On the structure of a log smooth pair in the equality case of the Bogomolov-Gieseker inequality

岩井 雅崇　(東北大学数理科学連携研究センター(RACMaS))

概　要

log smooth pair (X, D) に対して「(X, D) に関する宮岡-Yau 型の不等式の等号が成立するならば, (X, D) の構造はどのようなものになっているか」という問題を考え, その問題に関する関連研究ならびに講演者によって得られた定理を紹介する.

1. Miyaoka-Yau 不等式

以下, X は $\mathbb{C}$ 上の n 次元の射影代数多様体とし, $n \geq 2$ とする．まずは Chen-Ogiue による不等式を思い出そう.

定理 1. [CO75] (X, ω) を Kähler-Einstein 多様体とし, $\alpha := \{\omega\} \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ をおく. このとき, 以下の不等式が成り立つ:

$$\left(c_2(T_X) - \frac{n}{2(n+1)} c_1(T_X)^2\right) \alpha^{n-2} \geq 0.$$

さらに上の不等式の等号が成立するとき, X の普遍被覆空間は複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$, 複素 Eucild 空間 $\mathbb{C}^n$, 複素 Eucild 空間の単位球 $\mathbb{B}^n$ の 3 種類に限られる.

定理 1 から特に次のことがわかる.

系 2. $-K_X$ が豊富で [1], X が Kähler-Einstein metric 計量を持つとき, Miyaoka-Yau 不等式 $\left(c_2(T_X) - \frac{n}{2(n+1)} c_1(T_X)^2\right)(-K_X)^{n-2} \geq 0$ が成り立つ. さらに等号が成立するとき, $X \cong \mathbb{CP}^n$ である.

2. canonical extension sheaf

定理 1 に関して, Chen-Ogiue による証明は微分幾何的すぎて少々難しい. そこで代数的な証明を考える. まずベクトル束に関する Bogomolov-Gieseker 不等式を思い出す.

定理 3. E をランク r のベクトル束とし, H を豊富直線束とする． E が H-semistable ならば, $\left(c_2(E) - \frac{r-1}{2r} c_1(E)^2\right) H^{n-2} \geq 0$ が成り立つ.

何か Miyaoka-Yau 不等式に近しいものを感じる. つまり「何か良いベクトル束の Bogomolov-Gieseker 不等式が MIyaoka-Yau 不等式である」と思われる. この何か良いベクトル束にあたるのが, Tian による"canonical extension sheaf"である.

定義 4. [Tian92] 標準的な写像 $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^1(X, \Omega_X^1) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X, \Omega_X^1)$ により, あるベクトル束 W が $c_1(-K_X)$ から誘導され,

$$0 \to \Omega_X^1 \to W \to \mathcal{O}_X \to 0$$

という完全列が成り立つ. そこで $\mathcal{E}$ を W の双対束とすると,

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to T_X \to 0$$

[1] $-K_X$ とは $\det(T_X)$ のことであり, 反標準束と呼ばれる.

という完全列を得る. $\mathcal{E}$を canonical extension sheaf という.

canonical extension sheaf $\mathcal{E}$に関して次のことがわかっている.

定理 5. [Tian92] $-K_X$ が豊富で X が Kähler-Einstein 計量を持つとき, canonical extension sheaf $\mathcal{E}$ は $-K_X$-semistable である.

よって定理3と定理5から次を得る.

系 6. $-K_X$ が豊富で X が Kähler-Einstein 計量を持つとき, $\left(c_2(T_X) - \frac{n}{2(n+1)}c_1(T_X)^2\right)(-K_X)^{n-2} \geq 0$ が成り立つ.

つまり, より簡単に MIyaoka-Yau 不等式が証明できた.

3. Miyaoka-Yau 不等式の等号成立の場合の X の構造.

canonical extension sheaf を用いた Miyaoka-Yau 不等式の証明は, かなり分かりやすいものではあるが, 等号成立の場合の X の構造に関してはよくわからないという欠点もある. しかし近年 Greb-Kebekus-Peternell によって次のことがわかった.

定理 7. [GKP20] X を klt 多様体[2] とし, $-K_X$ がネフであると仮定する. このとき次は同値である.

1. 豊富直線束 H があって, canonical extension sheaf $\mathcal{E}$ が H-semistable であり, 次の等号が成立する:
$$\left(\hat{c}_2(\Omega_X^{[1]}) - \frac{n}{2(n+1)}\hat{c}_1(\Omega_X^{[1]})^2\right)[H]^{n-2} = 0.$$
2. X は $\mathbb{CP}^n$ もしくは Abelian variety を, codimension 1 を除いて固定点自由な有限群の作用で割った商である.

私は定理7を log smooth pair (X, D) に拡張した.

定理 8. [Iwa21] D を simple normal crossing divisor, H を豊富直線束とする. $-(K_X + D)$ がネフであると仮定する. log canonical extension sheaf $\mathcal{E}$[3] が H-semistable で

$$\left(c_2(T_X(-\log D)) - \frac{n}{2(n+1)}c_1(T_X(-\log D))^2\right)H^{n-2} = 0$$

が成り立つとき, (X, D) に関して次のどちらかが成り立つ.

1. ある Abelian variety の有限商 Y があって, (X, D) は Y 上の toric 束である.
2. $(X, D) \cong (\mathbb{P}^n, 0)$ である.

参考文献

[CO75] B.-Y. Chen, K. Ogiue. *Some characterization of complex space forms in terms of Chern classes*, Quart. J. Math., **26** (1975), 119-121.

[GKP20] D. Greb, S. Kebekus, T. Peternell, *Projective flatness over klt spaces and uniformisation of varieties with nef anti-canonical divisor*, to appear in Journal of Algebraic Geometry, available at arXiv:2006.08769v1.

[Iwa21] *On the structure of a log smooth pair in the equality case of the Bogomolov-Gieseker inequality*, preprint available at arXiv:2103.08779.

[Tian92] G. Tian, *On stability of the tangent bundles of Fano varieties.* Internat. J. Math., **3**, (1992), no. 3, 401–413.

[2] klt 特異点を持つ多様体のこと

[3] これは定義4を log smooth pair(X, D) に拡張したものである.