複素解析ノート

岩井雅崇 (大阪大学)

April 5, 2023 ver 1.00

1

定義 1 (正則関数)**.** 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の複素数値関数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ が Ω で正則であるとは, 任意の $a \in \mathbb{C}$ について

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在すること. この極限値を $f'(a)$ とかく.

定理 2 (コーシーの積分定理)**.** 円盤 $D \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数 $f : D \to \mathbb{C}$ と D 内の (区分的滑らかな) 閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z)dz = 0$$

定理 3 (コーシーの積分公式)**.** 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ と $\bar{D} \subset \Omega$ となる円盤 D に対して, 任意の $a \in D$ について

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

証明は半径 ϵ の円盤に帰着させて計算を行う

定理 4 (コーシー型の積分の正則性)**.** 円盤 $D \subset \mathbb{C}$ とし, 連続関数 $\varphi : \partial D \to \mathbb{C}$ とする. このとき

$$\int_C f(z) = \int_{\partial D} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

は D 上で正則であり,

$$f'(z) = \int_{\partial D} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

2

定理 5 (コーシーの積分公式の応用)**.** 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ と $\bar{D} \subset \Omega$ となる円盤 D に対して, 任意の $a \in D$ について

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

もっと一般に任意の自然数 n について

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

定理 6 (リウヴィユの定理)**.** $\mathbb{C}$ 上の有界正則関数は定数である.

定理 7 (積分記号下の微分)**.** 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$, 区分的滑らかな曲線 $C \subset \mathbb{C}$, 連続関数 $f(z, \xi) : \Omega \times C \to \mathbb{C}$ とする. $\xi \in C$ を固定すると $f(z, \xi)$ は Ω 上で正則であるとする. このとき

$$G(z) = \int_C f(z, \xi) d\xi$$

は Ω 上で正則であり

$$\frac{dG(z)}{dz} = \int_C \frac{\partial f}{\partial z}(z, \xi) d\xi$$

証明は $f(z, \xi)$ を積分の形で書いて, 累次積分の順序交換を行う (順序交換できるのは積分する範囲をコンパクトにとれるから.)

3

定理 8 (ワイエルシュトラスの二重級数定理)**.** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数列とし, f を Ω 上の関数とする. Ω の任意のコンパクト集合上で $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に一様収束するとき (つまり広義一様収束するとき), f は Ω 上で正則であり, $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ は Ω の任意のコンパクト集合上で f' に収束する.

証明は $f_n(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_n(z)}{z-a} dz$ であり $\frac{f_n(z)}{z-a}$ は $\frac{f(z)}{z-a}$ に広義一様収束するので, 極限と積分の順序交換から $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz$ となり正則がいえる.

定理 9 (ワイエルシュトラスの M 判定法)**.** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の関数列とする. 正の数の列 $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ が次の二つを満たすとする.

1. 任意の $z \in K$ について $|f_n(z)| \le M_n$ が成り立つ.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束する.

このとき $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は K 上で絶対かつ一様に収束する.

4

定義 10 (ベキ級数)**.**　$a \in \mathbb{C}$ について

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

と表せられる関数をベキ級数という.

定理 11. ベキ級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)$ が $\alpha \neq a$ で収束すると仮定する. $R = |\alpha - a|$ とし $D = \{z \in \mathbb{C} | |z-a| < R\}$ とする. このとき D 上の任意のコンパクト集合で $f(z)$ は一様収束し, $f(z)$ は D 上で正則で

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$$

証明は仮定から $c_n < \frac{A}{R^n}$ となる $A > 0$ が取れるのでワイエルシュトラスの M 判定法と二重級数定理が言える.

定理 12. ベキ級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)$ が $\alpha \neq a$ で収束すると仮定する. $R = |\alpha - a|$ とし $D = \{z \in \mathbb{C} | |z-a| < R\}$ とする. このとき D 上の任意のコンパクト集合で $f(z)$ は一様収束し, $f(z)$ は D 上で正則で

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$$

定理 13. $\mathbb{C}$ 上の領域 D 上の正則関数は $a \in D$ について, $\{|z-a| < d(a, \partial D)\}$ 上で $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ とテイラー展開され, 収束半径は $d(a, \partial D)$ 以上である. 特に解析的 (ベキ級数展開可能) である. また $r < d(a, \partial D)$ を一つ取ると

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|<r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \text{ である.}$$

定理 14 (ローラン展開)**.** $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ について $R(a, r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z-a| < r_2\}$ とおく. $R(a, r_1, r_2)$ 上の正則関数 f について, $R(a, r_1, r_2)$ 上で

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n (z-a)^n$$

と展開できる (そして右の級数は絶対かつ一様に収束する.)

定義 15. $R(a,0,r_2)$ 上でのローラン展開 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n(z-a)^n$ について $a_n\neq 0$ なる $n<0$ が無限個あるとき, a を f の孤立真性特異点という.
$a_n\neq 0$ なる $n<0$ が有限個しかないとき

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots$$

とかける. $m>0$ のとき a は位数 m の極であるという.
$a_n\neq 0$ なる $n<0$ がない場合,

$$f(z)=\frac{a_{m}}{(z-a)^m}+\frac{a_{m+1}}{(z-a)^{m+1}}+\cdots$$

とかける. このとき a は位数 m の極であるという.
また $a=\infty$ のローラン展開などは $f(\frac{1}{w})$ の $w=0$ の場合のものとして考える.

定義 16 (有理型関数)**.** リーマン球面 $\hat{C}$ 上の領域 D について f が任意の $a\in D$ でたかだか極しか持たない関数を D 上の有理型関数という.

定義 17 (有理型関数)**.** リーマン球面 $\hat{C}$ 上の領域 D とし, f を D 上の有理型関数とする. $a\in D\cap\mathbb{C}$ について f の a での留数を

$$Res(a:f)=a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|<\epsilon} f(z)dz$$

とし, $a=\infty$ の場合は

$$Res(\infty:f)=-a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|<\epsilon} f(\frac{1}{w})\frac{dw}{w^2}\text{とする.}$$

留数の定義に関しては $\omega=f(z)dz$ とするとし $Res(\infty:\omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|<\epsilon}\omega$ と定義していると思って良い. $a\in D$ について f が a で m 位の極を持つとき

$$Res(a:f)=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}|_{z=a}(z-a)^m f(z).$$

ともかける.

定理 18 (留数定理)**.** $\mathbb{C}$ 上の領域 D とし, f を D 上の有理型関数とする. さらに $C=\partial D$ は区分的滑らかな閉曲線とする. このとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=\sum_{a\in D} Res(a:f).$$

定理 19 (偏角の原理)**.** $\mathbb{C}$ 上の領域 D とし, f を D 上の有理型関数とする. さらに $C=\partial D$ は区分的滑らかな閉曲線とする. $a\in D$ について m_a を f の 0 点の位数, n_a を極の位数とすると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{a\in D} m_a-\sum_{a\in D} n_a.$$

定理 20.

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}, G(z)=\frac{1}{(\sin z)^2}$$

とすると, $F(z), G(z)$ ともに $\mathbb{C}$ 上の有理型関数で次を満たす.

1. $F(z+\pi)=F(z)$
2. $z=0$ の近くで $F(z)=\frac{1}{z^2}+$ (正則関数)
3. $F(z)$ の極は $z=n\pi$ (n は整数) だけである.
4. $|Imz|\to\infty$ のとき $|F(z)|\to 0$.

5

定理 21.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}=\frac{1}{(\sin z)^2}$$

特に $z=0$ の周りのテイラー展開を見ると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

証明は $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\pi)^2}-\frac{1}{(\sin z)^2}$ が有界正則関数であることを示す.

定義 22 (楕円関数)**.** $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ を $\frac{\omega_2}{\omega_1}\notin\mathbb{R}$ となるようにとる. 任意の $m,n\in\mathbb{Z}$ について

$$f(z+m\omega_1+n\omega_2)=f(z)$$

となる $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 f を周期 ω_1,ω_2 を持つ楕円関数という.
$\alpha\in\mathbb{C}$ について

$$\Omega=\{\alpha+x\omega_1+y\omega_2|0\leq x<1, o\leq y<1\}$$

を周期平行四辺形と呼ぶ.

定理 23. 定数でない楕円関数は必ず極を持つ.

定理 24. 定数でない楕円関数 $f(z)$ と境界上に $f(z)$ の極を持たない周期平行四辺形 Ω とする．Ω 内での $f(z)$ の極での留数の和は 0 である．

証明は留数定理から $\sum_{a\in\Omega} Res(a:f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 0$ よりいえる．

定理 25. 定数でない楕円関数 $f(z)$ の位数 (Ω 内の f の極の位数の総和) は 2 以上である．

これは極が 1 つだと留数の和が 0 になり得ないためである．

6

定理 26 (ワイエルシュトラスの $\wp$ 関数)**.** $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ を $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$ となるようにとる．

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n\in\mathbb{Z},(m,n)\neq(0,0)} \left\{ \frac{1}{(z-m\omega_1-n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1-n\omega_2)^2} \right\}$$

とおくと，$\wp(z)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数となり，ω_1, ω_2 を周期とする位数 2 の楕円関数である．

定理 27. $\wp(z)$ のローラン展開を $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{-1\leq n} a_n z^n$ とすると

$$\{\wp(z)\}^2 = 4\wp(z)^3 - 20a_2\wp(z) - 28a_4$$

証明は $z^2\wp(z)$ が偶関数であることから $a_{2n-1} = 0$．また $a_0 = 0$ がわかる．$f(z) = \{\wp(z)\}^2 - 4\wp(z)^3 + 20a_2\wp(z)$ を考えると，これは極を持たない楕円関数であり，$-28a_4$ となる定数関数となる．

注意 28. $L = \{m\omega_1 + n\omega_2 | m,n\in\mathbb{Z}\}$ とし $E := \{(x,y)\in\mathbb{C}^2 | y^2 = 4x^3 - 20a_2 - 28a_4\}$ とおく．

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{C}\setminus L & \to & E \\ & z & \to & (\wp(z), \wp(z)') \end{array}$$

とおくと，$(\mathbb{C}\setminus L)/\sim$ から E への連続写像を誘導する．ここで $\sim$ は E を格子で割ったものとする．(おそらく $\mathbb{CP}^2$ を考えた方がわかりやすい気もする．)

7

定理 29 (開写像原理)**.** f を領域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上の正則関数とする．

1. f は開写像である．
2. $f:\Omega\to\mathbb{C}$ が単射ならば，任意の $x\in\Omega$ について $f'(x)\neq 0$．

定理 30 (最大値原理)**.** f を領域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上の定数でない正則関数とする．

1. $|f|$ は Ω 上で最大値をとらない．

2. $\bar{\Omega}$ がコンパクトかつ $|f|$ が $\bar{\Omega}$ 上で連続ならば

$$\sup_{z\in\Omega}|f(z)| \le \max_{z\in\partial\Omega}|f(z)|.$$

定理 31 (最大値原理)**.** f を領域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上の単射な正則関数とする．このとき $V=f(\Omega)$ 上の逆関数 $f^{-1}:V\to\Omega$ は正則であり，任意の $a\in V$ について

$$(f^{-1})'(a)=\frac{1}{f'(f^{-1}(a))}.$$

8

以下 $\mathbb{D}:=\{z\in\mathbb{C}||z|<1\}$ とする．

定理 32 (シュワルツの補題)**.** $\mathbb{D}$ 上の正則写像 $\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ が $f(0)=0$ を満たすとき次が成立する．

1. 任意の $z\in\mathbb{D}$ について $|f(z)|\le|z|$.
2. $|f'(0)|\le 1$.

さらにある $z_0\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$ について $|f(z_0)|=|z_0|$ となる，もしくは $|f'(0)|=1$ となるならば，ある $\alpha\in C$ で $|\alpha|=1$ かつ $f(z)=\alpha z$ となる．

定理 33. $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ を正則な全単射とするとき，$\theta\in\mathbb{R},\alpha\in\mathbb{D}$ があって

$$f(z)=e^{i\theta}\frac{\alpha-z}{1-\bar{\alpha}z}$$

定理 34. f を円盤 D 上の正則関数とすると，D 上の正則関数 G があって $G'=f$ となる．

a と z を結ぶ直線 を L_a とするとき $G(z)=\int_{L_a}f(\zeta)d\zeta$ となる．

9

定義 35. f を領域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上の正則関数とする．連続曲線 $\gamma:[0,1]\to\Omega$ に対し，$\int_\gamma f(z)dz$ を以下のように定義する:
分割 $0=t_0<t_1,\cdots<t_{n-1}<t_n=1$ を細かくとり，$\gamma([t_i,t_{i+1}])$ が Ω 内の円盤 D_i に含まれるとする．D_i 上では f の原始関数 G_i が存在するので

$$\int_\gamma f(z)dz:=[G_1]_{\gamma(t_0)}^{\gamma(t_1)}+[G_2]_{\gamma(t_1)}^{\gamma(t_2)}+\cdots+[G_n]_{\gamma(t_{n-1})}^{\gamma(t_n)}$$

と定める. この定義は分割や D_i, G_i の取り方によらずきまる.

区分的に滑らかな曲線 $\gamma : [0,1] \to \Omega$ については $\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ である.

命題 36. f を円盤 D 上の正則関数とすると, 連続閉曲線 $\gamma : [0,1] \to \Omega$ に対し, $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

定義 37 (ホモトープ)**.** 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 内の端点を共有する 2 つの連続曲線 $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \Omega$ について,

$$\varphi(t,0) = \gamma_1, \varphi(t,1) = \gamma_2, \varphi(0,s) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0), \varphi(1,s) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1),$$

を満たす連続写像 $\varphi : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ が存在するとき, γ_1, γ_2 が Ω でホモトープであるという.

定理 38. f を円盤 D 上の正則関数とするとし, 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 内の端点を共有する 2 つの連続曲線 $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \Omega$ とする. γ_1, γ_2 が Ω でホモトープであるとき $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$.

10

定義 39 (単連結)**.** 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ が単連結とは任意の連続な閉曲線 $\gamma : [0,1] \to \Omega$ が定値写像 $[0,1] \to \Omega$ とホモトープであることとする.

例 40.
1. 円盤 D は単連結.
2. $\mathbb{D} \setminus \{a\}$ は単連結ではない. これは a の周り一周の閉曲線で $\frac{1}{z-a}$ を積分すればわかる.
3. $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ は単連結. これは円盤 $\mathbb{D}$ が $\{z \in \mathbb{C} | 0 < Rez\}$ と正則同型で $\{z \in \mathbb{C} | 0 < Rez\}$ が $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ と ($w = z^2$ によって) 正則同型であるからである.

定理 41. 単連結領域 Ω 上の正則関数は原始関数を持つ.

命題 42. 単連結領域 Ω 上の正則関数で任意の $z \in \Omega$ について $f(z) \neq 0$ とする.

1. $f(z) = e^{h(z)}$ となる Ω 上の正則関数 $h(z)$ がある.
2. $f(z) = g(z)^2$ となる Ω 上の正則関数 $g(z)$ がある.

定理 43 (リーマンの写像定理)**.** Ω を $\mathbb{C}$ ではない単連結領域とする. このとき任意の $z_0 \in \Omega$ について, Ω 上の正則関数 F で次の 2 条件を満たすものがただ一つ存在する.

1. $F(z_0) = 0$ かつ $F'(z_0)$ が正の実数.
2. $F : \Omega \to \mathbb{D}$ が全単射.

11

リーマンの写像定理の方針. $z_0 = 0 \in \Omega$ として良い.

1. $\mathcal{F} = \{f\Omega \to \mathbb{D} | f$ は単射正則かつ $f(0) = 0\}$ とおくとこれは空ではない集合である. これは $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ をとり $e^{h(z)} = z - a$ となる $h(z)$ を取ると, ある r であって $\frac{r}{h(z)-(h(0)+2\pi i)} + \frac{1}{2\pi i} \in \mathcal{F}$ となるものが取れる.
2. $\sup_{g\in\mathcal{F}} |g'(0)| = |f'(0)|$ となる $f \in \mathcal{F}$ が存在する. これにはフルビッツの定理やモンテルの定理を用いる.
3. 上の f は全射となる.

定理 44 (フルビッツの定理)**.** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数列とし, f を Ω 上の関数とする. Ω の任意のコンパクト集合上で $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に一様収束する (つまり広義一様収束する) と仮定する. もし各 f_n が単射ならば, f は単射または定数関数である.

12

定理 45 (モンテルの定理)**.** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を領域 Ω から $\mathbb{D}$ への正則関数列とすると, ある部分列 $f_{n_1}, f_{n_2} \ldots$ と正則写像 $f : \Omega \to \mathbb{D}$ が存在して，Ω の任意のコンパクト集合上で $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が f に一様収束する.

13

定義 46 (計量)**.** 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ とし, ρ を Ω 上の実数値関数とする. さらに ρ^2 は C^2 級で $\rho \geq 0$ かつ $\rho = 0$ なる点は離散的であるとする. $\rho|dz|$ を Ω 上の計量とする

例 **47.**
1. $\mathbb{C}$ には $|dz|$ という (ユークリッド) 計量が入る.
2. リーマン球面 $\hat{C}$ には $\frac{1}{1+|z|^2}|dz|$ という球面計量が入る.
3. 単位円盤 $\mathbb{D}$ には $\frac{1}{1-|z|^2}|dz|$ というポアンカレ計量が入る.

定義 48 (曲率)**.** Ω 上の計量 $\rho|dz|$ について曲率を次で定義する.

$$\kappa_\rho(z) = \frac{-1}{\rho(z)} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \log \rho(z) \right\}$$

例 **49.**
1. ユークリッド計量の曲率は 0
2. 球面計量の曲率は 4
3. ポアンカレ計量の曲率は -4

定理 50. $\mathbb{D}$ 上の $\kappa_\rho \le -4$ となる計量 $\rho|dz|$ について $\rho \le \frac{1}{1-|z|^2}$.

定理 51 (計量の引き戻し・等角不変性)**.** $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ を正則写像とするとき, Ω_2 上の計量 $\rho(w)|dw|$ について, 引き戻しを次で定義する:

$$f^*(\rho(w)dw) := \rho(f(z))|f'(z)||dz|$$

このとき $\kappa_\rho = \kappa_{f^*\rho}$ である.

定理 52 (アールフォルスによるシュワルツの補題)**.** Ω 上の計量 $\rho|dw|$ がの $\kappa_\rho \le -4$ を満たすとする. このとき任意の $f : \mathbb{D} \to \Omega$ について

$$\rho(f(z))|f'(z)| \le \frac{1}{1-|z|^2}$$

定理 53. Ω 上の計量 $\rho|dw|$ がある定数 $B > 0$ について $\kappa_\rho \le -B < 0$ を満たすとする. 任意の正則写像 $f : \mathbb{C} \to \Omega$ は定数である.

例 **54.** 上の定理の応用例を挙げる.

1. $\mathbb{D}$ 上のポアンカレ計量は曲率は負であるので, 任意の正則写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ は定数である. これはリウヴィユの定理に他ならない.
2. $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ には
$$\rho := \frac{(1+|w|^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}}{|w|^{\frac{5}{6}}} \frac{(1+|w-1|^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}}{|w-1|^{\frac{5}{6}}}$$
として計量を定めると, ある定数 $B > 0$ があって $\kappa_\rho \le -B < 0$ を満たす. よって任意の正則写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ は定数である. これはピカールの小定理に他ならない.