ON THE STRUCTURE OF A LOG SMOOTH PAIR IN THE EQUALITY CASE OF THE BOGOMOLOV-GIESEKER INEQUALITY

岩井雅崇
東北大学数理科学連携研究センター (RACMAS)

Abstract. 宮岡-Yau 不等式の等号が成立するならば, 射影複素代数多様体 X の構造は限定されることが分かっている. より正確に述べると「X が Kähler-Einstein 計量を持つとき, 宮岡-Yau 不等式が成り立ち, さらにその宮岡-Yau 不等式の等号が成立するならば, X の普遍被覆空間は複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$, 複素 Eucild 空間 $\mathbb{C}^n$, 複素 Eucild 空間 $\mathbb{C}^n$ の単位球の 3 種類に限られる」ことが分かっている.

講演では log smooth 対 (X, D) に対して「(X, D) に関する宮岡-Yau 型の不等式の等号が成立するならば, (X, D) の構造はどのようなものになっているか」という問題を考え, その問題に関する関連研究ならびに講演者によって得られた定理を紹介した. この報告集では講演で述べた内容やこの研究に至った経緯, さらには関連話題に関してより詳しく述べたいと思う.

Contents

1. あらすじ 2
1.1. T_X が正値性を持つ場合の構造定理 2
1.2. T_X の部分束が正値性を持つ場合の構造定理 4
1.3. $-K_X$ がネフである場合の構造定理 4
1.4. KLT 多様体の研究と本研究の動機 5
2. 今回得られた結果と関連研究 6
2.1. uniformization 型の定理 6
2.2. Greb-Kebekus-Peternell の定理 7
2.3. 今回の主定理 8
2.4. 主定理に関する関連研究 10
3. 主定理の証明とその補足 11
3.1. 主定理の証明 11
3.2. $T_X(-\log D)$ がネフの構造定理 13
4. 未解決問題 14
4.1. $-(K_X + D)$ がネフの場合 14
4.2. $K_X + D$ がネフの場合 15
4.3. 関連話題 15
References 16

Date: October 27, 2021, version 0.01.

1. あらすじ

1章では「接ベクトル束の正値性とその周辺」に関するこれまでの研究や, 本研究の動機を述べたいと思う. 以下断りのない限り, 代数多様体といえば $\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体とする.

1.1. T_X が正値性を持つ場合の構造定理.

この章を通して言いたいことは次のことである.

代数多様体 X の正則接ベクトル束 T_X や反標準因子 $-K_X$ が
何らかの意味で正値性を持つ場合, X の構造は限定される.

ここで"何らかの意味で正値性を持つ"とは何かとなるが, 今回は次の 4 つに限定する.

定義 1.1. E を X 上のベクトル束とし, $\pi\colon \mathbb{P}(E) \to X$ を E の射影束とする.

(1) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ が $\mathbb{P}(E)$ の上で豊富であるとき, E は豊富であるという.
(2) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ が $\mathbb{P}(E)$ の上でネフであるとき, E はネフであるという.
(3) $\pi(\mathbb{B}_+(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))) \neq X$ であるとき, E は巨大であるという.[1]
(4) $\pi(\mathbb{B}_-(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))) \neq X$ であるとき, E は擬有効であるという. [2]

関係としては直線束と同じく以下の通りである.

$$\begin{array}{ccc} \text{豊富} & \Longrightarrow & \text{巨大} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{ネフ} & \Longrightarrow & \text{擬有効} \end{array}$$

初めに紹介したいのは, 次の森による定理である.

定理 1.2. [Mor79] *T_X が豊富であるとき, X は $\mathbb{CP}^n$ と同型である.*

これは Hartshorne 予想と呼ばれていた問題である. では T_X がネフの場合はどうなるのか. これに関して Campana-Peternell や Demailly-Peternell-Schneider らが次を示している.

定理 1.3. [CP91][DPS94] *T_X がネフであるとき, 次が成り立つ.*

(1) 有限エタールカバー $\pi: X' \to X$ と X' から Abel 多様体 A への滑らかな全射 $\phi: X' \to A$ が存在する.
(2) ϕ のファイバーを F とすると, T_F はネフで F は Fano 多様体である.

[1]この定義は [Laz04, Chapter 6] の定義よりも強い. Viehweg の意味で巨大 (V-big) とも呼ばれる. $\mathbb{B}_+$(augmented base locus) に関しては [Laz04, Def 10.3.2] 参照のこと. $\mathbb{B}_+$ は豊富にならない locus と思って差し支えない.
[2]中山の意味で弱正値 (weakly positive in the sense of Nakayama) と同値である. $\mathbb{B}_-$(restricted base locus) に関しては [ELMNP06, Definition 1.12] 参照のこと. $\mathbb{B}_-$ はネフにならない locus と思って差し支えない.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & A \\ X & \end{tikzcd}$$

つまり T_X がネフのとき, X は Abel 多様体と Fano 多様体で構成されることがわかる.

では T_X が巨大や擬有効である場合, X の構造はどうなるのだろうか. T_X が巨大の場合は Fulger-村山により次のことがわかった.

定理 1.4. [FMu21] T_X が巨大であるとき, X は $\mathbb{CP}^n$ と同型である.

最後に T_X が擬有効の場合に関してだが, 松村氏と細野氏との共同研究で次のことがわかった.

定理 1.5. [HIM21] *T_X が擬有効であるとき次が成り立つ.*

(1) 有限エタールカバー $\pi : X' \to X$ と X' から Abel 多様体 A への滑らかな全射 $\phi : X' \to A$ が存在する.
(2) ϕ の一般ファイバーを F とすると, T_F は擬有効で F は有理連結多様体である.

つまり T_X が擬有効のとき, X は Abel 多様体と有理連結多様体で構成されていると言って良い. 以上により T_X が正値性を持つ場合の X の構造はほぼ分かったと言える.

定理 1.5 の証明の概略に関して一言述べておく. 定理 1.5 は次の Höring による結果を使う.

定理 1.6. [Hör07, Corollary 2.11] *$\mathcal{F} \subset T_X$ を部分束となる葉層とする. $\mathcal{F}$ のある一つの葉がコンパクトで有理連結多様体であるとき, ある代数多様体 Y への滑らかな射 $f : X \to Y$ があり, $\mathcal{F} = \ker df$ かつ f の全てのファイバーが有理連結多様体となる.*

定理 1.5 の証明の概略.

T_X が擬有効であると仮定する. まず MRC ファイブレーション $\varphi : X \dashrightarrow Y$ をとり, それの不確定点除去を $\pi : X' \to Y$, $\varphi' : X' \to Y$ とする.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi'"] & \\ X \arrow[r, dashed, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}$ を $\pi_*(\ker d\varphi')$ の 2 回双対とすると, これが定理 1.6 を満たす特異葉層となる. 以上より正則な MRC ファイブレーションが存在する.

正則な MRC ファイブレーション $\varphi : X \to Y$ に関して, [BDPP13] と [GHS03] から K_Y は擬有効である. 一方 $d\varphi : T_X \to \varphi^*(T_Y)$ は全射であるため $\varphi^*(T_Y)$ は擬有効である. これより [HIM21, Theorem 1.2] から, T_Y は数値的平坦 (T_Y ネフかつ $c_1(T_Y) = 0$) である. 特に $c_1(T_Y) = c_2(T_Y) = 0$ のため, Y のある有限被覆を取ると Abel 多様体になる. あとは有限被覆を取れば定理 1.5 の主張を得る.

この証明方法は定理 1.3 の別証明を与えている. 実際「T_F ネフかつ F が有理連結ならば, F は Fano 多様体である」こと示せれば, 定理 1.3 の主張を得る. この主張は [DPS94, Proposition 3.8, 3.10] にあたり, 元々の定理 1.3 の証明よりずっと簡単である.

1.2. T_X の部分束が正値性を持つ場合の構造定理.

T_X の部分束 $\mathcal{F}$ が正値性を持つ場合, X の構造はどうなるのだろうか. これは [Pet01] で挙げられてた問題でもある. いささか弱い条件でも X の構造が限定されるとはあまり思えないが, 意に反して次の研究が知られている.

定理 1.7. [AW01][J.Liu19] *局所自由部分層 $\mathcal{F} \subset T_X$ が豊富ならば, X は $\mathbb{CP}^n$ と同型であり, $\mathcal{F}$ は $T_{\mathbb{CP}^n}$ または $\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(1)^{\oplus r}$ と同型である.*

さらに [LOY20] において, 局所自由部分層 $\mathcal{F} \subset T_X$ が強ネフ (strictly nef) であるときの X の構造も分かっている.

では $\mathcal{F}$ がネフ, 巨大, 擬有効の場合はどうなるだろうか? [Iwa20] では $\mathcal{F}$ が部分束で葉層構造を持つとき, X の構造をほぼ明らかにした.

定理 1.8. [Iwa20] *$\mathcal{F} \subset T_X$ をランク r の部分束とする. $\mathcal{F}$ が擬有効な葉層であるとき, ある滑らかな射 $f : X \to Y$ と Y 上の数値的平坦な部分束となる葉層 $\mathcal{G} \subset T_Y$ があり, 次を満たす.*

- *f のファイバーは全て有理連結.*
- *$\mathcal{F} = f^{-1}\mathcal{G}$. つまり $\mathcal{F}$ は $\mathcal{G}$ の"葉層の意味で"pull-back となる.*
- *ベクトル束の完全列 $0 \to T_{X/Y} \to \mathcal{F} \to f^*\mathcal{G} \to 0$ が存在する.*

上の状況において, さらに以下が成り立つ.

(1) $\mathcal{F}$ が豊富ならば, X は $\mathbb{CP}^n$ と同型であり, $\mathcal{F}$ は $T_{\mathbb{CP}^n}$ と同型.
(2) $\mathcal{F}$ がネフならば, f の全てのファイバーは Fano 多様体である.
(3) $\mathcal{F}$ が巨大ならば, f の全てのファイバーは $\mathbb{CP}^r$ であり, $\mathcal{F}$ は $T_{X/Y}$ と同型.
(4) $\mathcal{F}$ がネフかつ巨大ならば, X は $\mathbb{CP}^n$ と同型であり, $\mathcal{F}$ は $T_{\mathbb{CP}^n}$ と同型.

ざっくりいうと, 部分束な葉層 $\mathcal{F}$ が正値性を持つとき, X は「$\mathbb{CP}^n$ や Fano 多様体などの有理連結多様体」と「数値的平坦な部分束な葉層を持つ代数多様体」で構成される. 「数値的平坦な部分束な葉層 $\mathcal{G} \subset T_Y$ を持つ代数多様体 Y」の最も簡単な例は, Abel 多様体である. このとき $\mathcal{G}$ を線形葉層とすれば良い.

1.3. $-K_X$ がネフである場合の構造定理.

続いて紹介したいのは $-K_X$ がネフである場合の構造定理である. これに関しては近年 [Cao19][CH19] によって明らかになった.

定理 1.9. [Cao19][CH19] *$-K_X$ がネフならば次が成り立つ.*

(1) X の Albanese map は locally trivial である. つまり Albanese map を $\alpha : X \to A$ とすると, 任意の $y \in Y$ について y の Euclid 近傍 U があって $\alpha^{-1}(U) \cong U \times X_y$ となる.
(2) X が単連結であるとする. このとき有理連結多様体 F と $c_1(K_Y) = 0$ なる代数多様体 Y があって $X \cong Y \times F$ となる.

(3) X の普遍被覆空間は有理連結多様体と複素 *Euclid* 空間 $\mathbb{C}^N$ と *Calabi-Yau* 多様体と *Hyper-Kähler* 多様体の直積である.

定理 1.9 の証明は以下の手法を大きく用いる.

- ベクトル束の特異計量や大沢竹腰 L^2 拡張定理などの多変数複素解析的な L^2 理論
- 定理 1.6 による葉層を用いた MRC ファイブレーションを正則写像に取り替える手法

[Cao19][CH19] の定理は KLT 対に関しての拡張がある. ここで KLT とは Kawamata Log Terminal のことである. この報告集に限り, KLT 対 (X, D) と書いた場合 X は滑らかな代数多様体であり, D は有効因子であると仮定する.[3]

定理 1.10. [CCM19] (X, D) は *KLT* 対であり, $-(K_X + D)$ はネフであるとき, 滑らかな *MRC* ファイブレーション $\varphi : X \to Y$ が存在して次を満たす.

(1) Y は $c_1(K_Y) = 0$ な代数多様体である.
(2) $\varphi : (X, D) \to Y$ は *locally trivial* である.

この結果は最近, 松村と Wang[MW21] によって X が KLT 多様体 (KLT 特異点をもった多様体) である場合にも拡張された. 特に [MW21] から $-K_X$ がネフである KLT 多様体の構造定理も得られている. 以上より $-K_X$ がネフならば, KLT 対や KLT 多様体に対しても MRC ファイブレーションは正則写像に取り替えられ, それから (普遍被覆空間などの) 構造定理を得られるということである.

1.4. **KLT 多様体の研究と本研究の動機.**

KLT 多様体を調べる研究は Greb, Kebekus, Peternell あたりによって 2010 年くらいから始まり, かなり多くの結果が出ている. 有名なものをあげると

(1) KLT 多様体の宮岡-Yau 不等式と等号成立の場合の構造定理.
(2) KLT 多様体の Nonabelian Hodge 対応.
(3) KLT 多様体の Beauville-Bogomolov 分解.

などが挙げられる.[4] これらの仕事や [MW21] などによって, KLT 多様体に関してはほぼほぼわかったと言える.

では KLT に関する上の一連の研究は LC(Log Canonical) に変えるとどうなるのだろうか? 多変数複素解析的な L^2 理論を用いる我々にとって, 滑らかな多様体でできることは KLT でもできると思われてきた. 実際そのように研究が続いている. しかし LC では L^2 理論が一気に使えなくなる.[5] そのため KLT から LC に変えるとどこまで同じことが言えてどこに違いが出るのかというのが全く予想できず, 逆にい

[3] 理由として KLT 多様体 (KLT 特異点をもった多様体) と区別したいからである.

[4] (1)(2) に関してのサーベイとして [GKT18] が挙げられる. (3) に関してのサーベイは (私が知る限り) まだないが, [CIRM] のサイトに行けば (3) に関する講演動画が見れる. どちらもかなりわかりやすいのでオススメである.

[5] 広義積分 $\int_0^1 r^\alpha dr$ は $\alpha > -1$ ならば収束する. 結局のところ KLT は $\alpha > -1$ に対応し積分が収束するから L^2 理論が使える. LC は $\alpha \geq -1$ に対応し積分が発散するから L^2 理論が使えないといった感じである.

えばそこに面白さがあると思われる. 1 章で述べた定理を LC に拡張した場合どのような変化が起こるのかを解明するために本研究を行った.

2. 今回得られた結果と関連研究

2 章では講演で述べた主結果に関して紹介する. 初めは「接ベクトル束の正値性とその周辺」に関連がなさそうな話題を述べるが, ご了承いただきたい.

2.1. uniformization 型の定理.

2.1 節を通して言いたいことは次のことである.

宮岡-Yau 不等式などの何か良い不等式の等号が成立する場合,
代数多様体 X の構造は限定される.

このようなことは (私が見た限りでは)”uniformization” と呼ばれるようである. こういった研究の一番初めのものとして以下の Chen-荻上の定理が挙げられる.

定理 2.1. [CO75] (X,ω) を *Kähler-Einstein* 多様体とし $\alpha := \{\omega\} \in H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ とする. このとき宮岡-*Yau* 不等式

$$\left(c_2(T_X) - \frac{n}{2(n+1)}c_1(T_X)^2\right)\alpha^{n-2} \geq 0$$

が成り立つ. さらに等号成立は X の普遍被覆空間が $\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n$ の単位球のいずれかに限る.

今回我々が興味があるのは T_X が正値性を持つ場合である. その場合だけ結果を抜き出すと以下の通りとなる.

系 2.2. $-K_X$ が豊富かつ X が *Kähler-Einstein* 計量を持つとき

$$\left(c_2(T_X) - \frac{n}{2(n+1)}c_1(T_X)^2\right)(-K_X)^{n-2} \geq 0.$$

が成り立つ. さらに等号成立は X が $\mathbb{CP}^n$ の場合に限る.

ところでなぜ宮岡-Yau 不等式が成り立つのであろうか? 微分幾何的な証明は [Kob87, Chapter 4] を見ればわかるがここでは別のアプローチを考えてみる. そのアプローチとは

宮岡-Yau 不等式は”あるベクトル束”の Bogomolov-Gieseker 不等式だ.

というものである. ここで Bogomolov-Gieseker 不等式とは以下の不等式である.

定理 2.3 (Bogomolov, Gieseker)**.** E をランク r のベクトル束とし, H を豊富直線束とする. E が (*Munford*-竹本の意味で)H 半安定ならば次の不等式が成り立つ.

$$\left(c_2(E) - \frac{r-1}{2r}c_1(E)^2\right)H^{n-2} \geq 0.$$

さて宮岡-Yau 不等式に戻る. $-K_X$ が豊富の場合, 上の”あるベクトル束”は何だろうか? それが Tian による”canonical extension sheaf”である.

定義 2.4. [Tia92] L を直線束とする.

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^1(X, \Omega_X^1) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X, \Omega_X^1)$$

という標準的写像によって, $c_1(L)$ から誘導されたベクトル束 W_L と以下のベクトル束の完全列が存在する.

$$0 \to \Omega_X^1 \to W_L \to \mathcal{O}_X \to 0.$$

そこで $\mathcal{E}_L$ を W_L の双対束とすると,

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}_L \to T_X \to 0.$$

という完全列を得る. この $\mathcal{E}_L$ を extension sheaf of T_X by $\mathcal{O}_X$ with the extension class $c_1(L)$ と呼び, $\mathcal{E}_{-K_X}$ を canonical extension sheaf of T_X by $\mathcal{O}_X$ と呼ぶ.[6]

定義から $\mathrm{rk}(\mathcal{E}_L) = n+1$, $c_1(\mathcal{E}_L) = c_1(T_X)$, $c_2(\mathcal{E}_L) = c_2(T_X)$ を得る. [Tia92] で Tian は以下のことを示した.

定理 2.5. [Tia92] $-K_X$ が豊富で X が *Kähler-Einstein* 計量を持つならば, *canonical extension sheaf* $\mathcal{E}_{-K_X}$ は $-K_X$ 半安定である.

この定理と Bogomolov-Gieseker 不等式を合わせると次を得る.

系 2.6. $-K_X$ が豊富で X が *Kähler-Einstein* 計量を持つならば, 宮岡-*Yau* 不等式が成り立つ.

$$\left(c_2(T_X) - \frac{n}{2(n+1)}c_1(T_X)^2\right)(-K_X)^{n-2} \geq 0.$$

このように簡単に宮岡-Yau 不等式が証明できてしまった.[7]

2.2. **Greb-Kebekus-Peternell の定理.**

さて宮岡-Yau 不等式は簡単に示せたのだが, この証明方法では等号成立の場合の X の構造がわからなくなった. つまり次の問題が残る.

問題 2.7. $-K_X$ が豊富かつ $\mathcal{E}_{-K_X}$ は $-K_X$ 半安定とする.[8] 宮岡-*Yau* 不等式

$$\left(c_2(T_X) - \frac{n}{2(n+1)}c_1(T_X)^2\right)(-K_X)^{n-2} \geq 0$$

の等号が成立する場合, X の構造はどうなるだろうか?

この上の問題を「$-K_X$ がネフ」という条件に弱め, さらに KLT 特異点を持つ多様体 X について調べたのが, Greb-Kebekus-Peternell の仕事である.

定理 2.8. [GKP20] X を *KLT* 特異点を持つ射影代数多様体とする. $-K_X$ がネフであると仮定する. このとき以下は同値である.

---

[6]日本語訳が思いつかないので英語のまま表記する.
[7]この証明方法が"簡単"かは人によると思う. ただ微分幾何を使った証明よりわかりやすいと思う.
[8]「Kähler-Einstein 計量を持つ」という条件が「$\mathcal{E}_{-K_X}$ は $-K_X$ 半安定」という条件に変わったと言って差し支えない. 実際後者の条件の方が扱いやすい.

(1) ある豊富な *Cartier* 因子 H があって *canonical extension sheaf* $\mathcal{E}_{-K_X}$ は H 半安定かつ $\mathcal{E}_{-K_X}$ に関する *Bogomolov-Gieseker* 不等式の等号が成立する.[9]

$$\left(\hat{c}_2(\Omega_X^{[1]}) - \frac{n}{2(n+1)}\hat{c}_1(\Omega_X^{[1]})^2\right)[H]^{n-2} = 0.$$

(2) X は $\mathbb{CP}^n$ か *Abel* 多様体を有限群で割った多様体であり, その固定点集合は高々余次元 *1* である.

簡単にいうと定理 2.8 は $\mathcal{E}_{-K_X}$ に関する Bogomolov-Gieseker 不等式の等号が成立すれば X は $\mathbb{CP}^n$ か Abel 多様体になるということである. 補足として, 定理 2.8 の仮定が満たされる場合 T_X はネフになる. つまり定理 2.8 は T_X が正値性を持つ場合の構造定理の一種である.

定理 2.9. [GKP21] *X を KLT 特異点を持つ射影代数多様体で次元は 2 以上とする. H を豊富な Cartier 因子とする, $\Omega_X^{[1]}$ が H 半安定かつ*

$$\left(\hat{c}_2(\Omega_X^{[1]}) - \frac{n-1}{2n}\hat{c}_1(\Omega_X^{[1]})^2\right)[H]^{n-2} = 0$$

ならば Abel 多様体 $\widetilde{X}$ からの quasi-étale cover $\widetilde{X} \to X$ が存在する.

簡単にいうと定理 2.9 は T_X に関する Bogomolov-Gieseker 不等式の等号が成立すれば X は Abel 多様体になるということである.[10]

2.3. 今回の主定理.

今回私がやったのは

定理 2.8 や定理 2.9 を LC 対に拡張した場合どうなるだろうか?

という研究である. ただいきなり LC 対を一般的にやるのは難しそうなので, まずは D を単純正規交差因子にして log smooth 対 (X, D) を考えることにした. この場合"canonical extension sheaf"に関しては以下の定義になる.[11]

定義 2.10. [Li18] D を単純正規交差因子とし L を直線束とする.

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^1(X, \Omega_X^1) \xrightarrow{\Phi} H^1(X, \Omega_X^1(\log D)) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X, \Omega_X^1(\log D)),$$

という標準的写像によって, $\Phi(c_1(L))$ から誘導されたベクトル束 W_L と以下のベクトル束の完全列が存在する.

$$0 \to \Omega_X^1(\log D) \to W_L \to \mathcal{O}_X \to 0.$$

[9] $\Omega_X^{[1]}$ は smooth locus の $\Omega_{X_{reg}}$ を包含写像で押し出して 2 回双対したものとして定義する. また $\hat{c}_2$ や $\hat{c}_1$ に関してだが, KLT 多様体は余次元 3 の閉集合を除いて高々商特異点を持つので, これを使って Chern 類を定義する. 詳しくは [GKT18, Section 1.7] を参照.

[10] c_2, c_1^2 を見ているので $\Omega_X^{[1]}$ を T_X に変えても同じことである.

[11] これは一般の LC 対 (X, D) に関しても定義できる. これには [Cam16] の orbifold 接ベクトル束 $T(X, D)$ を使って定義する. LC 対には標準的に orbifold 構造が入るので, orbifold 接ベクトル束が定義できるが, かなりややこしく難しくなる上に, KLT 対の場合は orbifold 接ベクトル束 $T(X, D)$ を考えなくても $-(K_X + D)$ を考えた方が良い結果が出るので, 今回は考えないことにした.

そこで $\mathcal{E}_L$ を W_L の双対束とすると,

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}_L \to T_X(-\log D) \to 0.$$

という完全列を得る. この $\mathcal{E}_L$ を *extension sheaf of* $T_X(-\log D)$ *by* $\mathcal{O}_X$ *with the extension class* $c_1(L)$ と呼ぶ.

定義から $\mathrm{rk}(\mathcal{E}_L) = n+1$, $c_1(\mathcal{E}_L) = c_1(T_X(-\log D))$, $c_2(\mathcal{E}_L) = c_2(T_X(-\log D))$ を得る.

主定理を述べる前に一言述べておく. 定理 2.5 は LC 対 (X, D) でも成り立つように思われる. 実際 $c_1(T_X(-\log D)) = 0$ の場合には次の定理がある.

定理 2.11. [Li18] $c_1(T_X(-\log D)) = -(K_X + D) = 0$ ならば, 任意の豊富直線束 H について $\mathcal{E}_H$ は H 半安定である.

[Li18] ではさらに KLT Fano 対 (X, D) が K 半安定ならば canonical extension sheaf $\mathcal{E}_{-(K_X+D)}$ が $-(K_X+D)$ 半安定であることを示している. 大まかな方針は [Tia92] と同じなのだが, 計量の列を考えたり orbiford 接ベクトル束が出てきたりしてかなり難しくなっている. では LC Fano 対 (X, D) に関しても canonical extension sheaf の安定性などは言えるのか? 現状ではこれといった条件が見つかっていない. そこで問題として提示しておく.

問題 2.12. *LC Fano* 対 (X, D) に関して, *canonical extension sheaf* $\mathcal{E}_{-(K_X+D)}$ はいつ $-(K_X+D)$ 半安定となるか*?*

個人的には LC Fano 対 (X, D) が K 半安定ならば $\mathcal{E}_{-(K_X+D)}$ は $-(K_X+D)$ 半安定となりそうである.

今回紹介したい主定理は以下の 2 つである.

定理 2.13. [Iwa21] X を次元 *2* 以上の代数多様体とし, D を単純正規交差因子, H を豊富因子とする. さらに $-(K_X+D)$ がネフを仮定する.

ある直線束 L があって *extension sheaf* $\mathcal{E}_L$ が H 半安定かつ

$$\left(c_2\big(T_X(-\log D)\big) - \frac{n}{2(n+1)} c_1\big(T_X(-\log D)\big)^2\right) H^{n-2} = 0$$

であるならば, 次のどちらかが成り立つ.

(1) (X, D) は (有限被覆を除いて) *Abel* 多様体上のトーリック束である.
(2) (X, D) は $(\mathbb{CP}^n, 0)$ と同型である.

定理 2.14. [Iwa21] X を次元 *2* 以上の代数多様体とし, D を単純正規交差因子, H を豊富因子とする. さらに $-(K_X+D)$ がネフを仮定する.

$T_X(-\log D)$ が H 半安定かつ

$$\left(c_2\big(T_X(-\log D)\big) - \frac{n-1}{2n} c_1\big(T_X(-\log D)\big)^2\right) H^{n-2} = 0$$

であるならば, 次のどちらかが成り立つ.

(1) (X, D) は (有限被覆を除いて) *Abel* 多様体上のトーリック束である.

(2) X は有理連結, $c_1(K_X+D)\neq 0$ であり, ある *Cartier* 因子 B があって $T_X(-\log D)\cong \mathcal{O}_X(B)^{\oplus n}$ となる.

さらに *(2)* が成り立ち (X,D) が森ファイバー空間ならば (X,D) は $(\mathbb{CP}^n, H_{\mathbb{CP}^n})$ と同型である. ここで $H_{\mathbb{CP}^n}$ は $\mathbb{CP}^n$ の *hyperplane* とする.

Abel 多様体上のトーリック束は Abel 多様体の log smooth 版と思えるため, 定理 2.13 は定理 2.8 の純粋な拡張と言える. つまり KLT を LC に変えても違いはでなかった.

一方で面白いのは定理 2.14 である. 今回は $-(K_X+D)$ がネフの場合のみを扱ったが, この場合でもイレギュラーな例 (定理 2.14 での (2) にあたる) が出ている. 予想では Abel 多様体上のトーリック束しか出ないだろうと思っていたが, とりあえず一つの例 $(\mathbb{CP}^n, H_{\mathbb{CP}^n})$ が出てきた.

ここで「$(\mathbb{CP}^n, H_{\mathbb{CP}^n})$ ぐらいしか定理 2.14 の仮定を満たすものはないのではないか?」と思われるかもしれない. 私もそう思っていたのだが, 実はそんなことはなく, 定理 2.14 の仮定を満たす log smooth 対 (X,D) は多くあることがわかった.

例 2.15. [Iwa21] 1 以上の自然数 m について, 以下が成り立つ log smooth 対 (X_m, D_m) が存在する.

(1) $X_m=\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1}(m))$. 特に X_m は有理連結である.
(2) $c_1(K_{X_m}+D_m)\neq 0$.
(3) ある Cartier 因子 B_m があって $T_{X_m}(-\log D_m)\cong\mathcal{O}_{X_m}(B_m)^{\oplus 2}$ となる.

特に $(X_m,D_m)\not\cong(\mathbb{CP}^2, H_{\mathbb{CP}^2})$ である. さらに $m\geq 2$ である場合 (X_m,D_m) の極小モデルは $(\mathbb{CP}^2, H_{\mathbb{CP}^2})$ と同型ではない.

よって今回の主定理では, LC を考えると複雑で KLT とは違う面白い現象が起こることがわかった. [12] ただ定理 2.9 の log smooth 版に関して完全にはわからなかったのでこのことに関しては 4 章で触れる.

最後に定理 2.13 の系を一つ述べておく. これは定理 2.11 と定理 2.13 を組み合わせれば即座に出る.

系 2.16. $c_1(T_X(-\log D))=0$ かつ $c_2\big(T_X(-\log D)\big)H^{n-2}=0$ ならば (X,D) は (有限被覆を除いて) *Abel* 多様体上のトーリック束である.

これは Yau の定理「$c_1(T_X)=c_2(T_X)=0$ ならば X は (有限被覆を除いて)Abel 多様体」の log smooth 版と言える.

2.4. 主定理に関する関連研究.

定理 2.13 や定理 2.14 などの log smooth 対 (X,D) の uniformization 型の研究について述べておく. このような研究の中で最も大きな仕事といえば次の定理であろう.

定理 2.17. [Tsu88][TY87] K_X+D ネフかつ巨大であり, さらに *ample modulo* D であるとする. このとき宮岡-*Yau* 不等式

$$\left(c_2\big(\Omega_X(\log D)\big)-\frac{n}{2(n+1)}c_1\big(\Omega_X(\log D)\big)^2\right)c_1\big(\Omega_X(\log D)\big)^{n-2}\geq 0,$$

[12] KLT は滑らかな多様体の拡張でできそうだが, LC を考えると純粋な拡張ではうまくいかなさそうということである. こういったイレギュラーが起こった方が研究対象としては面白いように思う.

が成り立つ．さらに等号が成立するとき $X\setminus D$ の普遍被覆空間は $\mathbb{C}^n$ の単位球となる．

証明の概略を簡潔に述べておく．まず $X\setminus D$ 上に完備 Kähler-Einstein 計量 ω を構成する．一方で $(X,(1-\frac{1}{m})D)$ という組に関して標準的な orbifold の構造を入れると，これまた orbifold Kähler-Einstein 計量 ω_m が構成できる．これらの Kähler-Einstein 計量の構成は [Tsu88] 以前の研究ですでにやられていた．ここからの [Tsu88] のアイデアが非常に面白い．この ω_m の極限が ω であることを示し，$(X,(1-\frac{1}{m})D)$ に関する宮岡-Yau 不等式の極限を取れば，(X,D) に関する宮岡-Yau 不等式が得られる．等号成立条件に関してだが，これは [CO75] と同じく ω は $X\setminus D$ 上で定曲率であることが言えるので，それを用いて $X\setminus D$ の普遍被覆空間が $\mathbb{C}^n$ の単位球であることを示す．

この方向の結果として，近年 Deng が次を示した．

定理 2.18. [Den20] *自然な log ヒッグス束 $(\Omega_X^1(\log D)\oplus\mathcal{O}_X,\theta)$ が H-polystable であり，*

$$\left(c_2\big(\Omega_X(\log D)\big)-\frac{n}{2(n+1)}c_1\big(\Omega_X(\log D)\big)^2\right)H^{n-2}=0$$

であるならば，$X\setminus D$ の普遍被覆は $\mathbb{C}^n$ の単位球である．

以上二つの定理は $\Omega_X^1(\log D)$ が正値性を持つ場合，言い換えると $T_X(-\log D)$ が負値性を持つ場合の結果である．

次に紹介するのは Druel-LoBianco による結果である．

定理 2.19. [DLB20] *$T_X(-\log D)$ が数値的平坦 (つまり $T_X(-\log D)$ がネフかつ平坦) ならば，(X,D) は (有限被覆を除いて) Abel 多様体上のトーリック束である．*

この定理は $T_X(-\log D)$ が平坦な場合の結果である．

今回紹介した定理 2.13 や定理 2.14 の仮定から $T_X(-\log D)$ がネフであることが言える．つまりこれらの定理は $T_X(-\log D)$ が正値性を持つ場合の結果である．

3. 主定理の証明とその補足

3.1. 主定理の証明.

定理 2.13 の証明について述べる．鍵となる定理は次の中山による定理である．

定理 3.1. [Nak04] *E をランク r のベクトル束とする．次は同値である．*

(1) $\mathrm{Sym}^r E\otimes\det E^\vee$ *がネフ．(つまり $E\langle\frac{\det E^\vee}{r}\rangle$ がネフ.*[13]*)*

(2) *ある豊富直線束 H があって，E が H 半安定かつ*

$$\left(c_2(E)-\frac{r-1}{2r}c_1(E)^2\right)H^{n-2}=0.$$

この (1) や (2) が成り立つとき，E を数値的射影平坦 (*numerically projectively flat*) と呼ぶ.[14]

数値的射影平坦に関しては以下のことが知られている．

---

[13] $\mathbb{Q}$-twisted ベクトル束である．定義に関しては [Laz04, Chapter 6.2] 参照．

[14] numerically projectively flat という用語を定義したのは [LOY20] である．

定理 3.2. [GKP20] [LOY20] E が数値的射影平坦ならば, E は射影平坦である．つまり E の射影束 $\mathbb{P}(E)$ は $\pi_1(X)$ の $\mathbb{P}^r$ への作用で構成される．

つまり「数値的平坦ならば平坦」という定理の射影バージョンである．この定理から次を得る．

系 3.3. X が単連結かつ E が数値的射影平坦ならば, ある直線束 M があって $E \cong M^{\oplus r}$ となる．

定理 2.13 を証明する．証明は気づいてしまえば簡単である．

Proof. 定理 2.13 の仮定より, 定理 3.1 から $\mathcal{E}_L$ は数値的射影平坦である．仮定より $-(K_X + D)$ がネフであるので $T_X(-\log D)$ もネフである．

$D = 0$ のときは T_X がネフより定理 1.3 の構造定理が使えるため証明が進む．しかし $T_X(-\log D)$ がネフの場合の (X, D) の構造定理はまだ確立されていない．むしろそのような構造定理はおそらく存在しないと思われる (これに関しては後述する)．

そこで少しまわり道をする．$T_X(-\log D)$ がネフより T_X は擬有効である．よって定理 1.5 やその証明の概略から, ある代数多様体 Y と滑らかな射 $f : X \to Y$ があって以下を満たす．

- Y のある有限被覆は Abel 多様体である．
- 任意の f のファイバーは有理連結である．

ただこれでは $f : X \to Y$ と D の関係がよくわからない．しかしこの状況だと次が言える．

主張 1. $f : (X, D) \to Y$ は log 変形 (logarithmic deformation) である．[15]

あとは場合分けをするだけである．
(ケース 1). 任意のファイバー F について $c_1(K_F + D_F) = 0$ である場合．
下の完全列

$$0 \to T_F(-\log D_F) \to T_X(-\log D)|_F \to \mathcal{O}_F^{\oplus \dim Y} \to 0.$$

から $T_F(-\log D_F)$ が数値的平坦であるので, F が有理連結より $T_F(-\log D_F) \cong \mathcal{O}_F^{\oplus n}$ である．よって [Win04] から (F, D_F) はトーリックである．よって (X, D) は (有限被覆を除いて)Abel 多様体上のトーリック束である．
(ケース 2). あるファイバー F があって $c_1(K_F + D_F) \neq 0$ となる場合
この場合上の完全列から, $\dim Y = 0$ をえる．つまり X は有理連結である．よって定理 3.3 からある直線束 M があって $-(K_X + D) \sim (n+1)M$ となる．よって $K_X + D$ がネフでないので, [FMi20] から $(X, D) \cong (\mathbb{CP}^n, 0)$ である． □

補足 3.4. 定理 2.19 の別証明もしておこう．$T_X(-\log D)$ が数値的平坦であるならば, $-(K_X + D)$ はネフである．よって主張 1 まで同じように証明が進む．ケース 2 は起こり得ないので, ケース 1 だけが起こりえて, (X, D) は (有限被覆を除いて)Abel 多様体上のトーリック束である．

[15] logarithmic deformation に関しては色々定義があるが, 今回は [Kaw78] での素朴な定義を用いた．

3.2. $T_X(-\log D)$ がネフの構造定理.

証明の中で"$T_X(-\log D)$ がネフの構造定理は存在しないと思われる"と述べた．このことに関して詳しく説明する.

まず鍵となるのは次の定理である.

定理 3.5. [CDP15] X が有理連結であることは,「任意の豊富直線束 A について, ある自然数 $m(A)$ があって, $m > m(A)$ ならば $H^0(X, \otimes^m \Omega^1_X \otimes A) = 0$ であること」と同値.

これを逆手にとって, LC 対 (X, D) について有理連結性を定義する.

定義 3.6. [Cam16] LC 対 (X, D) について $\Omega^1(X, D)$ を orbifold 余接ベクトル束とする．任意の豊富直線束 A について, ある自然数 $m(A)$ があって, $m > m(A)$ ならば $H^0(X, \otimes^m \Omega^1(X, D) \otimes A) = 0$ であるとき, LC 対 (X, D) はスロープ有理連結 (slope rationally connected) であるという.

代数多様体 X について MRC ファイブレーションが定義できた．同様に LC 対 (X, D) についても MRC ファイブレーションのような有理写像を定義できる

定義 3.7. [Cam16] LC 対 (X, D) について, 以下を満たす orbifold map $\rho : (X, D) \dashrightarrow (R, D_R)$ が双有理同値を除いて唯一存在する.

(1) $K_R + D_R$ は擬有効である.[16]
(2) ある birational map $\pi : (X', D') \to (X, D)$ と orbifold map $\rho' : (X', D') \to (R, D_R)$ があって, $\rho' = \rho \circ \pi$ かつ ρ' の滑らかなファイバー (X'_r, D'_r) はスロープ有理連結である.

$$\begin{tikzcd}
(X', D') \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho'"] & \\
(X, D) \arrow[r, dashed, "\rho"] & (R, D_R)
\end{tikzcd}$$

この ρ を sRC quotient(slope rationally connected quotient) という.

$D = 0$ の場合の sRC quotient が MRC ファイブレーションである.

ではこの sRC quotient はいつ正則写像に取り替えられるのか? $D = 0$ の場合は, T_X が擬有効であるときや $-K_X$ がネフであるときに MRC ファイブレーションが正則に取り替えられた．この考察から次が予想される.

予想 3.8. *(X, D) を KLT 対とする.*

(1) $T(X, D)$ が擬有効であるならば, sRC quotient は滑らかな正則写像に取り替えられる.
(2) (c.f. [CCM19, Conjecture 1.5]) $-(K_X + D)$ がネフであるならば, sRC quotient は locally trivial な正則写像に取り替えられる.

---

[16] 普通の MRC ファイブレーション $f : X \dashrightarrow R$ について K_R は擬有効である．これを逆手にとって定義に組み込んだ.

予想 3.9. (X, D) を *KLT* 対とする．$T(X, D)$ が擬有効または $-(K_X + D)$ がネフならば，(X, D) はスロープ有理連結多様体と $c_1(K_Y + D_Y) = 0$ なる *KLT* 対 (Y, D_Y) で構成される．

予想 3.8(2) は $\dim X = 2$ で肯定的に解決されている．また，予想 3.8 が解決すれば予想 3.9 もすぐに従うと思われる．結局のところ「滑らかな多様体で成り立つならば，KLT に拡張しても成り立つだろう」というある種の考えからきている．

さて LC 対の話に戻そう．KLT だと L^2 理論がうまくいくが LC 対だと L^2 理論がうまくいかないと述べた．そのため次が少々気になる問題である．

問題 3.10. 予想 *3.8* は *LC* 対でも成り立つのか*?*

これが成り立ってくれば $-(K_X + D)$ がネフである LC 対 (X, D) の構造定理 (予想 3.9 の LC 版) が成り立つことがわかる．[Iwa21] の研究をする前はこれが成り立つと期待していたが，LC 対だと予想 3.8 は成り立たないことがわかった．

例 3.11. [Iwa21] H_1, H_2 を $\mathbb{P}^2$ の相異なる直線とし，$D = H_1 + H_2$ とする．すると $T(\mathbb{P}^2, D) = T_{\mathbb{P}^2}(-\log D)$ はネフである．一方で標準射影 $(\mathbb{P}^2, D) \dashrightarrow (\mathbb{P}^1, [0] + [\infty])$ が sRC quotient であるため，$(\mathbb{P}^2, D)$ はスロープ有理連結ではない．よって $(\mathbb{P}^2, D)$ は $T(X, D)$ がネフであるが sRC quotient は正則写像に取れない LC 対 (X, D) の例である．

これが「$T_X(-\log D)$ がネフの場合の (X, D) の構造定理はおそらく存在しないと思われる」と述べた理由である．

補足であるが，定理 2.13 や定理 2.14 の仮定から，$T_X(-\log D)$ がネフであることがわかる．さらにこの場合 (X, D) の sRC quotient は恒等写像か定数写像になる．よって今回のような構造定理を得ることができたということである．[17]

4. 未解決問題

[GKP21] の log smooth 版がまだ解決できていない．つまり以下の問題が気になっている．

問題 4.1. (X, D) を *log smooth* 対とする．$T_X(-\log D)\langle \frac{K_X + D}{n} \rangle$ がネフである場合 (X, D) の構造はどうなるだろうか*?*

$D = 0$ の場合，定理 2.9 より $T_X\langle \frac{K_X}{n} \rangle$ がネフならば X は (有限被覆を除いて)Abel 多様体になるのであった．しかし定理 2.14 から log smooth の場合だと Abel 多様体上のトーリック束以外も出てくることがすでわかっている．

とりあえずわかりやすい 2 つのケースに関して限定したい．

4.1. $-(K_X + D)$ がネフの場合．

つまり定理 2.14 の (2) が成り立つ場合である．この場合 (K_X+D)-negative extremal contraction の構造はわかっている．

[17] sRC quotient を見れば定理 2.13 や定理 2.14 はほぼ自明な結果である．最初はそのような証明をしていたが，色々とギャップが出てきて，今回のような証明になってしまった．

命題 4.2. [Iwa21] (X, D) を *log smooth* 対とする．さらに X が有理連結，$-(K_X + D)$ がネフ，$c_1(K_X + D) \neq 0$，ある *Cartier* 因子 B があって $T_X(-\log D) \cong \mathcal{O}_X(B)^{\oplus n}$ を仮定する．

このとき $(K_X + D)$-*negative extremal contraction* $f : (X, D) \to Y$ について次のどちらかが成り立つ．

(1) $\dim Y = 0$ かつ $(X, D) \cong (\mathbb{CP}^n, H_{\mathbb{CP}^n})$．
(2) ある D の既約成分 C があって，$f(C)$ は一点集合，*Exc*$(f) = C$，$C \cong \mathbb{CP}^{n-1}$，$C$ は他の D の既約成分とは交わらない．特に f は *divisorial contraction* である

この議論を続けれたらいいのではと思われるかもしれない．しかし f_*B が Cartier 因子でないことから，この議論は (Y, D_Y) には適応できない．個人的には $-(K_X + D)$ がネフな場合の問題 4.1 に関して，その極小モデルくらいはわかるのではと思う．

4.2. $K_X + D$ がネフの場合.

この場合は次が成り立つと考えている．

予想 4.3. $K_X + D$ と $T_X(-\log D)\langle\frac{K_X+D}{n}\rangle$ がネフならば，$K_X + D$ は半豊富である．

要はアバンダンス予想が成り立つということである．これには根拠がある．[GKP21] の証明の流れは以下の通りである．

(1) $T_X\langle\frac{K_X}{n}\rangle$ ネフから，X には有理曲線が存在しないことを示す．よって K_X はネフである．
(2) K_X と $T_X\langle\frac{K_X}{n}\rangle$ がネフから，$\kappa(K_X) = \nu(K_X)$ を示す．これより K_X が半豊富となる．
(3) K_X が半豊富かつ Ω_X^1 がネフであることから，[Hör13] より，(有限被覆を除いて) トーラスファイブレーション $f : X \to Y$ があって K_Y が豊富となる．あとは [JR13] のスロープを使った議論により，$\dim Y = 0$ となり，X は (有限被覆を除いて)Abel 多様体となる．

この議論を見ると予想 4.3 は成り立ちそうである．予想 4.3 から問題 4.1 がわかるかは不明だが，予想 4.3 単体でも十分面白い問題だと思われる．

4.3. 関連話題.

最後に余接ベクトル束 Ω_X^1 が正値性を持つときの構造定理に関する予想について紹介する．大きな予想は以下の通りである．

予想 4.4. [WZ02] Ω_X^1 がネフならば，(有限被覆を除いて) トーラスファイブレーション $f : X \to Y$ があって K_Y が豊富となる．

つまり「余接ベクトル束 Ω_X^1 がネフならアバンダンス予想が成り立つか?」ということである．これには部分的な解決が知られている．

定理 4.5. [WZ02][G.Liu14] 双正則断面曲率が半負ならば (有限被覆を除いて) トーラスファイブレーション $f : X \to Y$ があって K_Y が豊富となる．

注意点として双正則断面曲率が半負ならば，Ω_X^1 に Griffith 半正の計量が入るので，Ω_X^1 はネフである．また [WZ02] には書いていないが，[Dru18] の結果を使えば，上の代数多様体 X は Abel 多様体と K_Y が豊富な代数多様体 Y の直積に分解される．

[WZ02] の証明は微分幾何学にかなり依存しており, しかも計量のケーラー性というのを大きく使う．そして私の知る限り [WZ02] を代数幾何的に証明している文献はない. 差し当たり [WZ02] の微分幾何要素弱めな証明が気になるところである. また Ω_X^1 が Griffith 半正の計量を持つ場合であれば, Druel らによる葉層理論 (例えば [Dru18] での Bost による葉層の代数的可積分性を使うところなど) を用いれば, 意外と簡単に証明できるのではないかとは思う.

References

[AW01] M. Andreatta, J. A. Wiśniewski. *On manifolds whose tangent bundle contains an ample subbundle.* Invent. Math., **146** (1):209-217, (2001).

[BDPP13] S. Boucksom, J.-P. Demailly, M. Păun, T. Peternell, *The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension*, J. Algebraic Geom. **22** (2013), no. 2, 201–248.

[Cao19] J. Cao, *Albanese maps of projective manifolds with nef anticanonical bundles*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), **52** (2019), no. 5, 1137–1154.

[CH19] J. Cao, A. Höring, *A decomposition theorem for projective manifolds with nef anticanonical bundle*, J. Algebraic Geom. **28** (2019), 567–597.

[Cam16] F. Campana, *Orbifold slope-rational connectedness*, preprint, available at arXiv:1607.07829v2.

[CCM19] F. Campana, J. Cao, S. Matsumura, *Projective klt pairs with nef anti-canonical divisor*, to appear in Algebr. Geom., available at arXiv:1910.06471v1.

[CDP15] F. Campana, J.-P. Demailly, T. Peternell, *Rationally connected manifolds and semipositivity of the Ricci curvature.* Recent advances in algebraic geometry, 71–91, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **417**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2015.

[CP91] F. Campana, T. Peternell, *Projective manifolds whose tangent bundles are numerically effective.* Math. Ann. **289** (1991), 169–187.

[CO75] B.-Y. Chen, K. Ogiue. *Some characterization of complex space forms in terms of Chern classes*, Quart. J. Math., **26** (1975), 119-121.

[CIRM] Foliation Theory and Complex Geometry
`https://www.chairejeanmorlet.com/2020-1-pereira-rousseau.html`

[Den20] Y. Deng, *A characterization of complex quasi-projective manifolds uniformized by unit balls*, preprint, available at arXiv:2006.16178v2.

[DLB20] S. Druel, F. Lo Bianco, *Numerical characterization of some toric fiber bundles*, preprint, available at arXiv:2003.13818v2. to appear in Math. Z.

[DPS94] J.-P. Demailly, T. Peternell, M. Schneider, *Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles.* J. Algebraic Geom., **3**, (1994), no.2, 295–345.

[Dru18] S. Druel. *A decomposition theorem for singular spaces with trivial canonical class of dimension at most five.* Invent. Math. **211**, 1 (2018), p. 245-296.

[DLB20] S. Druel, F. Lo Bianco, *Numerical characterization of some toric fiber bundles*, to appear in Math. Z. preprint, available at arXiv:2003.13818v2.

[ELMNP06] L. Ein, R. Lazarsfeld, M. Mustata, M. Nakamaye, M. Popa, *Asymptotic invariants of base loci.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), no. 6, 1701–1734.

[FMi20] O. Fujino, K. Miyamoto *A characterizsation of projective spaces from the Mori theoretic viewpoint*, to appear in Osaka J. Math., available at arXiv:2001.05274v3.

[FMu21] M. Fulger, T. Murayama. *Seshadri constants for vector bundles.* J. Pure Appl. Algebra **225** (2021), no. 4, 106559, 35 pp.

[GHS03] T. Graber, J. Harris, J. Starr, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 57–67.

[GKP20] D. Greb, S. Kebekus, T. Peternell, *Projective flatness over klt spaces and uniformisation of varieties with nef anti-canonical divisor*, preprint, available at arXiv:2006.08769v1, to appear in Journal of Algebraic Geometry.

[GKP21] D. Greb, S. Kebekus, T. Peternell, *Projectively flat KLT varieties*, Journal de l'Ecole Polytechnique - Mathematiques **8** (2021), 1005-1036,

[GKT18] D. Greb, S. Kebekus, B.Taji, *Uniformisation of higher-dimensional minimal varieties*, "Algebraic Geometry: Salt Lake City 2015", Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **97**.1, American Mathematical Society, 2018, pp. 277-308

[Hör07] A. Höring, *Uniruled varieties with split tangent bundle.* Math. Z. **256** (2007), no.3, 465–479.

[Hör13] A. Höring, *Manifolds with nef cotangent bundle.* Asian J. Math. **17** (2013), no. 3, 561–568.

[HIM21] G. Hosono, M. Iwai, S. Matsumura. *On projective manifolds with pseudo-effective tangent bundle.* Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 1-30. doi 10.1017/S1474748020000754.

[Iwa20] M. Iwai, *Almost nef regular foliations and Fujita's decomposition of reflexive sheaves.*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze. (2021) DOI:10.2422/2036-2145.202010_055

[Iwa21] M. Iwai, *On the structure of a log smooth pair in the equality case of the Bogomolov-Gieseker inequality.* Preprint, arXiv:2103.08779

[JR13] P. Jahnke, I. Radloff, *Semistability of restricted tangent bundles and a question of I. Biswas.* Internat. J. Math. **24** (2013), no. 1, 1250122,

[Kaw78] Y. Kawamata, *On deformations of compactifiable complex manifolds.* Math. Ann., **235** , (1978), no. 3.

[Kob87] S. Kobayashi, *Differential geometry of complex vector bundles.* Publications of the Mathematical Society of Japan, **15** Kano Memorial Lectures, **5**. Princeton University Press, Princeton, NJ; Princeton University Press, Princeton, NJ, (1987). xii+305.

[Laz04] R. Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. II. Positivity for vector bundles, and multiplier ideals.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics. [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], **49** Springer-Verlag, Berlin, (2004), xviii+385.

[Li18] C. Li *On the stability of extensions of tangent sheaves on Kähler-Einstein Fano/Calabi-Yau pairs*, to appear in Math. Ann., available at arXiv:1803.01734v3.

[G.Liu14] G. Liu, *Compact Kähler manifolds with nonpositive bisectional curvature.* Geom. Funct. Anal. **24** (2014), no. 5, 1591–1607.

[J.Liu19] J. Liu. *Characterization of projective spaces and $\mathbb{P}^r$-bundles as ample divisors.* Nagoya Math. J. **233** 155-169, (2019).

[LOY20] J. Liu, W. Ou, X. Yang. *Projective manifolds whose tangent bundle contains a strictly nef subsheaf.* Preprint, arXiv:2004.08507

[Mor79] S. Mori, *Projective manifolds with ample tangent bundles.* Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 3, 593–606.

[MW21] S. Matsumura, J. Wang, *Structure theorem for projective klt pairs with nef anti-canonical divisor* Preprint, arXiv:2105.14308

[Nak04] N. Nakayama, *Zariski-decomposition and abundance*, MSJ Memoirs, **14**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004. xiv+277.

[Pet01] T. Peternell. *Subsheaves in the tangent bundle: integrability, stability and positivity.* School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry (Trieste, 2000), 285–334, ICTP Lect. Notes, 6, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2001.

[TY87] G. Tian, S.-T. Yau,*Existence of Kähler-Einstein metrics on complete Kähler manifolds and their applications to algebraic geometry. Mathematical aspects of string theory* (San Diego, Calif., 1986), 574–628, Adv. Ser. Math. Phys., **1**, World Sci. Publishing, Singapore, (1987).

[Tia92] G. Tian, *On stability of the tangent bundles of Fano varieties.* Internat. J. Math., **3**, (1992), no. 3, 401–413.

[Tsu88] H. Tsuji, *A characterization of ball quotients with smooth boundary.* Duke Math. J. **57**, (1988), no. 2, 537–553.

[Win04] J. Winkelmann, *On manifolds with trivial logarithmic tangent bundle.* Osaka J. Math., **41**, (2004), no. 2, 473–484.

[WZ02] H.-H. Wu, F. Zheng, *Compact Kähler manifolds with nonpositive bisectional curvature.* J. Differential Geom. **61** (2002), no. 2, 263–287.

RACMaS -Research Alliance Center for Mathematical Sciences, Tohoku University-, 6-3 Aoba, Aramaki, Aoba-ku, Sendai, Miyagi, 980-8578, Japan.

E-mail address: `masataka.iwai.c5@tohoku.ac.jp, masataka.math@gmail.com`