす.

- 一様有界. つまりある $M > 0$ があって, 任意の $D^\alpha f \in \mathcal{F}$ について, $|D^\alpha f| \leq M$.
- 一様同程度連続. つまり任意の $\varepsilon > 0$ についてある $\delta > 0$ があって, 任意の $D^\alpha f \in \mathcal{F}$ について, $|x - x'| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Proof. 一様有界はもう示した. 一様同程度連続を示す. $f \in E, F := D^\alpha f$ とする. $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in K_N$ とする. 平均値の定理より. ある M_{n+1} があって, K_{N+1} 上で $|\frac{\partial F}{\partial x_1} F(x)| \leq M_{N+1}$ となる. よって

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq |F(x_1, \ldots, x_n) - F(y_1, x_2, \ldots, x_n)| + \cdots + |F(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n) - F(y_1, \ldots, y_n)| \\ &\leq M_{N+1} \left[|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \right]. \end{aligned} \tag{1.7.2}$$

がいえる. これは一様同程度連続を導く. □

$N \in \mathbb{Z}_+$ とする. $\{g_n\}_{n \geq 1} \subset \{f|_{K_N} \mid f \in E\}$ とする. このとき $\{g_n\}_{n \geq 1}$ の部分列 $\{g_{n_k}\}_{k \geq 1}$ で, 任意の $|\alpha| < N$ となる $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について, $D^\alpha g_{n_k}$ が一様収束する部分列を持つことを示す. (これは Ascoli の定理の議論をまねる)

$\{x_1, x_2, \ldots, \} \subset K_N$ を K_N の可算で稠密な部分集合とする. $\{g_n\}_{n \geq 1}$ は 一様有界より, ある $M > 0$ があって $|g_i(x_j)| < M$ となる.

以下「ある部分列 $\{g_{n_k}\}_{k \geq 1}$ があって, 任意の $i \geq 1$ について $\{g_{n_k}(x_i)\}_{k \geq 1}$ は収束する」ことを示す. これは対角線論法. $i = 1$ の時は, ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理から $\{g_{11}(x_1), g_{12}(x_1), g_{13}(x_1), \ldots\} \subset \mathbb{C}$ が収束するように g_{1k} が取れる. 次に $\{g_{1k}\}$ の部分列をうまく取ることで, $\{g_{21}(x_2), g_{22}(x_2), g_{23}(x_2), \ldots\} \subset \mathbb{C}$ が収束するように g_{2k} が取れる. これを繰り返すと次のような点列が取れる.

$$\begin{matrix} g_{11}(x_1) & g_{12}(x_1) & g_{13}(x_1) & \cdots \\ g_{21}(x_2) & g_{22}(x_2) & g_{23}(x_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{matrix}$$

そこで $g_m := g_{mm}$ とおけば, これが欲しい点列になる.

さて上の $\{g_m\}_{m \geq 1}$ は K_N 上である g に一様収束することを示す. $g : K_N \to \mathbb{C}$ を以下のように構成する. $x \in \Omega \setminus K_N$ ならば $g(x) = 0$ とする. $x \in K_N$ とする. $\{g_m(x)\} \subset \mathbb{C}$ は Cauchy 列であることを示す. $\varepsilon > 0$ とする. すると次のようにできる.

- $\{g_m\}_{\geq 1}$ は一様同程度連続なので, ある有限この開集合 $U_j \subset \Omega$ があって $K_N \subset \bigcup_{j=1}^l U_j$ かつ, 任意の $m \geq 1$ かつ $x, y \in U_j$ について $|g_m(x) - g_m(y)| < \varepsilon$ となる.
- $x \in U_1$ として良い. すると上の x_j で $x_j \in U_1$ となるものが取れる. するとある M_0 があって, 任意の $m, m \geq M_0$ について $|g_m(x_j) - g_{m'}(x_j)| < \varepsilon$ となる.

以上より任意の $m, m \geq M_0$ について

$$|g_m(x) - g_{m'}(x)| \leq |g_m(x) - g_m(x_j)| + |g_m(x_j) - g_{m'}(x_j)| + |g_{m'}(x_j) - g_{m'}(x)| \leq 3\varepsilon.$$

となる．よって $\{g_m(x)\} \subset \mathbb{C}$ は Cauchy 列である．これより $g(x) := \lim_{m\to\infty} g_m(x)$ として定義できる．

あとはこの議論を繰り返す．($\{D^1 g_m\}_{m\to\infty}$ の部分列をとる．) 1.7.5 によって，部分列 $\{g_m(x)\}$ と Ω の C^N 級関数 g があって，$D^\alpha g_m \to D^\alpha g$ は一様収束する．[4]

以下 E が点列コンパクトであることを示す．$\{f_m\}_{m\geq 1} \subset E$ とする．任意の $N \in \mathbb{Z}_+$ について，ある部分列 $\{f_{m_k}\}$ が K_N 上で C^N 級関数に一様収束するものがあるよって対角線論法を用いることで，ある部分列 $\{f_{m_k}\}$ があって，任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ について $\{D^\alpha f_{m_k}\}$ 局所一様収束するものが取れる．この f_{m_k} は Ω 上の C^∞ 級関数 f に局所一様収束する．よって点列コンパクトである． □

1.8 Space of test functions and distributions

引き続き Ω を空でない $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．

Definition 1.8.1.

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\, \varphi : \Omega \to \mathbb{C} \mid \varphi C^\infty,\ \mathrm{supp}(\varphi) \text{ コンパクト} \,\}$$

とする．$\mathcal{D}(\Omega)$ の元を<u>test function</u>という．

この節では以下を示す．

Goal.

- $\mathcal{D}(\Omega)$ が locally convex complete with Heine-Borel property を満たす位相ベクトル空間になるような位相 τ が存在すること．(この位相は距離化可能とは限らない．よって Frechet とは言えない)
- $C^\infty(\Omega)$ に 1.7.3 の位相を入れる．この時 $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow C^\infty(\Omega)$ は連続である．
- $K \subset \Omega$ コンパクトとし．$\mathcal{D}_K = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \mathrm{Supp} f \subset K\}$ とする．するとこれは $C^\infty(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)$ の部分集合である．この時 $\mathcal{D}_K$ に誘導される 2 つの部分位相は同じであ

[4] $D^\alpha g_m \to D^\alpha g$ の収束は，おそらく K_n° 上にした方が良い．微分をしているので境界を考えるのは面倒である．

る．よって以下の図式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_K \arrow[r, hook, "\text{closed subspace}"] \arrow[dr, hook, "\text{closed subspace}"'] & \mathcal{D}(\Omega) \arrow[d, hook, "\text{conti}"] \\
& C^\infty(\Omega)
\end{tikzcd}$$

そこで任意の $N \geq 0$ について

$$\|\cdot\|_N : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \varphi \mapsto \|\varphi\|_N = \max\left\{ |D^\alpha \varphi(x)| \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0},\ |\alpha| \leq N,\ x \in \Omega \right\}$$

とする．$\|\cdot\|_N$ は $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $\mathcal{D}(\Omega)$ のノルムであり，$\|\cdot\|_N \leq \|\cdot\|_{N+1}$ となる．

Lemma 1.8.2. $K \subset \Omega$ をコンパクトとする．$\{\|\cdot\|_N\}_{N\geq 0}$ で誘導される $\mathcal{D}_K$ の位相は，*1.7.3* での $\{p_N\}_{N\geq 1}$ による位相と同じである．

ここで $\{\|\cdot\|_N\}_{N\geq 0}$ で誘導される $\mathcal{D}_K$ の位相とは，$f \in \mathcal{D}_K$ として，$N \in \mathbb{Z}_+, \varepsilon > 0$ について，$\{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid \|\varphi - f\|_N < \varepsilon\}$ が生成する位相である．

Proof. 1.7.3 のようにコンパクト集合の列 $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset \Omega$ で $\Omega = \bigcup_{i\geq 1} K_i$, $K_i \subset K_{i+1}^\circ$ で，

$$p_N(\varphi) = \max\left\{ |D^\alpha \varphi(x)| \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{Z}^n_+,\ |\alpha| \leq N,\ x \in K_N \right\}.$$

となるようにとる．$K \subset \Omega$ はコンパクトなので，ある N_0 があって $N \geq N_0$ ならば $K \subset K_N$ となる．

任意の $m \in \mathbb{Z}_+$ について，ある N があって，

$$\{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid \|\varphi\|_N < \varepsilon\} \subset \{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid p_m(\varphi) < \varepsilon\}$$

であることを示す．$m \in \mathbb{Z}_+$ を固定する．すると $N \geq \max\{m, N_0\}$ なる N について，$\varphi \in \mathcal{D}_K$ ならば，$\mathrm{Supp}(\varphi) \subset K_N$ である．よって定義から $\|\varphi\|_N = p_N(\varphi)$ となる．以上より $N \geq \max\{m, N_0\}$ ならば，

$$\{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid \|\varphi\|_N < \varepsilon\} = \{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid p_N(\varphi) < \varepsilon\} \subset \{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid p_m(\varphi) < \varepsilon\}.$$

上の証明で p_N と $\|\cdot\|_N$ の役割を入れ替えて議論することができる．よって 2 つの位相は同じである． □

Remark 1.8.3. $\{\|\cdot\|_N\}_{N\geq 0}$ によって，$\mathcal{D}(\Omega)$ locally convex metrizable な $\mathbb{C}$ 上の位相ベクトル空間の構造を持つ．がそれは完備ではない (そしてこれはほしい位相ではない)．

$\Omega = \mathbb{R}$ とする．自然数 $i \in \mathbb{Z}_+$ について，f を $\mathrm{Supp}(f) \subset (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$，$f(\frac{1}{2}) = 1$，$0 \leq f \leq 1$ となるような滑らかな関数をとる．(1 の分割に出てくる Bump 関数みたいなもの) そして，

$$\varphi_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} f(x-i)$$

とする．φ_n は関数として次を満たす．

- φ_n は C^∞ で $\mathrm{Supp}(\varphi_n) \subset (0, n)$．特に $\mathcal{D}(\Omega)$ の元である．
- 各 $1 \leq i \leq n$ について，$(i-1, i)$ 上では $0 \leq \varphi_n \leq \frac{1}{2^{i-1}}$．
- ある $M > 0$ があって，任意の $n, \alpha \in \mathbb{Z}_+$ について $|D^\alpha \varphi_n| < M$.(φ_n の微分は f にしかよらない定数で抑えられる.)

$\{\varphi_n\}$ は $\{\|\cdot\|_N\}_{N \geq 0}$ の位相に関して Cauchy 列である．これを示す．まず，$\{\|\cdot\|_N\}_{N \geq 0}$ の 0 での local base は

$$V_{N,r} = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \|f\|_N < r\}$$

という形をしている．そこで，すると $m' \geq m \geq 1$ ならば，

$$\|\varphi'_m - \varphi_m\|_N = \left\| \sum_{i=m+1}^{m'} \frac{1}{2^{i-1}} f(x-i) \right\|_N \leq \frac{1}{2^m} M$$

となる．よって Cauchy 列である．

しかし極限は存在しない．極限 φ が存在したら，$\varphi(i + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2^{i-1}}$ にならないといけず，Support はコンパクトにならない．

Definition 1.8.4.

1. $K \subset \Omega$ コンパクトとする．$\mathcal{D}_K$ の位相 τ_K を $\{\|\cdot\|_N\}_{N \geq 0}$ で定められる位相とする．これは 1.8.2 により，1.7.3 での位相と同じであり，特に $\mathcal{D}_K$ は locally convex, complete, metrizable, with the Heine-Borel property である．
2. $\mathcal{D}(\Omega)$ の集合族 β を，"空でない convex, balanced set $W \subset \mathcal{D}(\Omega)$ で，任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について $W \cap \mathcal{D}_K \in \tau_K$ となるもの"の集まりとする．
3. $\mathcal{D}(\Omega)$ の集合族 τ を，"$\bigcup_{i \in I}(\varphi_i + W_i)$ とかけるもの"の集まりとする．ただし $i \in I$ について，$\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega), W_i \in \beta$ とする．

Remark 1.8.5. $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ は位相ベクトル空間となる．(後で示す)．$(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \tau)$ においては，1.8.3 での点列 $\{\varphi_n\}$ は Cauchy 列にはならない．

Proof. $x_m := m + \frac{1}{2}$ とする，$c_m > 0$ について

$$V := \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid |\varphi(x_m)| < c_m \forall m \geq 1\}$$

とする．まず $V \in \beta$ であること示す．convex, balanced なのは明らか．任意の $K \subset \Omega$ コンパクトについて $K \cap \{x_m\}$ は有限集合より，$V \cap \mathcal{D}_K \in \tau_K$ となる．特に $V \in \tau$ で $(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \tau)$ における 0 の開近傍である．

$c_m := \frac{1}{2^m}$ とする．すると任意の $m' > m \geq 1$ について，

$$|\varphi_{m'}(x_{m'}) - \varphi_m(x_{m'})| = \frac{1}{2^{m'-1}} > \frac{1}{2^{m'}} = c_{m'}$$

となる．よっ $\varphi_{m'} - \varphi_m \notin V$ となる．これより $(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \tau)$ においては，1.8.3 での点列 $\{\varphi_n\}$ は Cauchy 列にはならない． □

Theorem 1.8.6. β, τ を *1.8.4* における $\mathcal{D}(\Omega)$ の集合族とする．

1. τ は $\mathcal{D}(\Omega)$ の位相であり，β は τ の 0 での *local base* である．
2. $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ は $\mathbb{C}$ 上の *locally convex* な位相ベクトル空間．

Proof. (1). まず τ は $\mathcal{D}(\Omega)$ の位相であることを示す．$\varnothing \in \tau$ は 1.8.4 において，$I = \varnothing$ とおけば良い．$\mathcal{D}(\Omega) \in \beta$ より，$\mathcal{D}(\Omega) \in \tau$ も明らか．また，τ は union "$\bigcup$" という操作で閉じている．よって示すことは，「$V_1, V_2 \in \tau$ ならば $V_1 \cap V_2 \in \tau$」のみとなる．

$V_1, V_2 \in \tau$ とする．$\varphi \in V_1 \cap V_2$ をとる．すると，$i = 1, 2$ について，ある $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ と $W_i \in \beta$ があって，

$$\varphi \in \varphi_i + W_i \subset V_i$$

となる．ある $\delta_i \in (0, 1)$ で

$$\delta_1 W_1 \cap \delta_2 W_2 \in \beta \quad \text{かつ} \quad \varphi + \delta_1 W_1 \cap \delta_2 W_2 \subset V_1 \cap V_2$$

となるものが存在することを示せば良い．コンパクト集合 $K \subset \Omega$ で $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}_K$ となるものを取る．すると $\varphi - \varphi_i \in W_i \cap \mathcal{D}_K$ である．$W_i \in \beta$ であるので，$W_i \cap \mathcal{D}_K$ は $\mathcal{D}_K$ で開集合である．$\mathcal{D}_K$ は $\mathbb{C}$ 上の位相ベクトル空間であるので，ある $\delta_i \in (0, 1)$ があって，$\varphi - \varphi_i \in (1 - \delta_i) W_i \cap \mathcal{D}_K$ とできる．以上より，W_i は convex であるので，

$$\varphi + \delta_i W_i \subset \varphi_i + \delta_i W_i + \delta_i W_i \subset \varphi_i + W_i \subset V_i$$

となる，よって $\varphi + (\delta_1 W_1 \cap \delta_2 W_2) \subset V_1 \cap V_2$ となりいえた．($\delta_1 W_1 \cap \delta_2 W_2 \in \beta$ は簡単にわかる.) また β が 0 の local base であることは，上の議論において $\varphi = 0$, $V_1 = V_2$ として議論すればわかる．

(2). 1.8.4 から，$(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ において平行移動は同相写像になる．

[$(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ は T_1 であること] $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ で $\varphi_1 \neq \varphi_2$ となるものを取る．

$$W := \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mid \|\varphi\|_0 < \|\varphi_1 - \varphi_2\|_0\}.$$

W は convex, balanced, $0 \in W$ で 任意のコンパクト $K \subset \Omega$ について, $W \cap \mathcal{D}_K$ は $\mathcal{D}_K$ で開集合になる. つまり $W \in \beta$ である. そして, $\varphi_1 \notin \varphi_2 + W$ かつ $\varphi_2 \in \varphi_2 + W$ であり, $\varphi_2 + W \subset \mathcal{D}(\Omega)$ で open なので,

$$\mathcal{D}(\Omega) \setminus \{\varphi_1\} = \bigcup_{\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega) \setminus \{\varphi_1\}} \varphi_2 + W$$

となり, $\{\varphi_1\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ は closed である.

[加法が連続なること.] $T : \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ を $(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \varphi_1 + \varphi_2$ とする. $\varphi_1 + \varphi_2$ の開近傍は $\beta \in W$ を使って, $\varphi_1 + \varphi_2 + W$ とかける. よって,

$$T\left(\varphi_1 + \frac{1}{2}W, \varphi_2 + \frac{1}{2}W\right) \subset \varphi_1 + \varphi_2 + W$$

であるので, T は (φ_1, φ_2) で連続となる.

[スカラー倍が連続なること.] $S : \mathbb{C} \times \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ を $(\alpha_0, \varphi_0) \mapsto \alpha\varphi$ とする. これが (α_0, φ_0) で連続であることを示す.

$K \subset \Omega$ を $\varphi_0 \in \mathcal{D}_K$ となるコンパクト集合とする. $W \in \beta$ とする. すると次が成り立つ.

- $W \cap \mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}_K$ は開集合なので, ある $\varepsilon > 0$ があって, 任意の $|\alpha| < \varepsilon$ について, $\alpha\varphi_0 \in \frac{1}{3}W$ である.
- $\alpha_0 = 0$ または $\varphi \in \frac{1}{3|\alpha_0|}\}W$ の時は, W は balanced なので, $\alpha_0\varphi \in \frac{1}{3}W$ となる.
- $\varphi \in \frac{1}{3}W$ かつ $|\alpha| \leq 1$ ならば, $\alpha\varphi \in \frac{1}{3}W$ である.

よって, $|\alpha| < \min\{\varepsilon, 1\}$ かつ $\varphi \in \min\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3|\alpha_0|}\}W$ ならば

$$(\alpha_0 + \alpha)(\varphi_0 + \varphi) \in \alpha_0\varphi_0 + \frac{1}{3}W + \frac{1}{3}W + \frac{1}{3}W \subset \alpha_0\varphi_0 + W$$

となる. (W は convex balanced を使う) よってスカラー倍も連続.

以上より $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ は $\mathbb{C}$ 上の位相ベクトル空間. そして, β の元は convex であるため, $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ は locally convex. □

Theorem 1.8.7. ひき続き, β, τ を *1.8.4* における $\mathcal{D}(\Omega)$ の集合族とする. ($\mathcal{D}(\Omega)$ には位相 τ を入れる. *1.8.6* より, $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ は $\mathbb{C}$ 上の *locally convex* な位相ベクトル空間で, β は 0 の *local base* である.
この時次が成り立つ.

1. $V \subset \mathcal{D}(\Omega)$ を *convex balanced set* とする. V が開集合であることは, 任意の $K \subset \Omega$ について, $V \cap \mathcal{D}_K$ は $\mathcal{D}_K$ で開集合になること (つまり $V \cap \mathcal{D}_K \in \tau_K$) と同値.
2. $K \subset \Omega$ をコンパクト集合とする. この時, $\mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ によって誘導される部分位相は, *1.8.4* での τ_K と同じである.

3. $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ が *bounded* ならば，あるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ で $E \subset \mathcal{D}_K$ となるものが存在し，任意の $N \in \mathbb{Z}_+$ について，$\|\cdot\|_N : E \to \mathbb{R}$ は *bounded.*
4. $\mathcal{D}(\Omega)$ は *Heine-Borel property* を持つ．
5. $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ が *Cauchy* 列ならば，あるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ があって，$\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{D}_K$ かつ，任意の $N \in \mathbb{Z}_+$ について，

$$\lim_{n,m\to\infty} \|\varphi_m - \varphi_n\|_N = 0.$$

となる．(最後の意味は $\|\cdot\|_N$ に関して *Cauchy* 列になるということ.)
6. $\varphi_n \to \varphi_0$ *in* $\mathcal{D}(\Omega)$ ならば，あるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ があって，$\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{D}_K$ かつ任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について，一様に $D^\alpha \varphi_n \to \varphi_0$ と収束する．
7. $\mathcal{D}(\Omega)$ はこの位相において完備である．

Proof. 次の claim を示す．

Claim 1.8.8. $V \subset \mathcal{D}(\Omega)$ を開集合，$K \subset \Omega$ をコンパクト集合とする．この時 $V \cap \mathcal{D}_K$ は $\mathcal{D}_K$ 上で開集合である．(つまり $V \cap \mathcal{D}_K \in \tau_K$ ということ．) 特に $\mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ は連続

Proof. 任意の $\varphi \in V \cap \mathcal{D}_K$ について，ある 0 の local base $W \in \beta$ で $\varphi + W \subset V$ となるものが存在する．すると $\varphi + W \cap \mathcal{D}_K \subset V \cap \mathcal{D}_K$ であり，$W \cap \mathcal{D}_K$ は $\mathcal{D}_K$ で開集合である．よって，$V \cap \mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}_K$ は開集合である． □

(1). $\Rightarrow$ は claim から．$\Leftarrow$ について，$V = \varnothing$ の時は明らか．そうでない時は，$V \in \beta$ より OK.

(2). Claim より，$\mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ は連続である．よってあとは $E \in \tau_K$ について，ある $V \subset \mathcal{D}(\Omega)$open であって，$E = V \cap \mathcal{D}_K$ となるものが存在することを示せば良い．

$E \in \tau_K$, $\varphi \in E$ とする．τ_K の位相は 1.8.2 によって，$\{\|\cdot\|_N\}_{N\geq 0}$ が誘導する位相と同じであるので，ある $N \in \mathbb{Z}_+$, $\delta > 0$ があって，

$$W_\phi := \{\psi \in \mathcal{D}(\Omega) \mid \|\psi\|_N < \delta\}$$

とおくと，$\phi + W_\phi \cap \mathcal{D}_K \subset E$ となる．そして，$W_\phi \in \beta$ であるので，$\phi + W_\phi \subset \mathcal{D}(\Omega)$ で open である．また

$$(\phi + W_\phi) \cap \mathcal{D}_K = \phi + (W_\phi \cap \mathcal{D}_K) \subset E$$

である．今 $V := \bigcup_{\phi \in E}(\phi + W_\phi)$ とおくと $V \subset \mathcal{D}(\Omega)$open であり，$V \cap \mathcal{D}_K = E$ となる．よっていえた．

(3). $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ bounded とする．まず $E \subset \mathcal{D}_K$ となるコンパクト集合の存在を示す．背理法．「任意の $K \subset \Omega$ コンパクト集合について，$E \not\subset \mathcal{D}_K$ とする．すると任意の $m \in \mathbb{Z}_+$ について，ある

$\varphi_m \in E$ と $x_m \in \Omega$ があって,

- $\varphi_m(x_m) \neq 0$ かつ
- $\{x_m\}$ は Ω 上で集積点を持たない

ものを構成できる．これは次のように帰納的に構成する: 1.7.2 のようなコンパクト集合の列 $\Omega = \bigcup_{i\geq 1} K_i$ をとる． $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, x_1, \ldots, x_m$ が構成されたとする． $x_1, \ldots, x_m \in K_i$ なる i をとる．$E \not\subset \mathcal{D}_{K_i}$ より, ある $\varphi_{m+1} \in E$ で $\mathrm{supp}(\varphi_m) \not\subset K_i$ となるものがある．そこである $x_{m+1} \in \Omega \setminus K_i$ で $\varphi_{m+1}(x_{m+1}) \neq 0$ となるものが取れる．これを繰り返せば構成できる．

さて $W \subset \mathcal{D}(\Omega)$ を

$$W := \left\{ \psi \in \mathcal{D}(\Omega) \mid |\psi(x_m)| < \frac{|\varphi_m(x_m)|}{m} (\forall m \geq 1) \right\}$$

とおく．W は convex balanced かつ $0 \in W$ である．そして, 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に関して, $K \cap \{x_m\}_{m\geq 1}$ は有限集合となるので, $W \cap \mathcal{D}_K \in \tau_K$ となる．以上より, $W \in \beta$ となる．一方で φ_m の取り方から $\varphi_m \notin W$ である．つまり任意の $m \in \mathbb{Z}_+$ について, $E \not\subset mW$ である．これは E が bounded に矛盾する．

後半の主張に関しては, コンパクト集合 $K \subset \Omega$ で $E \subset \mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$ となるものを取る．E は $\mathcal{D}_K$ でも bounded である．よって,1.5.4 より $\|\cdot\|_N : E \to \mathbb{R}$ は bounded となる．

(4). $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ を bounded closed とする．(3) より, あるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ があって, $E \subset \mathcal{D}_K$ となる．(2) より, E は $\mathcal{D}_K$ の上で bounded closed である．1.7.4 から E は $\mathcal{D}_K$ 上でコンパクトである．よって $\mathcal{D}(\Omega)$ でもコンパクトである．

(5). $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ Cauchy 列とすると, $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ は bounded set である．よって (3) からあるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ があって, $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_K$ となる．(2) から $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$ は部分位相が入っているので, $\{\varphi_i\}$ は $\mathcal{D}_K$ 上でも Cauchy 列である．つまり任意の $N \in \mathbb{Z}_+$ について $\lim_{n,m\to\infty} \|\varphi_m - \varphi_n\|_N = 0$ となる．

(6). $\mathcal{D}(\Omega)$ 上で $\varphi_i \to 0$ とする．(この場合に示せば良い.) $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ は Cauchy 列になるので, (5) からあるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ があって, $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_K$ となる．よって $\mathcal{D}_K$ 上でも $\varphi_i \to 0$ となるので, $N \in \mathbb{Z}_+$ について $\|\varphi_i\|_N \to 0$ である．これは任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について, 一様に $D^\alpha \varphi_i \to 0$ と収束する．

(7). $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ を Cauchy 列とする．(5) からあるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ があって, $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_K$ となる．1.7.4 によって, $\mathcal{D}_K$ は完備である．(完備な距離空間の閉集合なので.) よってある $\varphi \in \mathcal{D}_K$ があって, $\mathcal{D}_K$ 上で $\varphi_i \to \varphi$ となる．これは $\mathcal{D}(\Omega)$ 上でも $\varphi_i \to \varphi$ となる．よって φ こそがほしい収束先である． □

以下 $\mathcal{D}(\Omega)$ には常に 1.8.4 における位相 τ を入れる．1.8.7 より $\mathcal{D}(\Omega)$ は locally convex complete で Heine-Borel Property を持つ位相ベクトル空間である．

Remark 1.8.9. $x \in \Omega$ について $\mathrm{ev}_x : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ を $\mathrm{ev}_x(\varphi) := \varphi(x)$ として定めると, これは連続で

ある．なぜならば $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ と $\varepsilon > 0$ について

$$W := \{f \in \mathcal{D}(\Omega) \mid \|f\|_0 < \varepsilon\}$$

とおくと，これは開集合であり，$\mathrm{ev}_x(\varphi + W) \subset B(\varphi(x), \varepsilon)$ となる．つまり ev_x は $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ で連続であり，φ は任意なので，ev_x は連続である．

また $\mathcal{D}_K = \bigcap_{x \in \Omega \setminus K} \mathrm{ev}_x^{-1}(0)$ とかけるので，特に $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$ は closed である．

Definition 1.8.10. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を空でない開集合とする．Ω 上の超関数 (distribution) とは，連続な $\mathbb{C}$ 線型写像 $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ のことである．その集まりを $\mathcal{D}'(\Omega)$ と表す．

Proposition 1.8.11. Y を $\mathbb{C}$ 上の *locally convex* な位相ベクトル空間とし，$\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to Y$ を $\mathbb{C}$-線型写像とする．以下は同値である．

(*a*) Λ は連続．

(*b*) Λ は有界

(*c*) $\mathcal{D}(\Omega)$ 上で $\varphi_i \to 0$ となる点列に対し，Y 上で $\Lambda\varphi_i \to 0$ となる．

(*d*) 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について，$\Lambda|_{\mathcal{D}_K} : \mathcal{D}_K \to Y$ は連続．

よって特に $\mathbb{C}$ 線型写像 $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ に対して，Λ が超関数であることは，Λ が有界であることと同値であり，そして任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について，$\Lambda|_{\mathcal{D}_K} : \mathcal{D}_K \to Y$ は連続であることと同値である．

Proof. [(a) $\Rightarrow$ (b)] 1.4.2 より．

[(b) $\Rightarrow$ (c)] $\{\varphi_i\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ を $\mathcal{D}(\Omega)$ 上で $\varphi_i \to 0$ となる点列とする．1.8.7 よりあるコンパクト集合 $K \subset \Omega$ があって，$\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_K$ となる．今

$$\Lambda|_{\mathcal{D}_K} : \mathcal{D}_K \overset{\text{bounded}}{\hookrightarrow} \mathcal{D}(\Omega) \xrightarrow{\Lambda} Y$$

という写像もまた bounded になる．$\mathcal{D}_K$ は 1.7.3 から metrizable であるので，1.4.2 から $\Lambda|_{\mathcal{D}_K}$ は連続である．よって，$\Lambda(\varphi_i) = \Lambda|_{\mathcal{D}_K}(\varphi_i) \to 0$ となる．

[(c) $\Rightarrow$ (d)] $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}_K$ を $\varphi_i \to 0$ となる点列とする．(c) の仮定から，$\Lambda|_{\mathcal{D}_K}(\varphi_i) = \Lambda\varphi_i \to 0$ である．これは 1.4.2 から $\Lambda|_{\mathcal{D}_K}$ は連続であることを意味する．

[(d) $\Rightarrow$ (a)] 示すべきことは，任意の convex balanced open set$0 \in U \subset Y$ について，$\Lambda^{-1}(U) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ が open となることである．まず $\Lambda^{-1}(U)$ は convex balanced で $0 \in \Lambda^{-1}(U)$ となる．そして任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について，(d) の仮定から $\Lambda^{-1}(U) \cap \mathcal{D}_K \in \tau_K$ となる．よって 1.8.7 より $\Lambda^{-1}(U)$ は $\mathcal{D}(\Omega)$ 上で open となる． □

Corollary 1.8.12. $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について, $D^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ を $D^\alpha(\varphi) := D^\alpha \varphi$ とすると, これは連続である.

Proof. $K \subset \Omega$ をコンパクト集合とすると, 以下の可換図式が成り立つ.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(\Omega) \arrow[r, "D^\alpha"] & \mathcal{D}(\Omega) \\ \mathcal{D}_K \arrow[u, hook] \arrow[r, "D^\alpha"] & \mathcal{D}_K \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

よって $D^\alpha : \mathcal{D}_K \to \mathcal{D}_K$ が連続であることを示せば良い . 任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K, N \in \mathbb{Z}_+$ について,

$$\|\varphi\|_N \leq |\varphi|_{N+|\alpha|}$$

である. $\mathcal{D}_K$ の位相は 1.8.2 より $\{\|\cdot\|_N\}_{N\geq 0}$ で定まっていたのでいえた. □

Proposition 1.8.13. $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 線型写像とする. 以下は同値である.

(a) $\Lambda \in D'(\Omega)$, つまり Λ は超関数である.

(b) 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について, ある $N \geq 0$ とある $C > 0$ があって, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K$ について,

$$|\Lambda\varphi| \leq C\|\varphi\|_N$$

が成り立つ.

Proof. [(b) $\Rightarrow$ (a)] $K \Subset \Omega$ をコンパクト集合とする. 1.8.11 から示すことは, $\Lambda|_{\mathcal{D}_K} : \mathcal{D}_K \hookrightarrow D(\Omega) \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{C}$ が連続となることである. 平行移動して $\Lambda|_{\mathcal{D}_K}$ が 0 で連続であることを示せば良い. 仮定 (b) にあるような $N \geq 0, C > 0$ を固定する. 任意の $\varepsilon > 0$ について,

$$V = \{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid \|\varphi\|_N < \frac{\varepsilon}{C}\}$$

とする. $0 \in V \subset \mathcal{D}_K$open であり, 任意の $\varphi \in V$ について $|\Lambda|_{D_K}(\varphi)| < \varepsilon$ である. よって $\Lambda|_{D_K}$ は連続である.

[(a) $\Rightarrow$ (b)] $K \subset \Omega$ をコンパクト集合とする. すると $\Lambda|_{\mathcal{D}_K} : \mathcal{D}_K \to \mathbb{C}$ もまた連続である. よってある $N \geq 0$ とある $\varepsilon > 0$ があって,

$$\Lambda\left(\{\varphi \in \mathcal{D}_K \mid \|\varphi\|_N < \varepsilon\}\right) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

となる. これは任意の 0 でない $\varphi \in \mathcal{D}_K$ について, $|\Lambda(\frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|_N}\varphi)| < 1$ となる. よって任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K$

について,

$$|\Lambda(\varphi)| < \frac{2}{\varepsilon}\|\varphi\|_N$$

となる. $C = \frac{2}{\varepsilon}$ とおけばいえた. □

Definition 1.8.14. $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ とする. Λ が<u>finite order</u>を持つとは, "ある $N \geq 0$ があって, 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について, ある $C > 0$ があって, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K$ について,

$$|\Lambda\varphi| \leq C\|\varphi\|_N$$

が成り立つ"こと. これが成り立つ最小の自然数 N を Λ の order という.

Example 1.8.15 (Dirac の超関数)**.** $x \in \Omega$ について, $\delta_x = \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ を $\delta_x(\varphi) := \varphi(x)$ とする. δ は distribution である. なぜならば任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ について,

$$|\delta_x(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_0$$

が成り立つので, 1.8.13 からわかる. さらに δ_x は finite order を持つ, order は 0 である.

Chapter 2

超関数続き・convolution

Notation

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: non-empty open subset
- $K \subset \Omega$: compact subset
- $\mathcal{D}_K := \{\varphi : \Omega \to \mathbb{C} \mid \varphi \in C^\infty(\Omega),\ \mathrm{Supp}\ \varphi \subset K\}$
- $\mathcal{D}(\Omega) := \bigcup_{K \subset \Omega:\ \mathrm{cpt}} \mathcal{D}_K$ test function の空間
- $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について,

$$\|\varphi\|_N := \max\{|D^\alpha \varphi(x)| \mid x \in \Omega,\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ \text{s.t. } |\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq N\}$$

- $\forall f \in C^\infty(\Omega),\ N \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,\ \text{s.t. } |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq N$ について,

$$P_N(f) := \max\{|D^\alpha f(x)| \mid |\alpha| \leq N\}$$

$$V_N := \{f \in C^\infty(\Omega) \mid P_N(f) \leq \tfrac{1}{N}\}$$

- τ_K : $\mathcal{D}_K$ 上の位相で, $\{V_N\}_{N=1}^\infty$ とその平行移動で定められるもの.
- β : convex balanced $0 \in W \subset \mathcal{D}(\Omega)$ であって, 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について $\mathcal{D}_K \cap W \in \tau_K$ となる W からなる集合族.
- τ : β の平行移動によって定められる $\mathcal{D}(\Omega)$ 上の位相
- $\mathcal{D}'(\Omega) := \{\varphi : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C} \mid \varphi'$連続な線形写像 $\}$ この元を超関数 (distribution) という.

Bibliography

[Rud] W. Rudin. *Functional analysis.* 2nd edn. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York. (1991.)

[NO] J. Noguchi, T.Ochiai *Geometric Function Theory in Several Complex Variables* Translations of Mathematical Monographs Volume: 80; 1990; 282 pp

[Rud, Chapter 1, 3, 6], [NO, Chapter 3] を主に参考にしている.

ルベーグ測度の定義の復習

Borel measure （ボレル測度）

Definition 2.0.1. Borel σ-代数を

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) := \sigma(\{\text{ 開集合 in } \mathbb{R}^n\})$$

と定める. ここで $\sigma(\{\text{ 開集合 in } \mathbb{R}^n\})$ とは可算回の和・共通部分・補集合の操作で生成される集合族をさす.
μ が Borel measure とは， $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 上に定義された測度, つまり $\mu(\varnothing) = 0$ かつ完全加法性を持つ写像 $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ とする.

Lebesgue measure （ルベーグ測度）

Borel 集合だけでは，測度を割り当てたい集合が足らない. 例えば，カントール集合やさらに病的な集合の取り扱いに限界があ Lebesgue measure は，Borel σ-代数を測度に関して完備化 (completion) して得られるより大きな集合族に定義される.

1. 外測度 m^* を定義する：

$$m^*(E) := \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|I_k| \;\middle|\; E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,\ I_k \text{ は区間}\right\}$$

（$|I_k|$ は区間の長さ）

2. ルベーグ可測集合：集合 E が Lebesgue measurable であるとは，

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \quad \text{for all } A \subset \mathbb{R}^n$$

が成り立つこと。

3. この可測集合族 $\mathcal{L}$ 上に，$m(E) := m^{**}(E)$ を定義する。

Definition 2.0.2. Lebesgue measure m は，

$$m : \mathcal{L} \to [0, \infty]$$

で，$\mathcal{L}$ は全ての Lebesgue measurable 集合を含む。

$\mathcal{L}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ を含み， 測度に関して完備（零集合の部分集合も全て含む）である.

Borel measure と Lebesgue measure の違いは以下の通り.

項目	Borel measure	Lebesgue measure
定義域	Borel σ-代数 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue measurable 集合族 $\mathcal{L}$
構成方法	開集合から生成される 最小の σ-代数上の測度	外測度から Carathéodory の方法で構成
完備性	一般には完備でない （零集合の部分集合を含まない場合がある）	完備 （零集合の部分集合も可測）
関係	Lebesgue measure の Borel 部分制限が Borel Lebesgue measure	Lebesgue measure は Borel measure の完備化

符号付き測度

$(X, \mathcal{A})$ を可測空間とする.

Definition 2.0.3. $\nu : \mathcal{A} \to [-\infty, +\infty]$ が次の条件を満たすとき, 符号付き測度 (signed measure) という.

1. $\nu(\varnothing) = 0$.

2. ν は可算加法性を持つ：任意の互いに素な可測集合列 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対して

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k)$$

が成り立つ。ただし，和の右辺では $\sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k)^+ + \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k)^-$ の少なくとも一方は有限とする．（ここで $x^+ = \max(x, 0),\ x^- = \max(-x, 0)$）であることを仮定し，$+\infty - \infty$ の不定形が出ないと仮定する)

(2) に関しては, 測度の値が不定形になるのを避ける目的がある．つまり $+\infty$ と $-\infty$ を同時に取らないようにする.

重要な定理としては以下がある.

- **Hahn** 分解定理：任意の signed measure ν に対し，X は可測集合 P（正集合）と N（負集合）に分割でき，
$$\nu(E) \geq 0\ (E \subset P), \quad \nu(E) \leq 0\ (E \subset N)$$
- **Jordan** 分解定理：ν は互いに素な非負測度 ν^+（正部分）と ν^-（負部分）を用いて
$$\nu = \nu^+ - \nu^-$$
と一意に表される（ν^+, ν^- は互いに素な台を持つ）.

符号付き測度における可積分関数の定義

非負可測関数 $f \geq 0$ に対しては，非負測度のときと同様に

$$\int_X f\, d\nu := \int_X f\, d\nu^+ - \int_X f\, d\nu^-$$

とします。ただし右辺が $\infty - \infty$ という不定形にならないようにする．つまり少なくとも一方の積分が有限でなければならない.

一般の実可測関数 f については

$$f = f^+ - f^-, \quad f^+ = \max(f, 0), \quad f^- = \max(-f, 0)$$

と分解し，f が ν に関して可積分であるとは

$$\int_X f^+\, d\nu^+ + \int_X f^+\, d\nu^- + \int_X f^-\, d\nu^+ + \int_X f^-\, d\nu^- < \infty$$

すなわち $|f|$ が ν に関して可積分であることとする.

この条件の下で

$$\int_X f\,d\nu := \int_X f\,d\nu^+ - \int_X f\,d\nu^-$$

が有限の値として定義される.

複素可測関数の場合 $f = u + iv$ と実部 u と虚部 v をそれぞれ符号付き測度に関して可積分とすることで積分を定義する.

関数解析で出てくる定理

Theorem 2.0.4 (Banach-Steinhaus theorem, 一様有界性定理)**.** *X を Banach 空間（完備ノルム空間, さらに局所凸位相ベクトル空間でも良い）, Y をノルム空間（完備でなくてもよい）とする. $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ を連続線形作用素の族とする。*
任意の $x \in X$ について $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T(x)\|_Y < \infty$ ならば,

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\|_{\mathrm{op}} = \sup_{T\in\mathcal{F}} \sup_{||x||\leq 1} \|T(x)\| :< \infty$$

である. つまり作用素ノルムが一様に有界である.

つまり, 点ごとの有界性から, 作用素全体の一様有界性がいえる.

Definition 2.0.5 (Baire space, 第一類, 第二類)**.** *X を位相空間とする.*

- *X が Baire space とは,「開集合の可算族 U_n で, 各 U_n が dence ならば, $\bigcap U_n$ も dence」となる空間のこと. 同値な言い換えとして,「$F_n^\circ = \varnothing$ となる可算個の閉集合について, $(\bigcup F_n)^\circ = \varnothing$ となる.」*
- *X が第一類とは, 可算個の疎集合 (閉包の内部が空集合) の和でかける集合のこと.*
- *X が第二類とは, 第一類ではないこと.*

定義から X が Baire 空間とは「任意の空でない開集合が X において第二類である」と同値である.

Theorem 2.0.6 (Baire の範疇定理, Baire category theorem)**.** *X を完備距離空間または局所コンパクトハウスドルフ空間とする. この時, X は Baire space である.*

2.1 Calculus with Distributions

以下 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上の積分に関してはルベーク測度 dx を入れる．$f : \Omega \to \mathbb{C}$ が可積分とは, 上の意味で可積分とする．また f が locally integrable(局所可積分) とは, 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ で可積分となること, つまり $\int_K ||f||dx < +\infty$ とする．

Definition 2.1.1. [Rud, 6.11] $f : \Omega \to \mathbb{C}$: locally integrable とする．$\Lambda_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ という写像を, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega))$ について,

$$\Lambda_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

と定義する．
すると, 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について, $C_K := \int_K |f(x)|\,dx$ とすれば, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K$ について,

$$|\Lambda_f(\varphi)| \leq \int_K |f(x)| \cdot |\varphi(x)|\,dx \leq \left(\int_K |f(x)|\,dx\right) \cdot \max_{x\in K} |\varphi(x)| = C\|\varphi\|_0$$

となる．よって [Rud, Theorem 6.8] または 1.8.13 から, $\Lambda_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ である．(もっと強く finite order をもち order 0 の超関数である．)

以下, Λ_f と f を同一視する．

Remark 2.1.2. μ を Borel measure または positive measure で任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について $\mu(K) < \infty$ となるものとする．この時 $\Lambda_\mu : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ を

$$\Lambda_\mu(\varphi) := \int \varphi\,d\mu.$$

として定義するとこれも $\Lambda_\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$ である．(もっと強く finite order をもち order 0 の超関数である．). 上と同様に Λ_μ と μ を同一視する．

Definition 2.1.3. [Rud, 6.12] $\alpha \in (\mathbb{Z}_+)^n$ と $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ について, $D^\alpha\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ を任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ について,

$$(D^\alpha\Lambda)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha\varphi)$$

とすることで定義する．この時 $D^\alpha\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ である．
実際 $\mathbb{C}$ 線形であり, 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について, [Rud, Theorem 6.8] からある $C \in \mathbb{R}_{>0}$ と $N \in \mathbb{Z}_+$ があって, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K$ について $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ が成り立つ．よって任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K$ について

$$|(D^\alpha\Lambda)(\varphi)| = |\Lambda(D^\alpha\varphi)| \leq C\|D^\alpha\varphi\|_N \leq C\|\varphi\|_{N+|\alpha|}.$$

となるので超関数となる.

Remark 2.1.4. 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ について $D^\alpha D^\beta \Lambda = D^{\alpha+\beta}\Lambda = D^\beta D^\alpha \Lambda$ となる.

Lemma 2.1.5. [*Rud*, 6.13] $f : \Omega \to \mathbb{C}$ を C^N 級の *locally integrable* 関数とする. この時, 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について, $D^\alpha \Lambda_f = \Lambda_{D^\alpha f}$ が成り立つ.

Proof. N による帰納法. $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ で $|\alpha| \leq N$ を固定する. すると $1 \leq i \leq n$ で $\alpha_i \neq 0$ となるものがある. $\beta := (\alpha_1, \ldots, \alpha_i - 1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ とする.

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ とする. Supp φ はコンパクトなので, $f\varphi \in C^N(\Omega)$ となる. よって

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\big((D^\beta f) \cdot \varphi\big)\, dx = 0,$$

がいえる. 以上より,

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega (D^\alpha f)\, \varphi\, dx + \int_\Omega (D^\beta f)\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx \\
&= \Lambda_{D^\alpha f}(\varphi) + (-1)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Lambda_{D^\beta f}\Big)(\varphi) && (2.1.1,\ 2.1.3) \\
&= \Lambda_{D^\alpha f}(\varphi) + (-1)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i} D^\beta \Lambda_f\Big)(\varphi) && (\text{induction hypothesis}) \\
&= \Lambda_{D^\alpha f}(\varphi) - (D^\alpha \Lambda_f)(\varphi) && (2.1.4)
\end{aligned}$$

となり, $\Lambda_{D^\alpha f}(\varphi) = (D^\alpha \Lambda_f)(\varphi)$ となるので言えた. □

Example 2.1.6. [Rud, 6.11] Lem 2.1.5 は一般の f では成り立たない. $f \notin C^0(\Omega)$ で $D\Lambda_f \neq \Lambda_{Df}$ となる例を挙げる.

$\Omega := (-1, 1)$ とし, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ を

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

とする. f は原点以外で C^1 より,

$$\Lambda_{\frac{d}{dx}f}(\varphi) := \int_\Omega \frac{d}{dx} f \cdot \varphi\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \left(\frac{d}{dx} f\right) \varphi\, dx + \lim_{\delta \to +0} \int_\delta^1 \left(\frac{d}{dx} f\right) \varphi\, dx = 0$$

(原点以外で $\frac{d}{dx} f(x) = 0$ となるので.) 一方で

$$\left(\frac{d}{dx}\Lambda_f\right)(\varphi) = -\int_\Omega f \cdot \left(\frac{d}{dx}\varphi\right) dx = -\int_0^1 \frac{d}{dx}\varphi\, dx = -(\varphi(1) - \varphi(0)) = \varphi(0)$$

よって $\Lambda_{\frac{d}{dx}f} \neq \frac{d}{dx}\Lambda_f$ である.

Definition 2.1.7. [Rud, 6.15] $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$ について, $f\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ を $(f\Lambda)(\varphi) := \Lambda(f\varphi)$ と定義する.

Lemma 2.1.8. [*Rud*, 6.15] $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$ について, $f\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ である.

ここで $(f\Lambda)(\varphi) := \Lambda(f\varphi)$ である.

Proof. $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ なので, [Rud, Thm 6.8] より, 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ についてある $C > 0$ と $N \in \mathbb{Z}_+$ があって,

$$|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$$

が任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K$ で成り立つ. よって, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K$ について, $f\varphi \in \mathcal{D}_K$ なので,

$$|\Lambda(f\varphi)| \leq C\|f\varphi\|_N = C\max\{|D^\alpha(f\varphi)(x)| \mid x \in K,\ |\alpha| \leq N\}.$$

となる. ここで Leibniz rule によって,

$$D^\alpha(f\varphi) = \sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha} C_{\alpha',\alpha''} \cdot D^{\alpha'}f \cdot D^{\alpha''}\varphi \quad (\exists C_{\alpha',\alpha''} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

とかける.($C_{\alpha',\alpha''}$ は二項係数みたいなもの) $C' := \max\{C_{\alpha',\alpha''} \mid |\alpha'+\alpha''| \leq N\}$ とすると. 任意の $x \in \Omega$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ で $|\alpha| \leq N$ なものについて

$$\begin{aligned}
|D^\alpha(f\varphi)(x)| &= \left|\sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha} C_{\alpha',\alpha''} D^{\alpha'}f(x)\, D^{\alpha''}\varphi(x)\right| \\
&\leq C' \cdot \sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha} |D^{\alpha'}f(x)| \cdot \|\varphi\|_N \\
&\leq C' \cdot (N+1)^n \cdot \max\{|D^{\alpha'}f(x)| \mid x \in K, |\alpha'| \leq N\} \cdot \|\varphi\|_N
\end{aligned}$$

よってある $M > 0$ があって, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K$ について

$$|\Lambda(f\varphi)| \leq C\|f\varphi\|_N \leq CM\|\varphi\|_N$$

となる. [Rud, Thm 6.8] から $f\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ である. □

Lemma 2.1.9. [*Rud*, 6.15] $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$ とする. $g_1, g_2 \in C^\infty(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ につ

いて,

$$D^\alpha(g_1 g_2) := \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} C_{\alpha_1,\alpha_2}\, D^{\alpha_1} g_1\, D^{\alpha_2} g_2$$

であるとする．ここで C_{α_1,α_2} は α_1 と α_2 にのみ依存する自然数である．この時

$$D^\alpha(f\Lambda) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} C_{\alpha_1,\alpha_2}\, (D^{\alpha_1} f)\cdot(D^{\alpha_2}\Lambda)$$

が成り立つ．

Proof. $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$ について, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{x} := u_1x_1 + \cdots + u_nx_n$ とする．すると,

$$D^\alpha\left(e^{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{x}}\right) = \overrightarrow{u}^\alpha e^{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{x}}$$

となる．ここで $\overrightarrow{u}^\alpha := u_1^{\alpha_1}\cdots u_n^{\alpha_n}$ である．これは $\frac{\partial}{\partial x_1} e^{u_1x_1+\cdots+u_nx_n} = u_1 e^{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{x}}$ を繰り返し適応すればわかる．よって

$$D^\alpha(e^{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{x}}\cdot e^{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{x}}) = \sum_{\beta\le\alpha} C_{\alpha-\beta,\beta} D^{\alpha-\beta} e^{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{x}}\cdot D^\beta e^{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{x}}$$

となる．

[補足] 例えば, $n=1$ の時に, $\frac{\partial^2}{\partial x}(e^{ux}\cdot e^{vx}) = D^2e^{ux}\cdot e^{vx} + 2De^{ux}\cdot De^{vx} + e^{ux}\cdot D^2e^{vx}$ となることから．この例においては, $C_{\alpha-\beta,\beta}$ は $C_{2,0}=1,\quad C_{1,1}=2,\quad C_{0,2}=1$ となる．) 以上よりこの例においては,

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta\le\alpha} C_{\alpha-\beta,\beta}\, x^{\alpha-\beta} y^\beta$$

という二項展開に対して, $C_{\alpha-\beta,\beta} := \binom{\alpha}{\beta}$ となる． □

以上より

$$\begin{aligned}
\vec{u}^\alpha &= \left(\vec{v} + (-\vec{v}+\vec{u})\right)^\alpha \\
&= \sum_{\beta\le\alpha} C_{\alpha-\beta,\beta}\, \vec{v}^{\alpha-\beta}\cdot(-\vec{v}+\vec{u})^\beta \\
&= \sum_{\beta\le\alpha} C_{\alpha-\beta,\beta}\, \vec{v}^{\alpha-\beta} \times \sum_{\gamma\le\beta} C_{\beta-\gamma,\gamma}\, (-1)^{|\beta-\gamma|}\vec{v}^{\beta-\gamma}\vec{u}^\gamma \\
&= \sum_{\gamma\le\alpha} (-1)^{|\gamma|}\, \vec{v}^{\alpha-\gamma}\vec{u}^\gamma \times \sum_{\gamma\le\beta\le\alpha} (-1)^{|\beta|} C_{\alpha-\beta,\beta} C_{\beta-\gamma,\gamma}
\end{aligned}$$

以上より,

$$\sum_{r\le\beta\le\alpha}(-1)^{|\beta|}C_{\alpha-\beta,\beta}C_{\beta-\gamma,\gamma}=\begin{cases}(-1)^{|\alpha|}, & \gamma=\alpha\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

となる. よって $D^\beta\left(\varphi D^{\alpha-\beta}f\right)$ に Leibnitz rule を使って,

$$\begin{aligned}\sum_{\beta\le\alpha}(-1)^{|\beta|}C_{\alpha-\beta,\beta}D^\beta\left(\varphi\, D^{\alpha-\beta}f\right)&=\sum_{\beta\le\alpha}(-1)^{|\beta|}C_{\alpha-\beta,\beta}\sum_{\gamma\le\beta\le\alpha}C_{\beta-\gamma,\gamma}(D^\gamma\varphi)(D^{\alpha-\gamma}f)\\&=\sum_{\gamma\le\alpha}\sum_{\gamma\le\beta\le\alpha}(-1)^{|\beta|}C_{\alpha-\beta,\beta}C_{\beta-\gamma,\gamma}(D^\gamma\varphi)(D^{\alpha-\gamma}f)\\&=(-1)^{|\alpha|}(D^\alpha\varphi)\,f\end{aligned}$$

となる. よって

$$\begin{aligned}D^\alpha(f\Lambda)(\varphi)&=(-1)^{|\alpha|}(f\Lambda)(D^\alpha\varphi)=(-1)^{|\alpha|}\Lambda(f\cdot D^\alpha\varphi)=\Lambda\big((-1)^{|\alpha|}f\cdot D^\alpha\varphi\big)\\&=\sum_{\beta\le\alpha}(-1)^{|\beta|}C_{\alpha-\beta,\beta}\Lambda\big(D^\beta(\varphi\cdot D^{\alpha-\beta}f)\big)\\&=\sum_{\beta\le\alpha}C_{\alpha-\beta,\beta}\,(D^\beta\Lambda)\big(\varphi\cdot D^{\alpha-\beta}f\big)\\&=\sum_{\beta\le\alpha}C_{\alpha-\beta,\beta}\left[(D^{\alpha-\beta}f)\cdot(D^\beta\Lambda)\right](\varphi)\end{aligned}$$

となりいえた. □

2.2 Weak $*$-topology

以下は [Rud, 3.8-3.14] の内容.

Lemma 2.2.1. X を集合, $\mathscr{F}$ を位相空間 Y_f への写像 $f:X\to Y_f$ のなす *(*空でない*)* 集合族とする.

$$\tau:=\left\{\bigcup_{i\in I}\bigcap_{f\in\mathscr{F}}f^{-1}(V_{i,f})\;\middle|\;V_{i,f}\subset Y_f\ \textit{open},\ \text{有限個の } f \text{ を除いて } V_{i,f}=Y_f\right\}$$

とすると, τ は任意の $f\in\mathscr{F}$ が連続となる最弱の X 上の位相である.

位相であること. $\varnothing=f^{-1}(\varnothing)\cap\bigcap_{g\ne f}g^{-1}(Y_g)\in\tau$ $X=\bigcap_{f\in\mathscr{F}}f^{-1}(Y_f)\in\tau$. また τ は union$\cup$ で閉じている.

以上より, $i=1,2$ について $W_i := \bigcup_{j_i \in I_i} \bigcap_{f \in \mathscr{F}} f^{-1}(V_{j_i,f}) \in \tau$ とした場合, $W_1 \cap W_2 \in \tau$ を示せば良い.

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= \left(\bigcup_{j_1 \in I_1} \bigcap_{f \in \mathscr{F}} f^{-1}(V_{j_1,f}) \right) \cap \left(\bigcup_{j_2 \in I_2} \bigcap_{f \in \mathscr{F}} f^{-1}(V_{j_2,f}) \right) \\ &= \bigcup_{j_1 \in I_1, j_2 \in I_2} \left(\bigcap_{f \in \mathscr{F}} \left(f^{-1}(V_{j_1,f}) \cap f^{-1}(V_{j_2,f}) \right) \right) \in \tau \end{aligned}$$

よって τ は X の位相である.

[f が連続なること] 任意の $f \in \mathscr{F}$ と任意の開集合 $V \subset Y_f$ について, $f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap \bigcap_{g \neq f} g^{-1}(Y_g) \in \tau$ より f は連続

[最弱なること] τ' を X の位相で, 全ての $f \in \mathscr{F}$ が連続となるものとする. この時 $f^{-1}(V) \in \tau'$ となる. τ は「$f \in \mathscr{F}$ かつ開集合 $V \subset Y_f$ とした時の $f^{-1}(V)$ たち」で生成されているので, $\tau' \supset \tau$ となる. よって τ が一番小さい. □

Definition 2.2.2. 2.2.1 における τ を *weak topology on X induced by $\mathscr{F}$* や, *$\mathscr{F}$-topology of X* と言う.

日本語だと多分"弱位相"だと思う. 以下，X を $\mathbb{C}$-ベクトル空間, $\mathscr{F}$ を線型写像 $X \to \mathbb{C}$ のなす集合族とする. (もちろん $\mathbb{R}$ でも良い)

Theorem 2.2.3. [*Rud*, *Thm*3.10] *X を $\mathbb{C}$-ベクトル空間とし, X' を線型写像 $X \to \mathbb{C}$ のなす集合族とする. (つまり"ベクトル空間"の双対空間 $\{f : X \to \mathbb{C} | f$ は線型 $\}$ の部分集合.) X' が separating, つまり任意の $x \neq y \in X$ について, ある $f \in X'$ があって $f(x) \neq f(y)$ であると仮定する.*
τ' を 2.2.2 における X'-topology とする. この時 (X, τ') は locally convex 位相ベクトル空間で, X' は"位相ベクトル空間"の双対空間 $\{f : X \to \mathbb{C} | f$ は線型かつ連続 $\}$ となるものが存在する.

Proof. (1).(X, τ') は locally convex 位相ベクトル空間なることを示す. $\mathbb{C}$ は Hausdorff より, (X, τ') もそう. よって T_1. (ここに separating を使う.) さらに τ' は平行不変, つまり任意の $W \in \tau'$, $x \in X$ について, $W + x \in \tau'$ である. これは $W = \bigcup_{r \in \Gamma} \left(\bigcap_{f \in X'} f^{-1}(V_{\gamma,f}) \right)$ とすると, $W + x = \bigcup_{r \in \Gamma} \left(\bigcap_{f \in X'} f^{-1}(V_{\gamma,f} + f(x)) \right)$ となるので.
また $\forall f_1, \ldots, f_k \in X'$, $\forall r_i \in \mathbb{R}_{>0}$ とし

$$V := \{x \in X \mid |f_i(x)| < r_i,\ 1 \leq i \leq k\} \tag{2.2.1}$$

とおくと, このような V たち全体が τ' の local base となる. V は convex balanced なので, (X, τ') は locally convex.

次に足し算が連続なることを見る. 上のような V について, $\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V \subset V$ である. $T : X \times X \to X$ を $T(x, y) : -x + y$ とすると, $T(\frac{1}{2}V \times \frac{1}{2}V) \subset V$ である. V 全体は 0 の local base となるので, これは T が $(0, 0) \in X$ で連続であることを意味する. τ' の平行不変性より T は連続となる.

スカラー倍が連続なることを見る. $S : \mathbb{C} \times X \to X$ を $S(\alpha, x) := \alpha x$ とする. $\alpha x \in U$ となる $U \in \tau'$ をとる. すると (2.2.1) と言う形の V' で, $V' + \alpha x \subset U$ かつ

$$V' := \{z \in X \mid |f_i(z)| < r'_i,\ 1 \leq i \leq k'\}$$

となるものが存在する. すると, 開集合 $V'' \in \tau'$ と $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ があって次を満たすようにとれる.

- 任意の $1 \leq i \leq k'$ と $\forall y \in V''$ について, $|\alpha|\,|f_i(y)| < \frac{r'_i}{2}$.
- $\varepsilon \cdot \max\{|f_i(z)| \mid z \in V'',\ 1 \leq i \leq k'\} < \frac{r'_i}{2}$.

今 $\widetilde{V} := (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \times (V'' + x)$ とおくと, $\mathbb{C} \times X$ の開集合である. さらに $(\alpha, x) \in \widetilde{V}$ であり, 任意の $(\beta, y) \in \widetilde{V}$ と $1 \leq i \leq k'$ について,

$$|f_i(\beta y - \alpha x)| \leq |\beta - \alpha||f_i(y)| + |\alpha||f_i(y - x)| < \frac{r'_i}{2} + \frac{r'_i}{2} = r'_i$$

よって, $S(\widetilde{V}) \subset V \subset U$ となる. これは S が (α, x) で連続であることを意味する. よって S は連続, 以上より (X, τ') は locally convex 位相ベクトル空間.

(2). X' は双対空間なることを示す. X^* を (X, τ') の双対空間, つまり $\{f : (X, \tau') \to \mathbb{C} | f$ は線型かつ連続$\}$ とする. 示すことは, $X^* = X'$ である. 2.2.1 より, 任意の $f \in X'$ について, f は連続である. よって $X^* \supset X'$ である.

逆の包含を示す. $g \in X^*$ とする. g は連続なので, $g : X \to \mathbb{C}$ の $0 \in X$ での連続性から,

$$V'' = \{z \in X \mid |g_j(z)| < t_j \text{ for } 1 \leq j \leq \ell\}$$

とかける V'' であって, 任意の $z \in V''$ について, $|g(z)| < 1$ となるものが存在する..

この時 $\bigcap_{j=1}^{\ell} \mathrm{Ker}(g_j) \subset \mathrm{Ker}(g)$ である. これを示す $z \in \bigcap_{j=1}^{\ell} \mathrm{Ker}(g_j)$ とする任意の $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ について, $\alpha z \in V''$ であるので, V'' の取り方から $\alpha|g(z)| = |g(\alpha z)| < 1$ となる. α は任意だったので, $g(z) = 0$ となる.

さて, $\pi : X \to \mathbb{C}^\ell$ を $\pi(x) := (g_1(x), \ldots, g_\ell(x))$ とする. 任意の $\pi(z) = \pi(z')$ となる $\forall z, z' \in X$ について, $\bigcap_{j=1}^{\ell} \mathrm{Ker}(g_j) \subset \mathrm{Ker}(g)$ なので, $g(z) = g(z')$ となる. $X/\mathrm{Ker}(\pi) \cong \mathrm{Im}(\pi)$ を考慮すると, g は $\mathrm{Im}(\pi)$ 上の $\mathbb{C}$ への線型写像 $\widetilde{g}$ を誘導する. $\mathrm{Im}(\pi) \subset \mathbb{C}^\ell$ なので, $u_i : \mathbb{C}^\ell \to \mathbb{C}$ を第 i 番目の射影

とすると, ある $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{C}$ があって,

$$\widetilde{g} = \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j u_j$$

とかける. よって, $g = \widetilde{g} \circ \pi = \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j g_j \in X'$ となり $X^* \subset X'$ となる. 以上より $X^* = X'$ である. □

Definition 2.2.4. [Rud, 3.14] X を位相ベクトル空間とし, X^* をその双対空間, つまり $X^* := \{f : X \to \mathbb{C} | f$ は線型かつ連続 $\}$ とする. $x \in X$ について,

$$ev_x : X^* \hookrightarrow \mathbb{C} \quad f \mapsto ev_x(f) := f(x)$$

とする. これにより $X \to \{ev_x \in \widetilde{X} \mid x \in X\} \subset \{F : X^* \to \mathbb{C} | F$ は線型 $\}$ と言う写像が得られる. 以後この写像によって $X \subset \{F : X^* \to \mathbb{C} | F$ は線型 $\}$ と同一視をする. この時 X は separating である.($f \neq g \in X^*$ は, ある $x \in X$ があって $f(x) \neq g(x)$ と同値に注意). 2.2.3 により X^* には位相 τ で, $(X^*, \tau)^* = X$ となるものが誘導される. この位相を X^* の weak $*$-topology と言う. 2.2.3 により, (X^*, τ) は locally convex 位相ベクトル空間である.

[注意] $X \to \{ev_x \in \widetilde{X} \mid x \in X\}$ は単射ではない. 例えば $0 < p < 1$ とした時の $X = L^p((0,1))$ に関して, $X^* = \{0\}$ となる. なので $X \to \{ev_x \in \widetilde{X} \mid x \in X\} \subset \{F : X^* \to \mathbb{C} | F$ は線型 $\}$ も単射ではない. ($X \subset \{F : X^* \to \mathbb{C} | F$ は線型 $\}$ と同一視しているが, これは厳密には包含ではない)

X が locally convex 位相ベクトル空間であるならば, Hahn-Banach の定理から単射性が言える. 上の例は convex ではない.

Definition 2.2.5. [Rud, 6.16] 2.2.4 のように, 超関数の空間 $\mathcal{D}'(\Omega)$ には weak $*$-topology を入れる. これによって, $\mathcal{D}'(\Omega)$ は locally convex 位相ベクトル空間となりその双対空間が $\mathcal{D}(\Omega)$ となる.

以後 $\mathcal{D}'(\Omega)$ には weak $*$-topology を入れて考える.

Remark 2.2.6. [Rud, 6.16] $\{\Lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ を超関数の列とする. この時, weak $*$-topology で $\lim_{i\to\infty} \Lambda_i = \Lambda$ であることは, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega))$ について, $\lim_{i\to\infty} \Lambda_i(\varphi) = \Lambda(\varphi)$ となることと同値である.

Theorem 2.2.7. [*Rud*, *Thm*6.17] $\{\Lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ 超関数の列とし, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ について, 極限 $\lim_{i\to\infty} \Lambda_i(\varphi)$ が $\mathbb{C}$ の値として存在すると仮定する.
このとき,

$$\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}, \quad \Lambda(\varphi) := \lim_{i\to\infty} \Lambda_i(\varphi)$$

と定めると, これは連続である (つまり, $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ である). さらに任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ につい

て, $\mathcal{D}'(\Omega)$ 上で $\lim_{i\to\infty} D^\alpha \Lambda_i = D^\alpha \Lambda$ が成り立つ.

証明は Banach-Steinhaus の定理 (一様有界性の定理) を真似る.

Proof. Λ が $\mathbb{C}$ 線型は明らか. よって, Λ が連続を示す. これには [Rud, Thm 6.6] および 1.8.11 から, 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について, $\Lambda|_{\mathcal{D}_K} : \mathcal{D}_K \to \mathbb{C}$ が連続を示せば良い. これは任意の $\varepsilon > 0$ について, ある open$0 \in \widehat{V} \subset \mathcal{D}_K$ で $\Lambda|_{\mathcal{D}_K}(\widehat{V}) \subset B(0, \varepsilon)$ となるものが存在することを示せば良い.

$\varepsilon > 0$ とする. open ball $B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{C}$ について,

$$E := \bigcap_{i=1}^{\infty} \Lambda_i^{-1}(\overline{B(0, \tfrac{\varepsilon}{3})}).$$

を考える. 任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K$ について, $\lim_{i\to\infty} \Lambda_i(\varphi)$ が存在するので, $\{\Lambda_i(\varphi)\}_{i=1}^{\infty}$ は bounded. よってある $m \in \mathbb{Z}_+$ があって, 任意の $i \in \mathbb{Z}_+$ について, $\Lambda_i(\varphi) \in mB(0, \frac{\varepsilon}{3}) = B(0, \frac{m\varepsilon}{3}))$ となる. Λ_i は線型なので, 任意の $i \in \mathbb{Z}_+$ について, $\varphi \in m(\Lambda_i^{-1}(B(0, \frac{\varepsilon}{3})))$ である. 以上より,

$$\mathcal{D}_K = \bigcup_{m=1}^{\infty} mE$$

である.

ここで $\mathcal{D}_K$ は完備距離空間なので, Baire の範疇定理から Baire 空間である. つまり E は内点を持つ. 内点 $x_0 \in E$ とその開近傍 $V \subset E$ をとる. すると $V - x_0$ は 0 の開近傍である. よって任意の $v \in V - x_0$ と任意の $i \in \mathbb{Z}_+$ について, $v + x_0, x_0 \in E$ なので,

$$|\Lambda_i(v)| = |\Lambda_i(v + x_0 - x_0)| \le |\Lambda_i(v + x_0)| + |\Lambda_i(x_0)| \le \tfrac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$$

よって, $|\Lambda(v)| = \lim_{i\to\infty} |\Lambda_i(v)| < \varepsilon$ である. これより, $\widehat{V} := V - x_0$ とおくと, $0 \in \widehat{V} \subset \mathcal{D}_K$ で $\Lambda|_{\mathcal{D}_K}(\widehat{V}) \subset B(0, \varepsilon)$ となる. よって $0 \in \mathcal{D}_K$ で連続である.

$\mathcal{D}_K$ の平行移動性を使って, $\Lambda|_{\mathcal{D}_K}$ も連続であり. $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ である. また 2.1.3 から $\lim_{i\to\infty} D^\alpha \Lambda_i = D^\alpha \Lambda$ である. □

Theorem 2.2.8. [*Rud*, *Thm*6.18] $\mathcal{D}'(\Omega)$ 上で $\lim_{i\to\infty} \Lambda_i = \Lambda$ かつ, $C^\infty(\Omega)$ 上で $\lim_{i\to\infty} g_i = g$ *in* $C^\infty(\Omega)$ と仮定する. このとき $\mathcal{D}'(\Omega)$ 上で $\lim_{i\to\infty} g_i\Lambda_i = g\Lambda$ である.

Proof. 示すことは, 「任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ について, $\lim_{i\to\infty}(g_i\Lambda_i)(\varphi) = (g\Lambda)(\varphi)$」である.

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ を固定し, $K := \operatorname{Supp}\varphi$ とする. K はコンパクトである. $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ とすると, 次が成り立つ.

- Thm 2.2.7 と同じ議論から, ある open $0 \in V \subset \mathcal{D}_K$ があって, $\Lambda_i(V) \subset B(0, \frac{\varepsilon}{2})$ である.
- 任意の $i \in \mathbb{Z}_+$ について, $g_i\varphi \in \mathcal{D}_K$ である. よって $\lim_{i\to\infty} g_i\varphi = g\varphi$ である. これより $i \gg 0$ について, $g_i\varphi - g\varphi \in V$ である.
- $\lim_{i\to\infty} \Lambda_i = \Lambda$ より, $\lim_{i\to\infty} \Lambda_i(g\varphi) = \Lambda(g\varphi)$, よって $i \gg 0$ について $|\Lambda_i(g\varphi) - \Lambda(g\varphi)| < \frac{\varepsilon}{2}$. である.

以上よりこれらを合わせて,

$$|(g_i\Lambda_i)(\varphi) - (g\Lambda)(\varphi)| = |\Lambda_i(g_i\varphi) - \Lambda(g\varphi)| \leq |\Lambda_i(g_i\varphi) - \Lambda_i(g\varphi)| + |\Lambda_i(g\varphi) - \Lambda(g\varphi)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

よって任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ について, $\lim_{i\to\infty}(g_i\Lambda_i)(\varphi) = (g\Lambda)(\varphi)$ となりいえた. □

2.3 Localization

Definition 2.3.1. [Rud, Def 6.19] $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ と, $W \subset \Omega$ open について, "$\Lambda_1 = \Lambda_2$ in W"を任意の $\varphi \in \mathcal{D}(W)$ について, $\Lambda_1(\varphi) = \Lambda_2(\varphi)$ であることとして定める.

Example 2.3.2. $W \subset \mathbb{R}^n$ を open, $f:$ を Ω 上の 局所可積分 (locally integrable) 関数とする.

(1) $\Lambda_f = 0$ in W であることは, 「任意の $\varphi \in \mathcal{D}(W)$ について, $\Lambda_f(\varphi) = \int_W f\varphi\, dx = 0$」と同値である. これは $f|_W \equiv 0$ almost everywhere と同値である.

(2) μ (Borel) measure とする. $\Lambda_\mu = 0$ in W であることは, 「任意の $\varphi \in \mathcal{D}(W)$ について, $\Lambda_\mu(\varphi) = \int_W \varphi\, d\mu = 0$ 」と同値である. これは任意の Borel set$E \subset W$ について $\mu(E) = 0$ と同値である.

Theorem 2.3.3. [*Rud*, *Thm*6.20] Γ を $\mathbb{R}^n$ の開集合族で $\bigcup_{U\in\Gamma} U = \Omega$ となるものとする. このとき *test function* の族 $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ であって次を満たすものがある.

(*a*) ある $U_i \in \Gamma$ があって, $\operatorname{Supp}\psi_i \subset U_i$.

(*b*) 任意の $x \in \Omega$ について, $x \in \operatorname{Supp}\psi_i$ となる $i \in \mathbb{Z}_+$ は有限個で $\sum_{i=1}^\infty \psi_i(x) = 1$ である.

(*c*) 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について, ある $m \in \mathbb{Z}_+$ と *open*$W \supset K$ があって, 任意の $i > m$ について $\psi_i|_W = 0$.

Proof. $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$ を Ω 上の有理数点とする. 任意の P_i について, $r_i \in \mathbb{Q}_{>0}$ で $B(P_i, r_i) \subset U$ となる $U \in \Gamma$ が存在するような r_i を一つ固定する. 任意の $i \in \mathbb{Z}_+$ について C^∞ 関数 $\varphi_i : \Omega \to [0,1]$ で, $B(P_i, \frac{r_i}{2})$ 上で $\varphi_i \equiv 1$ かつ $B(P_i, r_i)$ の外で $\varphi_i \equiv 0$ となるものが存在する.

そこで $\psi_1 := \varphi_1$, $\psi_{i+1} := \varphi_{i+1} \cdot \prod_{k=1}^i (1 - \varphi_k)$ とする. $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ が (a), (b), (c) を満たすことを示す.

[(a)] 任意の $i \in \mathbb{Z}_+$ について, ある $U \in \Gamma$ であって, $\operatorname{Supp} \psi_i \subset B(P_i, r_i) \subset U$ となる.

[(c)] 任意の $x \in B(P_i, \frac{r_i}{2})$ について, $\psi_i(x) = 1$ であるので, $\ell > i$ ならば

$$\psi_\ell(x) = \varphi_\ell(x) \prod_{k=1}^{\ell-1} (1 - \varphi_k(x)) = 0.$$

よって任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について, ある $m \in \mathbb{Z}_+$ があって, $W := \bigcup_{i=1}^m B(P_i, \frac{r_i}{2}) \supset K$. となる. よって上により, 任意の $i > m$ について, $\psi_i|_W = 0$.

[(b)] 上より, $\sum_{i=1}^\infty \psi_i(x)$ は有限和である. 任意の ℓ について,

$$\sum_{i=1}^{\ell} \psi_i = 1 - \prod_{i=1}^{\ell} (1 - \varphi_i)$$

であることを示す. $\ell = 1$ のときはよく, 一般のときは

$$\sum_{i=1}^{\ell} \psi_i = (1 - \prod_{i=1}^{\ell-1} (1 - \varphi_i)) + \varphi_\ell \prod_{i=1}^{\ell-1} (1 - \varphi_i) = 1 - (1 - \varphi_\ell) \prod_{i=1}^{\ell-1} (1 - \varphi_i). = 1 - \prod_{i=1}^{\ell} (1 - \varphi_i).$$

より言える. 以上より任意の $x \in \Omega$ について, $x \in B(P_\ell, \frac{r_\ell}{2})$ となる ℓ を固定すれば, $j > \ell$ ならば $\psi_j(x) = 0$ であることと, $j = l$ ならば $\varphi_j(x) = 0$ であることより,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) = \sum_{i=1}^{\ell} \psi_i(x) + \sum_{j > \ell} \psi_j(x) = 1 - \prod_{i=1}^{\ell} (1 - \varphi_i(x)) = 1.$$

となる. よっていえた. □

Theorem 2.3.4. [*Rud*, *Thm*6.21] Γ を $\mathbb{R}^n$ の開集合族で $\bigcup_{U \in \Gamma} U = \Omega$ となるものとする. 任意の $W \in \Gamma$ について, ある $\Lambda_W \subset \mathcal{D}'(W)$ があって, 張り合わせ条件「$W \cap W' \neq \varnothing$ ならば $\Lambda_W = \Lambda_{W'}$ *in* $W \cap W'$」を満たすとする.
このとき $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ がただ一つ存在して, 任意の $W \in \Gamma$ について $\Lambda = \Lambda_W$ *in* W となる.

Proof. Theorem 2.3.3 により, 1 の分割 $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ が取れる. 2.3.3(a) より, 任意の $i \in \mathbb{Z}_+$ について, ある $W_i \in \Gamma$ で, $\operatorname{Supp} \psi_i \subset W_i$ となるものを固定する. $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ を

$$\Lambda(\varphi) := \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_{W_i}(\varphi \psi_i).$$

と定義する. 2.3.3(c) より, これは有限和である. よって Λ は well-defined かつ $\mathbb{C}$ 線型である.

Claim 2.3.5. Λ は連続である．特に $\Lambda \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Proof. [Rud, Thm 6.6], 1.8.11 より，$\lim_{i\to\infty} \varphi_i = 0$ なる列 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ について，$\lim_{i\to\infty} \Lambda(\varphi_i) = 0$ を示せば良い．[Rud, Thm 6.5], 1.8.7 より，コンパクト集合 $\exists K \subset \Omega$ で，$\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}_K$ かつ 任意の $N \in \mathbb{Z}_+$ について $\lim_{i,j\to\infty} \|\varphi_i - \varphi_j\|_N = 0$ を仮定して良い．

2.3.3(c) より，ある $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ で，

$$\Lambda(\varphi_i) = \sum_{j=1}^{m} \Lambda_{W_j}(\varphi_i \psi_j)$$

となる．よって，任意の j について $\varphi_i\psi_j \to 0$ であるので，[Rud, Thm 6.6], 1.8.11 から任意の j について，$\Lambda_{W_j}(\varphi_i\psi_j) \to 0$ となる．これは，$\lim_{i\to\infty} \Lambda(\varphi_i) = 0$ を意味する よって連続.

[補足]「j について $\varphi_i\psi_j \to 0$」について．$K_j := \operatorname{Supp} \psi_j$ はコンパクトなので，$\operatorname{Supp} \varphi_i\psi_j \subset K \cap K_j$ となる．よって掛け算 $\mathcal{D}_K \times \mathcal{D}_{K_j} \to \mathcal{D}_{K\cap K_j}$ は連続なので，$\mathcal{D}_{K\cap K_j}$ 上で $\varphi_i\psi_j \to 0$ となるこれは $\mathcal{D}(W_j)$ 上で $\varphi_i\psi_j \to 0$ となる． □

さて任意の $W \in \Gamma$ について，$\Lambda = \Lambda_W$ in W を示す．$\varphi \in \mathcal{D}(W)$ をとる．ある $m \in \mathbb{Z}_+$ で $\operatorname{Supp} \varphi \subset \bigcup_{i=1}^{m} W_i$ となるものを固定する．すると $\Lambda(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \Lambda_{W_i}(\varphi\psi_i)$ である．よって $\Lambda_W = \Lambda_{W_i}$ in $W \cap W_i$ であることから，

$$\Lambda(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \Lambda_{W_i}(\varphi\psi_i) = \sum_{i=1}^{m} \Lambda_W(\varphi\psi_i) = \Lambda_W(\varphi).$$

となる．よっていえた．

Λ が唯一なことを示す．もし $\Lambda' \in \mathcal{D}'(\Omega)$ で，任意の $W \in \Gamma$ で $\Lambda' = \Lambda_W$ in W であるとする．すると任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ について，

$$\Lambda(\varphi) = \Lambda'(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi\psi_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda'(\varphi\psi_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_{W_i}(\varphi\psi_i) = \Lambda(\varphi).$$

となる．ここで上は有限和に注意する．以上より $\Lambda' = \Lambda$. である． □

2.4 Supports of Distributions

Definition 2.4.1. [Rud, Def 6.22] $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $W \subset \Omega$ open とする．"Λ vanishes in W" を $\Lambda = 0$ in W として定義する．(つまり，任意の $\varphi \in \mathcal{D}(W)$ について $\Lambda(\varphi) = 0$ ということ) さらに $V := \bigcup_{\Lambda \text{ vanishes in } W} W$. として，support of Λ を $\Omega \setminus V$ として定義する．.

Example 2.4.2. $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 連続とすると, Ex 2.3.2(1) より, 任意の $W\subset\Omega$ open について

$$\Lambda_f=0 \text{ in } W \iff f|_W=0 \text{ almost everywhere} \iff f|_W\equiv 0.$$

であるので. support $\Lambda_f=\operatorname{Supp} f$ となる.

ここで f の 連続性は必要である. 例えば $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を $f(x)=\begin{cases}1 & (x\in\mathbb{Q})\\ 0 & (x\notin\mathbb{Q})\end{cases}$ は $\Lambda_f=0$ in $\mathbb{R}$ より $\operatorname{Supp}\Lambda_f=\varnothing$ だが $\operatorname{Supp} f=\mathbb{R}$ である.

Theorem 2.4.3. [*Rud*, *Thm*6.23] $\Lambda\in\mathcal{D}'(\Omega)$ かつ, $W:=\bigcup_{\Lambda \text{ vanishes in } \omega}\omega$. とする. このとき Λ *vanishes on* W. つまり W は Λ が消える最大の開集合である.

ちなみに 2.4.3(sheaf condition) からでもしたがう.

Proof. Γ : を開集合 $\omega\subset\Omega$ で ω 上で Λ が消えるものの集合とする. . すると Γ に付随した１の分割 $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ が取れる. よって 2.3.3(c) より, 任意の $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ について, $\varphi=\sum_{i=1}^\infty\varphi\psi_i$ は有限和である. 今ある $\omega_i\in\Gamma$ があって, $\varphi\psi_i\in\mathcal{D}(\omega_i)$ であるので,

$$\Lambda(\varphi)=\sum_{i=1}^\infty\Lambda(\varphi\psi_i)=0$$

となる. よって, Λ vanishes in W である. □

Theorem 2.4.4. [*Rud*, *Thm*6.24] $\Lambda\in\mathcal{D}'(\Omega)$. $S_\Lambda:=\operatorname{Supp}\Lambda$. このとき次が成り立つ.

(*a*) 任意の $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ について, $\operatorname{Supp}\varphi\cap S_\Lambda=\varnothing$ ならば, $\varphi\Lambda=0$ である.

(*b*) $S_\Lambda=\varnothing$ ならば $\Lambda=0$

(*c*) $\psi\in C^\infty(\Omega)$ で $S_\Lambda\subset V\subset\Omega$ となる開集合 V 上で $\psi\equiv 1$ となるものについて, $\psi\Lambda=\Lambda$.

(*d*) $S_\Lambda\subset\Omega$ がコンパクトならば, Λ は *finite order* を持つ. つまりある $C\in\mathbb{R}_{>0}$ と $N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ があって, 任意の $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ について, $|\Lambda(\varphi)|\leq C\|\varphi\|_N$ となる. そして, Λ は $C^\infty(\Omega)$ 上の連続線型関数に一意に拡張する.

Proof. [(a)] $W:=\Omega\setminus S_\Lambda$ とする. 2.4.3 から, $\varphi\Lambda$ vanishes in W である. 今 $W':=\Omega\setminus\operatorname{Supp}\varphi$ とおくこれは開集合であり, $\varphi|_{W'}=0$ である. よって, $\varphi\Lambda$ vanishes in W'd 絵ある.

これより $\bigcup_{\varphi\Lambda \text{ vanishes in } \omega}\omega\supset W\cap W'=\Omega$ であるので. 2.4.3 から, $\varphi\Lambda$ vanishes in Ω である. つまり, $\varphi\Lambda=0$.

[(b)] 2.4.3 から従う.

[(c)]1_Ω を Ω の特性関数とする．$\psi - 1_\Omega$ は S_Λ と交わらない support を持つ．よって (a) から，$\psi\Lambda = 1_\Omega\Lambda = \Lambda$ となる．

[(d)]S_Λ コンパクトとする．2.3.3(c) から，ある $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ であって，$\mathrm{Im}(\psi) \subset [0,1]$ かつ $\psi|_{S_\Lambda} \equiv 1$ となるものがある．$K := \mathrm{Supp}\,\psi$ とおく．$K \supset S_\Lambda$ である．

[Rud, Thm 6.8] または 1.8.13 から，ある $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $\exists C \in \mathbb{R}_{>0}$ があって，任意の $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}_K$ について

$$|\Lambda(\tilde{\varphi})| \leq C\|\tilde{\varphi}\|_N$$

である．また $C' \in \mathbb{R}_{>0}$ で 任意の $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ について，$\|\psi\varphi\|_N \leq C'\|\varphi\|_N$ となる．以上より 2.4.4(c) から

$$|\Lambda(\varphi)| = |(\psi\Lambda)(\varphi)| = |\Lambda(\psi\varphi)| \leq C\|\psi\varphi\|_N \leq CC'\|\varphi\|_N$$

よって，Λ は finite order である．

さて $\tilde{\Lambda} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ を

$$\tilde{\Lambda}(f) := \Lambda(\psi f) \quad (f \in C^\infty(\Omega)).$$

として定義する．$f \in \mathcal{D}(\Omega)$ ならば，2.4.4(c) から

$$\tilde{\Lambda}(f) = \Lambda(\psi f) = (\psi\Lambda)(f) = \Lambda(f)$$

よって,$\tilde{\Lambda}$ は Λ の拡張である．そして $\tilde{\Lambda}$ は $\mathbb{C}$ 線型である．

あとは $\tilde{\Lambda}$ が連続を示せば良い．[Rud, Thm 1.32] または 1.7.4 から $C^\infty(\Omega)$ は距離化可能なので，「$f_i \to 0$ ならば，$\tilde{\Lambda}(f_i) \to 0$」を示せば良い．1.7.3 から，任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について，Ω のコンパクト集合上一様に $D^\alpha f_i \to 0$ であるよってある C_α があって

$$|D^\alpha(\psi f_i)(x)| = |\sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha} D^{\alpha'}\psi(x) \cdot D^{\alpha''} f_i(x)| \leq C_\alpha \|\psi\|_{|\alpha|} \cdot \max\{|D^{\alpha''} f_i(x)| \mid \alpha'' \leq \alpha, x \in K\}.$$

となる．ここで $K := \mathrm{Supp}(\psi)$ である．よって，任意の $N \in \mathbb{Z}_+$ についてある C_N があって

$$\|\psi f_i\|_N \leq C_N \max\{|D^\alpha f_i(x)| : |\alpha| \leq N, x \in K\}.$$

である．K 上で $D^\alpha f_i \to 0$ であるので，任意の $N \in \mathbb{Z}_+$ について，$\lim_{i\to\infty} \|\psi f_i\|_N = 0$ である．よって，$\psi f_i \to 0.$ である．[Rud, Thm 6.6] より，Λ は連続なので，$\Lambda(\psi f_i) \to 0$ となる．よって $\tilde{\Lambda}(f_i) = \Lambda(\psi f_i) \to 0.$ であり $\tilde{\Lambda}$ は連続である．

あとは唯一性のみである．$\tilde{\Lambda}'$ を Λ の拡張とする．任意のコンパクト集合 $K' \subset \Omega$ について，2.3.3(c) よりある $\psi' \in \mathcal{D}(\Omega)$ で $\psi'|_{K'} \equiv 1$ となるものがある．よって任意の $f \in C^\infty(\Omega)$ について $\psi f \in \mathcal{D}(\Omega)$ かつ $f \equiv \psi f$ on K である．$\mathcal{D}(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$ は dence であり，

$$\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}' : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C} \quad f \mapsto \tilde{\Lambda}(f) - \tilde{\Lambda}'(f)$$

は連続なので，$(\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}')^{-1}(0)$ は閉集合で $\mathcal{D}(\Omega)$ を含む．よって，$(\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}')^{-1}(0) = C^\infty(\Omega)$，であり

$\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}'$.. $\square$

Lemma 2.4.5. [*Rud*, *Lem*3.9] X を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間, $\Lambda, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ を線形関数とする このとき以下は同値

1. ある $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$ であって $\Lambda = \sum_{i=1}^n r_i \Lambda_i$.
2. ある $r \in \mathbb{R}_{>0}$ があって, 任意の $x \in X$ について, $|\Lambda(x)| \leq r \max_{i \leq n}\{|\Lambda_i(x)|\}$.
3. $\mathrm{Ker}(\Lambda) \subset \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}(\Lambda_i)$.

上に関してはもちろん $\mathbb{R}$ 上でも良い.

Proof. (1) $\implies$ (2) は $r := n \cdot \max_{i \leq n} |r_i|$ とすればよい. (2) $\implies$ (3) は自明.

(3) $\implies$ (1) を示す. $\pi := (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) : X \to \mathbb{C}^n$, つまり $\pi(x) := (\Lambda_1(x), \ldots, \Lambda_n(x))$ とする. (3) より, $\pi(x) = \pi(y)$ ならば, $\Lambda(x) = \Lambda(y)$ である. よって π は $\mathrm{Im}(\pi) \subset \mathbb{C}^n$ 上の線形関数 $\hat{\Lambda} : \mathrm{Im}(\pi) \to \mathbb{C}$ を誘導する. よってある $r_1, \ldots, r_n$ があって, $\hat{\Lambda} = r_1 z_1 + \cdots + r_n z_n$ とかける. (ここで $z_1, \ldots, z_n$ は $\mathbb{C}^n$ の座標関数である.) 以上より, $\Lambda = \hat{\Lambda} \circ \pi = r_1 \Lambda_1 + \cdots + r_n \Lambda_n$. となりいえた. $\square$

Theorem 2.4.6. [*Rud*, *Thm*6.25] $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ とし, $p \in \Omega$ について $\delta_p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ を $\delta_p(\varphi) := \varphi(p)$ として定義する. $\mathrm{Supp}\,\Lambda = \{p\}$ かつ Λ は *orderN* を持つと仮定する. このとき $\Lambda = \sum_{|\alpha| \leq N} C_\alpha D^\alpha \delta_p$ とかけるような $C_\alpha \in \mathbb{C}$ が存在する.
逆に任意の $p \in \Omega$ について, $\sum_{|\alpha| \leq N} C_\alpha D^\alpha \delta_p$ の形の *distribution* のサポートは p か $\varnothing$ である. (後者は $C_\alpha = 0$ の時のみに起こる).

Proof. 逆に... の部分は明らか, 最初の部分を示す.

$p = 0 \in \Omega$ として良い. 「任意の $\alpha, |\alpha| \leq N$ について $D^\alpha \varphi(0) = 0$ となる $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ について, $\Lambda(\varphi) = 0$ である」ことを示せば良い. なぜならば, $D^\alpha \varphi(0) = (D^\alpha \delta_0)(\varphi)$ なので, もしこれが成り立てば, $\mathrm{Ker}(\Lambda) \subset \bigcap_{|\alpha| \leq N} \mathrm{Ker}(D^\alpha \delta_0)$ であるので, 2.4.5 から成り立つ.

「任意の $\alpha, |\alpha| \leq N$ について $D^\alpha \varphi(0) = 0$」となる $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ を固定する. 任意の $\eta \in \mathbb{R}_{>0}$ について, ある $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ があって,

$$\max\{|D^\alpha \varphi(x)| : |\alpha| = N, x \in K\} \leq \eta.$$

となる. ここで $K := \overline{B(0, \epsilon)}$ である

この時, 任意の $x \in K$ について,

$$|D^\alpha \varphi(x)| \leq \eta n^{N-|\alpha|} |x|^{N-|\alpha|}, \tag{2.4.1}$$

が成り立つことを示す．α による (降下方向への) 帰納法 $|\alpha| = N$ の場合は η の定義より．一般に $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K$ について,

$$\begin{aligned}
D^\alpha\varphi(x) &= D^\alpha\varphi(x_1, \ldots, x_n) - D^\alpha\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \\
&\quad + D^\alpha\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) - D^\alpha\varphi(x_1, \ldots, x_{n-2}, 0, 0) \\
&\quad + \cdots + D^\alpha\varphi(x_1, 0, \ldots, 0) - D^\alpha\varphi(0, \ldots, 0) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_0^{x_i} \frac{\partial}{\partial t_i} D^\alpha\varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, t_i, 0, \ldots, 0)\, dt_i.
\end{aligned}$$

であるので, これを用いて,

$$\begin{aligned}
|D^\alpha\varphi(x)| &\le \sum_{i=1}^{n} \int_0^{|x_i|} \eta n^{N-(|\alpha|+1)} |x|^{N-(|\alpha|+1)}\, dt_i. \\
&= \eta n^{N-(|\alpha|+1)} |x|^{N-(|\alpha|+1)} (|x_1| + \cdots + |x_n|) \\
&\le \eta n^{N-(|\alpha|+1)} |x|^{N-(|\alpha|+1)} (n\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}) \\
&= \eta n^{N-|\alpha|} |x|^{N-|\alpha|}.
\end{aligned}$$

よって (2.4.1) がいえた.

さて $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ で $\psi|_{B(0,\frac{1}{2})} \equiv 1$ かつ $B(0,1)$ の外で $\psi \equiv 0$ となるものをとる．そして, 任意の $0 < r \le 1$ について, $\psi_r \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ を $\psi_r(x) := \psi(\frac{x}{r})$ と定義する．この時, ある $\varepsilon > 0$ と $C = C(n, N)$ があって, 任意の $0 < r < \epsilon$ について,

$$\|\psi_r\varphi\|_N \le \eta C \|\varphi\|_N \tag{2.4.2}$$

であることを示す.

二項定理から

$$D^\alpha(\psi_r\varphi)(x) = \sum_{\beta \le \alpha} C_{\alpha\beta} \frac{1}{r^{|\alpha|-|\beta|}} (D^{\alpha-\beta}\psi)(\tfrac{x}{r}) \cdot (D^\beta\varphi)(x).$$

である．$r < \varepsilon$ とすると, $\operatorname{Supp} \psi_r\varphi \subset B(0,r) \subset K$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}
\max_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\alpha(\psi_r\varphi)(x)| &\le C_1 \frac{1}{r^{|\alpha|-|\beta|}} \max_{x\in\mathbb{R}^n} \Big(|D^{\alpha-\beta}\psi(\tfrac{x}{r})| \cdot |D^\beta\varphi(x)| \Big) \\
&= C_1 \frac{1}{r^{|\alpha|-|\beta|}} \max_{x\in B(0,r)} \Big(|D^{\alpha-\beta}\psi(\tfrac{x}{r})| \cdot |D^\beta\varphi(x)| \Big) \\
&\le C_1 \max_{x\in B(0,r)} \max_{\beta\le\alpha} \Big(|D^{\alpha-\beta}\psi(\tfrac{x}{r})| \cdot \eta n^{N-|\alpha|} |x|^{N-|\alpha|} \cdot \frac{1}{r^{|\alpha|-|\beta|}} \Big) \\
&\le C_1 \max_{x\in B(0,r)} \Big(|D^{\alpha-\beta}\psi(\tfrac{x}{r})| \cdot \eta n^{N-|\beta|} \cdot (\tfrac{x}{r})^{N-|\beta|} \Big) \\
&\le \eta C_1 n^N \max_{\beta\le\alpha} \max_{x\in K} |D^{\alpha-\beta}\psi(\tfrac{x}{r})|
\end{aligned}$$

以上より (2.4.2) がいえた．一方 Λ は order N を持つので，ある C' があって，任意の $\varphi \in \mathcal{D}_{B(0,1)}$ について

$$|\Lambda(\varphi)| \leq C'\|\varphi\|_N$$

である．よって，任意の $\varepsilon < 1$ と $\varphi' \in \mathcal{D}_{B(0,\epsilon)}$ について $|\Lambda(\varphi')| \leq C'\|\varphi'\|_N$．である．

以上の議論をまとめると次がわかる: 任意の $\eta > 0$ について，$\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ があって，

$$\max\{|D^\alpha \varphi(x)| : |\alpha| = N, x \in K\} \leq \eta.$$

となる．ここで $K := \overline{B(0,\epsilon)}$ であるそして，η によらない C, C' があって

$$|\Lambda(\varphi)| = |\Lambda(\psi_r\varphi)| \leq C'\|\psi_r\varphi\|_N \leq \eta C C'\|\varphi\|_N.$$

である．$CC'\|\varphi\|_N$. は η によらないので，$|\Lambda(\varphi)| = 0$ である．よって $\Lambda(\varphi) = 0$. となる． □

2.5 Distributions as Derivatives

Theorem 2.5.1. [*Rud*, *Thm*3.2] X $\mathbb{R}$ ベクトル空間，$M \subset X$ 部分空間として次を仮定する．

- ある *mapp* : $X \to \mathbb{R}$ で $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ *&* $p(tx) = tp(x)$. $(\forall t \geq 0)$ となるものが存在する．*(これに* $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *が加わると semi-norm)*
- ある線型写像 $f : M \to \mathbb{R}$ で，任意の $x \in M$ に関して $f(x) \leq p(x)$.

この時ある $\Lambda : X \to \mathbb{R}$ という線型写像で $\Lambda|_M \equiv f$ かつ任意の $x \in X$ について以下を満たすものが存在する

$$-p(-x) \leq \Lambda(x) \leq p(x).$$

この主張において p は seminorm でなくても良い． よって $p(x) < 0$ となる点があっても良い．

Proof.

$$S := \left\{ (X', \Lambda') \;\middle|\; \begin{array}{l} X' \subset X; X' \supset M \text{ となる部分空間.} \\ \Lambda' : X' \to \mathbb{R} \text{ となる線型写像で} \Lambda'|_M \equiv f \text{ かつ} \\ -p(-x') \leq \Lambda'(x') \leq p(x') \quad (\forall x' \in X') \text{ となるものがある.} \end{array} \right\}$$

S に順序 $\leq$" を

$$(X_1, \Lambda_1) \leq (X_2, \Lambda_2) \Longleftrightarrow X_1' \subset X_2' \text{ かつ } \Lambda_2|_{X_1} \equiv \Lambda_1,$$

として入れると，S は帰納的集合になり，Zorn の補題より，極大元 $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ がある．

よって次の主張を示せば良い．

Claim 2.5.2. $\widetilde{X} = X$.

$\widetilde{X} \neq X$. とし, $y \in X \setminus \widetilde{X}$ をとる. この時任意の $x, x' \in \widetilde{X}$. において,

$$\widetilde{\Lambda}(x) + \widetilde{\Lambda}(x') = \widetilde{\Lambda}(x + x') \leq p(x + x') \leq p(x - y) + p(x' + y)$$

である. よって, $\widetilde{\Lambda}(x) - p(x - y) \leq p(x' + y) - \widetilde{\Lambda}(x')$. であるので, x' を固定すれば, 左の sup が存在する.

$$\alpha := \sup\{\widetilde{\Lambda}(x) - p(x - y) \mid x \in X\}$$

とおく. 任意の $x, x' \in \widetilde{X}$ について,

$$\widetilde{\Lambda}(x) - p(x - y) \leq \alpha \leq p(x' + y) - \widetilde{\Lambda}(x')$$

今 $\widetilde{X}' := \widetilde{X} + \mathbb{R}y$ かつ, $\widetilde{\Lambda}' : \widetilde{X}' \to \mathbb{R}$; $\widetilde{\Lambda}'(x + ty) := \widetilde{\Lambda}(x) + t\alpha$. とする. この時 $\widetilde{\Lambda}' : \widetilde{X}' \to \mathbb{R}$ は線型写像で $\widetilde{\Lambda}'|_M \equiv f$ である. さらに, 任意の $x + tg \in \widetilde{X}'$ について,

- $t = 0$ ならば $\widetilde{\Lambda}'(x) = \widetilde{\Lambda}(x) \leq p(x + ty)$.
- $t > 0$ ならば $\alpha \leq p(x + y) - \widetilde{\Lambda}(x)$ に注目して

$$\widetilde{\Lambda}'(x + ty) = \widetilde{\Lambda}(x) + t\alpha = t\big(\widetilde{\Lambda}(\tfrac{1}{t}x) + \alpha\big) \leq tp(\tfrac{1}{t}x + y) = p(x + ty).$$

- $t < 0$ ならば, $t = -|t|$, かつ $\widetilde{\Lambda}(x) - p(x - y) \leq \alpha$ に注目して,

$$\widetilde{\Lambda}'(x - |t|y) = |t|(\widetilde{\Lambda}(\tfrac{1}{|t|}x) - \alpha) \leq |t|\, p(\tfrac{1}{|t|}x - y) = p(x + ty).$$

以上より, 任意の $x + ty \in \widetilde{X}'$ について, $\widetilde{\Lambda}'(x + tg) \leq p(x + tg)$ であるので, $(\widetilde{X}', \widetilde{\Lambda}') \in S$ かつ $(\widetilde{X}', \widetilde{\Lambda}') \geq (\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ である. しかし, $\widetilde{X}' \neq \widetilde{X}$ なので, これは $\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ が極大元に矛盾する, よって $\widetilde{X} = X$. □

Theorem 2.5.3. [*Rud*, *Thm*6.26] $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ かつ $K \subset \Omega$ コンパクトとする. この時ある $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 連続関数と $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ があって, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K$ について,

$$\Lambda(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \cdot (D^\alpha \varphi)\, dx$$

なお上の α については, [Rud, Thm6.8] によってある $C > 0, N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で $\Lambda(\varphi) \leq C\|\varphi\|_N$ $(\forall \varphi \in D_K)$ となるものが存在するが, その N を取ってきて $\alpha = (N + 2, \ldots, N + 2)$ と定める.

Proof. $Q := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1 \text{ for } \forall i\}$, ととる. $0 \in \Omega$ として良い. またスケール変換して,$K \subset (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^n$. として良い.

K を平行移動して $K \subset Q^\circ$ とする．そして $K \not\subset (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^n$ かつ $K \not\ni (0, \dots, 0)$ を仮定する．$T := \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}$. とし任意の $y = (y_1, \dots, y_n) \in Q$, について，

$$Q(y) := [0, y_1] \times [0, y_2] \times \cdots \times [0, y_n]$$

とする．任意の $\varphi \in D_Q \subset D(\mathbb{R}^n)$ と $x = (x_1, \dots, x_n) \in Q$, について平均値の定理よりある $\alpha \in (0, 1)$ があって

$$\begin{aligned}
|\varphi(x)| &= \left|\frac{\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - \varphi(x_1, \dots, 0, \dots, x_n)}{1 - 0}\right| \\
&\leq \left|\frac{\varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - \varphi(x_1, \dots, 0, \dots, x_n)}{x_i - 0}\right| \\
&= \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x_1, \dots, \alpha x_i, \dots, x_n)\right|
\end{aligned}$$

となる．よって

$$\max_{x \in Q} |\varphi(x)| \leq \max_{x \in Q} \left|\tfrac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)\right| \quad (\forall i) \tag{2.5.1}$$

さらに

$$\varphi(y) = \int_{Q(y)} T\varphi \, dx = T\Big(\int_{Q(y)} \varphi \, dx\Big) \tag{2.5.2}$$

[Rud, Thm 6.8] よりある $C > 0$ と $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ があって

$$|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N \quad (\forall \varphi \in D_K).$$

である．よって (2.5.1) と (2.5.2) より

$$\begin{aligned}
|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N &\underset{(2.5.1)}{\leq} C \cdot \max_{x \in Q} |(T^N\varphi)(x)| = C \cdot \max_{y \in Q}\left|\int_{Q(y)} (T^{N+1}\varphi) \, dx\right| \\
&\leq C \cdot \max_{y \in Q} \int_{Q(y)} |T^{N+1}\varphi| \, dx \leq C \int_Q |T^{N+1}\varphi| \, dx.
\end{aligned}$$

よって

$$|\Lambda(\varphi)| \leq C \int_Q |T^{N+1}\varphi| \, dx \tag{2.5.3}$$

である．(2.5.2) から $T^{N+1} : \mathcal{D}_K \to \mathcal{D}_K$ は単射．よって $\mathrm{Im}(T^{N+1}) \subset \mathcal{D}_K$ 上において，線型写像 $\Lambda_1 := \Lambda \circ (T^{N+1})^{-1} : \mathrm{Im}(T^{N+1}) \to \mathbb{R}$ を定義することができる．$\mathrm{Im}(T^{N+1}) \subset \mathcal{D}_K$ 上で $\Lambda_1 \circ T^{N+1} = \Lambda$. である．

$\varphi \in \mathrm{Im}(T^{N+1})$ について, (2.5.3) より

$$\Lambda_1(\varphi) \le |\Lambda_1(\varphi)| \le C \int_K |\varphi|\, dx \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}_K).$$

よって Hahn-Banach の定理 2.5.3 を $(\mathrm{Im}(T^{N+1}) \subset L^1(K), \Lambda_1, C\int |\cdot| dx)$ に適応して, ある $G : L^1(K) \to \mathbb{R}$ で $G|_{\mathrm{Im}(T^{N+1})} \equiv \Lambda_1$ かつ

$$G(\varphi) \le C \int_K |\varphi|\, dx \quad (\forall \varphi \in L^1(K)).$$

となるものがある. よってある K 上の bounded Borel 関数 g であって, $G(\varphi) = \int_K g\varphi\, dx$ となる. そして, $\Lambda = \Lambda_1 \circ T^{N+1}$ であるので, 任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K$ について,

$$\Lambda(\varphi) = \int_K g \cdot (T^{N+1}\varphi)\, dx$$

である. そこで, g を $\mathbb{R}^n$ 上の関数に 0 拡張する　(つまり $g(x) = 0 (\forall x \notin K)$ とする.) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$f((x_1, \dots, x_n)) := \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} g(x)\, dx_1 \cdots dx_n.$$

として定義する. これは Lesbegue 微分定理からほとんど至るところ微分可能である. ライプニッツ則から任意の i について $\frac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot (T^{N+1}\varphi)) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right) \cdot (T^{N+1}\varphi) + f \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i} T^{N+1}\varphi\right)$. である. よって任意の $\varphi \in \mathcal{D}_K$ について,

$$\int_K f \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i} T^{N+1}\varphi\right) dx = -\int_K \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right) \cdot (T^{N+1}\varphi)\, dx$$

となる. 以上より

$$\begin{aligned}
\Lambda(\varphi) &= \int_K g \cdot (T^{N+1}\varphi)\, dx = \int_K \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} f\right) \cdot \left(T^{N+1}\varphi\right) dx \\
&= -\int_K \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} f\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1} T^{N+1}\varphi\right) dx \\
&= (-1)^n \int_K f \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} T^{N+1}\varphi\, dx \\
&= (-1)^{N+2} \int_K (-1)^{n+N+2} f \cdot T^{N+2}\varphi\, dx.
\end{aligned}$$

よってこの $(-1)^{n+N+2} f$ がほしいものである. □

Theorem 2.5.4. *[Rud, Theorem 6.27]* $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $V \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ *open.* $K \subset \Omega$ をコンパクト集合とする. $\mathrm{Supp}\,\Lambda \subset K$ かつ $K \subset V$ かつ Λ が *order* N を持つと仮定する.
この時ある $\{f_\beta\} \subset inC^0(\Omega)$ で, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ は $\beta_i \le N+2$ となる *multi-index* で,

$\operatorname{Supp} f \subset V$ かつ

$$\Lambda = \sum_{\beta} D^{\beta} \Lambda f_{\beta},$$

となるものが存在する

Proof. $W \subset \Omega^i$ open で $K \subset W \subset \overline{W} \subset V$ かつ $\overline{W}$ コンパクトなものを取る

2.5.3 を Λ と W に適応すると, Λ の order は N であるので, ある $\alpha = (N+2, \ldots, N+2)$ と $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 連続があって

$$\Lambda(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f \cdot (D^{\alpha}\phi)\, dx \quad (\forall \phi \in \mathcal{D}(W)) \tag{2.5.4}$$

となる. そこで $g \in C_0^{\infty}(\Omega)$ で $g|_{\overline{W}} \equiv 1$ かつ $\operatorname{Supp} g \subset V$ となるものを考えることで,$\operatorname{Supp} f \subset V$ と仮定して良い. (f を fg に取り替える.)

$\psi \in C^{\infty}(\Omega)$ で, $\psi|_K \equiv 1$ かつ $\operatorname{Supp} \psi \subset W$ のものを固定する. 2.4.4(c) から $\Lambda = \psi\Lambda$ である.

任意の $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ について (2.5.4) から

$$\begin{aligned}
\Lambda(\phi) = \psi\Lambda(\phi) = \Lambda(\psi\phi) &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(D^{\alpha}(\psi\phi))dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f \cdot \sum_{\beta \le \alpha} C_{\alpha\beta} D^{\alpha-\beta}\psi\, D^{\beta}\phi\, dx \\
&= \sum_{\beta \le \alpha} \int_{\Omega} \big((-1)^{|\alpha|} C_{\alpha\beta} f D^{\alpha-\beta}\psi\big) D^{\beta}\phi\, dx
\end{aligned}$$

よって $f_{\beta} := (-1)^{|\alpha|-|\beta|} C_{\alpha\beta} f D^{\alpha-\beta}\psi$ とおくと

$$\Lambda(\phi) = \sum_{\beta \le \alpha} (-1)^{|\beta|} \int_{\Omega} f_{\beta} D^{\beta}\phi\, dx = \sum_{\beta \le \alpha} (D^{\beta}\Lambda_{f_{\beta}})(\phi).$$

□

Theorem 2.5.5. *[Rud, Theorem 6.28]* $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ とする. この時任意の α; *multi-index* について, ある $g_{\alpha} \in C_0(\Omega)$ があって次を満たすものが存在する.

- 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について, $\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \mid \operatorname{Supp} g_{\alpha} \cap K \neq \varnothing\}$ は有限集合
- $\Lambda = \sum_{\alpha} D^{\alpha}\Lambda g_{\alpha}$.

さらに Λ が有限の *order* を持つならば, 有限個の g_{α} を除いて $g_{\alpha} \equiv 0$ となるように取れる.

つまり, 超関数は D^{α} と Λg_{α} で形式的にかける.

Proof. 次の claim を先に示す.

Claim 2.5.6. 任意の $i = 1, 2, \ldots,$ について, ある $Q_i \subset V_i \subset \Omega$ となるコンパクト集合 Q_i と open V_i があって, 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について, $\{i \in \mathbb{Z}_+ \mid V_i \cap K \neq \varnothing\}$ は有限集合となるようにできる.

Proof. 1.7.2 より

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_i \subset \cdots \subset \Omega$$

となるコンパクト集合列 K_i で $K_i \subset \mathrm{int}(K_{i+1})$ かつ $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{int}(K_i)$ となるものが存在する.

$K_0 := \varnothing$, $Q_1 := K_1$, $V_1 := \mathrm{int}(K_2)$ とする. 以下帰納的に

$$Q_i := K_i \setminus \mathrm{int}(K_{i-1}), \quad V_i := \mathrm{int}(K_{i+1}) \setminus K_{i-2} \quad (i \geq 2).$$

と定義する. (要は V_i は三つ飛ばしにする.) すると

- $Q_i \subset V_i$ (理由は $K_i \subset \mathrm{int}(K_{i+1}$ かつ $K_{i-2} \subset \mathrm{int}(K_{i-1})$ なので.)
- Q_i; コンパクト (理由は K_i コンパクトかつ $Q_i \subset K_i$closed なので)
- V_i open.
- $\Omega = \bigcup_i Q_i$ (理由は帰納法から, $\bigcup_{i=1}^{n} Q_i = K_n$ が言えるから)

任意の K について, ある m があって, $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{int}(K_i) = \mathrm{int}(K_m) \subset K_m$. よって $K \cap V_{m'} = \varnothing$ が $m' > m + 2$ で成り立ち, $\{i \in \mathbb{Z}_+ \mid V_i \cap K \neq \varnothing\} \subset \{1, \ldots, m+1\}$ は有限である. □

2.3.3 と同じ議論より (Q_i 上で 1 で support が V_i に入る C^∞ 級関数を構成する[1]ことで), ある $\psi_i \geq 0$ となる $\{\psi_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ であって次を満たすものが存在する.

- 任意の $i \in \mathbb{Z}_+$ について $\mathrm{Supp}\, \psi_i \subset V_i$
- 任意の $x \in \Omega$ について, $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) = 1$. ただし左は有限和である.
- 任意の $i \in \mathbb{Z}_+$ について, ある $W_i \supset Q_i$open があって, $\{j \in \mathbb{Z}_+ \mid \psi_j|_{W_i} \neq 0\}$ は有限集合

すると $\Lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \Lambda$ である. 2.5.4 より, 任意の $i \in \mathbb{Z}_+$ について, ある V_i 上の連続関数の有限集合族 $\{f_{i,\alpha}\}_\alpha$ があって,

$$\psi_i \Lambda = \sum_\alpha D^\alpha \Lambda f_{i,\alpha}.$$

とかける. そこで, $g_\alpha := \sum_{i=1}^{\infty} f_{i,\alpha}$. とおく.

任意の $x \in \Omega$ について, V_i の構成から, $\{i \in \mathbb{Z}_+ \mid x \in V_i\}$ は有限集合である. よって $g_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{i,\alpha}(x)$ は有限和である. つまり, $g_\alpha \in C_0(\Omega)$.

[1] C^∞ 級関数として構成できるのも 2.3.3 の 1 の分割を使う

Claim 2.5.7. 任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ について $\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \mid \operatorname{Supp} g_\alpha \cap K \neq \varnothing\}$ は有限集合.

Proof. $\{V_i\}$ の構成から, $\{i \in \mathbb{Z}_+ \mid V_i \cap K \neq \varnothing\}$ は有限集合である. よって,

$$\operatorname{Supp} g_\alpha \cap K \subset \bigcup_{V_i \cap K \neq \varnothing} \operatorname{Supp} f_{i,\alpha} \cap K$$

となる.

$\{f_{i,\alpha}\}_\alpha$ は有限個で, 考える i も有限個なので, ある $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ があって, 任意の $|\alpha'| > M$ となる α' について, $\operatorname{Supp} g_{\alpha'} \cap K = \varnothing$ となる. $\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \mid \operatorname{Supp} g_\alpha \cap K \neq \varnothing\}$ は有限集合. □

任意の $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ について

$$\begin{aligned}
\Lambda(\phi) &= \Lambda\big(\sum_i \psi_i \phi\big) = \sum_i (\psi_i \Lambda)(\phi) \\
&= \sum_i \big(\sum_\alpha D^\alpha \Lambda f_{i,\alpha}\big)(\phi) \\
&= \sum_\alpha (D^\alpha \Lambda g_\alpha)(\phi) = \big(\sum_\alpha D^\alpha \Lambda g_\alpha\big)(\phi),
\end{aligned}$$

よって $\Lambda = \sum_\alpha D^\alpha \Lambda g_\alpha$ となる. □

2.6 Convolutions

記法

- $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ \mathcal{D}' := \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,
- $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}^n$ について

$$\widetilde{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ \widetilde{u}(x) = u(-x),$$

$$\tau_x u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ \tau_x u(y) = u(y - x).$$

任意の $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ について, convolution $u * v$ を次で定める:

$$u * v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad (u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(y) v(x - y) dy$$

この積分 $u * v$ は, ほとんど至るところの $x \in \mathbb{R}^n$ で Lebesgue 積分 $\int_{\mathbb{R}^n} u(y)v(x-y)dy$ が考えられる時にのみ定義される. このとき, 定義から

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(y)v(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\tau_x\widetilde{v}(y)dy = \Lambda_u(\tau_x\widetilde{v}).$$

Definition 2.6.1. 任意の $u \in \mathcal{D}'$, $\phi \in \mathcal{D}$, $x \in \mathbb{R}^n$ について,

$$(u * \phi)(x) := u(\tau_x\widetilde{\phi}).$$

と定める. $u * \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ である.

Definition 2.6.2. 任意の $u \in \mathcal{D}'$, $\phi \in \mathcal{D}$, $x \in \mathbb{R}^n$ について,

$$(\tau_x u)(\phi) := u(\tau_{-x}\phi)$$

と定義する.

Remark 2.6.3. 次が成り立つ.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tau_x u(y)v(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \cdot \tau_{-x}v(y)dy = \Lambda_u(\tau_{-x}v).$$

また [Rud, Theorem 6.8] から, $\tau_x u \in \mathcal{D}'$ でもある.

Theorem 2.6.4. *[Rud, Theorem 6.30]* $u \in \mathcal{D}'$, $\phi, \psi \in \mathcal{D}$ とする時次が成り立つ.

(a) $x \in \mathbb{R}^n$ について, $\tau_x(u * \phi) = (\tau_x u) * \phi = u * (\tau_x \phi)$

(b) $u * \phi \in C^\infty$. 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ について $D^\alpha(u * \phi) = (D^\alpha u) * \phi = u * (D^\alpha \phi)$

(c) $u * (\phi * \psi) = (u * \phi) * \psi$

Proof. [(a)] $\tau_x(u * \phi)(y) = (u * \phi)(y - x) = u(\tau_{y-x}\widetilde{\phi})$.

$$(\tau_x u) * \phi(y) = (\tau_x u)(\tau_y\widetilde{\phi}) = u(\tau_{-x}(\tau_y\widetilde{\phi})) = u(\tau_{y-x}\widetilde{\phi}).$$

以上より, $u * (\tau_x\phi)(y) = u(\tau_y(\tau_x\widetilde{\phi})) = u(\tau_y\tau_{-x}\widetilde{\phi}) = u(\tau_{y-x}\widetilde{\phi})$ となるので言える.

[(b)] $D^\alpha(\tau_x\widetilde{\phi}) = (-1)^{|\alpha|}\tau_x(\widetilde{D^\alpha\phi})$ であるので,

$$\begin{aligned}(D^\alpha u) * \phi(x) &= (D^\alpha u)(\tau_x\widetilde{\phi}) = (-1)^{|\alpha|}u(D^\alpha(\tau_x\widetilde{\phi})) \\ &= u(\tau_x(\widetilde{D^\alpha\phi})) = (u * (D^\alpha\phi))(x),\end{aligned}$$

よって (b) の中辺と右辺は等しい

今 $e \in \mathbb{R}^n$; unit vector とし, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ について $\eta_r = \frac{1}{r}(\tau_0 - \tau_{re})$ とする.

$$\eta_r(\phi)(x) = \frac{\phi(x) - \phi(x - re)}{r} = \frac{\phi(x - re) - \phi(x)}{-r}$$

である. (a) より $\eta_r(u * \phi) = u * (\eta_r(\phi))$ であるので, 方向微分を考えることで,

$$\eta_r(\phi) \to D_e\phi \quad (r \to 0)$$

が $\mathcal{D}$ 上で言える. よって任意の $x \in \mathbb{R}^n$ について, $\mathcal{D}$ 上で

$$\tau_x(\widetilde{\eta_r(\phi)}) \to \tau_x(D_e\phi) \quad (r \to 0)$$

となる. 以上より $r = -t$ にして

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \frac{(u * \phi)(x + te) - (u * \phi)(x)}{t} = \lim_{r\to 0}(\eta_r(u * \phi))(x) \\
&= \lim_{r\to 0} u * (\eta_r(\phi))(x) = \lim_{r\to 0} u(\tau_x(\widetilde{\eta_r(\phi)})) \\
&= u(\tau_x(\widetilde{D_e\phi})) = (u * (D_e\phi))(x).
\end{aligned}$$

これより議論を繰り返して $u * \phi \in C^\infty$ と (b) の中辺と左辺は等しいことがわかる.

[(c)] 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ について, 次が成り立つ

- $(u * (\phi * \psi))(x) = \tau_{-x}((u * (\phi * \psi)))(0) \underset{(a)}{=} (u * (\tau_{-x}(\phi * \psi)))(0) = (u * (\phi * \tau_{-x}\psi))(0)$
- $((u * \phi) * \psi)(x) = \tau_{-x}(((u * \phi) * \psi))(0) = (((u * \phi) * \tau_{-x}\psi))(0)$.

以上より $(u * (\phi * \psi))(0) = ((u * \phi) * \psi)(0)$. を示せば良い.

$$(\widetilde{\phi * \psi})(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\psi(t - y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(s - t)\psi(-s)ds = \int_{\operatorname{Supp}\psi} \phi(s - t)\psi(-s)ds$$

であるので,

$$(u * (\phi * \psi))(0) = u\Big(\int_{\operatorname{Supp}\psi} \phi(s - t)\psi(-s)ds\Big) = \int_{\operatorname{Supp}\psi} (u(\tau_s\widetilde{\phi}))\psi(-s)ds. \tag{2.6.1}$$

さて, $\int_{\operatorname{Supp}\psi} \phi(s - \cdot)\psi(-s)ds$ の部分をリーマン積分として解釈する. 今 $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ で $\operatorname{Supp}\psi \subset [-r, r]^n$ となるものを一つ固定する. 任意の $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \{0, \ldots, \ell - 1\}^n$ について

$$\Delta_k := \prod_{i=1}^n \big[-r + 2r\frac{k_i}{\ell},\ -r + 2r\frac{k_i + 1}{\ell}\big].$$

と定義する．$F_k(t) := \int_{\Delta_k} \phi(s-t)ds$. とする．すると次が言える

- $\operatorname{Supp} F_k \subset [-r,r]^n \setminus \operatorname{Supp}\phi$, そして, $\operatorname{Supp} F_k$ はコンパクトかつ ℓ と k によらない.
- $F_k \in C^\infty$ なぜならば，$\operatorname{Supp} F_k$ コンパクトで $\phi \in C^\infty$ であるので, 微分と積分が交換できるから．特に $D^\alpha F_k(t) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Delta_k} D^\alpha \phi(s-t)ds\Big)$.

よって $F_k \in \mathcal{D}$ である．これより, 中間値の定理を n 回使うことである $x_k \in \Delta_k$ であって,

$$F_k(t) = \phi(x_k - t) \cdot \left(\tfrac{2r}{\ell}\right)^n, \tag{2.6.2}$$

となるものが存在する．よって

$$\int_{\operatorname{Supp}\psi} \phi(s-t)\psi(-s)ds = \lim_{\ell\to\infty} \sum_{k\in\{0,\dots,\ell-1\}^n} \phi(x_k-t)\psi(-x_k)\left(\tfrac{2r}{\ell}\right)^n = \lim_{\ell\to\infty} \sum_{k\in\{0,\dots,\ell-1\}^n} \psi(-x_k)F_k(t). \tag{2.6.3}$$

よって, $\operatorname{Supp} F_k$ は ℓ, k に依らないコンパクト集合上に含まれていて, コンパクト集合上での各点収束は一様収束が同じなので, $\mathcal{D}$ 上の収束と同じである．つまり

$$\lim_{\ell\to\infty} \sum_k \psi(-x_k)F_k(t) = \int_{\operatorname{Supp}\psi} \phi(s-t)\psi(-s)ds \quad \text{in } \mathcal{D} \tag{2.6.4}$$

である．以上より

$$\begin{aligned}
(u*(\phi*\psi))(0) &\underset{(2.6.1)}{=} u\Big(\int_{\operatorname{Supp}\psi} \phi(s-t)\psi(-s)ds\Big) \\
&\underset{(2.6.4)}{=} u\Big(\lim_{\ell\to\infty} \sum_k \psi(-\chi_k)F_k(t)\Big) \\
&\underset{(2.6.3)}{=} \lim_{\ell\to\infty} \sum_k \psi(-\chi_k)u(F_k(t))
\end{aligned}$$

一方でリーマン積分の定義から,

$$\begin{aligned}
((u*\phi)*\psi)(0) &\underset{(2.6.1)}{=} \int_{\operatorname{Supp}\psi} (u(\tau_s\phi))\cdot\psi(-s)ds \\
&\underset{(2.6.4)}{=} \lim_{\ell\to\infty} \sum_k u(\tau_{x_k}\phi)\psi(-x_k)\left(\tfrac{2r}{\ell}\right)^n \\
&= \lim_{\ell\to\infty} \sum_k u(\phi(x_k-t))\psi(-x_k)\left(\tfrac{2r}{\ell}\right)^n \\
&\underset{(2.6.2)}{=} \lim_{\ell\to\infty} \sum_k \psi(-x_k)u(F_k(t))
\end{aligned}$$

よって $(u*(\phi*\psi))(0) = ((u*\phi)*\psi)(0)$ がいえて (c) の主張もいえた． □

Remark 2.6.5. 2.6.4 の別証明 $G(s,t) := \phi(s-t)\psi(-s)$ とおくとある $K \subset \mathbb{R}^n$ があって, 任意の $s \in \mathbb{R}^n$ について $\mathrm{Supp}\,(t \mapsto G(s,t)) \subset K$ である. よって 2.5.3 からある $f \in C^0$, α と multi-index α があって

$$u\Big(\int_{\mathbb{R}^n} G(s,t)ds\Big) = \int_{\mathbb{R}^n} (-1)^{|\alpha|} f \cdot D^\alpha \Big(\int_{\mathbb{R}^n} G(s,t)ds\Big) dt,$$

$$u(G(s,t)) = \int_{\mathbb{R}^n} (-1)^{|\alpha|} f \cdot D^\alpha G(s,t)\, dt.$$

となるものが存在する. このサポートがコンパクトなので, 微分と積分を交換するためいえた.

Definition 2.6.6. [Rud, Definition 6.31] $h_j \in \mathcal{D}$ の列 $\{h_j\}_{j\geq 1}$ が"approximate identity" on $\mathbb{R}^n$ を持つとは, ある $h \in \mathcal{D}$ で $h \geq 0$ かつ $\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx = 1$ となるものがあって, 任意の $j \in \mathbb{Z}_+$ について

$$h_j(x) = j^n h(jx) \quad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

が成り立つこととする.

Lemma 2.6.7. *$\{h_j\}_{j\geq 1}$ "approximate identity" on $\mathbb{R}^n$ を持つとする. $f \in C^0$ について, 任意の $t \in \mathbb{R}^n$ について*

$$\lim_{j\to\infty} (f * h_j)(t) = f(t)$$

Proof. 任意の $j \in \mathbb{Z}_+$ について $K_j := \frac{1}{j}\,\mathrm{Supp} h$ とおくと

$$(f * h_j)(t) = (h_j * f)(t) := \int_{\mathbb{R}^n} (j^n h(jx)) \cdot f(t-x)\, dx$$

今"approximate identity" より $\int_{\mathbb{R}^n} j^n h(jx)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} h(y)\, dy = 1$. よって

$$m_j := \inf\{f(t-x) \mid x \in K_j\} \leq (f * h_j)(t) \leq \sup\{f(t-x) \mid x \in K_j\} =: M_j$$

よって

$$m_j = \int_{\mathbb{R}^n} (j^n h(jx)) \cdot m\, dx \leq (f * h_j)(t) \leq \int_{\mathbb{R}^n} (j^n h(jx)) \cdot M\, dx = M_j$$

f は連続なので, $\lim_{j\to\infty} M_j - m_j = 0$ よって $\lim_{j\to\infty}(f * h_j)(t) = f(t)$. □

Lemma 2.6.8. *[Rud, Theorem 6.32] $\{h_j\}_{j\geq 1}$ "approximate identity" on $\mathbb{R}^n$ を持つとする. $\Phi \in \mathcal{D}$, $u \in \mathcal{D}'$.*

次が成り立つ

(a) $\lim_{j\to\infty} \Phi * h_j = \Phi$ *in* $\mathcal{D}$

(b) $\lim_{j\to\infty} u * h_j = u$ *in* $\mathcal{D}'$

Proof. [(a)] $\mathrm{Cone}(\mathrm{Supp}h) := \{sx | x \in \mathrm{Supp}(h), s \in [0,1]\}$ とする．これは $h \in \mathcal{D}$ よりコンパクトである．$\mathrm{Supp}h_j = \frac{1}{j}\mathrm{Supp}h \subset \mathrm{Cone}(\mathrm{Supp}h)$ である．よって任意の $j \in \mathbb{Z}_+$ について

$$\mathrm{Supp}(\Phi * h_j) \subset \mathrm{Supp}\Phi + \mathrm{Supp}h_j \subset \mathrm{Supp}\Phi + \mathrm{Cone}(\mathrm{Supp}h).$$

である.($x \in \mathrm{Supp}\Phi$ かつ $t - x \in \mathrm{Supp}h_j$ ならば, $\Phi(x)h_j(t-x) \neq 0$ であることに注意) よって任意の $j \in \mathbb{Z}_+$, multi-indexα, $\Phi \in \mathcal{D}$ のサポートがコンパクトなので,

$$\mathrm{Supp}(D^\alpha(\Phi * h_j)) = \mathrm{Supp}(D^\alpha\Phi * h_j) \subset \mathrm{Supp}\Phi + \mathrm{Cone}(\mathrm{Supp}h)$$

となる．任意の $t \in \mathrm{Supp}\Phi + \mathrm{Cone}(\mathrm{Supp}h)$ について, 2.6.7 より $\lim_{j\to\infty}(\Phi * h_j)(t) = \Phi(t)$ となるので $\mathcal{D}$ の収束がいえる．

[(b)] $\{h_j\}_{j\geq 1}$ "approximate identity" on $\mathbb{R}^n$ を持つので, $\{\widetilde{h}_j\}_{j\geq 1}$ も同じ性質を持つ．よって

$$\begin{aligned}
u(\Phi) &\underset{2.6.7}{=} \lim_{j\to\infty} u(\widetilde{h}_j * \Phi) \underset{2.6.4(b)}{=} \lim_{j\to\infty} (u * \widetilde{\widetilde{h}_j * \Phi})(0) \\
&= \lim_{j\to\infty} (u * (h_j * \widetilde{\Phi}))(0) \underset{2.6.4(c)}{=} \lim_{j\to\infty} ((u * h_j) * \widetilde{\Phi})(0) \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (u * h_j)(s)\, \widetilde{\Phi}(-s)\, ds = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (u * h_j)(s)\, \Phi(-s)\, ds \\
&= \lim_{j\to\infty} \Lambda_{u*h_j}(\Phi).
\end{aligned}$$

が成り立つので, いえた．($\mathcal{D}'$ の位相は各点収束位相である)

□

Definition 2.6.9. [Rud, Definition 1.44] $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ open, $C^0(\Omega)$ Ω 上の連続関数の集合とする．

$C^0(\Omega)$ の位相を次で定義する:

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots \subset \Omega$$

というコンパクト集合の列を一つとる．1.7.2 によって, $n = 1, 2, \cdots$ について,

$$V_n := \{f \in C^0(\Omega) \mid \sup_{x\in K_n} |f(x)| < \tfrac{1}{n}\}$$

とおくと, V_n $(n = 1, 2, \cdots)$ が 0 の local base となる $C^0(\Omega)$ の位相が存在する．

Theorem 2.6.10. *[Rud, Theorem 6.33]*

(a) $u \in \mathcal{D}'$ について, $L : \mathcal{D} \to C^\infty$ を

$$L(\varphi) := u * \varphi$$

とする. *($u * \varphi \in C^\infty$ は 2.6.4 より)* この時 L は連続な線型写像で任意の $\varphi \in D$ と $x \in \mathbb{R}^n$ について

$$\tau_x(L(\varphi)) = L(\tau_x \varphi) \tag{2.6.5}$$

(b) 逆に連続な線型写像 $L : D \to C^0(\mathbb{R}^n)$ が *(2.6.5)* を満たすならば, $u \in \mathcal{D}'$ で $L(\varphi) = u * \varphi$ となるものがただ一つ存在する. 特に $\mathrm{Im}(L) \subset C^\infty$.

Proof. [(a)] (2.6.5) は 2.6.4(a) より. 線形も明らか. よって L が連続を示せば良い. C^∞ は locally convex なので, 1.8.11 より任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^n$ について $L|_{\mathcal{D}_K} : \mathcal{D}_K \to C^\infty$ が連続を言えば良い.

$\mathcal{D}_K$ と C^∞ は F-space (1.1.6 参照) なので closed graph theorem (2.6.11) より

$$\{(x, Lx) \in \mathcal{D}_K\} \subset \mathcal{D}_K \times C^\infty$$

が closed を示せば良い. よって

- $\varphi_i \to \varphi$ in $\mathcal{D}_K$ かつ
- $L(\varphi_i) = u * \varphi_i \to f$ in C^∞

が成り立つ時に, $u * \varphi = f$ が成り立つことを示せば良い.

これは $x \in \mathbb{R}^n$ について

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} (u * \varphi_i)(x) \underset{2.6.1}{=} \lim_{i\to\infty} u(\tau_x \widetilde{\varphi}_i) = u\left(\lim_{i\to\infty} \tau_x \widetilde{\varphi}_i\right) \underset{\tau_x\widetilde{\varphi_i} \to \tau_x\widetilde{\varphi} \text{ in } \mathcal{D}}{=} u(\tau_x \varphi) = (u * \varphi)(x)$$

が成り立つのでいえた.

[(b)] $u : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ を $u(\varphi) := (L(\varphi))(0)$ で定める.

まず $u \in \mathcal{D}'$ を示す. u が線形かつ $u(\varphi) = \mathrm{ev}_0 \circ L \circ \widetilde{\varphi}$ である. 以上より

$$\widetilde{\cdot} : \mathcal{D} \to \mathcal{D} \quad \text{and} \quad \mathrm{ev}_0 : C^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$$

が連続を示せば良い. $\widetilde{\cdot}$ が連続は明らか. ev_0 の連続性も $0 \in C^0(\mathbb{R}^n)$ で連続を示せばよく (平行移動で不変だから), これは $0 \in U \subset \mathbb{C}$ open について, ある $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ があって, $\mathrm{ev}_0(V_n) \subset U$ となることより言える. よって u は連続でいえた.

次に $\varphi \in \mathcal{D}$ について $L(\varphi) = u * \varphi$ を示す. (2.6.5) より

$$(L(\varphi))(x) \underset{\text{def}}{=} (\tau_{-x}(L(\varphi)))(0) \underset{(2.6.5)}{=} (L(\tau_{-x}\varphi))(0) \underset{\text{def}}{=} u(\widetilde{\tau_{-x}\varphi}) = u(\tau_x\widetilde{\varphi}) \underset{2.6.1}{=} (u * \varphi)(x). \quad (2.6.6)$$

よっていえた.

このような u がただ一つであることを示す. $u, u' \in D'$ で $L(\varphi) = u * \varphi = u' * \varphi$ であるとすると

$$(L(\varphi))(0) = (u * \varphi)(0) = u(\widetilde{\varphi}).$$

となる. よって同様にして $L(\varphi)(0) = u'(\widetilde{\varphi})$. であるので言えた. □

closed Graph Theorem とは以下のものである.

Theorem 2.6.11. *[Rud, Theorem 2.15]* $\Gamma : X \to Y$ が F *space* 上の線型写像とする, $G := \{(x, \Gamma x) \in X\} \subset X \times Y$ が閉集合ならば, Γ は連続.

Definition 2.6.12. [Rud, Definition 6.34]
$u \in \mathcal{D}'$ で, $\operatorname{Supp} u$ がコンパクトとする. 2.4.4, [Rud, Theorem 6.32] によりある連続線型汎函数

$$\widetilde{u} \in (C^\infty)' := \{\varphi : C^\infty \to \mathbb{C} \mid \varphi \text{ 連続線型 }\}$$

があって, $\widetilde{u}|_{\mathcal{D}} = u$ となるものがある. (以下, $\widetilde{u}$ も u とかく.)
このとき任意の $\varphi \in C^\infty$ について, $u * \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ を

$$(u * \varphi)(x) := u(\tau_x\widetilde{\varphi})$$

として定義する.

Remark 2.6.13 ($\widetilde{u}$ の構成のおさらい). $u \in \mathcal{D}'$ で, $\operatorname{Supp} u$ がコンパクトとする. $\widetilde{u}$ の構成は次のとおり (詳しくは 2.4.4 参照のこと.)

$\psi \in \mathcal{D}'$ で, $\psi|_{\operatorname{Supp} u} \equiv 1$ なものをとる. すると任意の $f \in C^\infty$, について. $u(\psi f)$ は ψ に依存しないことが言える. よって,

$$\widetilde{u}(f) := u(\psi f).$$

と定める. 2.4.4, [Rud, Theorem 6.32] から次が言える.

(a) 任意の $f \in C^\infty$ について. $\operatorname{Supp} f \cap \operatorname{Supp} u = \varnothing$ ならば $\widetilde{u}(f) = 0$. 特に $f, g \in C^\infty$ で $f = g$ が $\operatorname{Supp} u$ 上で成り立つならば, $\widetilde{u}(f) = \widetilde{u}(g)$ が成り立つ.

(b) $\operatorname{Supp} u = \varnothing$ ならば $\widetilde{u} = 0$.

Theorem 2.6.14. *[Rud, Theorem 6.35]* $u \in \mathcal{D}'$ で, $\operatorname{Supp} u$ がコンパクトとする. $\varphi \in C^\infty$, $\psi \in \mathcal{D}$ について次が成り立つ.

(a) $\tau_x(u * \varphi) = (\tau_x u) * \varphi = u * (\tau_x \varphi) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$

(b) $u * \varphi \in C^\infty$ *and* $D^\alpha(u * \varphi) = (D^\alpha u) * \varphi = u * (D^\alpha \varphi)$,

(c) $u * \psi \in \mathcal{D}$,

(d) $u * (\varphi * \psi) = (u * \varphi) * \psi = (u * \psi) * \varphi$

$\varphi \in \mathcal{D}$ の場合は, (サポートコンパクトの仮定なしに), 2.6.4 で言えている. そのため証明もコンパクトサポートの場合に帰着させる.

Proof. (a) と (b) は 2.6.4, [Rud, Theorem 6.30] と同じ ((a) は定義に基づいた計算, (b) も同じ)

[(c)] 非自明なのはサポートがコンパクトなること.

$$\operatorname{Supp}(\tau_x \widetilde{\psi}) = \overline{\{t \in \mathbb{R}^n \mid \tau_x \widetilde{\psi}(t) = \psi(x-t) = 0\}} = \{x\} - \operatorname{Supp} \psi.$$

である. ただし $\{x\} - \operatorname{Supp}\psi := \{x - t \mid t \in \operatorname{Supp} \psi\}$ とする. よって $x \in \mathbb{R}^n$ について,

$$\operatorname{Supp} u \cap (\{x\} - \operatorname{Supp} \psi) = \varnothing \Rightarrow \ (u * \psi)(x) = u(\tau_x \widetilde{\psi}) = 0$$

である. 以上より $\operatorname{Supp}(u * \psi) \subset \operatorname{Supp} u + \operatorname{Supp} \psi$ である. よって $\operatorname{Supp}(u * \psi)$ はコンパクトであり. $u * \psi \in \mathcal{D}$ である.

[(d)] 示すことは, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ について

$$(u * (\varphi * \psi))(x) = ((u * \varphi) * \psi)(x) = ((u * \psi) * \varphi)(x)$$

である. まず $x = 0$ に帰着できることを示す. これは 2.6.4(c) の証明と同じである. 実際 2.6.4(c) において

- $(u * (\varphi * \psi))(x) = \tau_{-x}((u * (\varphi * \psi)))(0) = (u * (\tau_{-x}(\varphi * \psi)))(0) = (u * (\varphi * \tau_{-x}\psi))(0)$
- $((u * \varphi) * \psi)(x) = \tau_{-x}(((u * \varphi) * \psi))(0) = (((u * \varphi) * \tau_{-x}\psi))(0)$.

を示した. (これは定義に基づいた計算なので, 今の状況でも成り立つ) また $(\tau_{-x}\psi)(-t) := \psi(x-t)$ であるので

$$((u*\varphi)*\psi)(x) \underset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} (u*\varphi)(t) \cdot \psi(x-t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} (u*\varphi)(t) \cdot (\tau_{-x}\psi)(-t)\, dt = (u*(\varphi*(\tau_{-x}\psi)))(0).$$

となる. よって, φ , ψ を $\tau_{-x}\varphi$, $\tau_{-x}\psi$ に適宜置き換えることで, $x = 0$ を仮定して良い.

以下, 証明のために次を定義する

(1) $W \subset \mathbb{R}^n$ を bounded open で $W = -W \supset \operatorname{Supp} u$ となるもの

(2) $W' \subset \mathbb{R}^n$ を bounded open $W' = -W'$ かつ $W' \supset W + \operatorname{Supp} \psi$ となるもの.

(3) $\varphi_0 \in \mathcal{D}$ で, W' 上で $\varphi_0 = \varphi$ となるもの. この時 $W' = -W'$ 上で $\widetilde{\varphi_0} = \widetilde{\varphi}$ である.

任意の $x \in W$ について,

$$t \notin \{x\} - \operatorname{Supp} \psi \Rightarrow \psi(x-t) = 0 \tag{2.6.7}$$

よって

$$(\varphi * \psi)(x) \underset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t)\, \psi(x-t)\, dt \underset{(2.6.7)}{=} \int_{x-\operatorname{Supp}\psi} \varphi(t)\, \psi(x-t)\, dt \underset{(3)}{=} \int_{x-\operatorname{Supp}\psi} \varphi_0(t)\, \psi(x-t)\, dt = (\varphi_0 * \psi)(x).$$

となる. $W = -W$ となるので, W 上で $\varphi * \psi = \varphi_0 * \psi$ となる. $-W \supset \operatorname{Supp} u$ より,

$$(u * (\varphi * \psi))(0) \underset{2.6.13(a)}{=} (u * (\varphi_0 * \psi))(0). \tag{2.6.8}$$

一方で

$$((u * \varphi) * \psi)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} u(\tau_t \widetilde{\varphi}) \psi(-t)\, dt \underset{(2.6.7)}{=} \int_{-\operatorname{Supp}\psi} u(\tau_t \widetilde{\varphi}) \psi(-t)\, dt.$$

W' と φ_0 の構成から任意の $t \in \operatorname{Supp} \psi$ について $\varphi|_{\{-t\}+W} \equiv \varphi_0|_{\{-t\}+W}$ である. よって $\tau_t \widetilde{\varphi}|_W \equiv \tau_t \widetilde{\varphi_0}|_W$ である. 以上より

$$((u * \varphi) * \psi)(0) \underset{2.6.13}{=} ((u * \varphi_0) * \psi)(0). \tag{2.6.9}$$

(c) の証明で $\operatorname{Supp}(u * \psi) \subset \operatorname{Supp} u + \operatorname{Supp} \psi$, であることがわかっているので,

$$\begin{aligned} ((u * \psi) * \varphi)(0) &= \int_{\mathbb{R}^n} (u * \psi)(t) \varphi(-t)\, dt \\ &\underset{(c)}{=} \int_{\operatorname{Supp} u + \operatorname{Supp} \psi} (u * \psi)(t) \varphi(-t)\, dt \\ &\underset{(3)}{=} \int_{\operatorname{Supp} u + \operatorname{Supp} \psi} (u * \psi)(t) \varphi_0(-t)\, dt = ((u * \psi) * \varphi_0)(0). \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

よって (2.6.8)-(2.6.10) により, φ を φ_0 に取り替えることで, $\varphi \in \mathcal{D}$ を仮定して良い. その場合は, 2.6.4, [Rud, Theorem 6.30 (c)] で言えている. □

Definition 2.6.15. [Rud, Definition 6.36] $u, v \in \mathcal{D}'$ で $\operatorname{Supp} u$ または $\operatorname{Supp} v$ がコンパクトであるとする. このとき $L : \mathcal{D} \to C^\infty$ を

$$L(\varphi) := u * (v * \varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{D}).$$

として定義する.

Remark 2.6.16. L は well-defined である．もし $\operatorname{Supp} u$ がコンパクトならば，$u \in (C^\infty)'$ である．一方 2.6.4 より $v * \varphi \in C^\infty$ なので well-defined である．もし $\operatorname{Supp} v$ がコンパクトならば，2.6.14 から $v * \varphi \in \mathcal{D}$ なので，well-defined.

また任意の $x \in \mathbb{R}^n$ について，$\tau_x L = L\tau_x$ である．これは

$$(\tau_x L)(\varphi) := \tau_x(L(\varphi)) = \tau_x(u * (v * \varphi)) \underset{2.6.4,2.6.14}{=} u * (v * (\tau_x \varphi)) = L(\tau_x \varphi) =: (L\tau_x)(\varphi)$$

となるからである．

Lemma 2.6.17. 汎関数 $\mathcal{D} \to \mathbb{C}$ を $\varphi \mapsto (L(\widetilde{\varphi}))(0)$ で定まると，これは *distribution* である．

Proof. 線形は自明．連続であることを示せば良い

この汎函数は $(\widetilde{\ }) : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, $L : \mathcal{D} \to C^\infty$, $\mathrm{ev}_0 : C^\infty \to \mathbb{C}$. の合成である．よって，$(\widetilde{\ })$ が連続より．$\mathrm{ev}_0 \circ L$ が連続を言えば良い．

[1. $\operatorname{Supp} v$ コンパクトの場合] 2.6.10 より，$\varphi \mapsto v * \varphi$ は連続．また，2.6.14(c) から $v * \varphi \in \mathcal{D}$．よって 2.6.10(a) より L は連続．そして，2.6.10 の証明から ev_0 は連続．よって OK.

[2. $\operatorname{Supp} u$ コンパクトの場合] $\mathrm{ev}_0 \circ L$ は次の二つの合成である．

- $\mathcal{D} \ni \varphi \mapsto v * \varphi \in C^\infty$ これは 2.6.10(a) より連続.
- $C^\infty \ni f \mapsto u(\widetilde{f}) \in \mathbb{C}$, これは 2.4.4 より連続.

以上より $\mathrm{ev}_0 \circ L$ は連続である． □

Definition 2.6.18. [Rud, Definition 6.36] $u, v \in \mathcal{D}'$ で $\operatorname{Supp} u$ または $\operatorname{Supp} v$ がコンパクトであるとする．$u * v : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ を，

$$(u * v)(\varphi) := (L(\widetilde{\varphi}))(0) \quad (\varphi \in \mathcal{D}).$$

として定義する．2.6.17 より $u * v \in \mathcal{D}'$ である．

Remark 2.6.19. 2.6.10(b) の議論から，$u * v$ は

$$(u * v) * \varphi = L(\varphi) \quad \text{for } \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

を満たす唯一の distribution である．

Proof. Λ を $\Lambda * \varphi = L(\varphi)$ となる超関数とする時，

$$(\Lambda * \varphi)(x) \underset{\text{def}}{=} \Lambda(\tau_x \widetilde{\varphi}) = \Lambda(\widetilde{\tau_{-x}\varphi}) \underset{2.6.18}{=} L(\tau_{-x}\varphi)(0) \underset{2.6.16}{=} \tau_{-x} L(\varphi)(0) \tag{2.6.11}$$

以上より

$$\Lambda(\widetilde{\varphi}) \underset{\text{def}}{=} (\Lambda * \varphi)(0) \underset{2.6.11}{=} L(\varphi)(0) = ((u*v)*\varphi)(0) \underset{\text{def}}{=} (u*v)(\widetilde{\varphi})$$

となり $\Lambda = u * v$ となる. □

Theorem 2.6.20. *[Rud, Theorem 6.37]* 以下 $\Lambda \in \mathcal{D}'$ について, $S_\Lambda := \operatorname{Supp}\Lambda$ と略記する. $u, v, w \in \mathcal{D}'$ について次が成り立つ.

(a) S_u か S_v が *cpt* ならば, $u * v = v * u$.

(b) S_u か S_v が *cpt* ならば, $S_{u*v} \subset S_u + S_v$.

(c) S_u, S_v, S_w のどれか二つが *cpt* ならば, $(u*v)*w = u*(v*w)$.

(d) 任意の *multi-index* α について,

$$D^\alpha u = (D^\alpha \delta) * u$$

である. ここで δ は *Dirac* の超関数 $(\delta(f) := f(0))$. とする. 特に $u = \delta * u$ である.

(e) S_u か S_v が *cpt* ならば, 任意の *multi-index*α について,

$$D^\alpha(u*v) = (D^\alpha u)*v = u*(D^\alpha v).$$

以上より convolution は distribution であっても関数の convolution と同様に扱うことができる.

Proof. [(a)] $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ について,

$$(u*v)*(\varphi*\psi) \underset{2.6.19,2.6.15}{=} u*(v*(\varphi*\psi)) \underset{2.6.14(d)}{=} u*((v*\varphi)*\psi) \underset{2.6.14(d)}{=} u*(\psi*(v*\varphi)) \tag{2.6.12}$$

- S_v cpt ならば, 2.6.14(C) より $v*\phi \in \mathcal{D}$. よって $u*(\psi*(v*\phi)) \underset{2.6.14(d)}{=} (u*\psi)*(v*\phi)$.
- S_u cpt ならば, $u*(\psi*(v*\phi)) \underset{2.6.14(d)}{=} (u*\psi)*(v*\phi)$.

よってどっちにしろ,

$$(u*v)*(\phi*\psi) \underset{(2.6.12)}{=} (u*\psi)*(v*\phi), \tag{2.6.13}$$

である. u と v の役割を入れ替えて

$$(v*u)*(\phi*\psi) \underset{(2.6.13)}{=} (v*u)*(\psi*\phi) = (v*\phi)*(u*\psi), \tag{2.6.14}$$

もいえる. 一方で $u*\psi, v*\phi \in C^\infty$ なので

$$(u*v)*(\phi*\psi) \underset{(2.6.13)}{=} (u*\psi)*(v*\phi) \underset{C^\infty \text{ の covolution}}{=} (v*\phi)*(u*\psi) \underset{(2.6.14)}{=} (v*u)*(\phi*\psi) \tag{2.6.15}$$

以上より

$$((u*v)*\phi)*\psi \underset{2.6.4}{=} (u*v)*(\phi*\psi) \underset{(2.6.15)}{=} (v*u)*(\phi*\psi) \underset{2.6.4}{=} ((v*u)*\phi)*\psi. \tag{2.6.16}$$

今 ψ を 2.6.6 での approximate identity of $\mathbb{R}^n$ を持つ列 $\{h_j\}$ とすれば, 2.6.7 より

$$((u*v)*\phi)(t) \underset{2.6.7}{=} \lim_{j\to\infty}(((u*v)*\phi)*h_j)(t) \underset{(2.6.16)}{=} \lim_{j\to\infty}((v*u)*\phi)*h_j)(t) \underset{2.6.7}{=} ((v*u)*\phi)(t).$$

以上より, 任意の $\phi \in \mathcal{D}$ について $(u*v)*\phi = (v*u)*\phi$ であるので, 2.6.19 より $u*v = v*u$ である.

[(b)] (a) より S_v cpt として良い. (u, v を入れ替えれるため) 任意の $\phi \in \mathcal{D}$ について

$$(u*v)(\phi) \underset{2.6.18}{=} (u*(v*\widetilde{\phi}))(0) \underset{2.6.1}{=} u(\widetilde{v*\widetilde{\phi}}).$$

また

$$\mathrm{Supp}(v*\widetilde{\phi}) \underset{2.6.14(c)\text{ の証明内}}{\subset} S_v + \mathrm{Supp}\,\widetilde{\phi} = S_v - \mathrm{Supp}\,\phi,$$

より, $\mathrm{Supp}(\widetilde{v*\widetilde{\phi}}) \subset \mathrm{Supp}\,\phi - S_v$ となる. 以上より, $\phi \in \mathcal{D}$ について

$$\mathrm{Supp}\,\phi \cap (S_u + S_v) = \varnothing \Leftrightarrow (\mathrm{Supp}\,\phi - S_v) \cap S_u = \varnothing \Rightarrow (u*v)(\phi) = 0$$

よって Support の定義 2.4.1 から $S_{u*v} \subset S_u + S_v$ である.

[(c)] (b) より S_u, S_v, S_w のどれか二つが cpt ならば, $(u*v)*w$ や $u*(v*w)$ は well-defined である.

$\phi \in \mathcal{D}$ について

$$(u*(v*w))*\phi \underset{2.6.15}{=} u*((v*w)*\phi) \underset{2.6.15}{=} u*(v*(w*\phi)). \tag{2.6.17}$$

S_w が cpt の場合, $w*\phi \in \mathcal{D}$ なので,

$$((u*v)*w)*\phi \underset{(2.6.17),2.6.19}{=} (u*v)*(w*\phi) \underset{(2.6.12)}{=} u*(v*(w*\phi)).$$

よって 2.6.19 より $u*(v*w) = (u*v)*w$ である.

S_w が cpt でない場合, S_u cpt なので,

$$u*(v*w) \underset{(a)}{=} u*(w*v) \underset{(a)}{=} (w*v)*u \underset{\text{上の議論}}{=} w*(v*u) \underset{(a)}{=} (v*u)*w \underset{(a)}{=} (u*v)*w.$$

よりいえた.

[(d)] $\phi \in \mathcal{D}$, $x \in \mathbb{R}^n$ について,

$$(\delta * \phi)(x) \underset{2.6.1}{=} \delta(\tau_x \widetilde{\phi}) = (\tau_x \widetilde{\phi})(0) = \widetilde{\phi}(-x) = \phi(x),$$

である. よって, $\delta * \phi = \phi$ である. 以上より

$$\begin{aligned}(D^\alpha u)(\phi) &\underset{2.6.1}{=} (D^\alpha u * \widetilde{\phi})(0) \underset{2.6.14(b)}{=} (u * (D^\alpha \widetilde{\phi}))(0) \underset{\delta*\phi=\phi}{=} (u * (D^\alpha(\delta * \widetilde{\phi})))(0) \\ &\underset{2.6.14(b)}{=} (u * ((D^\alpha \delta) * \widetilde{\phi}))(0) \underset{2.6.19}{=} ((u * (D^\alpha \delta)) * \widetilde{\phi})(0) \underset{(a)}{=} (((D^\alpha \delta) * u) * \widetilde{\phi})(0) \\ &\underset{2.6.18}{=} ((D^\alpha \delta) * u)(\phi).\end{aligned}$$

以上より $D^\alpha u = (D^\alpha \delta) * u$ でありいえた.

[(e)] S_δ cpt なので u, v, δ に関して (c) が使える状況にある. よって,

$$D^\alpha(u * v) \underset{(d)}{=} (D^\alpha \delta) * (u * v) \underset{(c)}{=} ((D^\alpha \delta) * u) * v \underset{(d)}{=} (D^\alpha u) * v,$$

$$D^\alpha(u * v) \underset{(a)}{=} D^\alpha(v * u) \underset{\text{上の議論}}{=} (D^\alpha v) * u \underset{(a)}{=} u * (D^\alpha v),$$

であるのでまとめると,

$$D^\alpha(u * v) = (D^\alpha u) * v = u * (D^\alpha v),$$

□

Bibliography

[Rud] W. Rudin. *Functional analysis.* 2nd edn. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York. (1991.)

[NO] J. Noguchi, T.Ochiai *Geometric Function Theory in Several Complex Variables* Translations of Mathematical Monographs Volume: 80; 1990; 282 pp

[NO, Chapter 3] を参考にしている.

2.7 Current

2.7.1 current

M 2nd countable$m$ 次元 C^∞ 級多様体とする.

Recall $M \subset \mathbb{R}^m$ の時 $C^\infty(M)$ には次の位相を次で入れていた.

$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset M$ というコンパクト集合であって

$$K_i \subset K_{i+1}^\circ \quad \text{and} \quad M = \bigcup K_i^\circ$$

となるものを一つ固定し, $f \in C^\infty(M)$ について, $N \in \mathbb{Z}_+$ として

$$P_N(f) := \max\{|D^\alpha f(x)| \mid |\alpha| \leq N \& x \in K_N\}$$

$$V_N := \max\{f \in C^\infty(M) \mid P_N(f) < \frac{1}{N}\}$$

を 0 の open base とするような位相を入れていた.

$K \subset M$ コンパクトに対して

$$\mathcal{D}_K(M) := \{\phi \in C^\infty(M) \mid \mathrm{Supp}(\phi) \subset K\} \subset C^\infty(M)$$

に対して相対位相を入れて

$$\mathcal{D}(M) := \bigcup_{K \subset M | K \text{ cpt}} \mathcal{D}_K(M) \cong \varinjlim_K \mathcal{D}_K(M)$$

この colimit は locally convex vector space での colimit である.

Lemma 2.7.1. *1.* $U, U' \subset \mathbb{R}^m$ を開集合とする. $U \cong U'$ を微分同相とする時, $C^\infty(U) \cong C^\infty(U')$ である. ここでこの同型は位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の同型である

2. $M \subset \mathbb{R}^m$ 開集合とし, $M = \bigcup U_i$ を可算個の開被覆とする時

$$C^\infty(M) \hookrightarrow \prod C^\infty(U_i) \quad f \mapsto \{f|_{U_i}\}$$

とすると, $C^\infty(M)$ の位相はこの直積位相 $\prod C^\infty(U_i)$ によって引き起こされる位相となる. 特に

$$C^\infty(M) \cong \mathrm{Eq}(\prod C^\infty(U_i) \rightrightarrows \prod C^\infty(U_i \cap U_j))$$

という位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の同型を得る.

Proof. (1). 以下 $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset U$ というコンパクト集合で $C^\infty(U)$ の位相を誘導するものを一つ固定する. $\Phi : U' \to U, (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (y, \ldots, y_m)$ を微分同相写像とする. すると $K'_i := \Phi(K_i)$ によって, $C^\infty(U')$ の位相を誘導する. V_N, V'_N を上の通りとする.

さてその引き戻し

$$\Phi^* : C^\infty(U) \to C^\infty(U') \quad f(y) \mapsto f \circ \Phi(x) = f(y(x))$$

が位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の同型を誘導することを示す.

$f \in C^\infty(U)$ について chain rule より, $|\alpha| \leq N'$ について

$$D^\alpha_x f \circ \Phi(x) := \sum_{|\beta| \leq N'} (D^\beta_y f)(y(x)) \cdot \Phi_{\alpha\beta}(x) \tag{2.7.1}$$

である.

Φ が 0 の近傍で連続であることを示せば良い. 任意の N' について, $K_{N'}$ コンパクトなので, $K_{N'}$ 上では $|\Phi_{\alpha\beta}(x)| \leq C_{N'}$ となる $C_{N'}$ が取れる. よって $N' \cdot \frac{1}{N} \cdots C_{N'} < \frac{1}{N'}$ となる N をとれば, $f \circ \Phi \in \Phi^*(V_N)$ について

$$|D^\alpha_x f \circ \Phi(x)| \underset{(2.7.1)}{\leq} \sum_{|\beta| \leq N} \underbrace{|(D^\beta_y f)(y(x))|}_{< \frac{1}{N}} \cdot |\Phi_{\alpha\beta}(x)| \leq N' \cdot \frac{1}{N} \cdot C_{N'} < \frac{1}{N}$$

よって「任意の $N' > 0$ について, ある $N > 0$ があって, $\Phi^*(V_N) \subset V'_{N'}$ である」ため Φ は 0 の近

傍で連続である.

(2) $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ とする. 各 U_i で

$$K_{i1} \subset K_{i2} \subset \cdots \subset U_i$$

で $U_i = \bigcup_j K_{ij}^{\circ}$ となるコンパクト列をとる. そこで $K_N := \bigcup_{i=1}^{N} K_{i,N}$ とすると

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset M$$

であって, $K_i \subset K_{i+1}^{\circ}$ かつ $M = \bigcup K_i^{\circ}$ となる.

さて $\prod C^{\infty}(U_i)$ の 0 での local base は

$$\{V_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{N}} := V_{i_1,N_{i_1}} \times V_{i_2,N_{i_2}} \times \cdots \times V_{i_l,N_{i_l}} \times \prod_{i \neq i_k} C^{\infty}(U_i) \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_l, N_{i_k} \in \mathbb{Z}_+\}$$

となる形のものである. ここで

- $\boldsymbol{i} := (i_1, i_2, \ldots, i_l), \boldsymbol{N} := (N_{i_1}, N_{i_2}, \ldots, N_{i_l})$ と定める.
- $V_{i,N} := \{f \in C^{\infty}(U_i) \mid P_N(f) < \frac{1}{N}\}$ である (ここの定義での $P_N(f)$ には $K_{i,N}$ をつかう.)

一方で $V_N := \{f \in C^{\infty}(M) \mid P_N(f) < \frac{1}{N}\}$(ここの定義での $P_N(f)$ には K_{iN} をつかう.) であり, これは $C^{\infty}(M)$ の 0 での local base である. 以上より, 次の二つを示せば良い.

- 任意の $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{N}$ について, ある N があって, $V_N \subset V_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{N}} \cap C^{\infty}(M)$ が成り立つ.
- 任意の N について, ある $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{N}$ があって, $V_N \supset V_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{N}} \cap C^{\infty}(M)$ が成り立つ.

$$\begin{aligned}
V_N &:= \left\{ f \in C^{\infty}(M) \mid x \in K_N := \bigcup_{i=1}^{N} K_{i,N}, |\alpha| \leq N, |D_{\alpha} f(x)| < \frac{1}{N} \right\} \\
&\underset{\text{def}}{=} \left(V_{1,N} \times V_{2,N} \times \cdots \times V_{N,N} \times \prod_{i>N} C^{\infty}(U_i) \right) \cap C^{\infty}(M) \\
&\underset{\text{def}}{=} V_{(1,2,\ldots,N),(N,\ldots,N)} \cap C^{\infty}(M)
\end{aligned}$$

である. これより二つ目の主張が正しいことがいえる. 一つ目の主張は任意の $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{N}$ について,

$$V_{\max\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{N}\}} \subset V_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{N}} \cap C^{\infty}(M)$$

なので言える. □

Definition 2.7.2. M 2nd countable$m$ 次元 C^∞ 級多様体とする．$C^\infty(M)$ に位相を次のように入れる．
まず $M = \bigcup_{l=1}^{\infty} U_i$ で $U_i \subset \mathbb{R}^m$ となる countable open cover を一つ固定する．そして，

$$C^\infty(M) \hookrightarrow \prod_i C^\infty(U_i) \quad f \longmapsto (f|_{U_i})$$

による部分位相を $C^\infty(M)$ に入れる．つまり，

$$C^\infty(M) \cong \mathrm{Eq}(\prod C^\infty(U_i) \rightrightarrows \prod C^\infty(U_i \cap U_j))$$

となるように入れる．

Remark 2.7.3. 2.7.2 による位相の定義において，U_i の取り方によらない．

Proof. 別の U'_j をとると細分 $U_i \cap U'_j$ が取れる．よって次の図式が考えられる．

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(M) \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & \prod C^\infty(U_i) \arrow[dr, hook] & \\
& \prod C^\infty(U'_j) \arrow[r, hook] & \prod C^\infty(U_i \cap U'_j)
\end{tikzcd}$$

そこで”相対位相の直積は相対位相になる”ので，2.7.1 より言える． □

これにより

$$C^\infty : (U \underset{open}{\subset} M) \mapsto C^\infty(U)$$

は $\mathbb{C}$ ベクトル空間の sheaf となる．よって $K \subset M$ に対して

$$\mathcal{D}_K(M) := \{\phi \in C^\infty(M) \mid \mathrm{Supp}(\phi) \subset K\}$$

として $C^\infty(M)$ の部分位相を入れる．

$$\mathcal{D}(M) := \bigcup_{K \subset M | K \text{ cpt}} \mathcal{D}_K(M) \cong \varinjlim_K \mathcal{D}_K(M)$$

この colimit は locally convex vector space での colimit である．

[指摘] この colim は存在する？ やっぱり Section 1 でやったような位相の入れ方にもう一回戻る? $\varinjlim_K \mathcal{D}_K(M)$ については次回再考．

2.8 current 続き

以下 [NO] の記法に合わせる. (M 2nd countable m 次元 C^∞ 級多様体, $k \in \mathbb{Z}_+$ とする.)[2]

- $C(M) := \{\, f : M \to \mathbb{C};\ \text{連続} \,\}$
- $\mathcal{E}(M) := \{\, f : M \to \mathbb{C};\ C^\infty\text{-関数} \,\}$ 普通は"$C^\infty(M)$"である.
- $C^k(M) := \{\, \varphi : k\text{-forms on } M \text{ with coeff} \in C \,\}$ つまり locally に

$$\varphi = \sum_J \varphi_J \, d\bar{z}^J \quad (d\bar{z}^J = d\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{j_k})$$

  とかけるものとする. ここで $(U; z^1, \ldots, z^n)$ を局所座標とし, $J = (j_1, \ldots, j_k)$, $\varphi_J \in C(U)$ とする. 特に $C^0(M) = C(M)$.
- $\mathcal{E}^k(M) := \{\, \varphi : k\text{-forms on } M \text{ with coeff} \in \mathcal{E} \,\}$ 普通は"$\mathcal{A}^k(M)$"である.
- $\mathcal{K}^k(M) := \left\{ \varphi \in C^k(M) \,\middle|\, \operatorname{supp}\varphi \text{ cpt} \right\}$ ここで $\operatorname{Supp}\varphi := \overline{\{x \in M,\ \varphi(x) \neq 0\}}$ である. $\varphi(x) \neq 0$ とはある J があって, $\varphi_J(x) \neq 0$ であることを意味する.
- $\mathcal{D}^k(M) := \left\{ \varphi \in \mathcal{E}^k(M) \,\middle|\, \operatorname{supp}\varphi \text{ cpt} \right\}$
- $A \subset M$ について以下のようにおく

$$\mathcal{K}^k_A(M) := \left\{ \varphi \in \mathcal{K}^k(M) \,\middle|\, \operatorname{supp}\varphi \subset A \right\} \quad \mathcal{D}^k_A(M) := \left\{ \varphi \in \mathcal{D}^k(M) \,\middle|\, \operatorname{supp}\varphi \subset A \right\}$$

	連続	C^∞
関数	$C(M)$	$\mathcal{E}(M)$
k-form	$C^k(M)$	$\mathcal{E}^k(M)$
k-form with support compact	$\mathcal{K}^k(M)$	$\mathcal{D}^k(M)$
k-form with support $\subset A$	$\mathcal{K}^k_A(M)$	$\mathcal{D}^k_A(M)$

<u>Recall</u>

$U \subset \mathbb{R}^m$ open のとき、$C(U)$, $\mathcal{E}(U)$ には次のような 位相をいれていた.

コンパクト集合の列:$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset U$ で $K_j \subset K^\circ_{j+1}$ かつ　$U = \bigcup_j K^\circ_j$ となるものを取り, $f \in \mathcal{E}(U)$ に対し

$$P_N(f) := \max\left\{ |D^\alpha f(x)| \,\middle|\, x \in K_N,\ |\alpha| \leq N,\ \omega \in K_N \right\}$$

$$V_N := \left\{ f \in \mathcal{E}(U) \,\middle|\, P_N(f) < \tfrac{1}{N} \right\}$$

を open base at 0(0 での開基) とする位相を入れていた.

[2]おそらく通常の記法とかなり違う記法であると思われる.

2.7.1 により, これがコンパクト集合の列や座標近傍 $U \subset \mathbb{R}^m$ によらない
一般の多様体に関しては M に対しては、$M = \bigcup_j U_j$ という座標近傍の被覆を使って

$$\mathcal{E}(M) \subset \prod \mathcal{E}(U_j)$$

部分位相を入れた.

Definition 2.8.1. $U \subset \mathbb{R}^m$ open に対し, $C^k(U)$, $\mathcal{E}^k(U)$ に対して位相を

$$\mathcal{E}^k(U) \simeq \prod_{J=(j_1<\cdots<j_k)} \mathcal{E}(U)\, d\bar{z}^J$$

による直積位相を入れる.

これは次のノルム

$$P_N(\varphi) := \max\Big\{ |D^\alpha \varphi_J(x)| \;\Big|\; x \in K_N,\ |\alpha| \le N,\ \omega \in K_N \Big\}$$

について, $\mathcal{E}(U)$ と同じように位相を入れたものに一致する.

Lemma 2.8.2. *1. $U \subset \mathbb{R}^m$, $U' \subset \mathbb{R}^m$ open について, $\Phi : U' \to U$ が diffeo のとき*

$$\Phi^* : \mathcal{E}^k(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^k(U')$$

が $\mathbb{C}$ 上の位相ベクトル空間の同型を誘導する.

2. $U \subset \mathbb{R}^m$ open, $U = \bigcup_j U_j$: countable open cover について,

$$\mathcal{E}^k(U) \hookrightarrow \prod_j \mathcal{E}^k(U_j)$$

は部分位相空間となる.

Proof. (1) $\Phi : U'(x^1, \ldots, x^m) \to U(y^1, \ldots, y^m)$ diffeo として

$$\Phi^* : \mathcal{E}^k(U) := \prod_J \mathcal{E}(U) dy^J \;\longrightarrow\; \mathcal{E}^k(U') := \mathcal{E}(U') dx^J$$

は以下のような形になる.

$$\varphi = \sum_J \varphi_J\, dy^J \;\longmapsto\; \sum_I \Big(\sum_J \Phi^* \varphi_J \frac{\partial y^J}{\partial x^I} \Big)\, dx^I$$

となる．ここで

$$\frac{\partial y^J}{\partial x^I} = \det\Big(\frac{\partial y^{j_k}}{\partial x^{i_l}}\Big)$$

とする．よって 2.7.1 で $\varphi_J \mapsto \Phi^*\varphi_J$ が連続であることを言っており，和をとるのも連続なので，連続性が言える．

(2)：

$$\prod_I \mathcal{E}(U)dx^I \cong \mathcal{E}^k(U) \ \hookrightarrow \ \prod_i \mathcal{E}^k(U_i) \underset{(1)}{\cong} \prod_i \left(\prod_I \mathcal{E}(U)\, d\bar{z}^I\right) \cong \prod_I \Big(\prod_j \mathcal{E}(U_j)\, d\bar{z}^I\Big)$$

となる．2.7.1 でから，$\mathcal{E}(U) \subset \prod_j \mathcal{E}(U_j)$ が部分位相になっているのでいえた． □

Definition 2.8.3. M 2nd countable m 次元 C^∞ 級多様体について $C^k(M)$, $\mathcal{E}^k(M)$ に次のように位相を入れる:
$M = \bigcup U_j$ を座標近傍 U_j の countable covering とし，

$$\mathcal{E}^k(M) \hookrightarrow \prod_j \mathcal{E}^k(U_j)$$

による部分位相を入れる．
$A \subset M$ compact subset について，$\mathcal{D}^k_A(M) \subset \mathcal{E}^k(M)$ は closed subspace である．(下の remark 参照) $\mathcal{D}^k_A(M)$ には $\mathcal{E}^k(M)$ の subtopology ををいれる
$\mathcal{K}^k(M), \mathcal{D}^k(M)$ には、

$$\begin{aligned}\mathcal{B} := \Big\{ & W \subset \mathcal{D}^k(M)\ ;\ W = \text{non-empty convex balanced} \\ & \text{s.t. } \forall A \subset M \text{ cpt},\ W \cap \mathcal{D}^k_A(M) \text{ is open in } \mathcal{D}^k_A(M) \Big\}\end{aligned}$$

を 0 の local base となる位相を入れる．

Remark 2.8.4. 2.7.1 から $\mathcal{E}^k(M)$ の位相は座標近傍の $\{U_j\}$ の取り方に依らない．さらにこの位相は

$$\mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^k(U) \quad \Big| \quad U \subset M \text{ loc. coord.}$$

に関する weak top. である (weak topology に関しては??参照)

$\mathcal{D}^k_A(M) \subset \mathcal{E}^k(M)$ は closed subspace なのは $x \in U \subset M$ loc coord. に対し，代入写像

$$ev_x \mathcal{E}^k(M) \to \mathbb{C}^{\oplus J} \quad \varphi \longmapsto (\varphi(x))_J$$

が連続で，$\mathcal{D}^k_A(M) = \bigcap_{x \in M \setminus A} \mathrm{Ker}(e)v_x$ とかけるので closed subspace になる．

$\mathcal{K}^k(M), \mathcal{D}^k(M)$ の位相を詳しくいうと，1.8.4 のように，集合族 τ を，"$\bigcup_{i \in I}(\varphi_i + W_i)$ とかけるも

の”の集まりとする．ただし $i \in I$ について，$\varphi_i \in \mathcal{D}^k(M), W_i \in \beta$ とする．

dom	local ($U \subset \mathbb{R}^n$)	global (M mfd.)
form	$C^k(U),\ \mathcal{E}^k(U)$	$C^k(M),\ \mathcal{E}^k(M)$
form support $\subset A$	$K^k_A(U),\ D^k_A(U)$	$K^k_A(M),\ D^k_A(M)$
form support compact	$K^k(U),\ D^k(U)$	$K^k(M),\ D^k(M)$

という対応がある．

Proposition 2.8.5. *M 2nd countablem 次元 C^∞ 級多様体について以下が成り立つ．*

- *$\mathcal{E}^k(M),\ D^k_A(M)$ locally convex, complete metrizable 位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間 Heine-Borel property.*
- *$C^k(M),\ K^k_A(M)$ locally convex, complete, metrizable 位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間.*

Proof. $k = 0$, $M = \cup_{i=1}^\infty U_i \subset \mathbb{R}^m$ などに関してはすでに示している

??によって $\mathcal{E}^0(U) = C^\infty(U)$ について，コンパクト集合の列 $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ であって，seminorm の separating family

$$P_N(f) = \max\{\, |D^\alpha f(x)| \ ;\ x \in K_N,\ |\alpha| \leq N\}$$

によって位相を入れると，metrizable 位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間であることがわかる．(ここに open cover が countable がいる)

また??で complete と Heine-Borel property を示した．(ここに平均値の定理を使う．つまり微分可能性がいる．) よって $C(U)$ しても同じで，Heine-Borel property 以外 は 同様にできる。

$k > 0$, $\mathcal{E}^k(M),\ C^k(M)$ に関しては，seminorm を

$$P_N(\varphi) := \max\Big\{\, |D^\alpha \varphi_J(x)| \ \Big|\ x \in K_N,\ J = (j_1 < \cdots < j_k),\ |\alpha| \leq N\Big\}$$

に変えれば同様に言える

$\mathcal{E}^k(M),\ C^k(M)$ に関しては 前回 2.7.1 (2) で与えられたコンパクト集合の列をとる．具体的に ($M = \bigcup U_j$ とし $K_{i1} \subset K_{i2} \subset \cdots \subset U_i$ となるコンパクト集合列について

$$K_N := \bigcup_{i=1}^N K_{i,N}$$

$$P_N(\varphi) := \max\Big\{\, |D^\beta \varphi_J(x)| \ \Big|\ x \in K_{iN} \subset U_i, J = (j_1 < \cdots < j_k),\ |\omega| \leq N\Big\}$$

とすると $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset M$ であり，同様の議論が回る．

$K_A^k(M)$, $D_A^k(M)$ は それぞれ $C^k(M)$, $\mathcal{E}^k(M)$ の閉部分空間なので, 諸性質は保たれる.

□

Proposition 2.8.6. *(cf. 1.8.7)*

(a) $V \subset D^k(M)$ *convex balanced* について, V が *open* であることは, 任意の *compact* $A \subset M$ について, $V \cap D_A^k(M) \subset D_A^k(M)$ であることと同値.

(b) $A \subset M$ *compact* としたとき, $D_A^k(M) \subset D^k(M)$ 部分位相空間.

(c) $E \subset D^k(M)$ *bounded* ならば, ある *compact* $A \subset M$ であって, $E \subset D_A^k(M)$ となる.

(d) $D^k(M)$ は *Heine-Borel property* を持つ.

(e) $D^k(M) \cong \operatorname{colim}_{A \subset M \ cpt} D_A^k(M)$. ここでこの同型は *locally convex* 位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間としての同型である.

また上の主張は D_A を K_A に変えても成り立つ.

Proof. [(a)] 1.8.6 が $D^k(M)$ でも言える (1.8.7 (a) の議論が回る)

[(b)] $D_A^k(M) \hookrightarrow D^k(M)$ は, (a) より連続である.

一方, $D^k(M) \hookrightarrow \mathcal{E}^k(M)$ も 連続である. なぜならば $\mathcal{E}^k(M)$ は locally convex より, convex balanced な open base at 0 となるものがある. それらをひとつ取っても convex balanced であり, 各 $D_A^k(M)$ に制限しても open なので, $D^k(M)$ の上で open となる.

[(c)] 対偶を示す. $E \subset D^k(M)$ は任意の compact $A \subset M$ について, $E \not\subset D_A^k(M)$ を満たすとする.[3] この時 E が bounded でないことを示す.

$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset M$ というコンパクト集合であって

$$K_i \subset K_{i+1}^\circ \quad \text{and} \quad M = \bigcup K_i^\circ$$

となるものをとる. E の仮定から, ある $\varphi_n \in E$ と $x_n \in K_n$ であって, $\varphi_n(x_n) \neq 0$ かつ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ は集積点を持たないものが取れる.

そこで $x_n \in U_n \subset M$ という局所座標をとって,

$$W := \{\psi \mid \max_J |\psi_J(x_n)| < \frac{1}{n} \max_J |\phi_{n,J}(c)| \text{ for any } n\}$$

とおく. ($\phi_n = \sum_J \phi_{n,J} dx^J$ と分解する.) W は convex balanced open in $\mathcal{D}^*(M)$ である. なぜならば, convex balanced は $|\cdot|$ の性質から. 任意の compact $A \subset M$ に対し, $U_n \subset A$ となる U_n は有限個である. そして $W \cap \mathcal{D}_A^k(M)$ は open in $\mathcal{D}_A^*(M)$ である. (開集合の有限この共通部分なので.)

[3] ある $\varphi \in E$ と $x \in A$ であって, $\varphi(x) \neq 0$ ということと同じ.

しかし任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ について, $\varphi_n \notin nW$ となるので, $E \not\subset nW$ であり, E は bounded ではない.

[(d)] bounded closed $E \subset \mathcal{D}^k(M)$ は compact であることを言う. (c) より, ある compact $A \subset M$ で, $E \subset \mathcal{D}^k_A(M)$. (b) より, $\mathcal{D}^k_A(M) \subset \mathcal{D}^k(M)$ は部分位相が入るので, $E \subset \mathcal{D}^k_A(M)$ の中では bounded かつ closed. よって 2.8.5 の $\mathcal{D}^k_A(M)$ の Heine-Borel Property より言える.

[(e)] $\mathcal{D}^k(M) \xrightarrow{f} V$ を locally convex 位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の $\mathbb{C}$ 線型写像とする. すると次の同値変形ができる.

f が連続である

$\iff \forall U \subset V$: convex balanced open に対し, $f^{-1}(U)$ open

$\iff \forall U \subset V$: convex balanced open. compact $A \subset M$ に対し $f^{-1}(U) \cap \mathcal{D}^k_A(M)$ open in $\mathcal{D}^k_A(M)$

$\iff f|_{\mathcal{D}^k_A(M)} : \mathcal{D}^k_A(M) \to V$ 連続

map が $\mathbb{C}$-linear なことについても同様に言えるので,

$$\mathrm{Hom}\big(\mathcal{D}^k(M), V\big) \simeq \varprojlim_{A \subset M \text{ compact}} \mathrm{Hom}\big(\mathcal{D}^k_A(M), V\big).$$

□

Definition 2.8.7. $\{V_\lambda \subset U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と書いた時, 次を意味する.

- $U_\lambda = (U_\lambda; x^1_\lambda, \dots, x^n_\lambda)$: local coordinate of M
- $V_\lambda \subset U_\lambda$: 相対コンパクトな開集合（つまり $\overline{V_\lambda} \subset U_\lambda$ コンパクト）
- $M = \bigcup_\lambda V_\lambda$ かつ, $\{U_\lambda\}_\Lambda$ は locally finite open covering of M. （つまり, 任意の $x \in M$ について, ある x の近傍 V で, $U \cap U_\lambda \neq \emptyset$ となる λ は有限個)

上のような V_λ の存在に関しては, 多様体が 2nd countable であることから. (2nd countable $\Rightarrow$ para-compact) また定義から Λ は可算集合となる.

また局所有限性から任意の compact $A \subset M$ に対して, $A \cap U_\lambda \neq \varnothing$ なる λ は 有限である.

Proof. もし無限になるなら, ある $x_i \in A \cap U_{\lambda_i}$（$i = 1, 2, \dots$）が取れる. A compact なので, ある x に収束する部分列 $\{x_{i_k}\}$ が取れる. すると x の任意の近傍 V について, $V \cap U_{\lambda_{i_k}} \neq \varnothing$ が言えて $\{V_\lambda\}$ の仮定に矛盾する □

以下 U_λ 上の座標 $(x^1_\lambda, \dots, x^n_\lambda)$ と $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ について,

$$D^\alpha_\lambda := \left(\frac{\partial}{\partial x^1_\lambda}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^n_\lambda}\right)^{\alpha_n}$$

また $\varphi \in \mathcal{E}^k(M),\ \lambda \in \Lambda,\ \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について,

$$\|\varphi\|_\lambda^\ell := \max\left\{|D_\lambda^\alpha \varphi_{\lambda,J}(x)| \;\middle|\; x \in \overline{V_\lambda},\ J,\ |\alpha| \leq \ell\right\}.$$

最後に $\varphi \in \mathcal{D}^k(M),\ \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について,

$$\|\varphi\|^\ell := \max_\lambda \|\varphi\|_\lambda^\ell = \max\left\{|D_\lambda^\alpha \varphi_{\lambda,J}(x)| \;\middle|\; x \in \overline{V_\lambda},\ J,\ \lambda,\ |\alpha| \leq \ell\right\}.$$

とする．これらは seminorm である.

Lemma 2.8.8. $\{V_\lambda \subset U_\lambda\}$ を固定する．この時

$$\{\|\cdot\|_\lambda^\ell \mid \lambda \in \Lambda,\ \ell \geq 0\}$$

は *separating family of seminorm on* $\mathcal{E}^k(M)$ であり，前に定めた位相 *(2.8.3)* と同じ位相を定める.

Proof. Seminorm であることはすぐにわかる.

$$V(\lambda, \ell, \varepsilon) := \{\varphi \in \mathcal{E}^k(M) \mid \|\varphi\|_\lambda^\ell < \varepsilon\}$$

とする. 示すことは

$$\{\bigcap_{\text{finite}} V(\lambda_i, \ell_i, \varepsilon_i) \mid \lambda_i \in \Lambda,\ \ell_i \geq 0,\ \varepsilon_i > 0\}$$

が local base at 0 であることを示せば良い.

$V(\lambda, \ell, \varepsilon)$ が open であることは, 制限写像 $\mathrm{res} : \mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^k(U_\lambda)$ によって,

$$\{\varphi \in \mathcal{E}^k(U_\lambda) \mid \|\varphi\|_\lambda^\ell < \varepsilon\} \subset \prod_J \mathcal{E}^0(U_\lambda)$$

の pullback になるので良い.

任意の $0 \in V \subset \mathcal{E}^k(M)$ となる open について, ある $N \gg 0$ と compact subset $K_N := K_{N,1} \cup K_{N,2} \cup \cdots \cup K_{N,N}$ であって,

$$p_N(\varphi) := \max\{|D^\alpha \varphi_J(x)| \mid x \in K_N,\ J,\ |\alpha| \leq N\}.$$

としたとき, V は $\left\{\varphi \in \mathcal{E}^k(M) \;\middle|\; p_N(\varphi) < \frac{1}{N}\right\}$ を含む. よって $K_N \subset \bigcup_{i\text{finite}} V_{\lambda_i}$ をとり, $\ell_i \leq N$ とし，$0 < \varepsilon_i \ll \frac{1}{N}$ をとると

$$\bigcap_i V(\lambda_i, \ell_i, \varepsilon_i) \subset \left\{\varphi \;\middle|\; p_N(\varphi) < \frac{1}{N}\right\} \subset V$$

となりいえた. □

Corollary 2.8.9. *compact* $A \subset M$ について, $\{\|\cdot\|^{(\ell)} \mid \ell \geq 0\}$ は *separating family of seminorms on* $\mathcal{D}^k_A(M)$ であり, 同じ位相を定める.

$\mathcal{K}^k_A(M)$ についても, $\{\|\cdot\|^{(0)} \mid \ell \geq 0\}$ を考えれば同様の主張が得られる.

Proposition 2.8.10. $\{V_\lambda \subset U_\lambda\}$ を固定する.

1. $\{\varphi_i\}$ が $\mathcal{D}^k(M)$ で *Cauchy* 列であることは, ある *compact* 部分集合 $A \subset M$ で $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}^k_A(M)$ かつ
$$\lim_{i,j\to\infty} \|\varphi_i - \varphi_j\|^\ell = 0 \quad \forall \ell \geq 0$$
が成り立つことと同値.
2. $\varphi_i \to \varphi$ *in* $\mathcal{D}^k(M)$ は, ある *compact* 部分集合 $A \subset M$ で $\{\varphi_i\} \cup \{\varphi\} \subset \mathcal{D}^k_A(M)$ かつ
$$\lim_{i\to\infty} \|\varphi_i - \varphi\|^\ell = 0 \quad \forall \ell \geq 0.$$
が成り立つことと同値.
3. $\mathcal{D}^k(M)$ は *complete*.

$\mathcal{K}^k_A(M)$ についても, $\{\|\cdot\|^{(0)}\}$ を考えれば同様の主張が得られる.

Proof. [(1)] $\{\varphi_i\}$ Cauchy 列は bounded である. よって 2.8.6 より，ある compact $A \subset M$ であって, $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}^k_A(M)$ となる. これより

$$\begin{aligned}
&\{\varphi_i\} \text{ Cauchy 列 in } \mathcal{D}^k(M) \\
&\iff \exists A \subset M \text{ compact s.t. } \{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}^k_A(M) \text{ かつ Cauchy 列 in } \mathcal{D}^k_A(M) \\
&\underset{2.8.9}{\iff} \exists A \subset M \text{ compact s.t. } \{\varphi_i\} \subset \mathcal{D}^k_A(M) \text{ かつ } \lim_{i,j\to\infty} \|\varphi_i - \varphi_j\|^\ell = 0 \quad \forall \ell \geq 0.
\end{aligned}$$

[(2)] $\{\varphi_i\} \cup \{\varphi\}$ は bounded より，(1) と同様.

[(3)] (1) と $\mathcal{D}^k_A(M)$ は complete より，任意の Cauchy 列は収束する. □

Definition 2.8.11. 連続線型写像 $T : \mathcal{D}^k(M) \to \mathbb{C}$ のことを k-dimensional current on M という. 特に distribution は 0-dimensional current のことをさす.

$$\mathcal{D}'_k(M) := \{\, k\text{-current on } M \,\} = \mathrm{Hom}_{\text{top } \mathbb{C}\text{-vect sp}}\big(\mathcal{D}^k(M), \mathbb{C}\big)$$

$$\mathcal{K}'_k(M) := \mathrm{Hom}_{\text{top } \mathbb{C}\text{-vect sp}}\big(\mathcal{K}^k(M), \mathbb{C}\big).$$

Proposition 2.8.12 (cf. 1.8.11, 1.8.13)**.** *Y を locally convex 位相 $\mathbb{C}$-ベクトル空間, $T : \mathcal{D}^k(M) \to Y$ を $\mathbb{C}$ 線型写像とする. 次は同値である.*

(a) *T は 連続*

(b) *T は bounded, つまり bounded set を bounded set にうつす.*

(c) *$\varphi_i \to 0$ in $\mathcal{D}^k(M)$ ならば, $T(\varphi_i) \to 0$ in Y.*

(d) *任意の compact $A \subset M$ について, $T|_{\mathcal{D}^k_A(M)} : \mathcal{D}^k_A(M) \to Y$ は連続.*

(e) *($Y = \mathbb{C}$ の場合のみ) 任意の compact $A \subset M$ について, ある $\ell \geq 0, C > 0$ があって,*

$$|T(\varphi)| \leq C \cdot \|\varphi\|^\ell \quad \textit{for } \forall \varphi \in \mathcal{D}^k_A(M).$$

$\mathcal{K}^k_A(M)$ についても, $\ell = 0$ のみを考えれば同様の主張が得られる.

Proof. $[(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d)]$ $(a), (b), (c)$ の主張において,

$$\mathcal{D}^k(M) \mapsto \mathcal{D}^k_A(M) \quad T \mapsto T|_{\mathcal{D}^k_A(M)}$$

に取り替えた主張を $(a)_A, (b)_A (c)_A$ とする. 2.8.5 より $\mathcal{D}^k_A(M)$ は metrizable より 1.4.2 より,

$$(a)_A \iff (b)_A \iff (c)_A$$

となる. また 2.8.6 (e) から

$$(d) \text{ が成立} \iff \forall A \subset M \text{ compact}, (a)_A \text{が成立}$$

となる. よって (a) と (d) が同値になる. 同様にしてこれらは (b) や (c) と同値となる.

$[(e) \Rightarrow (d)]$ $Y = \mathbb{C}$ とする. compact $A \subset M$ をとる. 仮定より $\ell \geq 0, C > 0$ があって,

$$|T(\varphi)| \leq C \cdot \|\varphi\|^\ell \quad \text{for } \forall \varphi \in \mathcal{D}^k_A(M).$$

$\forall \varepsilon > 0$ に対し,

$$V := \left\{ \varphi \in \mathcal{D}^k_A(M) \;\middle|\; \|\varphi\|^\ell < \frac{\varepsilon}{C} \right\}$$

とおくと, これは 0 を含む open in $\mathcal{D}^k_A(M)$ であり,

$$\varphi \in V \Rightarrow \left| T|_{\mathcal{D}^k_A(M)}(\varphi) \right| < \varepsilon$$

である. よって $T|_{\mathcal{D}^k_A(M)}$ は連続である.

$[(d) \Rightarrow (e)]$ $A \subset M$ compact とすると, 仮定より $T|_{\mathcal{D}_A^k(M)}$ は連続. よって 2.8.9 から, $\ell \geq 0, \varepsilon > 0$ があって,

$$T\big(\{\varphi \in \mathcal{D}_A^k(M) \mid \|\varphi\|^\ell < \varepsilon\}\big) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

よって任意の $\varphi \in \mathcal{D}_A^k(M)$，$\varphi \neq 0$ に対し，

$$\left|T\left(\frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|^\ell}\varphi\right)\right| < 1.$$

であるので整理して, $|T(\varphi)| < \frac{2}{\varepsilon}\|\varphi\|^\ell$ となる. よって $C = \frac{2}{\varepsilon}$ とおけば良い. □

Remark 2.8.13. k dimensional current $\mathcal{D}_k'(M)$ のことを $\dim M - k$ degree current ともいう.(かなりややこしい)

$Z \in H_k(M, \mathbb{Z})$ の元は積分することで, $\mathcal{D}_k'(M)$ の元となる. (これが"dimensional"の由来だと思われる) また $\dim M - k$ 次微分形式は外積をとって積分することで $\mathcal{D}_k'(M)$ の元となる.

2.9 カレントの order と order 0 カレントの特徴づけ

引き続き M を m 次元 2nd contable 実多様体とする.

示すことは

$$\mathcal{L}_{\mathrm{loc}}^{m-k}(M) \hookrightarrow \mathcal{K}_k'(M) \cong D_k'(M)_{\mathrm{ord}=0} \hookrightarrow D_k'(M)_{\mathrm{ord}\leq l} \hookrightarrow D_k'(M).$$

そしてこれが M の位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の sheaf での完全列であることを示す.

Definition 2.9.1. $D_k'(M)$ に位相を

$$\{ev_\varphi : D_k'(M) \to \mathbb{C} \mid \varphi \in D^k(M)\}$$

に関する weak topology を入れる. つまり

$$\{ev_{\varphi_1}^{-1}(B_1) \cap \cdots \cap ev_{\varphi_l}^{-1}(B_l) \mid \varphi_1, \ldots, \varphi_l \in D^k(M), 0 \in B_1, \ldots, B_l \subset \mathbb{C} \text{ open ball }\}$$

を local base とする位相を入れる.

Remark 2.9.2. これは各点収束な位相である. 次の同値変形からわかる.

$$\begin{aligned}
&T_i \to T \quad (i \to \infty) \\
&\iff \forall U = \mathrm{ev}_{\varphi_1}^{-1}(B_1) \cap \cdots \cap \mathrm{ev}_{\varphi_\ell}^{-1}(B_\ell), \exists N,\ \forall n \geq N,\ T_n - T \in U \\
&\iff \forall U = \mathrm{ev}_{\varphi_1}^{-1}(B_1) \cap \cdots \cap \mathrm{ev}_{\varphi_\ell}^{-1}(B_\ell), \exists N,\ \forall n \geq N, T_n(\varphi_j) - T(\varphi_j) \in B_j (\forall j = 1, \ldots, \ell) \\
&\iff \forall \varphi \in D^k(M),\ \forall \varepsilon > 0, \exists N,\ \forall n \geq N,\ |T_n(\varphi) - T(\varphi)| < \varepsilon \\
&\iff \forall \varphi \in D^k(M), T_i(\varphi) \to T(\varphi) \quad (i \to \infty)
\end{aligned}$$

さて　開集合 $U \subset M$ に対し, restriction map $D'_k(M) \to D'_k(U)$ を

$$T \mapsto \Big(D^k(U) \hookrightarrow D^k(M) \xrightarrow{T} \mathbb{C} \Big) =: T|_U$$

これは連続な $\mathbb{C}$-linear map となる.

Lemma 2.9.3. $U \subset M \ \mapsto \ D'_k(U)$ によって, M 上の位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の *sheaf* を定める.

Proof. $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ locally finite open cover of M, $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}1$ の分割とする.

[1.] $T \in D'_k(M)$, $T|_{U_\lambda} = 0 \ \forall\lambda$ ならば, $T = 0$ を示す. これは $\varphi \in D^k(M)$ について,

$$T(\varphi) = T\Big(\sum_\lambda \psi_\lambda \cdot \varphi\Big) = \sum_\lambda T(\underbrace{\psi_\lambda\varphi}_{\in D^k(U_\lambda)}) = \sum_\lambda \underbrace{T|_{U_\lambda}}_{=0}(\psi_\lambda\varphi) = 0$$

[2.] $T_\lambda \in D'_k(U_\lambda)$ かつ

$$T_\lambda|_{U_\lambda\cap U_\mu} = T_\mu|_{U_\lambda\cap U_\mu}$$

ならば, ある $T \in D'_k(M)$ があって $T|_{U_\lambda} = T_\lambda$ となること.

$T \in D'_k(M)$ を, $\varphi \in D^k(M)$ に対し

$$T(\varphi) := \sum_\lambda \underbrace{T_\lambda(\psi_\lambda \cdot \varphi)}_{\text{有限こを除いて } 0}$$

と定義する. すると, T は $\mathbb{C}$-linear である.

また $\varphi_i \to 0$ $(i \to \infty)$ のとき, 2.8.10 からある $A \subset M$ コンパクトがあって, $\mathrm{Supp}(\varphi_i) \subset A$ かつ,

$$T(\varphi_i) = \sum_\lambda T_\lambda(\psi_\lambda\varphi_i) \to 0 \qquad (i \to \infty)$$

となる. (この $i \to \infty$ は $\mathrm{Supp}(\varphi_i) \subset A$ なので, λ によらずに取れる.) よって T は連続.

また $\varphi \in D^k(U_\lambda)$ に対し,

$$T(\varphi) = \sum_\mu T_\mu(\underbrace{\psi_\mu\varphi}_{\in D^k(U_\lambda\cap U_\mu)}) \underbrace{=}_{T_\lambda|_{U_\lambda\cap U_\mu} = T_\mu|_{U_\lambda\cap U_\mu}} \sum_\mu T_\lambda(\psi_\mu\varphi) = T_\lambda\Big(\sum_\mu \psi_\mu\varphi\Big) = T_\lambda(\varphi)$$

よって $T|_{U_\lambda} = T_\lambda$ であり, D'_k は M 上の sheaf である. □

Definition 2.9.4. $T \in D'_k(M)$ が order $\leq \ell$ であるとは, 任意のコンパクト $A \subset M$ について, ある $\exists C > 0$ があって次を満たすこと.

$$|T(\varphi)| \leq C \cdot \|\varphi\|^\ell \qquad \forall \varphi \in D^k_A(M).$$

また T が order ℓ であることを, T が order $\leq \ell$ かつ order $\leq \ell - 1$ ではないとして定める.

Remark 2.9.5. これは開集合の取り方によらない. これは二つの開被覆 $\{V_\lambda \subset U_\lambda\}$, $\{V_\lambda \subset U_\lambda\}$ をとり, それに対応する norm を $\|\varphi\|^\ell$, $\|\varphi\|'^\ell$ とすると, 任意のコンパクト $A \subset M$ について, ある $\exists D > 0$ があって

$$\|\varphi\|^\ell \leq D \cdot \|\varphi\|'^\ell \qquad \forall \varphi \in D^k_A(M).$$

となるので.

Lemma 2.9.6. *1.* $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *locally finite open cover of* M とするとき,

$$T \in D'_k(M) \text{ は } order \leq \ell \iff T|_{U_\lambda} \text{ は } order \leq \ell \quad \forall \lambda.$$

2. $T_i \in D'_k(M)$ *order* $\leq \ell$, $T_i \to T$ $(i \to \infty)$ のとき T も *order* $\leq \ell$.

Remark 2.9.7. 上の主張 2.9.6 は間違っている. 元々 [NO] の日本語版にあった主張であるが, 英語版だと無くなっていた. Banach-Steinhaus を $D^k_A(M)$ に使っているが, これが F-space でないことからくる.

反例は $T_n = n(\delta_{1/n} - \delta_0)$ とすると, これは $\mathbb{R}$ 上の distribution で order は 0 だが, 極限は $\delta'(0)$ という distribution に収束して, order はちょうど 1 となる.

Proof. (1) $\Rightarrow$ の証明は明らか. $\Leftarrow$ を示す. $\{\psi_\lambda\}$ を 1 の分割とする. 仮定より, $\forall A$: cpt. $\exists C_\lambda > 0$

$$|T(\psi_\lambda \cdot \varphi)| \leq C_\lambda \cdot \|\psi_\lambda \varphi\|^\ell \qquad \forall \varphi \in D^k_A(M). \tag{2.9.1}$$

そこで, $A \cap U_\lambda \neq \emptyset$ なる λ を $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ とおくと, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ 以外では $\psi_\lambda \varphi = 0$ である. よって

$$C := \sum_{i=1}^N C_{\lambda_i}$$

とおけば,

$$|T(\varphi)| \underset{A \text{ compact}}{=} \left| \sum_{i=1}^N T(\psi_{\lambda_i} \varphi) \right| \leq \sum_{i=1}^N |T(\psi_{\lambda_i} \varphi)| \underset{2.9.1}{\leq} \sum_{i=1}^N C_{\lambda_i} \cdot \|\psi_{\lambda_i} \varphi\|^\ell \leq C \cdot \|\varphi\|^\ell.$$

(2) 次の Banach–Steinhaus theorem(一様有界性定理) を使う.

Theorem 2.9.8. *[Rud, Theorem 2.6]* X を F*-space,* つまり位相ベクトル空間で位相と *compatible* な *complete invariant metric* を持つものとし, Y を位相ベクトル空間とする. $\Gamma \subset \mathscr{H}om_{top\ vect\ sp}(X, Y)$ とする. $x \in X$ に対して,

$$\Gamma(x) := \{\Lambda(x) \mid \Lambda \in \Gamma\} \subset Y$$

が Y 上で *bounded* ならば, Γ は *equi-conti,* つまり任意の 0 の近傍 $0 \in W \subset Y$ について, ある近傍 $0 \in V \subset X$ があって,

$$\forall \Lambda \in \Gamma \Rightarrow \Lambda(V) \subset W$$

これを $X = (D_A^k(M), \|\cdot\|^\ell)$, $Y = \mathbb{C}$, $\Gamma = \{T_i\}_i$ に用いる. ここで, $\varphi \in D_A^k(M)$ ならば, 仮定より $T_i(\varphi) \to T(\varphi)$ $(i \to \infty)$ なので, 特に

$$\{T_i(\varphi) \mid i \in \mathbb{Z}_+\} \subset \mathbb{C} \text{ bounded}$$

である. Banach–Steinhaus theorem(一様有界性定理) より, Γ は equi-conti である.

2.8.12 (d) $\Rightarrow$ (e) の証明と同様に

$$W = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \qquad V = \{\varphi \in D_A^k(M) \mid \|\varphi\|^\ell < \varepsilon\}, \qquad C := \frac{2}{\varepsilon}$$

とすると

$$|T_i(\varphi)| \le C \cdot \|\varphi\|^\ell \qquad \text{for } \forall i,\ \forall \varphi \in D_A^k(M).$$

よって, $\forall \varphi \in D_A^k(M)$ に対し,

$$|T(\varphi) - T_i(\varphi)| \le \|\varphi\|^\ell \quad \text{for } i \gg 0.$$

ととると,

$$|T(\varphi)| \le |T(\varphi) - T_i(\varphi)| + |T_i(\varphi)| \le \|\varphi\|^\ell + C \cdot \|\varphi\|^\ell = (1 + C)\|\varphi\|^\ell.$$

よって T も order $\le \ell$ である. □

2.9.6 から $D'_{k,\mathrm{order} \le \ell} \subset D'_k$ は closed 位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間からなる subsheaf である.

さて $K'_k(M) \to D'_k(M)$ を

$$T \mapsto \left(D^k(M) \underset{\text{cont.}}{\hookrightarrow} K^k(M) \xrightarrow{T} \mathbb{C}\right)$$

として定める. これは連続 $\mathbb{C}$ 線型でまた order $= 0$ である.(2.8.9 の周り参照) restriction map とも可換なので, sheaf としての写像 $K'_k \to D'_{k,\mathrm{order}=0}$ が定める.

Lemma 2.9.9. $K'_k \to D'_{k,\mathrm{order}=0}$ 位相 $\mathbb{C}$ ベクトル空間の *sheaf* の同型を与える.

Proof. $M = U \subset \mathbb{R}^m$. と仮定して良い (ここに $D'_k(M) \subset \prod D'_k(U_\lambda)$ によって $D'_k(M)$ の位相は $\prod D'_k(U_\lambda$ の部分位相) となることを使う.

$T \in D'_{k,\mathrm{order}=0}(U)$ をとる. 示すことは次のとおり.

$$\begin{tikzcd} D^k(U) \arrow[r, "T"] & \mathbb{C} \\ K^k(U) \arrow[u, hook] \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

$\varphi \in K^k(U)$ をとり, $\varphi = \sum_J \varphi_J \, dx^J$ と書く. すると各 J に対し, 2.6.7([Rud, Definition 6.31] あたり) から test function の Cauchy 列 $\{\varphi_{i,J}\} \subset D^0(U)$ であって,

$$\lim_{i\to\infty} \varphi_{i,J} = \varphi_J \text{ in } K^0(U)$$

となるものが取れる. そこで,

$$\varphi_i := \sum_J \varphi_{i,J} \, dx^J \in D^k(U)$$

とおくと, これは $D^k(U)$ の Cauchy 列であって $\{T(\varphi_i)\}_i$ も また $\mathbb{C}$ 上の Cauchy 列となる.

そこで $\varphi \in K^k(U)$ について,

$$T(\varphi) := \lim_{i\to\infty} T(\varphi_i)$$

と定義する. これは $\{\varphi_i\}$ のとり方によらない. なぜならば, 二つの Cauchy 列 $\{\varphi_i\}, \{\varphi'_i\}$ について,

$$\varphi_{i,J} - \varphi'_{i,J} \to 0 \ (i \to \infty). \Rightarrow \varphi_i - \varphi'_i \to 0 \ (i \to \infty). \underset{T \text{ 連続}}{\Rightarrow} T(\varphi_i) - T(\varphi'_i) \to 0 \ (i \to \infty).$$

となるためである. よって $\mathbb{C}$-linear map$T : K^k(U) \to \mathbb{C}$ が定義される.

連続性を示す. コンパクト集合 $A \subset U$ について, $C_A > 1$ を

$$|T(\psi)| \le C_A \|\psi\|^0 \qquad \forall \psi \in D^k_A(U) \tag{2.9.2}$$

となるものとする. (これは $T \in D'_{k,\mathrm{order}=0}(U)$ なので取れる) すると $\varphi \in K^k_A(U)$ に対し, ある $A \subset A'$ なるコンパクト集合と, $\{\varphi_i\} \subset D^k_{A'}(U)$ で, $\varphi_i \to \varphi \ (i \to \infty)$ となる Cauchy 列が存在する.

T の定義と Cauchy 列から

$$T(\varphi) - T(\varphi_i) \to 0 \quad \|\varphi_i - \varphi\|^0 \to 0 \quad (i \to \infty)$$

なので $i \gg 0$ とすれば

$$|T(\varphi)| \underset{i\gg 0}{\leq} |T(\varphi)-T(\varphi_i)|+|T(\varphi_i)| \underset{\text{above}}{\leq} \|\varphi\|^0+|T(\varphi_i)| \underset{2.9.2}{\leq} \|\varphi\|^0+C_{A'}\|\varphi_i\|^0 \underset{\|\varphi_i\|^0\leq 2\|\varphi\|^0}{\leq} (2C_{A'}+1)\cdot\|\varphi\|^0.$$

これより一意性もわかる．$\mathbb{C}$ 線型同型がいえた． □

Remark 2.9.10. K' はリースの表現定理から Radon 測度で与えられる.([NO] 参照) 特に order0 の超関数は Radon 測度と同一視できる．

2.10 Current の例・演算

Definition 2.10.1. $U \subset \mathbb{R}^m$ を開集合とする．

$$L^1_{\text{loc}}(U) := \{f : U \to \mathbb{C} : \text{Lebesgue measurable \& } \textit{locally integrable}\} \,/\, \underset{\text{a.e.}}{\sim}$$

とする．ここで"locally integrable"を任意のコンパクト集合 $A \subset U$ みついて $\int_A |f| d\mu < +\infty$ として定める．
同様に

$$L^k_{\text{loc}}(U) := \left\{ \omega = \sum_J \omega_J \, dz^J \ k\text{-form} \mid \omega_J \in L^1_{\text{loc}}(U) \right\}$$

として定める．これらは $\mathbb{C}$ ベクトル空間になる．

$$[\cdot] : L^{m-k}_{\text{loc}}(U) \longrightarrow K'_k(U) \quad \omega \longmapsto [\omega] : \varphi \longmapsto \int_U \omega \wedge \varphi \qquad (\varphi \in K^k(U))$$

と定義する．これは $\mathbb{C}$ 線型単射である．

Proof. $f \in L_{\text{loc}}(U)$ は $f = 0 \Longleftrightarrow \int_U |f| \, d\mu = 0$ であることを思い出す．ここは後で示す □

Definition 2.10.2. M: 向きづけ可能な多様体について

$$L^k_{\text{loc}}(M) := \left\{ \omega \underset{\text{locally}}{=} \sum_J \omega_J \, dz^J, \ \omega_J \in L^1_{\text{loc}}(U) \right\}$$

とする．$L_{\text{loc}}(M, \Lambda^k T^* M)$ ともかく
また M 上の $\mathbb{C}$ ベクトル空間の sheaf を

$$L^k_{\text{loc}} : (U \subset M) \longmapsto L^k_{\text{loc}}(U)$$

として定義する.

$$[\cdot] : L^{m-k}_{\mathrm{loc}}(M) \longrightarrow K'_k(M) \quad \omega \longmapsto [\omega] : \varphi \longmapsto \int_M \omega \wedge \varphi \qquad (\varphi \in K^k(M))$$

とする. $[\omega] \in K'_k(M)$ になるのは次のとおり:

$\{V_\lambda \subset U\}_\lambda$ を V_λ の１の分割とする.

$K^k_A(M)$ について

$$C := \sum_{\lambda | V_\lambda \cap A \neq \varnothing} \sum_J \int_{V_\lambda \cap A} |\psi_\lambda \omega_J| \, d\mu$$

とおくと

$$|\int_M \omega \wedge \varphi| \underset{\text{定義}}{=} |\sum_\lambda \int_{V_\lambda \cap A} \psi_\lambda (\omega \wedge \varphi)| \leq C ||\psi_\lambda||^0$$

となる.

特に $[\cdot] : L^{m-k}_{\mathrm{loc}} \longrightarrow K'_k$ は $\mathbb{C}$ ベクトル空間の sheaf の射となる.

Definition 2.10.3. M: m 次元向きづけ可能な多様体, $N \subset M$ 向きづけ可能 k 次元閉部分多様体とする.
すると,

$$[N] : K^k(M) \longrightarrow \mathbb{C} \quad [N](\varphi) := \int_N \varphi|_N$$

と定義するとこれは連続な $\mathbb{C}$ 線型写像になり $[N] \in K'_k(M)$ となる.

Proof. $\{V_\lambda \subset U_\lambda\}_\lambda$ を $N \cap U_\lambda = \{x^{k+1} = \cdots = x^m = 0\}$ となるようにとる. すると N の座標近傍は $\{(N \cap U_\lambda, x^1, \ldots, x^k)\}_\lambda$ となる.

$\varphi \in K^k_A(M)$ を $\varphi = \sum_J \varphi_{\lambda J} \, dx^J$ on U_λ と表すと

$$\varphi|_N = \sum_{J_0 = (1,2,\ldots,k)} \varphi_{\lambda J_0} \, dx^{J_0},$$

とかける. $C := \sum_{\lambda | V_\lambda \cap A \neq \varnothing} \mu(N \cap A \cap \overline{V}_\lambda)$ とすれば

$$\left| \int_N \varphi|_N \right| \leq \sum_{\lambda \colon A \cap U_\lambda \neq \varnothing} \sum_{J_0 = (1,2,\ldots,k)} \left| \int_{N \cap U_\lambda} \psi_\lambda \varphi_{\lambda J_0} \, dx^{J_0} \right| \leq C \cdot \|\varphi\|^0$$

□

Definition 2.10.4. M: m 次元向きづけ可能な多様体, $\mathcal{D}^k(M) := \mathcal{D}_{m-k}(M)$ とおく. ($m-k$ を degree という.)
$T \in \mathcal{D}^p(M),\ \alpha \in \mathcal{E}^q(M)$ に対し，$T \wedge \alpha,\ \alpha \wedge T \in \mathcal{D}^{p+q}(M)$ を次のように定義する.

$$(T \wedge \alpha)(\varphi) := T(\alpha \wedge \varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{m-p-q}(M).$$
$$\alpha \wedge T := (-1)^{pq} T \wedge \alpha.$$

上において $T \wedge \alpha$ が 連続であることを見ておく. (証明から T の order が l ならば $T \wedge \alpha$ の order も l となる.)

Proof. A コンパクトとすると, T の定義から

$$\exists C \geq 0, l \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } |T(\psi)| \leq C\|\psi\|^l \quad \forall \psi \in \mathcal{D}_A^{m-p}(M).$$

すると任意の $\varphi \in \mathcal{D}_A^{m-p-q}(M)$ に対し，

$$|(T \wedge \alpha)(\varphi)| = |T(\alpha \wedge \varphi)| \leq C\|\alpha \wedge \varphi\|^l$$

が成り立つ. よってあとは $\|\alpha \wedge \varphi\|^l \leq C'\|\varphi\|^l$ を見れば良い.

$$\alpha = \sum_I \alpha_{\lambda I}\, dx^I, \qquad \varphi = \sum_J \varphi_{\lambda J}\, dx^J \quad \text{on } U_\lambda$$

とすると，

$$\alpha \wedge \varphi = \sum_{\substack{I,J \\ I \cap J = \varnothing}} \alpha_{\lambda I}\, \varphi_{\lambda J}\, dx^I \wedge dx^J$$

となる. ここで定義から

$$\|\alpha \wedge \varphi\|^l = \max\left\{ \left| D^\beta(\alpha_{\lambda I}\, \varphi_{\lambda J})(a) \right| \;\middle|\; \lambda, I, J,\ |\beta| \leq l,\ a \in \overline{V_\lambda} \right\}$$

ライプニッツ則から

$$D^\beta(\alpha_{\lambda I}\, \varphi_{\lambda J}) := \sum_{0 \leq \delta \leq \beta} C_{\beta\delta}\, (D^\delta \alpha_{\lambda I})\, (D^{\beta-\delta} \varphi_{\lambda J})$$

となる $C_{\beta\delta}$ があるので,

$$C' := \#\{(I, J, \beta) \mid I \cap J = \varnothing,\ |\beta| \leq l\} \cdot \max\left\{ |C_{\beta\delta}\, D^\delta \alpha_{\lambda I}(a)| \;\middle|\; 0 \leq \delta \leq \beta,\ |\beta| \leq l,\ a \in V_\lambda \right\}$$

とおくと，

$$\|\alpha \wedge \varphi\|^l \leq C'\|\varphi\|^l.$$

となるので言える. □

定義 2.10.4 は通常の外積の拡張になっている． また $\omega \in L^p_{\mathrm{loc}}(M),\ \alpha \in \mathcal{E}^q(M)$ について

$$[\omega] \wedge \alpha = [\omega \wedge \alpha] \quad \in K'^{p+q}(M)$$

となる．これは $\varphi \in K^{n-p-q}(M)$ について

$$([\omega] \wedge \alpha)(\varphi) \underset{2.10.4}{=} [\omega](\alpha \wedge \varphi) \underset{2.10.3}{=} \int_M \omega \wedge (\alpha \wedge \varphi) \underset{2.10.3}{=} [\omega \wedge \alpha](\varphi)$$

Definition 2.10.5. 外微分 $d : \mathcal{D}^p(M) \longrightarrow \mathcal{D}^{p+1}(M)$ を次のように定義する．

$$(dT)(\varphi) := (-1)^{p-1} T(d\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{D}^{m-p-1}(M).$$

これは $\|d\varphi\|^l \leq C\|\varphi\|^{l+1}$ なので order$\leq l$ のカレントを order$\leq l+1$ のカレントに移す．
$dT = 0$ のとき T を closed current という。

$\omega \in \mathcal{E}^p(M)$ とする．$d[\omega] = [d\omega]$ である．

Proof. $\varphi \in \mathcal{D}^{m-p-1}(M)$ とすると

$$d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^p \omega \wedge d\varphi$$

である．よって，

$$(d[\omega])(\varphi) \underset{2.10.5}{=} (-1)^{p-1}[\omega](d\varphi) \underset{2.10.3}{=} (-1)^{p-1} \int_M \omega \wedge d\varphi \underset{\text{Stokes}}{=} \int_M d\omega \wedge \varphi \quad = [d\omega](\varphi).$$

□

$N \subset M$ 向きづけ可能 k 次元閉部分多様体とすると $[N]$ は closed current となる．

Proof. $\varphi \in \mathcal{D}^{m-k-1}(M)$ について

$$(d[N])(\varphi) \underset{2.10.5}{=} (-1)^{m-k-1}[N](d\varphi) \underset{2.10.3}{=} (-1)^{m-k-1} \int_N d\varphi|_N \underset{\text{Stokes}}{=} 0$$

□

$d : \mathcal{D}^p \to \mathcal{D}^{p+1}$ は sheaf としての線型写像となる

Proof. $U \subset M$ を開集合とする．d は restriction map と可換で $\mathbb{C}$ 線型である．よって d によって $\mathcal{D}'^p(U) \to \mathcal{D}'^{p+1}(U)$ が連続を示せば良い $\varphi \in \mathcal{D}^{m-p-1}(M)$ として，$ev_\varphi : \mathcal{D}'^p(U) \to \mathbb{C}$ を代入写像

とし, $B_\varepsilon \subset \mathbb{C}$ を ε 近傍として

$$d^{-1}\big(ev_\varphi^{-1}(B_\varepsilon)\big) = \{\, T \in \mathcal{D}'^p(M) \mid |e_\varphi(dT)| < \varepsilon \,\} = ev_{d\varphi}^{-1}(B_\varepsilon).$$

となるのでいえた. □

$$d(T \wedge \alpha) = dT \wedge \alpha + (-1)^p T \wedge d\alpha.$$

が成り立つ.

Proof. $\varphi \in \mathcal{D}^{m-p-q-1}(M)$ として,

$$d(T \wedge \alpha)(\varphi) \underset{2.10.5}{=} (-1)^{p+q-1}(T \wedge \alpha)(d\varphi) \underset{2.10.4}{=} (-1)^{p+q-1} T(\alpha \wedge d\varphi)$$

$$\begin{aligned}(dT \wedge \alpha)(\varphi) &\underset{2.10.4}{=} dT(\alpha \wedge \varphi) \\ &\underset{2.10.5}{=} (-1)^{p-1} T\big(d(\alpha \wedge \varphi)\big) \\ &\underset{\text{form の外微分}}{=} \qquad\qquad \underset{\text{form の外微分}}{=} (-1)^{p-1} T(d\alpha \wedge \varphi) + (-1)^{p+q-1} T(\alpha \wedge d\varphi).\end{aligned}$$

よって

$$d(T \wedge \alpha)(\varphi) - (dT \wedge \alpha)(\varphi) = (-1)^p T(d\alpha \wedge \varphi) \underset{2.10.4}{=} (-1)^p (T \wedge d\alpha)\varphi)$$

□

Definition 2.10.6. $U \subset \mathbb{R}^m$ 開集合, p 次カレント $T \in \mathcal{D}'^p(U)$ とする.
$J = (1 \le j_1 < \cdots < j_p \le m)$ について 0 次カレント (超関数)$T_J \in \mathcal{D}'^0(U)$ を

$$T_J : \mathcal{D}^m(U) \to \mathbb{C}, \quad f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \longmapsto \operatorname{sgn}(J, J^c)\, T(f\, dx^{J^c})$$

として定める. ここで J^c は $(1, \ldots, n)$ から J を取り除いたものとし. $\operatorname{sgn}(J, J^c)$ は置換 $(1, \ldots, n) \to (J, J^c)$ の符号とする

$T = \sum_J T_J \wedge dx^J$ となる. つまりカレントは超関数係数の form となる. 以後 $T_J\, dx^J := T_J \wedge dx^J$ と書く.

Proof. $\sum_J T_J dx^J$ の方を展開していく. $\varphi = \sum_K \varphi_K dx^K \in D_{m-p}(U)$ について

$$\begin{aligned}
\left(\sum_J T_J\, dx^J\right)(\varphi) &= \sum_J T_J(dx^J \wedge \varphi) \\
&= \sum_J T_J\big(\varphi_{J^c}\, dx^J \wedge dx^{J^c}\big) \\
&\underset{dx^J \wedge dx^{J^c} = \mathrm{sgn}(J,J^c) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m}{=} \sum_J \mathrm{sgn}(J, J^c)\, T_J\big(\varphi_{J^c} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m\big) \\
&\underset{T_J\ \text{の定義}}{=} \sum_J \mathrm{sgn}(J, J^c)^2\, T(\varphi_{J^c}\, dx^{J^c}) \\
&= T(\varphi).
\end{aligned}$$

□

$dT = \sum_J \sum_{i=1}^m \frac{\partial T}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^J$ である.

Proof.

$$dT \underset{\text{上の式}}{=} d\left(\sum_J T_J\, dx^J\right) = \sum_J dT_J \wedge dx^J.$$

であるので, 以上より

$$dT_J = \sum_{i=1}^m \frac{\partial T_J}{\partial x^i}\, dx^i$$

を示せば良い. つまり, $p = 0$ の場合 (T が 0 次カレント) であるとして良い.
今 $\varphi = \sum_{i=1}^m \varphi_i\, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m$ とすると,

$$d\varphi = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^i}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m.$$

したがって,

$$dT(\varphi) = -T(d\varphi) = -T\left(\sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^i}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m\right).$$

一方，

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial T}{\partial x^i}\, dx^i\right)(\varphi) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial T}{\partial x^i}(dx^i \wedge \varphi) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial T}{\partial x^i}\Big((-1)^{i-1}\, \varphi_i\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{m} -T\left((-1)^{i-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^i}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m\right).
\end{aligned}
$$

□