Projective manifolds with pseudo-effective tangent bundle

岩井 雅崇　(東京大学)*

概　要

本講演では擬有効などの代数幾何学的な正値性について紹介し, 接ベクトル束が代数的正値性を持つときの代数多様体の構造について, 関連研究と得られた結果を紹介する. この研究は松村慎一氏と細野元気氏との共同研究である.

本文では X を n 次元複素射影代数多様体 ($\mathbb{CP}^N$ の中の滑らかな閉複素多様体, 以下代数多様体という) とし, T_X を正則接ベクトル束とする. 標準束 K_X を T_X の行列式束の双対, つまり $K_X := \det(T_X)^*$ とする. $\mathbb{N}_{>0}$ を正の自然数とする.

1. 直線束の正値性

1.1. 代数幾何学的な正値性

定義 1.1. L を X 上の直線束とする.

1. 曲率が正である滑らかな計量 h を L が持つとき, L は豊富 (ample) であるという.
2. 任意のカーブ $C \subset X$ に関して $L.C := \int_C c_1(L) \geq 0$ となるとき, L はネフ (nef) であるという.
3. 十分大きい $m \in \mathbb{N}_{>0}$ について正則切断 $H^0(X, L^{\otimes m})$ の ($\mathbb{C}$ の線型空間としての) 次元が m^n ぐらいであるとき, L は巨大 (big) であるという.
4. ある豊富な直線束 A があって任意の $m \in \mathbb{N}_{>0}$ について $L^{\otimes m} \otimes A$ が巨大であるとき, L は擬有効 (pseudo-effective) であるという.

このような概念が導入された経緯について述べておく. 代数幾何学には「代数多様体の分類問題」という昔からの問題がある. 例えば X が 1 次元であるとき, X はある種数の Riemann 面と双正則である. これで分類ができている.

X が 2 次元であるとき, 双正則で分類は絶望的である (ブローアップ (blow up) という操作があるから). しかし K_X が擬有効であるときブローダウン (blow down) の有限操作列

$$X := X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_m$$

があって, K_{X_m} がネフとなる. あとはこの X_m を分類すれば良い. 実際, 小平-Enriques による曲面の分類がある.

K_X が擬有効であり X が 3 次元であるとき, フリップ (flip) や因子的収縮 (divisorial contraction) と呼ばれる双有理写像 (”ほぼ双正則な写像”) の有限操作列

$$X := X_0 \dashrightarrow X_1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_m$$

本研究は博士課程教育リーディングプログラム・数物フロンティア・リーディング大学院と，科研費 (課題番号:17J04457.) の助成を受けたものである.

* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院 数理科学研究科
e-mail: masataka@ms.u-tokyo.ac.jp

があって, K_{X_m} がネフとなる.

こういう事象があって K_X がネフである代数多様体は極小モデルと呼ばれる. K_X が擬有効である3次元以下の代数多様体は極小モデルへの双有理写像をもつことがわかる. では X が4次元以上でも同様のことが言えるのだろうか, つまり以下の予想は正しいのだろうか?

予想 1.2 (極小モデルの存在問題)**.** K_X が擬有効であるとき, X はある極小モデルへの双有理写像をもつのだろうか?

大きな部分的解決として次の Birkar-Cascini-Hacon-Mckernan[BCHM] による大定理がある.

定理 1.3. [BCHM] K_X が巨大であるとき, 予想1.2は正しい.

というわけでネフ, 巨大, 擬有効が代数幾何学 (双有理幾何学) で重要な概念となっている.

補足 1.4.

1. 実は X_m とかは特異点を持つことがある. 滑らかな代数多様体のカテゴリーだけではうまくいかない.
2. [BCHM] により K_X が擬有効でないときは, X は森ファイバー空間 Z (ラフに言うと $f : Z \to Y$ があって f のファイバーが Fano 多様体になる. Fano 多様体に関しては後述参照) への双有理写像をもつことがわかっている.

1.2. 特異 Hermite 計量との関係

引き続き L を直線束とする. ある L 上の滑らかな計量 h_0 と局所可積分な関数 φ が存在して, $h = h_0 e^{-\varphi}$ とかけるとき, h は L の特異 Hermite 計量であるという. このとき, h の曲率カレントを $\sqrt{-1}\Theta_{L,h} = \sqrt{-1}\Theta_{L,h_0} + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$ と定義する. 代数的な正値性は以下のように滑らかな計量や特異 Hermite 計量を用いて記述できる.

定理 1.5. [Dem1]ω を Kähler 形式とする.

1. L がネフであることと, 任意の $\epsilon > 0$ について, ある滑らかな計量 h_ϵ が存在して $\sqrt{-1}\Theta_{L,h_\epsilon} \geq -\epsilon\omega$ となることは同値である.
2. L が巨大であることと, ある $\epsilon > 0$ とある特異 Hermite 計量 h_ϵ が存在してカレントの意味で $\sqrt{-1}\Theta_{L,h} \geq \epsilon\omega$ となることは同値である.
3. L が擬有効であることと, L が曲率カレント半正な (カレントの意味で $\sqrt{-1}\Theta_{L,h} \geq 0$) 特異 Hermite 計量 h を持つことは同値である.

この定理によって以下の関係がすぐにわかる.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{豊富 (ample)} & \Longrightarrow & \text{巨大 (big)} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{ネフ (nef)} & \Longrightarrow & \text{擬有効 (pseudo-effective)}
\end{array}
$$

曲率カレント半正とは多変数複素解析における劣調和函数と関連がある．実際曲率カレント半正の計量は局所的には劣調和函数を用いて記述できる．この定理により代数多様体に多変数複素解析的な手法を使いやすくなった．例えばSiuによる多重種数の変形普遍性やAngehrn-Siuによる藤田予想の部分的解決などいろいろな定理が多変数複素解析的な手法を用いて証明された．(代数多様体の研究を行なっている私が今回の函数論シンポジウムで講演できるのもこういった事情である．) 詳しい応用はDemaiilyのレクチャーノート[Dem2]を参照していただきたい．

2. ベクトル束の正値性

2.1. ベクトル束の代数幾何学的な正値性

定義 2.1. E を X 上のベクトル束とする．$\pi\colon \mathbb{P}(E) \to X$ を X 上の E の射影束とし，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ を π^*E の普遍的商直線束とする (Serre line bundle や tautogical line bundle の双対とも)．

1. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ が $\mathbb{P}(E)$ の上で豊富なとき，E は豊富であるという．
2. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ が $\mathbb{P}(E)$ の上でネフなとき，E はネフであるという．
3. ある点 $x \in X$ があって，任意の $a \in \mathbb{N}_{>0}$ と任意の豊富直線束 A について，ある $b \in \mathbb{N}_{>0}$ が存在して，E の ab 対称積と $A^{\otimes b}$ の積 $\mathrm{Sym}^{ab}(E) \otimes A^{\otimes b}$ が x で大域切断で生成されるとき，E は擬有効であるという．
4. ある豊富な直線束 A とある自然数 b について $\mathrm{Sym}^b(E) \otimes A^*$ が擬有効であるとき，E は巨大であるという．

これらは直線束の定義のときのベクトル束への拡張になっている．ベクトル束の擬有効に関しては文献によって定義が定まっておらず注意が必要である．本文では上の定義を採用する．擬有効は中山の意味で弱正値 (weakly positive in the sense of Nakayama) と同値である．

2.2. ベクトル束の特異 Hermite 計量

さて直線束においては特異 Hermite 計量が定義できた．Berndtsson-Păun[BP] はベクトル束に対して特異 Hermite 計量の概念を拡張し，Păun-Takayama[PT] が詳しく調べた．ベクトル束の特異 Hermite 計量の理論を応用して，Cao-Păun は底空間が Abel 多様体のときの飯高予想 (全体空間の小平次元がファイバーの小平次元以上である) を示した．これは多変数複素解析を用いて代数多様体を調べる分野のブレイクスルーである．Cao-Păun のこの結果は純粋な代数的証明がいまだに知られていない．

ベクトル束の特異 Hermite 計量の定義は以下の通りである．(Păun-Takayama 以後，Hacon-Popa-Schnell[HPS] が Cao-Păun の結果を含めたわかりやすいサーベイをまとめており，今回はそちらの定義を採用する．日本語訳がないため適宜英語でそのまま流用する．)

定義 2.2. [HPS] 有限次元複素ベクトル空間 V に対して $|-|_h\colon V \to [0,+\infty]$ が次を満たすとき，$|-|_h$ は *singular Hermitian inner product* であるという．

1. 任意の $\alpha \in \mathbb{C} \setminus 0$ と任意の $v \in V$ について，$|\alpha \cdot v|_h = |\alpha||v|_h$.

2. $|0|_h = 0$.

3. 任意の $v, w \in V$ について, $|v+w|_h \le |v|_h + |w|_h$.

4. 任意の $v, w \in V$ について, $|v+w|_h^2 + |v-w|_h^2 = 2|v|_h^2 + 2|w|_h^2$.

定義 2.3. [BP][HPS] E をベクトル束とする. 任意の点 $x \in X$ に対して singular Hermitian inner product $|-|_{h,x}\colon E_x \to [0,+\infty]$ が対応しており, さらに次が満たされるとき, h は E の特異 Hermite 計量であるという.

1. ほとんど全ての x について $|v|_{h,x} = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

2. ほとんど全ての x について, 任意の $v \in E_x$ について, $|v|_{h,x} < +\infty$.

3. 任意の開集合 U と任意の正則切断 $s \in H^0(U, E)$ について

$$|s|_h\colon U \to [0,+\infty] \ \ ; \ \ x \to |s(x)|_{h,x}$$

が可測関数である.

特異 Hermite 計量に対して正値性を定義する. 直線束のときは曲率カレントが定義できたが, ベクトル束のときは曲率カレントが定義できない. そのため正値性を適切に定義するのが非常に難しい (正値性が定義できても, 応用があまりないというものも多い). 以下の Griffiths 半正は適切に定義ができ, そして応用が凄まじいため非常に重要な概念である.

定義 2.4. [BP] [PT][HPS] h をベクトル束 E の特異 Hermite 計量とする.

1. E の任意の局所正則切断 u について $\log |u|_h^2$ が劣調和函数であるとき, h は Griffiths 半負 (Griffiths seminegative) という.

2. $h^* := {}^t h^{-1}$ が E^* 上の Griffiths 半負計量であるとき, h は Griffiths 半正 (Griffiths semipositive) という.

いくつか補足しておく. この定義は h が滑らかであるときの Griffiths 半正の定義 (曲率を使って定義するもの) と同値である. E が直線束であるときは h が Griffiths 半正と h の曲率カレントが半正は同値である. Griffiths semipositive 以外にも (semi)positively curved という呼び方があるが同じである.

2.3. 代数的正値性と特異 Hermite 計量の関係

直線束の場合にはネフ, 巨大などの代数的正値性が特異 Hermite 計量を用いて記述できた. ではベクトル束の場合にはどうなるだろうか? この問題に関して次の結果がある.

定理 2.5. [LSY][Iwa] E をベクトル束とする.

1. E が豊富であることは, ある $b \in \mathbb{N}_{>0}$ が存在して $\mathrm{Sym}^b(E)$ が滑らかな Griffiths 正の計量を持つことと同値である.

2. E がネフであることは, 豊富直線束 A が存在して任意の $a \in \mathbb{N}_{>0}$ について $\mathrm{Sym}^a(E) \otimes A$ が滑らかな Griffiths 半正な計量を持つことと同値である.

3. E が巨大であることは, ある $b \in \mathbb{N}_{>0}$ と豊富直線束 A が存在して $\mathrm{Sym}^b(E) \otimes A^*$ が Griffiths 半正な特異 Hermite 計量を持つことと同値である.

4. E が擬有効であることは, 豊富直線束 A が存在して任意の $a \in \mathbb{N}_{>0}$ について $\mathrm{Sym}^a(E) \otimes A$ が Griffiths 半正な特異 Hermite 計量を持つことと同値である.

この定理を用いると (用いないものもあるが) 以下の関係がすぐにわかる. （いずれも逆は成り立たない例がある. ）

$$
\begin{tikzcd}
\text{豊富 (ample)} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{巨大 (big)} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \text{ が 巨大 (big)} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{ネフ (nef)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{擬有効 (pseudo-effective)} \arrow[r, Rightarrow] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \text{ が 擬有効 (pseudo-effective)} \\
 & \begin{array}{c}\text{Griffiths 半正な} \\ \text{特異 Hermite 計量を持つ}\end{array} \arrow[u, Rightarrow] &
\end{tikzcd}
$$

3. 接ベクトル束が代数幾何学的な正値性を持つときの代数多様体の構造

定理 3.1. [Mori] T_X が豊富であるとき, X は $\mathbb{CP}^n$ と双正則である.

これは Hartshorne 予想と呼ばれ, 森重文によって解かれた. T_X がネフのときは Campana-Peternell や Demailly-Peternell-Schneider らが次を示している.

定理 3.2. [CP][DPS1] T_X がネフであるとき, 次が成り立つ.

1. X の有限エタールカバー (有限被覆空間)X' と X' から Abel 多様体 (トーラスで代数構造を持つもの)A への滑らかな全射 (沈め込み)$\phi : X' \to A$ が存在する.

2. ϕ のファイバーを F とすると, T_F はネフで F は Fano 多様体 (K_F^* が豊富) である.

つまり T_X がネフのとき, X はほぼほぼ Abel 多様体と Fano 多様体で構成されている.
では T_X が巨大や擬有効であるときの X の構造はどうなるのだろうか. T_X が巨大のときは Fulger-村山が次のことが示した.

定理 3.3. [FM] T_X が巨大であるとき, X は $\mathbb{CP}^n$ と双正則である.

証明には Cho-宮岡-Shepherd-Barron による複素射影空間の特徴づけ [CMSB] を用いる. 実は [CMSB] での特徴づけと定理 2.5 を用いると定理 3.3 はすぐ出てしまう. 事実 Fulger-村山の論文もベクトル束の Seshadri 定数に関して調べた系として定理 3.3 を得ている. (ベクトル束の Seshadri 定数も代数的正値性と関わりが深く重要である.)
我々が得た結果は T_X が擬有効のときの X の構造についての結果である.

定理 3.4. [HIM] T_X が擬有効であるとき次が成り立つ.

1. X の有限エタールカバー X' と X' から Abel 多様体 A への滑らかな全射 $\phi : X' \to A$ が存在する.

2. ϕ のファイバーを F とすると, T_F は擬有効で F は有理連結多様体 (任意の 2 点が有理曲線 ($\mathbb{CP}^1$ の像になってる曲線) で結べる多様体) である.

3. さらに T_X が Griffiths 半正な特異 Hermite 計量を持つとき, ϕ は locally isotrivial である. つまり任意の点 $y \in A$ に関して, y を含む Euclid 開集合 $U \subset A$ があって $\phi^{-1}(U) \cong U \times F$ である.

つまり T_X が擬有効のとき, X はほぼほぼ Abel 多様体と有理連結多様体で構成されている. Campana [Cam] 及び Kóllar-宮岡-森 [KMM] により, Fano 多様体は有理連結多様体であることが知られている. そのため我々の主定理である, 定理 3.4 は T_X がネフであるときの結果の拡張になっている.

4. 証明の概略

4.1. MRC ファイブレーション

定理 3.4 の証明には Campana [Cam] 及び Kóllar-宮岡-森 [KMM] が導入した MRC ファイブレーション (maximal rationally connected fibration) の解析が鍵となる.

定理 4.1. [Cam][KMM] X を代数多様体とする. このときある代数多様体 Y への支配的な有理写像 $\varphi : X \dashrightarrow Y$ があって, 次の三つを満たす.

1. ある Zariski 開集合 $Y_0 \subset Y$ があって $X_0 := \varphi^{-1}(Y_0)$ とするとき, φ は X_0 上で固有正則写像である.

2. F を φ の一般ファイバーとするとき F は既約な有理連結多様体である.

3. X 上の任意の有理曲線 R が一般ファイバー F と交わるとき, $R \subset F$ となる.

この有理写像 φ を MRC ファイブレーションと呼ぶ. この有理写像は双有理写像を除いて一意に定まる.

簡単にいうと MRC ファイブレーションは”有理連結多様体をつぶす写像で一番大きいもの”である. このままでは MRC ファイブレーションを扱うのは難しいが Greb-Harris-Starr の結果と Boucksom-Demailly-Păun-Peternell の結果を合わせると次がわかる.

定理 4.2. [GHS][BDPP] MRC ファイブレーション $\varphi : X \dashrightarrow Y$ に関して Y の標準束 K_Y は擬有効である.

4.2. MRC ファイブレーションが射のときの主定理の証明

ここからベクトル束と局所自由連接層を同一視する. 証明には以下の命題を使う.

命題 4.3. [DPS2] E,F を X 上のベクトル束とする.

1. E が擬有効で $E \to F$ を一般的全射 (generically surgective) のとき F も擬有効である. ここで一般的全射とは空でない Zariski 開集合上で全射であることを意味する.

2. E が擬有効であるとき, 任意の $a \in \mathbb{N}_{>0}$ について $\mathrm{Sym}^a(E)$ や $\wedge^a E$ は擬有効である.

3. E が擬有効であるとき, 0 でない正則切断 $s \in H^0(X, E^*)$ は零点を持たない.

上の全射は層としての射としての全射である. 層の単射 (全射) はベクトル束の単射 (全射) ではないことに注意する.

MRCファイブレーションが写像であるとき, つまりMRCファイブレーションφがX上で定義されている固有正則全射であるとき, 定理3.4は次の定理に包含される. （次の定理は擬有効をうまく定義すればコンパクトKählerでも良い）.

定理 4.4. $f : X \to Y$を代数多様体の間の固有正則な全射とし, T_XとK_Yは擬有効とする. Yの次元を1以上とするとき, 次が成り立つ.

1. K_Yは数値的に自明, つまり$c_1(K_Y) = 0$である.
2. fは滑らかである.
3. Abel多様体Aがあって, AはYの有限エタールカバーである.

Proof. 1. 以下の層の完全列を考える.

$$0 \to \ker df \to T_X \xrightarrow{df} f^*(T_Y)$$

T_Xが擬有効でdfは一般的全射であるため$f^*(T_Y)$は擬有効である. よって命題4.3から$f^*(K_Y^*)$も擬有効である. 一方$f^*(K_Y)$も擬有効であるため, $f^*(K_Y)$は数値的自明でありK_Yもそうである.

2. 上の層の完全列の双対を取ると

$$0 \to f^*(\Omega_Y) \xrightarrow{(df)^*} \Omega_X \to (\ker df)^*$$

を得る. これの$\dim Y$回外積を取ると,

$$0 \to f^*(K_Y) \xrightarrow{\wedge (df)^*} \wedge^{\dim Y} \Omega_X$$

を得る. $\wedge(df)^* \in \mathrm{Hom}(f^*(K_Y), \wedge^{\dim Y}\Omega_X) \cong H^0(X, (f^*(K_Y) \otimes \wedge^{\dim Y} T_X)^*)$ 及び$f^*(K_Y) \otimes \wedge^{\dim Y} T_X$は擬有効であるから, 命題4.3より$\wedge(df)^*$は零点を持たない. よって$(df)^* : f^*(\Omega_Y) \to \Omega_X$はベクトル束の単射であり, fは滑らかである. （局所座標を用いてこの写像$(df)^*$がどういう写像かを書き下すとわかる.）

3. 1と2からT_Yは擬有効でK_Yは数値的自明である. [DPS2]により$c_1(T_Y) = c_2(T_Y) = 0$である. よってYauの定理([Kob, Corollary 4.4.15]参照）により証明できた. □

4.3. 特異葉層構造

MRCファイブレーションが正則写像と限らない場合について取り扱う. その際に使うのが特異葉層構造である. $\mathcal{F} \subset T_X$を連接層とする. $X_\mathcal{F}$を$\mathcal{F}$が局所自由層になる最大のZariski開集合とする.

定義 4.5. [Laz, Chapter 4]

1. $\mathcal{F}$や$T_X/\mathcal{F}$はねじれがなく, $[\mathcal{F}, \mathcal{F}] \subset \mathcal{F}$(Lieブラケットで閉じている)とき, $\mathcal{F}$を特異葉層(singular foliation)という.
2. $T_L = \mathcal{F}|_L$となる連結な局所閉部分多様体$L \subset X_\mathcal{F}$で極大なものを$\mathcal{F}$の葉(leaf)という.

葉層構造の最も簡単な例は写像から作られるものである．代数多様体の間の射 f : $X \to Y$ に関して微分 $df : T_X \to f^*(T_Y)$ の核 $\ker df \subset T_X$ は特異葉層である．この葉層の葉は f の一般ファイバーとなる．特異葉層に関しては代数幾何学とも関連が深い．詳しい応用についてはLazićのレクチャーノート [Laz] を参照していただきたい．

MRC ファイブレーションを特異葉層構造を用いて解析を行う手法はCao-Höring[CH]が「K_X^* がネフのときの X の構造定理」を示す際にも使われている．その証明に使うのがHöringの次の定理である．定理3.4においても以下の定理が鍵となっている．

定理 4.6. [Hor, Corollary 2.11] $\mathcal{F} \subset T_X$ を特異葉層とする．$\mathcal{F}$ が局所自由層であり, $\mathcal{F}$ のある一つの葉がコンパクトで有理連結多様体であるとする．このときある代数多様体 Y への滑らかな射 $f : X \to Y$ があり $\mathcal{F} = \ker df$ となる．(f の全てのファイバーがコンパクトで有理連結多様体となる.)

ここまでくると定理3.4の証明 (の概要) は以下のように述べられる．

Proof. 定理4.6を用いてMRC ファイブレーション $\varphi : X \dashrightarrow Y$ を正則写像に取り替えることを考える．それには定理4.6を満たす特異葉層 $\mathcal{F} \subset T_X$ を探せば良い．安直に考えれば $\varphi : X \dashrightarrow Y$ の関しての微分の核"$\ker d\varphi$"が特異葉層になりそうである．(ただ φ は有理写像であるため, "$\ker d\varphi$"が定義できない．) この安直さに従って"$\ker d\varphi$"にあたるものを探すことによって, 定理4.6を満たす特異葉層を作る．

locally isotriviality に関しては定理3.4での滑らかな射 $\phi : X' \to A$ から得られるベクトル束の完全列

$$0 \to \ker d\phi \to T_X \xrightarrow{d\phi} \phi^*(T_A) \to 0$$

を考える．T_X がGriffiths 半正な特異Hermite 計量をもち, $\det(\phi^*(T_A))$ が数値的自明であるためこの完全列が分裂する ([HIM, Theorem 1.4])．よって $T_X \cong \ker d\phi \oplus \phi^*(T_A)$ となる．$\ker d\phi$ が局所自由な特異葉層であるため, Ehresmann の定理と Fischer-Grauert の定理から従う．(詳しくは [Hor, Lemma 3.19] 参照のこと) □

5. さらなる構造定理

4 節でも触れたが, Cao-Höring は K_X^* がネフのときの X の構造定理を特異葉層を用いて示した．

定理 5.1. [CH][Cao] K_X^* はネフとする．

1. X の Albanese 写像 $Alb : X \to A$ はlocally isotrivial である．
2. X が単連結であるとする．このとき有理連結多様体 F と $c_1(K_Y) = 0$ なる代数多様体 Y があって $X \cong Y \times F$ となる．
3. X の普遍被覆は複素 Euclid 空間 $\mathbb{C}^N$ と有理連結多様体と Calabi-Yau 多様体とハイパー Kähler 多様体の直積である．

この定理から定理3.2が従う．T_X や K_X^* に豊富やネフなどの代数的な正値性があると, どうも構造の分類ができやすい感じである．さてこの定理に関して少々気になる点がある．T_X がネフであるとき, 定理3.2により $\phi : X' \to A$ は滑らかな写像である．Cao-Höring の定理 (およびその証明) からこの写像 ϕ はlocally isotrivial である．この

locally isotriviality はもっと簡単に言えないだろうか? (つまり Cao-Höring の証明とは違った方法で locally isotriviality を言えないだろうか.)

最後に [HIM] にも述べた問題について紹介する. Demailly-Peternell-Schneider[DPS1] の論文を見る限り次がわかる.

定理 5.2. *T_X がネフであり, $\chi(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ とする. このとき X は Fano である. 特に X が有理連結であり T_X がネフなら K_X^* は豊富である.*

Proof. $c_1(T_X)^n = 0$ だと [DPS1, Proposition 3.10] から $\chi(X, \mathcal{O}_X) = 0$ となってしまう. よって $c_1(T_X)^n \neq 0$ である. これより K_X^* ネフかつ $c_1(K_X^*)^n \neq 0$ であるので, [DPS1, Proposition 3.8] から K_X^* は豊富である. □

では同じようなことが擬有効でも成り立つのであろうか？

予想 5.3. [HIM] *X が有理連結であり T_X が擬有効なら K_X^* は巨大か？*

参考文献

[BCHM] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon, J. McKernan. *Existence of minimal models for varieties of log general type.* J. Amer. Math. Soc., **23** (2010) 405-468.

[BDPP] S. Boucksom, J.-P. Demailly, M. Păun, T. Peternell, *The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension*, J. Algebraic Geom. **22** (2013), no. 2, 201–248.

[BP] B. Berndtsson, M. Păun. *Bergman kernels and the pseudoeffectivity of relative canonical bundles.* Duke Math. J. **145** (2008), no. 2, 341-378.

[Cam] F. Campana, *Connexité rationnelle des variétés de Fano*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **25** (1992), no. 5, 539–545.

[CP] F. Campana, T. Peternell, *Projective manifolds whose tangent bundles are numerically effective*, Math. Ann., **289** (1991), 169–187.

[Cao] J. Cao, *Albanese maps of projective manifolds with nef anticanonical bundles*, to appear in Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, arXiv:1612.05921v3.

[CH] J. Cao, A. Höring *A decomposition theorem for projective manifolds with nef anticanonical bundle*, to appear in Journal of Algebraic Geometry, arXiv:1706.08814v1.

[CMSB] K. Cho, Y. Miyaoka, N. I. Shepherd-Barron. *Characterizations of projective space and applications to complex symplectic manifolds, Higher dimensional birational geometry.* Adv. Stud. Pure Math. Math. Soc. Japan. **35** (2002), 1–88.

[Dem1] J.-P. Demailly. *Singular Hermitian metrics on positive line bundles.* Lecture Notes in Math. **1507** (1992), Springer, Berlin. 87–104.

[Dem2] J.-P. Demailly, *Analytic methods in algebraic geometry*, Surveys of Modern Mathematics, **1**, International Press, Somerville, Higher Education Press, Beijing, (2012).

[DPS1] J.-P. Demailly, T. Peternell, M. Schneider, *Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles*, J. Algebraic Geom., **3**, (1994), no.2, 295–345.

[DPS2] J-P. Demailly, T. Peternell, M. Schneider. *Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds*, Internat. J. Math. **12** (2001), no. 6, 689–741.

[FM] M. Fulger, T. Murayama. *Seshadri constants for vector bundles.* Preprint, arXiv:1903.00610v2

[GHS] T. Graber, J. Harris, J. Starr, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 57–67.

[HPS] C. Hacon, M. Popa, C. Schnell, *Algebraic fiber spaces over abelian varieties: around a recent theorem by Cao and Păun*, Local and global methods in algebraic geometry, 143–195, Contemp. Math., **712**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018.

[HIM] G. Hosono, M. Iwai, S. Matsumura. *On projective manifolds with pseudo-effective tangent bundle* Preprint, arXiv:1908.06421

[Hor] A. Höring, *Uniruled varieties with split tangent bundle*, Math. Z., **256** (2007), no.3, 465–479.

[Iwa] M. Iwai, *Characterization of pseudo-effective vector bundles by singular hermitian metrics*, Preprint, arXiv:1804.02146v2.

[Kob] S. Kobayashi. *Differential geometry of complex vector bundles.* Reprint of the 1987 edition. Princeton Legacy Library. Princeton University Press, Princeton, NJ, (2014). xi + 304 pp. ISBN: 978-0-691-60329-2

[KMM] J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori, *Rationally connected varieties*, J. Algebraic Geom. **1** (1992), no. 3, 429–448.

[Laz] V. Lazić. *Selected Topics in Algebraic Geometry - Foliations* Available at `https://www.math.uni-sb.de/ag/lazic/teach/foliation.pdf`

[LSY] K. Liu, X. Sun, X. Yang. *Positivity and vanishing theorems for ample vector bundles.* J. Algebraic Geom. **22** (2013), no. 2, 303–331.

[Mori] S. Mori, *Projective manifolds with ample tangent bundles*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 3, 593–606.

[PT] M. Păun, S. Takayama, *Positivity of twisted relative pluricanonical divisors and their direct images*, J. Algebraic Geom. **27** (2018), 211–272.