学問の扉
(ゲームにまつわる数学)

担当教官 : 岩井雅崇(いわいまさたか) (大阪大学)

みなさまご入学おめでとうございます

- 受験勉強お疲れ様です．これから4年間の大学生活を思う存分楽しんでください.
- この授業は「学問の扉(ゲームにまつわる数学)」です.
- 担当教官は岩井雅崇(いわいまさたか) (大阪大学)です.
- この授業では”ゲーム”と”数学”の両方を扱う, ちょっとばかり挑戦的で無計画な授業となっております.

この授業の目標

「学問への扉」の狙い

高校までの受動的で知識蓄積型の学びから、主体的で創造的な学びへと転換　学部・学科を問わず、大阪大学で「学び」をスタートさせる学生は、高校までの受動的で知識蓄積型の学びから、主体的で創造的な学びへと転換する必要があります。そこで、「課題・文献など一つの内容をもとにアカデミック・スキルズの指導を含む、大学における学びの基礎科目」として「学問への扉（愛称「マチカネゼミ」）」を設定しています。この科目は、学生が興味ある内容を学ぶ中で、少人数クラスで異分野の学生とも接し、異なったものの見方や課題解決の道筋を意識する場であり、「教養教育」の出発点となります。また、授業の中でのレポート添削やプレゼンテーション指導などによって、発信力を高めることも目指します。

「学問への扉」の特徴

全教員担当制で多様性のある授業　「学問への扉」では、大阪大学全体として「全教員担当制」を採用しています。これは、阪大の助教以上の専任教員すべてが全学教育に携わる体制のことを指します。具体的には、原則すべての学部・研究科・センターにクラスが割り当てられ、それぞれの所属教員が1年ごとに持ち回りで受け持つことで、合計250のクラスが開講されます。　阪大のように規模の大きい総合大学でこのような取り組みを実現することは簡単ではありませんが、大学全体で新入生に「ウエルカム」という姿勢を表そうという阪大からのメッセージでもあります。時間割の関係で学部によって受けられる授業は限られますが、それでも約70クラスから選択できます（希望者多数の場合は抽選）。そのため、「専門ではないけれど興味がある」クラスや、普段は身近でない分野の最新の研究を知ることができるクラスなどを受講することが可能です。

学部混合で「違う視点」を知る

授業によって割合こそまちまちですが、文系と理系の学生が半々のクラスも！そんな学部混合の意義は、多様な意見を交わすことにあります。同じ話題でも理系と文系や専攻によって見え方が全然違うことがあります。何が正しいということではなく、別の視点があるという気づきがあるだけで、その後の学び方、考え方、視野の広さが大きく変わってきます。 各学部で専門性はしっかりと身に着けられるからこそ、学部1年生の段階で異分野に触れ、主体性や想像力を育てるきっかけを作ることをめざすのが「学問への扉」です。また、多様な関心をもつ学生同士が出会える貴重な場でもあり、新入生にとっては専攻とも部活・サークルとも異なる、新たなネットワークを広げるきっかけにもなっているようです。

結局何をやる授業?

- 毎週何かしらゲームをやって, そのゲームに関する数学やプログラミング(AtCoderなどの競技プログラミング)などのお話をします.
- ほぼ毎回何か(ex. 必勝法の存在など)聞いて, その場で考えてもらいます. (ここでグループワークとかアクティブラーニングすれば「学問の扉」っぽい授業になるはず.)
- 予習復習は(基本的に)させないつもりです. (というかしてもらうと逆に困る, ただしスライド発表することになれば予習復習の時間がかかるかも⁇)
- 何も考えずにこの授業に臨んでください.
- あとはみなさまの要望があればそれをやっても良いです. みんなが思っているほどあんまり何も考えてないです.

授業のスケジュール(予定)

基本情報

時間割コード／Course Code	131427
開講区分(開講学期)／Semester	春〜夏学期
曜日・時間／Day and Period	水3
開講科目名／Course Name (Japanese)	学問への扉（ゲームにまつわる数学）
開講科目名(英)／Course Name	A Door to Academia (Mathematics and Games)
ナンバリング／Course Numbering Code	13LASC1Z002
単位数／Credits	2.0
年次／Student Year	1,2,3,4,5年
担当教員／Instructor	岩井　雅崇
メディア授業科目／Course of Media Class	非該当

※メディア授業科目について
授業回数の半数以上を、多様なメディアを高度に利用して教室等以外の場所で行う授業を「メディア授業科目」としています。
学部学生が「メディア授業科目」を卒業要件に算入できるのは60単位が上限です。
なお、非該当の場合であっても、メディアを利用した授業を実施する場合があります。

基本項目

履修対象／Eligibility	全学部
備考／remarks	

授業担当教員一覧

詳細情報

授業サブタイトル／Course Subtitle	
開講言語／Language of the Course	日本語
授業形態／Type of Class	その他
授業の目的と概要／Course Objective	囲碁・将棋のような戦略性を問われるゲームからRPGのようなゲームまで, 数学またはアルゴリズムに関連しそうなゲームを取り上げ, 大学での数学の入門を学ぶ.
学習目標／Learning Goals	この授業を通して大学数学に少し興味を持っていただければ幸いである.
履修条件・受講条件／Requirement / Prerequisite	
授業計画／Class Plan	第1回 ガイダンス 第2-3回 石取りゲーム 第4-5回 ニム 第6-7回 素数大富豪 第8-9回 研究者人生ゲーム 第10-12回 ゼルダの伝説 ブレス オブ ザ ワイルド 第13-14回 ヒットアンドブロー(予定) 第15回 まとめ
授業外における学習／Independent Study Outside of Class	(現時点では)特になし.
教科書・指定教材／Textbooks	特になし.
参考図書・参考教材／Reference	安田健彦: ゲームで大学数学入門: スプラウトからオイラーゲッターまで 佐藤文広: 石取りゲームの数学: ゲームと代数の不思議な関係 M.H.Albert, R.J.Nowakowski, D.Wolfe: 組合せゲーム理論入門 ー勝利の方程式ー
成績評価／Grading Policy	授業への参加具合によって総合的に判断する.
出欠席及び受講に関するルール※／Attendance and Student Conduct Policy*	
特記事項／Special Note	授業内容が定まっているわけではないので, 受講生のニーズに応えて授業の内容を変更する可能性がある. また数学的な思考力があることが望ましいが必須ではない. 文系理系に関わらずに理解できるような授業をするようできるだけ心がけます.
実務経験のある教員による授業科目／Course conducted by instructors with practical experience	

授業ホームページを作りました

- 授業ホームページは右のQRコードを読み取ってください.
- スライドなどをここにおく予定です.
- 休講・補講情報はこちらでも出していきます.
- 6/7と7/26は海外出張のため(ほぼ確定で)休講です.
- 今このタイミングで授業のホームページをブックマークとかに入れて保存してください. (一応CLEにもホームページリンクは貼っていますが…)

アンケートにご協力ください

・右下のQRコードからgoogleアンケートのページに行ってアンケートを出してください

・答えたくない質問があれば飛ばしても構いません. (全質問に「回答したくない」という選択肢はあります.)

・主に授業作りのために用います.

・アンケートを終わった人から今日は帰れるが….

せっかくなので, 私と一勝負をしましょう

23ゲーム

1から順番に数字を言っていき, 1人3つまで数字を言う事ができる. 最後に23を言った人が負けるゲーム.

例. Aさん：1, 2 → Bさん：3, 4, 5 → Aさん：6 → Bさん：7 , 8, 9 → ・・・　と言っていき23をいったら負けになる

このゲームを私と一対一で行い勝った人から帰ることにしましょう.

今日の残りの時間でやること

1. 授業に関するアンケートをgoogleフォームで答える.
2. 「23ゲーム」で岩井と勝負する.
3. 岩井に勝った人から帰ってもらって構いません. 次回の授業でまたお会いしましょう.

学問の扉
(ゲームにまつわる数学)

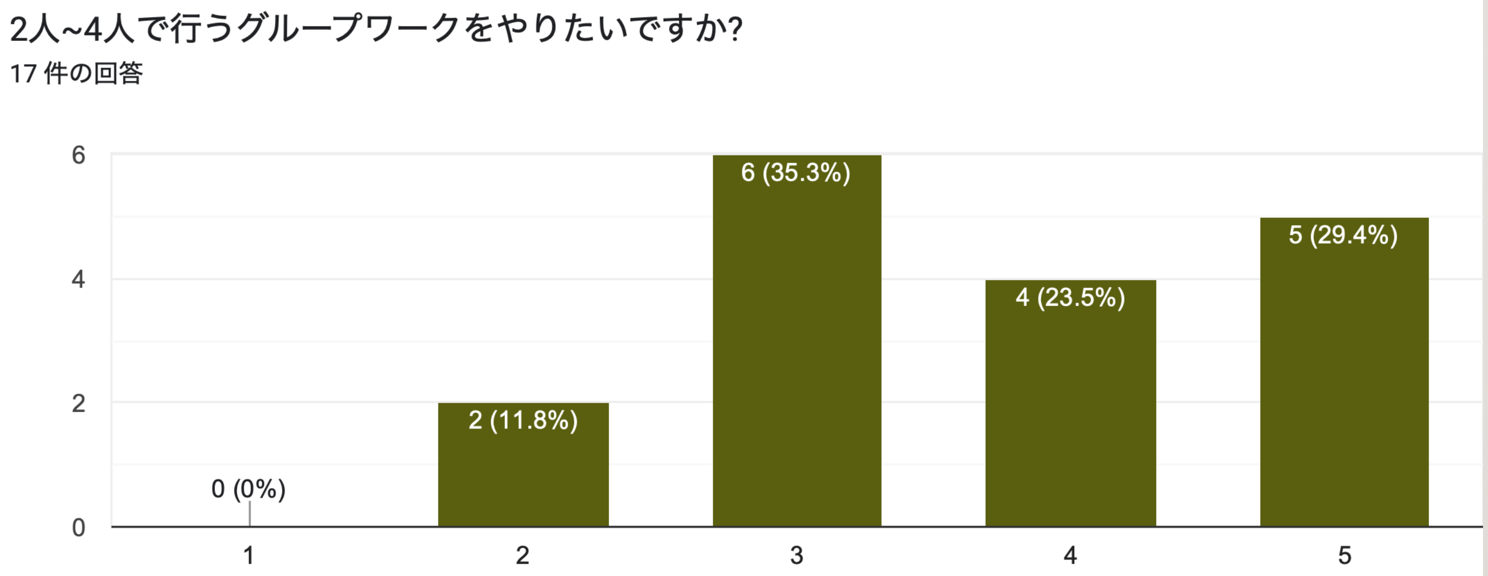
第2回 石取りゲーム

担当教官 : 岩井雅崇(いわいまさたか) (大阪大学)

前回のアンケートの結果

- 「数学」「プログラミング・アルゴリズム」「機械学習・深層学習・人工知能」に意外とみんな興味ありでした.
- 好きなゲームについては私が最近流行りのゲームについてちょっと知りたかったから聴きました. (意外と皆さん論理的なゲームが好きそうじゃなくて安心しました. あと私が知っているゲームが多くて安心でした.)

グループワークに関して



皆さんグループワークに抵抗なさそう
(私は一人で考える方なので, 結構意外でした)

単位に関して

やっぱり単位が欲しいという声が多かったです.

単位に関しておそらく明確なルールがないとよくないので, 以下にルールを定めます.

- ゲームをするときに出席を取ります. 出席を取るのは教官(岩井)の気が向いたときです. (今日みたいにゲームと同時に出席取れる時はするかな.)
- 欠席が多い人(例えば3回連続欠席など)にはメールで警告文を出します. その警告文の次の週は出席してください. もし理由なく欠席した場合その時点で不可になります.

授業で出来さなさそうなこと

- スマブラ大会 ・スマブラトーナメント

理由: 私もやろうと計画しましたが, 上の人から「やめておいた方がいい」と止められました. でかいモニターでやったら面白そうなのですが…

- 自分でゲームを作る

理由: 私がよくわかってない (発表形式の授業にするならあり)

- 麻雀

理由: ルール説明に時間がかかりそうだから (ポーカー・ブラックジャックぐらいならいいと思う. 法律に引っかからないようにしないとだけど)

授業で出来そうなこと
(その他の意見に関して)

- 何か数学に関して面白い知識や事実をゲームに絡めて学べればなと思います.

→なんとか努力します.

- いろいろなゲームの必勝法(オセロ・ブラックジャック)
- chatGPTにレジュメを書かせたり、授業内容を考えてもらってそれで授業してみたい
- ガチャや銃の散乱などの乱数について知りたい

→ちょっと一つやってみたいものができました. ありがとうございます.

今回のゲーム　石取りゲーム

1. プレイ人数は2人. ３０個の石があり, 一人ずつ石を取っていく. 最後の石を取った人の勝ち
2. 取れる石の個数は１，３，４個のうちのどれか. 取らないという選択肢はないし, 2個とることはできない. (最後2個になった場合, 1個ずつ取ることになる.)

とりあえずやってみましょう.

- 配布した紙に先攻・後攻書いています. 紙に名前と出席番号を書いてください.
- 1-30まで数字の書いた紙を用意しました. “先攻”と書いている人は取りにきてください. そして”後攻”と書いている人は”先攻”の人に戦いに行ってください.
- 石の数を数えるのは面倒なので30から順に石を取っていって最後の１を取った人が勝ちです.
- 勝ち負けを記録してください.

石取りゲーム　ルール再確認

1. プレイ人数は**2**人. ３０個の石があり, 一人ずつ石を取っていく. 最後の石を取った人の勝ち
2. 取れる石の個数は１,　３,　４個のうちのどれか. 取らないという選択肢はないし, 2個とることはできない. (最後2個になった場合, 1個ずつ取ることになる.)

謝らなければいけないことがあります.

- 実は紙を配った瞬間に, どちらかの勝敗はついております. (つまり紙をもらった時点である一方は不利な試合をしておりました.)

ここで皆さんに問題です.

- このゲームは先手有利? 後手有利? それともどちらでもない? (教員が嘘を言っている可能性もあります.)
- このゲームの必勝法はあるか?

せっかくなのでグループになってお考えください.

上の問題が解けて, そしてグループ全員が私に勝てたところから自由時間です.

わかんないよという人に向けて...

- 以下はヒントです. 頃合いを見て今日答え合わせをするか, 答えを来週に引き延ばすかを決めます.

ヒント１

最後から逆順で考えると…⁇

ヒント２

まずは簡単な場合(例えば石の数が５個など)はどうなるでしょうか?

ヒント３

先攻が勝つ石の個数の集まり A={1,3,4,…}

後攻が勝つ石の個数の集まりB={0,2,…}

がnまでわかっているとしてn+1はどっちに入る?

例えば5はどちらに入る? そもそも2はなぜBに入る? 5がどちらに入るかわかったら6はどっちに入る?

学問の扉
(ゲームにまつわる数学)

第3回 石取りゲーム2

担当教官 : 岩井雅崇(いわいまさたか) (大阪大学)

前回の石取りゲーム

1. プレイ人数は**2**人. ３０個の石があり, 一人ずつ石を取っていく. 最後の石を取った人の勝ち
2. 取れる石の個数は１，３，４個のうちのどれか. 取らないという選択肢はないし, 2個とることはできない. (最後2個になった場合, 1個ずつ取ることになる.)

問題

- このゲームは先手有利? 後手有利? それともどちらでもない? (教員が嘘を言っている可能性もあります.)
- このゲームの必勝法はあるか?

この手の問題の解き方
(ゲームに限らずわからない問題に出会った時)

- まずは簡単な場合(例えば石の数が 5 個など)から考えてみる

→いきなり難しいものから考えるのではなく, 簡単なケース・自明なケースから考察する

- 最後(結果)から逆順で考える.

→結局どうなったら嬉しいかを考えて, そっから回答までのストーリーを逆斬していく.

- 相手が不利になれば自分が有利, 自分が不利になれば相手は有利

→これはゲーム限定の話. 対戦ゲームなら自分の有利・不利がそのまま相手の不利・有利になる.

このゲームの当たり前の前提

- プレイヤー両者は勝ちを目指すものとする.
- プレイヤー両者は最善の選択肢をするものとする.(ミスを絶対にしない)

理由.

1. ミスすれば先手必勝・後手必勝を覆せる.
2. わざと負けに行く人を勝たせることはできない.

まずは簡単な場合(例えば石の数が５個など)から考えてみる

1. 石が1個→先攻が1個 取る[先手勝ち]
2. 石が2個→先攻が1個取る(残り石1つ)→後攻が1個石を取る[後手勝ち]
3. 石が3個
- 先攻が3個とる[先手勝ち]
- 先攻が1個とる(残り石2つ) →後攻が1個取る(残り石1つ) →先攻が1個石を取る[先手勝ち]

4. 石が4個
- 先攻が4個とる[先手勝ち]
- 先攻が3個とる(残り石1つ) →後攻が1個取る(残り石1つ) [後手勝ち]
- 先攻が1個とる(残り石3つ) →(後手は勝ちを望むため) 3 個取る[後手勝ち]

Question. 皆さんが先攻ならどの手を選びますか?

5. 石が5個
- 先攻が4個とる(残り石1つ) →後攻は1個とる[後手勝ち]
- 先攻が3個とる(残り石2つ) →後攻が1個とる(残り石1つ) →先攻が1個とる[先手勝ち]
- 先攻が1個とる(残り石4つ) →(後手は勝ちを望むため)石を4個とる[後手勝ち]

Question. 皆さんが先攻ならどの手を選びますか?

6. 石が6個
- 先攻が4個とる(残り石2つ) →後攻が1個とる(残り石1つ) →先攻が1個とる[先手勝ち]
- 先攻が3個とる(残り石3つ) →(後手は勝ちを望むため)後攻が3個とる[後手勝ち]
- 先攻が1個とる(残り石5つ) →・・・

Question 1. この時点で“先攻が石を1個とる”を考える意味ってありますかね??
Question 2. 皆さんが先攻ならどの手を選びますか?

7. 石が7個
- 先攻が4個とる(残り石3つ) → (後手は勝ちを望むため)後攻が3個とる[後手勝ち]
- 先攻が3個とる(残り石4つ) →(後手は勝ちを望むため)後攻が4個とる[後手勝ち]
- 先攻が1個とる(残り石6つ) →

Question 1. この状態(残り石6つ)で後手が勝つ方法は?
Question 2. この場合先攻は勝ちます?

石が6個の場合の考察
相手が不利になれば自分が有利, 自分が不利になれば相手は有利

1. 石が6個の場合
- 先攻が4個とる(残り石2つ) →後攻が1個とる(残り石1つ) →先攻が1個とる[先手勝ち]

2. 一方で, 石が2個の場合[後手必勝]である.

3. 先手(Aさん)と後手(Bさん)として, 手番は
Aさん→Bさん→Aさん→・・・
とうつる.
Aさんの手番が終わった後に石の個数が[後手必勝]の個数(例 2個)だと, Bさんは勝つことはできる⁇

完全な解説

先攻が勝つ = うまく石をとれば”後手が勝つ石の個数”になる.

後攻が勝つ = 先攻がどのように石を取っても”後攻が勝つ石の個数“になる.

W = {先手必勝となる石の個数 } = {1,3,4,5,6,…}

L = {後手必勝となる石の個数 } = {2,…}

W =Win, L=Loseの略です. 専門用語だと P Position, N positionという

n-1までWとLどちらかに入っているかわかっているとして, nを次で定義する

再帰的に定義するという

- n-1, n-3, n-4のどれかがLにあるなら, nはWの元・要素とする.
- n-1, n-3, n-4すべてがWにあるなら, nはLの元・要素とする.

数学っぽく数式で書くとこんな感じ

g(1) = W, g(0)=L

g(n) =

$$\begin{cases} W & if\ g(n-1) = L\ or\ g(n-3) = L\ or\ g(n-4) = L \\ L & \text{それ以外} \end{cases}$$

先手必勝か後手必勝かの判定法

g(n)=Wとなるnは先手必勝・g(n)=Lとなるnは後手必勝

必勝法

[先手必勝の場合] **g(n-1)=Lなら1個とる, g(n-3)=Lなら3個とる, g(n-4)=Lなら4個とる.**

次に後手が何やってきても, 同じように石を取る

[後手必勝の場合]

先手が何をやってきても, 上のように石を取る.

g(1) = W, g(0)=L

g(n) =
$$\begin{cases} W & if\ g(n-1) = L\ or\ g(n-3) = L\ or\ g(n-4) = L \\ L & \text{それ以外} \end{cases}$$

$g(1)=W$

$g(0)=L$

$$g(n) = \begin{cases} W & \text{if } g(n-1)=L \text{ or } g(n-3)=L \text{ or } g(n-4)=L \\ L & \text{それ以外} \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$g(n)$	L	W	L	W	W	W	W	L	W	…	…	…	…	…	

定義

$g(2-1)=g(1)=W$
より L

$g(3-3)=g(0)=L$
より W

$g(4-4)=g(0)=L$
より W

$g(5-3)$ $g(6-4)$
をみる

$g(8-1)$をみる.

$g(7-1)=g(6)=W$
$g(7-3)=g(4)=W$
$g(7-4)=g(3)=W$
より $g(7)=L$.

$g(1)=W$
$g(0)=L$

$$g(n)=\begin{cases} W & \text{if } g(n-1)=L \text{ or } g(n-3)=L \text{ or } g(n-4)=L \\ L & \text{それ以外} \end{cases}$$

石が8コ ⇒ $g(8)=W$ ⇒ 先手必勝!!

必勝法の手じゅん

後手

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(n)$	L	W	L	W	W	W	W	L	W

先手の3手目

先手の2手目

1コとる(先手)

($n=6$なら$k=4$ $g(6-4)=L$
$n=4$なら$k=4$ $g(4-4)=L$

($g(n-k)=L$ となる $k=\{1,3,4\}$ として
そのkことる)

$g(1)=W$
$g(0)=L$

$$g(n) = \begin{cases} W & \text{if } g(n-1)=L \text{ or } g(n-3)=L \text{ or } g(n-4)=L \\ L & \text{それ以外} \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
g(n)	L	W	L	W	W	W	W	L	W	L	W	W	W	W	L
必勝手		0	1	0	0	2	2	6 4 3	7	8 6 5	9	7	9	9	13 11 10

n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
g(n)	W	L	W	W	W	W	L	W	L	W	W	W	W	L	W	L
必勝手	14	15 13 1	16	14	16	16	20 18 17	21	22 20 19	23	21	23	23	27 25 24	28	29 27 26

$g(1)=W$
$g(0)=L$

$$g(n) = \begin{cases} W & \text{if } g(n-1)=L \text{ or } g(n-3)=L \text{ or } g(n-4)=L \\ L & \text{それ以外} \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$g(n)$	L	W	L	W	W	W	W	L	W	L	W	W	W	W	L
必勝		0	1	0	0	2	2		7		9	7	9	9	

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
W	L	W	W	W	W	L	W	L	W	W	W	W	L	W	L
14		16	14	16	16		21		23	21	23	23		28	

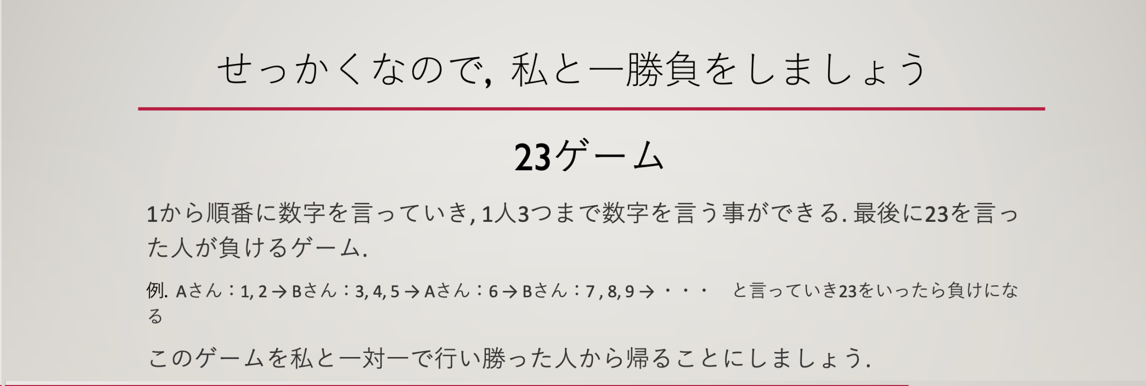
$g(30)=L$ 後手必勝，青字をいっていく.

ちなみにこの場合においては

- 最初の石の数が**7**で割って**1,3,4,5,6**余る数の場合, 先手必勝
- 最初の石の数が**7**で割りきれるか**7**で割って**2**余る数の場合, 後手必勝

必勝法はもっとシステマティックにできる.

そういえば二週間前にも同じようなゲームをしたような・・・



せっかくなので，私と一勝負をしましょう

23ゲーム

1から順番に数字を言っていき, 1人3つまで数字を言う事ができる. 最後に23を言った人が負けるゲーム.

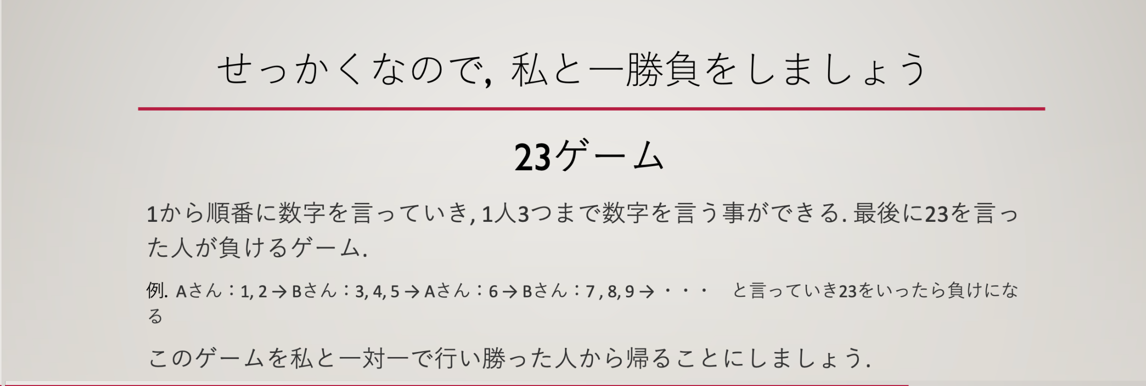
例. Aさん：1, 2 → Bさん：3, 4, 5 → Aさん：6 → Bさん：7 , 8, 9 → ・・・　と言っていき23をいったら負けになる

このゲームを私と一対一で行い勝った人から帰ることにしましょう.

23ゲームは先手必勝で, 4で割って2あまる数(2,6,10,14,18,22)を言っていけば勝ち

これってさっきの考え方が使えるのでは・・・？

そういえば二週間前にも
同じようなゲームをしたような・・・



せっかくなので，私と一勝負をしましょう

23ゲーム

1から順番に数字を言っていき, 1人3つまで数字を言う事ができる. 最後に23を言った人が負けるゲーム.

例. Aさん：1, 2 → Bさん：3, 4, 5 → Aさん：6 → Bさん：7 , 8, 9 → ・・・　と言っていき23をいったら負けになる

このゲームを私と一対一で行い勝った人から帰ることにしましょう.

石の個数が22個, 取れる石の個数は1,2,3個, 最後の石を取ったら勝ちの石取りゲーム

g(0)=L, g(1) = W g(n) = $\begin{cases} W & if\ g(n-1) = L\ or\ g(n-2) = L\ or\ g(n-3) = L \\ L & \text{それ以外} \end{cases}$

g(n)=Wとなるnは先手必勝・g(n)=Lとなるnは後手必勝

[先手必勝の場合] g(n-1)=Lなら1個とる, g(n-2)=Lなら2個とる, g(n-3)=Lなら3個とる. 次に後手が何やってきても, 同じように石を取る.

[後手必勝の場合] 先手が何をやってきても, 上のように石を取る.

$g(1)=W$

$g(0)=L$

$$g(n) = \begin{cases} W & \text{if } g(n-1)=L \text{ or } g(n-2)=L \text{ or } g(n-3)=L \\ L & \text{それ以外} \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$g(n)$	L	W	W	W	L	W	W	W	L	W	W	W	L	W	W
		0	0	0	1 2 3	4	4	4	7 6 5	8	8	8			

後手

15	16	17	18	19	20	21	22
W	L	W	W	W	L	W	W

先手のうごき

23ゲームの場合.
先手で2をいって.
あとは.
4ー[相手のいったこすう]
をいう

まとめ

- まずは簡単な場合(例えば石の数が 5 個など)から考えてみる
- 最後(結果)から逆順で考える.
- 相手が不利になれば自分が有利, 自分が不利になれば相手は有利

先攻が勝つ = うまく石をとれば”後手が勝つ石の個数”になる.
後攻が勝つ = 先攻がどのように石を取っても”後攻が勝つ石の個数“になる.
W = {先手必勝となる石の個数 } = {1,3,4,5,6,…}
L = {後手必勝となる石の個数 } = {2,…}
n-1までWとLどちらかに入っているかわかっているとして, nを次で定義する

1. n-1, n-3, n-4のどれかがLにあるなら, nはWの元・要素とする.
2. n-1, n-3, n-4すべてがWにあるなら, nはLの元・要素とする.

皆さんわかりました？

本当にわかった？

- ということで理解度チェック問題を用意したので残り時間で解いてください.
- EASY, NORMAL, HARDに分かれています

1. 前回できなかった人はEASYを解いてください.
2. 前回できた人はNORMALを解いてください. (ただしNORMALはまあまあ難しいです)
3. 余裕な人はHARDを解いてください.

どれか解いてください. 解けた人は私のところに来てください. 解けた人からあとは自由時間です.

[EASY]　二人対戦で最後の石を取ったら勝ちの石取りゲーム. 取れる石の個数は1,2,4個のうちのどれかとする. 石の数が30この場合先手必勝? 後手必勝? そしてその必勝法は?

[NORMAL] 二人対戦. ルールは以下の通り

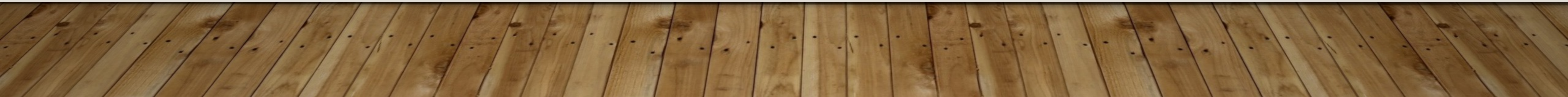
- 「取れる石の個数は1,3,4個のうちのどれか」とする.
- 石が3個の山Aと4個の山Bがあり, 石を取る際はAの山かBの山どちらかからしか取れない(Aから2個, Bから1個ということはできない)
- 最後の石を取った人の勝ち. (Aの石が0個でもBの石が１個以上残っていたらゲームは続く)

この場合先手必勝? 後手必勝? そしてその必勝法は?

また山A,Bが(3個, 5個)の場合や(6個, 8個)の場合はどうなる?

[HARD] NORMALのルールにおいて, 最初の石が次の場合先手必勝, 後手必勝?

- 3個の山と5個の山と2個の山
- 5個の山と8個の山と6個の山



HARD問題とけました?

- HARDは3次元を考えないといけないのでかなり難しい. というかこの方法だと限界がある.
- 石の数がA1,A2, …Anの場合, n次元の図を書いて,A1×A2×・・・×An回計算しないといけない.
- Ai=10でn=16の場合10^16回くらい計算しないといけない. 一般的なPCでこの計算は3年かかる.
- もっと楽にできない? あと理論的にはどうなってるの?

次の授業について

- 次の授業(5/10)は石取りゲームの完全解説です. より理論的・数学的にこのゲームを解析します.
- 数学濃いめな授業になります. (まあこれが私がやりたかったことです.)
- おそらくゲームはやらないですかね, そしてゲームをやらないということは...
- まあ気になる人はきてください.

学問の扉
(ゲームにまつわる数学)
第4回 石取りゲーム3
SPARAGUE-GRUNDY THEOREM

担当教官 : 岩井雅崇(いわいまさたか) (大阪大学)

今日この授業に来たということは…

- 今日の授業はかなり難しいので理解できなくでもいいです.
- 今日の授業では石取りゲームが数学的に解析されていることを見ます.
- 実は本来ではこの内容を半年間かけてやる予定でしたが, かなり難しいのでやめました. 次回の授業までが本来やりたかった内容になります. (半年間かけて無理やりやってもよかったですが, 私もみんなも疲れるかもしれないですね…)

前々回の石取りゲーム

1. プレイ人数は2人. ３０個の石があり, 一人ずつ石を取っていく. 最後の石を取った人の勝ち
2. 取れる石の個数は１，３，４個のうちのどれか. 取らないという選択肢はないし, 2個とることはできない. (最後2個になった場合, 1個ずつ取ることになる.)

W = {先手必勝となる石の個数} = {1,3,4,5,6,…}

L = {後手必勝となる石の個数} = {2,…}

n-1までWとLどちらかに入っているかわかっているとして, nを次で定義する

- n-1, n-3, n-4のどれかがLにあるなら, nはWの元・要素とする.
- n-1, n-3, n-4すべてがWにあるなら, nはLの元・要素とする.

数学っぽく数式で書くとこんな感じ

g(1) = W, g(0)=L

g(n) =

$$\begin{cases} W & if\ g(n-1) = L\ or\ g(n-3) = L\ or\ g(n-4) = L \\ L & \text{それ以外} \end{cases}$$

先手必勝か後手必勝かの判定法

g(n)=Wとなるnは先手必勝・g(n)=Lとなるnは後手必勝

必勝法

[先手必勝の場合] **g(n-1)=Lなら1個とる, g(n-3)=Lなら3個とる, g(n-4)=Lなら4個とる.**

次に後手が何やってきても, 同じように石を取る

[後手必勝の場合]

先手が何をやってきても, 上のように石を取る.

g(1) = W, g(0)=L

g(n) =

$$\begin{cases} W & if\ g(n-1) = L\ or\ g(n-3) = L\ or\ g(n-4) = L \\ L & \text{それ以外} \end{cases}$$

$g(1)=W$
$g(0)=L$

$$g(n) = \begin{cases} W & \text{if } g(n-1)=L \text{ or } g(n-3)=L \text{ or } g(n-4)=L \\ L & \text{それ以外} \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$g(n)$	L	W	L	W	W	W	W	L	W	L	W	W	W	W	L
必勝手		0	1	0	0	2	2		7		9	7	9	9	

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
W	L	W	W	W	W	L	W	L	W	W	W	W	L	W	L
14		16	14	16	16		21		23	21	23	23		28	

$g(30)=L$ 後手必勝，青字をいっていく．

前回の問題

[NORMAL] 二人対戦. ルールは以下の通り

- 「取れる石の個数は1,3,4個のうちのどれか」とする.
- 石が3個の山Aと4個の山Bがあり, 石を取る際はAの山かBの山どちらかからしか取れない(Aから2個, Bから1個ということはできない)
- 最後の石を取った人の勝ち. (Aの石が0個でもBの石が１個以上残っていたらゲームは続く)

この場合先手必勝? 後手必勝? そしてその必勝法は?

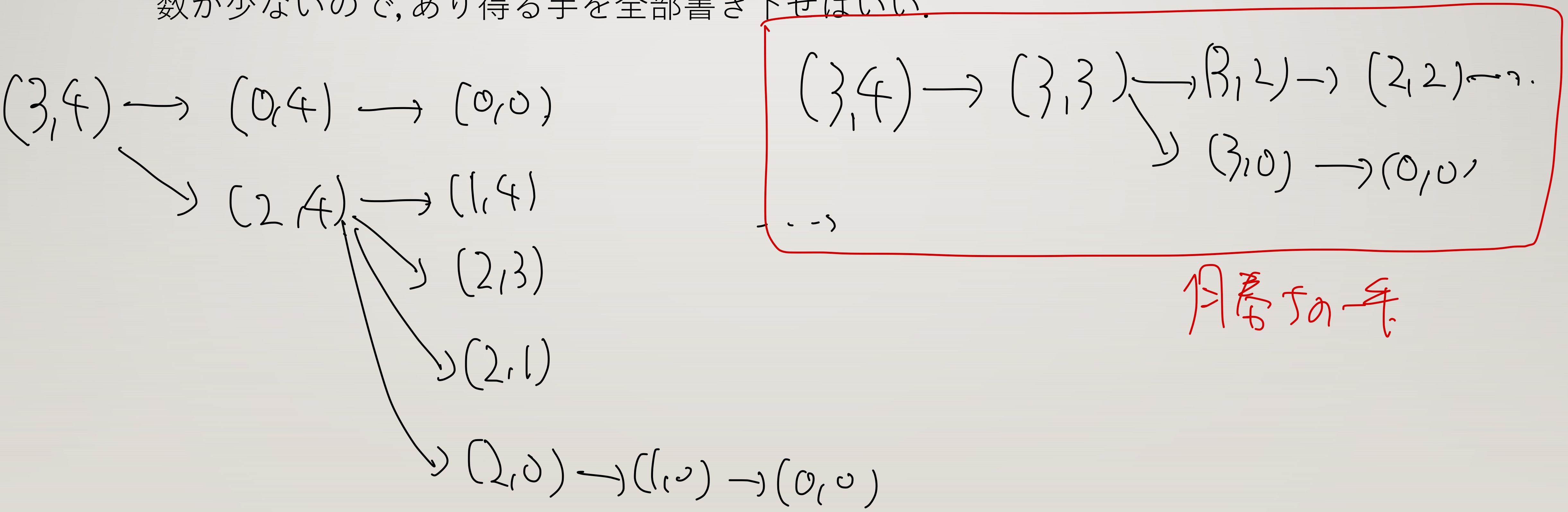
また山A,Bが(3個, 5個)の場合や(6個, 8個)の場合はどうなる?

[HARD] NORMALのルールにおいて, 最初の石が次の場合先手必勝, 後手必勝?

- 3個の山と5個の山と2個の山
- 5個の山と8個の山と6個の山

方法I. 全部書き下す

数が少ないので, あり得る手を全部書き下せばいい.



これでいいんじゃないの？

- 石の数がNの場合, N!回くらい計算する.
- N=20の時, 10^18回くらい計算しないといけない. 一般的なPCでこの計算は3年以上かかる. (一般的なPCでは10^8ぐらい計算できる)
- 一回一回書いていくのが面倒.

(8,6)とか めんどくさい---

方法2. 前使った方法を2次元に広げる

$\boxed{\text{NORMAL}}$

$g(0,0) = L$

$$g(n,m) = \begin{cases} W & \text{if } g(n-1,m),\ g(n-3,m)\ g(n-4,m) \\ & \quad g(n,m-1),\ g(n,m-3),\ g(n,m-4) \\ & \quad \text{のどれかが } L. \\ L & \text{その他} \end{cases}$$

B \ A	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	L	W	L	W	W	W	W	L	W
1	W	L	W	L	W	W	W	W	L
2	L	W	L	W	W	W	W	L	W
3	W	L	W	L	W	W	W	W	L
4	W	W	W	W	L	W	L	W	W
5	W	W	W	W	W	L	W	W	W
6	W	W	W	W	L	W	L	W	W
7	L	W	L	W	W	W	W	L	W

$g(0,0)=L$

$$g(n,m)=\begin{cases} W & \text{if } g(n-1,m),\ g(n-3,m)\ g(n-4,m) \\ & g(n,m-1),\ g(n,m-3),\ g(n,m-4) \text{ のどれかがL.} \\ L & \text{その他} \end{cases}$$

$g(4,3)=W$

$g(5,3)=W$

$g(6,8)=W$

必勝法は

$g(n,m)=L$なる

手をうっていく

これでいいんじゃないの？

- 石の場面が大きくなると, 3次元を考えないといけないのでかなり難しい. というかこの方法だと限界がある.
- 石の数がA1,A2, …Anの場合, n次元の図を書いて,A1×A2×・・・ × An回計算しないといけない.
- Ai=10でn=16の場合10^16回くらい計算しないといけない. 一般的なPCでこの計算は3年かかる. (一般的なPCでは10^8ぐらい計算できる)
- もっと楽にできない? あと理論的にはどうなってるの?

石取りゲーム完全解説

－ Sprague－Grundy Theorem －

($a_1=1$とする)

石 $\{A_1, \ldots, A_n\}$, 取るかず $\{a_1, \ldots\ldots, a_k\}$ で最後の石をとったら勝ちの石とりゲームは、

グランディー数 $g(x) := \min\{t : 0以上の自然数 \mid t \neq g(x-a_i)\}$, $g(0)=0$.

としたとき

$g(A_1)$ XOR $\cdots\cdots$ XOR $g(A_n) \neq 0$ なら先手必勝、そうでなければ後手必勝

必勝法は $g(x_1)$ XOR $\cdots$ XOR $g(x_n)=0$ となる手をうっていく

あとでていぎ

歴史

東北大学がだしてる
論文雑誌

- Sprague, R. P. (1935–36). “Über mathematische Kampfspiele”. *en:Tohoku Mathematical Journal* **41**: 438-444. NAID 20000416299.
- *Grundy, P. M. (1939). "Mathematics and games". Eureka.* ***2****: 6–8. Archived from the original on 2007-09-27.*Reprinted, 1964, **27**: 9–11.

なんと論文が出るくらいの結果である.

残りの時間でやること

- グランディー数とは?
- Xorとは?
- Sprague–Grundy theoremの証明
- 発展話題.

グランディー数

石A1でとるかず$\{a_1, \ldots, a_k\}$のいしとりゲームについて

$$g(x) = \min\{t \in \mathbb{N} \mid g(x - a_i) \neq t\}$$

0以上とみなそう

$$g(0) = 0$$

具体例

$\{a_1, a_2, a_3\} = \{1, 3, 4\}$ のとき

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$g(n)$	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1	2	3	2	0
$n-1$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$n-3$				0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n-4$					0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	L	W	L	W	W	W	W	L	W	L	W	W	W	W	L
		0	1	0	0	2	2		7		9	7	9	9	

L：後手必勝

W：先手必勝

XOR (排他的論理和) (ごくわ?)

2進数 a, b について，a_k, b_k を a, b の k 桁目とする

a XOR b の各桁目を，次のように定める

$(a \text{ XOR } b)$ のk桁目 $= 1$ if $a_k=1$ & $b_k=0$ or $a_k=0$ & $b_k=1$

0 それ以外

1の数が奇数なら1

例1　5 XOR 7.

（2進数．$5 = 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0$
$7 = 1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0$

$5 = 1\ 0\ 1$
$7 = 1\ 1\ 1$

5 XOR 7 = 0 1 0 = 2

例2　5 XOR 3

$5 = 1\ 0\ 1$
$3 = 0\ 1\ 1$

5 XOR 3 = 1 1 0 = 6

例3　5 XOR 5

$5 = 1\ 0\ 1$
$5 = 1\ 0\ 1$

5 XOR 5 = 0 0 0 = 0

– Sprague – Grundy Theorem. –

($a_1 = 1$とする)

石 $\{A_1, \ldots, A_n\}$, 取るかず $\{a_1, \ldots\ldots, a_k\}$ で最後の石をとった

石とりゲームは.

グランディー数 $g(x) := \min\{ t : 0以上の自然数 \mid t \neq g(x - a_i) \}$

としたとき

$g(A_1)$ XOR ‥‥‥ XOR $g(A_n) \neq 0$ なら先手必勝, でな 後

必勝法は $g(a_1)$ XOR ‥‥ XOR $g(a_n) = 0$ となる手をうって

あとでつかいたい

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$g(n)$	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1	2	3	2	0
$n-1$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$n-3$				0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$n-4$					0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$\boxed{例}$ $\{a_1, a_2, a_3\} = \{1, 3, 4\}$ のとき

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = 3, A_2 = 4 \Rightarrow g(3) \text{ XOR } g(4) = \overset{01}{1} \text{ XOR } \overset{10}{2} = 3 \neq 0 \\ A_1 = 3, A_2 = 5 \Rightarrow g(3) \text{ XOR } g(5) = \overset{01}{1} \text{ XOR } \overset{11}{3} = 2 \neq 0 \\ A_1 = 6, A_2 = 8 \Rightarrow g(6) \text{ XOR } g(8) = \overset{10}{2} \text{ XOR } \overset{01}{1} = 3 \neq 0 \end{array}\right\} \text{先手必勝}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$g(n)$	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1	2	3	2	0
n-1		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n-3				0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n-4					0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$A_1 = 3,\ A_2 = 5,\ A_3 = 2$

$\Rightarrow g(3)\ \mathrm{XOR}\ g(5)\ \mathrm{XOR}\ g(2)$

$= \underset{01}{1}\ \mathrm{XOR}\ \underset{11}{3}\ \mathrm{XOR}\ \underset{00}{0} = 2 \neq 0$ 先手必勝

$A_1 = 5,\ A_2 = 8,\ A_3 = 6$

$\Rightarrow g(5)\ \mathrm{XOR}\ g(8)\ \mathrm{XOR}\ g(6)$

$= \underset{11}{3}\ \mathrm{XOR}\ \underset{01}{1}\ \mathrm{XOR}\ \underset{10}{2} = 0$ //後手必勝

SPRAGUE–GRUNDY THEOREMの証明

$\boxed{\text{補題}}$

- $g(x_1)$ XOR $\cdots$ $g(x_n) \neq 0$ なら，ある $\begin{matrix} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k \end{matrix}$ があって
  $g(x_1)$ XOR $\cdots$ $g(x_i - a_j)$ XOR $\cdots$ $g(x_n) = 0$ とできる.
- $g(x_1)$ XOR $\cdots$ $g(x_n) = 0$ ならば，任意の $\begin{matrix} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k \end{matrix}$ について
  $g(x_1)$ XOR $g(x_i - a_j)$ XOR $\cdots$ $g(x_n) \neq 0$

$\boxed{\text{補題}\Rightarrow\text{ていり}}$

「先手が A_i から a_j こ とることで $g(A_1)$ XOR $\cdots$ $g(A_n) = 0$ とできる.
以下 後手がどううごいても $\vdots$ $= 0$ とできる. 石のかずはへるので 最ご0になるのは先手」.

補題の証明　以下かんたんのため $n=2$ とすると

$\because\ g(x_1)\ \mathrm{XOR}\ g(x_2) \neq 0$

$\Rightarrow$ ある(2進数の)桁で1のものがある

$\Rightarrow$ その一番大きな桁を k とする。$g(x_1)$ の k 桁目が1としてよい

$\Rightarrow$ $g(x_1)=l_1$ とする、グランディー数の定義から任意の $0 \le y \le l_1 - 1$ について、$g(x_1 - a_j) = y$ なる j がある

$\Rightarrow$ 左からうまく ちょうせいすることで $g(x_1 - a_j)\ \mathrm{XOR}\ g(x_2) = 0$ とできる。

例1　$g(x_1) = 5$ (101)
$g(x_2) = 3$ (011)
$\Rightarrow 5\ \mathrm{XOR}\ 3 = \underline{1}10$ (桁: 3 2 1), $k = 3$

$\Rightarrow$
$$\begin{array}{rcccc} \cancel{5}^{\,3} & = & \cancel{1}^{\,0} & \cancel{0}^{\,1} & 1 \\ 3 & = & 0 & 1 & 1 \\ \hline & & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $g(x_1 - a_j) = 3$ なる a_j をとる

- $g(x_1)\ \mathrm{XOR}\ g(x_2) \cdots g(x_n) = 0$

$g(x_1 - a_1)\ \mathrm{XOR} \qquad\qquad = 0$

$\Rightarrow \quad g(x_1)\ \mathrm{XOR}\ g(x_1 - a_1) = 0$

$\Rightarrow \quad g(x_1) = g(x_1 - a_1)$

これはグランディー数のていぎに矛盾する。

$\boxed{\text{例}}$ ニム

石が $\{A_1 \cdots A_n\}$ こずつあり

同じ山から石をなんこもとっていい石とりゲーム

最ごの石をとった人がかつとする

この必勝法は??

$\boxed{解}$ とる石の方が $\{1,2,3,\cdots\cdots,x\}$ の石とりゲーム、とみなせる

$$g(x) = \min\{t \mid t \neq g(x-i) \quad i=1,2,3,\ldots x\}$$

で決定されるので

$$g(x) = x.$$

よって $A_1 \text{ XOR } \cdots \text{ XOR } A_n \neq 0$ 先手必勝

$= 0$ 後手必勝

必勝法は $x_1 \text{ XOR } \cdots \text{ XOR } x_n = 0$ となる手をさしていく

発展話題

実は石取りゲームに限らず, 有限型の不偏ゲーム(1-4を満たす)について解析できる

1. 偶然的要素は含まない (確定性)
2. 隠された情報はない (完全情報性)
3. 同一局面では二人のプレイヤーの取れる差し手に違いはない (対称性)
4. 有限回の手順で必ず勝敗が決まる (有限性)

(1-2を満たすゲームを組合せゲーム, 1-3を満たすゲームを不偏ゲームという)

ゲームの定義

$A=(P, R)$ がゲーム

〈def〉 P = すべての可能な局面からなる集合

R = ルール $\left(R: P \longrightarrow (P\text{のべき集合}) \atop x \longmapsto R(x) \right)$

- $x \in P$ について $R(x)$ を x の後続局面という
- $x \in P$ が終了局面とは $R(x) = \phi$ なること.

$\boxed{定理}$ 有限不偏ゲーム $A=(P,R)$ は引き分けはない。

証) ・$x\in P$ について、A は有限より

$x\to x_1\to\cdots\to x_n$ となるゲーム列がある。

この最大の長さを $l(x)$ とおく。 $l(x)=0 \Leftrightarrow x$ 終了局面。

$l:=l(x)$ による帰納法で示す。

・$l=0$ なら 後手必勝

$l-1$ までOKとして l については

ある $y\in N(x)$ で y が後手必勝なら x では先手必勝

任意の $y\in N(x)$ で y が先手必勝なら x では後手必勝

となる。

$A = (P, R)$ 有限型不偏ゲームについて、グランディ数を

- $g_A(x) = 0$ if x 終了局面
- $g_A(x) = \min\{t \in \mathbb{N} \mid t \neq g(y), y \in R(x)\}$ とする

$\boxed{\text{定理}}$

$S = \{x \in P \mid g(x) \neq 0\}$ とおいて

$\mathcal{G} = \{x \in P \mid g(x) = 0\}$

S は先手必勝局面, $\mathcal{G}$ は後手必勝局面

(証明はほぼ同じ)

$\boxed{\text{定義}}$ $A_1=(P_1,R_1)$, $A_2=(P_2,R_2)$ はゲームとする

$P_1+P_2=\{(x_1,x_2)\in P_1\times P_2\}$

$R_1+R_2: P_1+P_2 \longrightarrow$ ($P_1\times P_2$ のべき集合)

$(x_1,x_2) \longmapsto \{(y_1,y_2) \mid y_1\in R(x_1) \,\&\, y_2=x_2 \text{ or } x_1=y_1 \,\&\, y_2\in R(x_2)\}$

$A_1+A_2=(P_1+P_2, R_1+R_2)$ とする.

$\boxed{\text{定理}}$ $g(A_1+A_2)=g(A_1)\text{ XOR } g(A_2)$

(数学的帰納法による)

$\boxed{例11}$ Sparague-Grundy Thm.

$\{A_1, \cdots A_n\}$ 石 $\{a_1, \ldots a_k\}$ とる数

$\Rightarrow A_i = \{A_i\}$ で $\{a_1, \ldots a_k\}$ の石とりゲーム$\}$とすると

$\Rightarrow A_1 + \cdots + A_n$ がこのゲーム.

$\Rightarrow g(A_1 + \cdots + A_n) = g(A_1)\ \mathrm{XOR} \cdots \mathrm{XOR}\ g(A_n)$

$g(A_i)$は A_iコから 石を$\{a_1, \ldots a_k\}$ことる石とりゲーム より ふつうに グランディー数が もとめられる.

次回予告

・次回は世界のアソビ大全51です.

・難易度をかなり下げていつも通りの感じでやります

・次回で当初予定してた内容は終わりです(その次からは今私が気になっていてやりたい内容をやります)

参考文献

・佐藤文広　石取りゲームの数学

・秋葉拓哉, 岩田陽一, 北川宜稔
プログラミングコンテストチャレンジブック

学問の扉
(ゲームにまつわる数学)

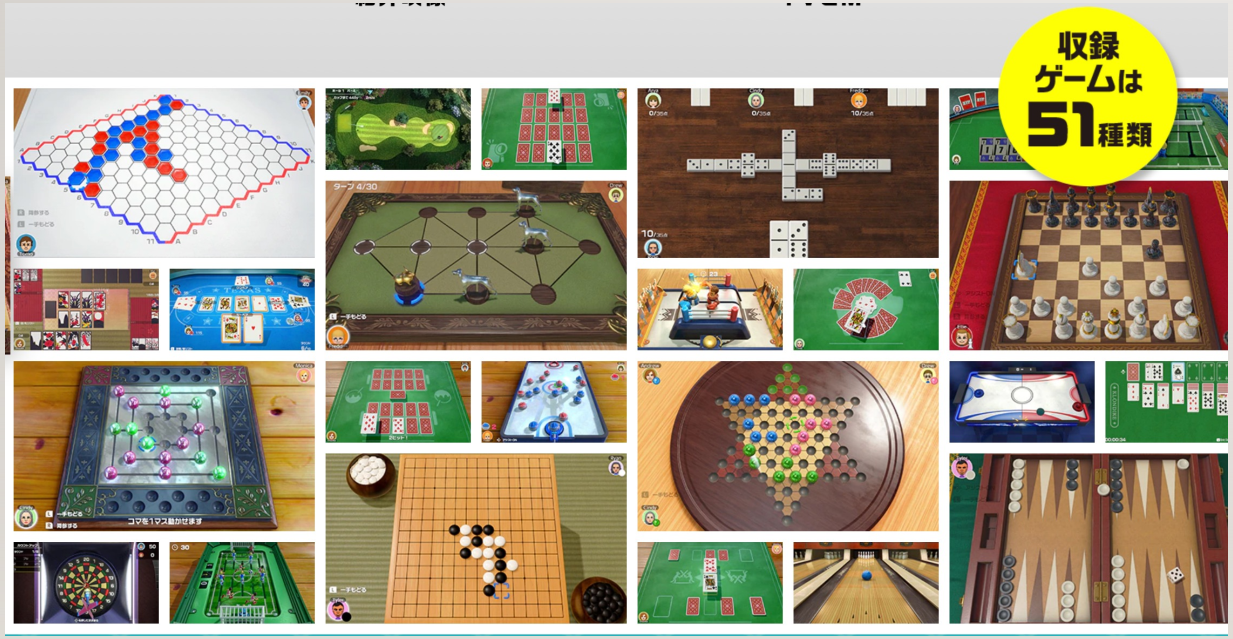
第5回 世界のアソビ大全51

担当教官 : 岩井雅崇(いわいまさたか) (大阪大学)

前回の授業に関して

- 難しすぎましたかね?? まあ前回のような授業はもうしないつもりです(おそらく…)
- 今回はあんまり数学要素は少なめです.

世界のアソビ大全51



『世界のアソビ大全51』は、任天堂より2020年6月5日に発売されたNintendo Switch用ゲームソフトである。 2005年に発売されたニンテンドーDS用ソフト『だれでもアソビ大全』同様、ボードゲーム、トランプゲーム、オリジナルのバラエティゲームなどを51種類収録しているテーブルゲーム集。

この12個のゲームに共通したことは何でしょうか？

二人零和有限確定完全情報ゲーム

（ふたりれいわゆうげんかくていかんぜんじょうほうげーむ）

(二人完全情報確定ゼロ和ゲーム)

- 二人　　プレイヤー二人 (タイマン)
- 零和　　プレイヤー全体の利得の合計がゼロ (利害対立)
- 有限　　終了が保証されている (有限手数)
- 確定　　偶然的な要素は含まれない(運要素なし)
- 完全情報　いつでも相手や自分の行動・状態はわかる(全情報公開)

つまり”完全実力ゲー”ということ

(運ゲーなしで実力のみで決まるゲーム)

- 二人　プレイヤー二人 (タイマン)
- 零和　プレイヤー全体の利得の合計がゼロ (利害対立)
- 有限　終了が保証されている (有限手数)
- 確定　偶然的な要素は含まれない(運要素なし)
- 完全情報　いつでも相手や自分の行動・状態はわかる(全情報公開)

二人零和有限確定完全情報ゲームなゲームって案外少ない…?

- 二人　　　タイマン
- 零和　　　利害対立
- 有限　　　有限手数
- 確定　　　運要素なし
- 完全情報 全情報公開

二人零和有限確定完全情報ゲームのいいところ

（ふたりれいわゆうげんかくていかんぜんじょうほうげーむ）

二人零和有限確定完全情報ゲームには

必勝法が存在する.

“理論的”には先手必勝・後手必勝・引き分けがやる前からわかる.

(理論的≠現実的)

なのでオセロ・将棋・囲碁・チェスなどに必勝法はあります.

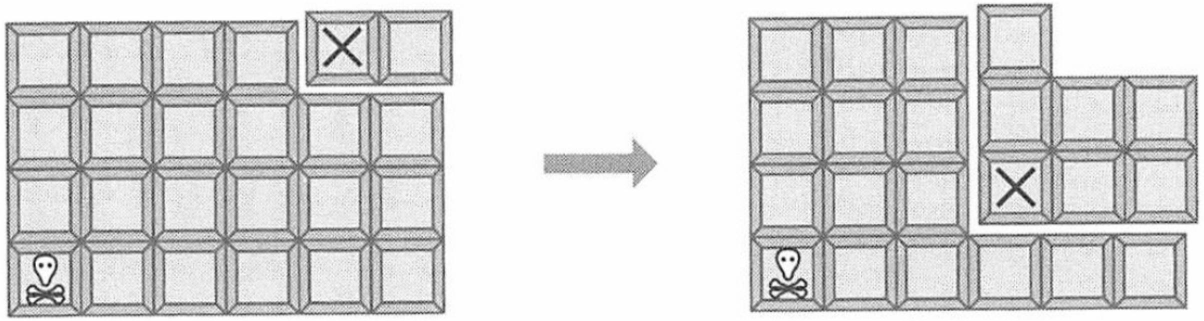
本当にオセロ・将棋・囲碁・チェスに必勝法はあるの？

- 理論的に調べる方法はあるだけで, 現実では分かってない. (細かいこと言うと, 調べる方法あるけどそれを実行するのにめちゃくちゃ時間がかかる.)
- 例えばオセロ・将棋・囲碁・チェスは先手必勝・後手必勝・引き分けなどはいまだに分かってない.
- それについて詳しく言いたいけど, そろそろ疲れてきたのでちょっとゲームを挟みましょう.

チョンプ(CHOMP)

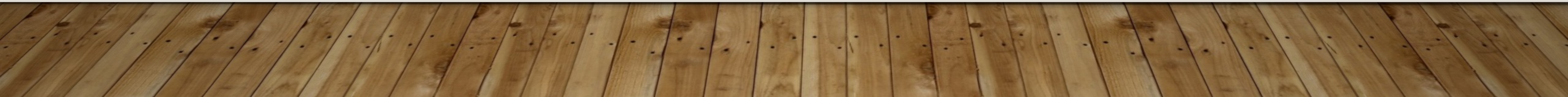
9.1 チョンプ

Q サイズが $m \times n$ の長方形の形をした板チョコを，2 人が交代でかじっていく．かじるときは毎回，残っているチョコレートの一かけを選び，そのかけらを含めてそれよりも上かつ右の部分をすべてかじりとる（下図参照）．2 人とも，一番左下の一かけだけはとりたくない．毒が入っているのである．
このとき，板チョコが最初から一かけだけでない限り，先手のほうに必勝法が必ずあることを証明せよ．



今回は**5**×**6**でやりましょう.
調査のため, 先手・後手はあらかじめ決めます.

あとは当日の私がなんとか仕切ってくれます.



チョンプについて

- チョンプは先手必勝. (あとで証明します.)
- だがどうやれば先手が勝つかわかっていない.

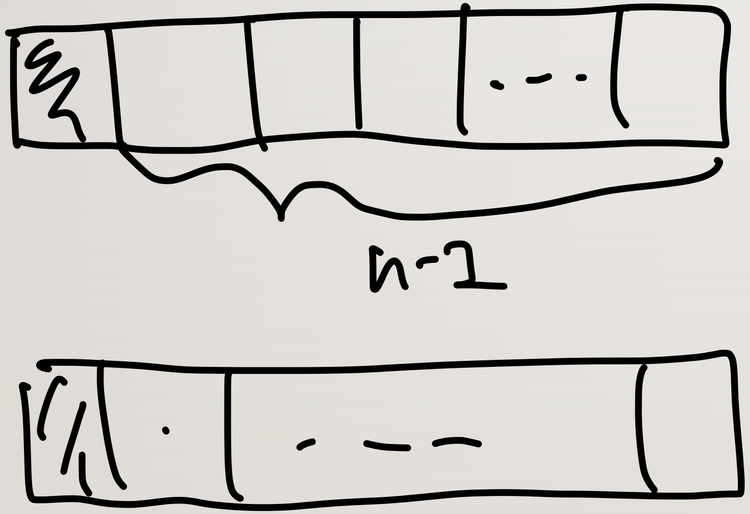
先手必勝であることはわかっているが具体的な勝ち方がわかってないと言うことです. (それは必勝法が分かったと言える⁉)

数が小さい場合はチョンプの必勝法は次の通りになります.

数が少ない場合のチョンプの勝ち負け

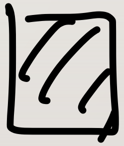
先手 Aさん
後手 Bさん

$1\times n$



先手のかち.
先手が $n-1$こ とればよい

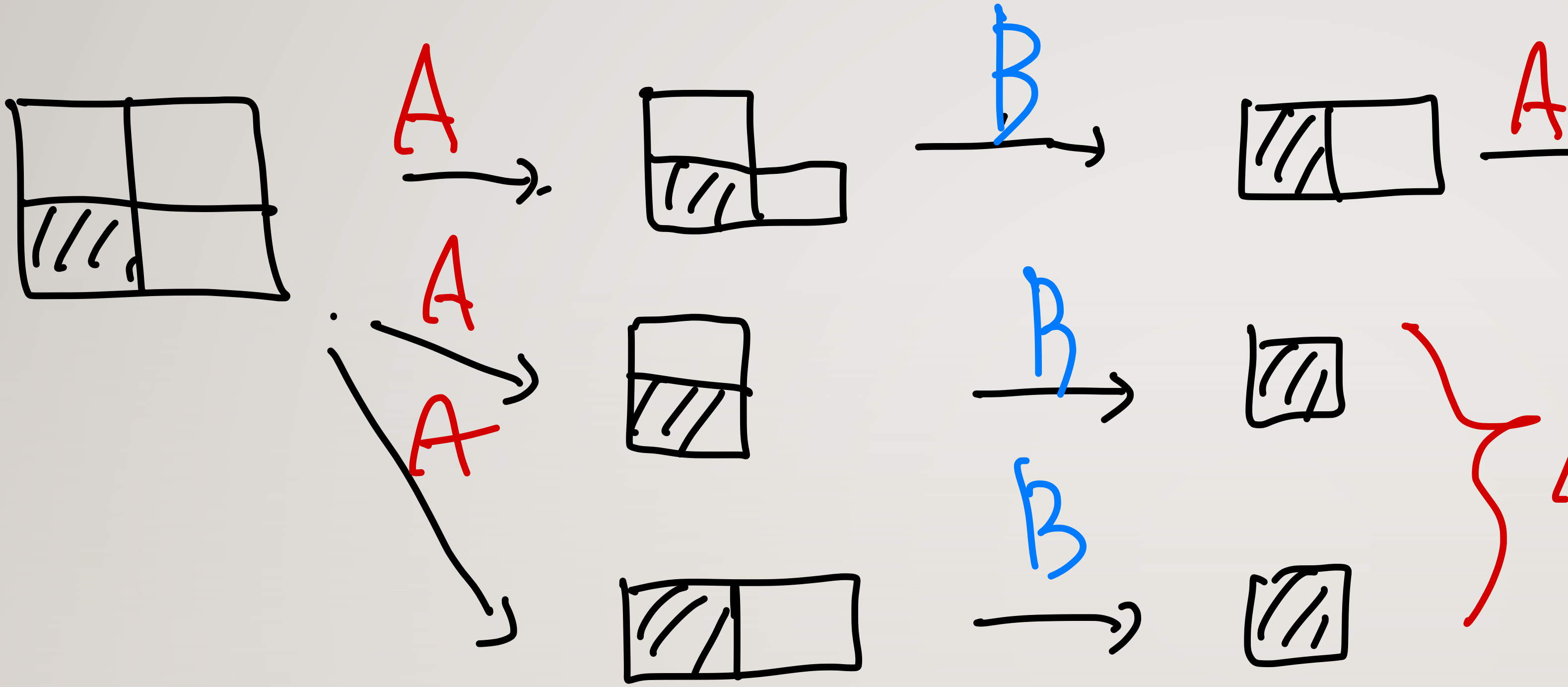
Aさん →



Bさん →

∴ Aさんのかち

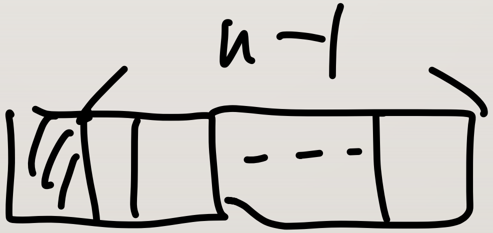
2X2.

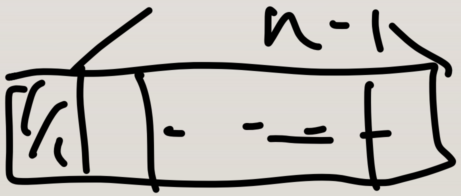


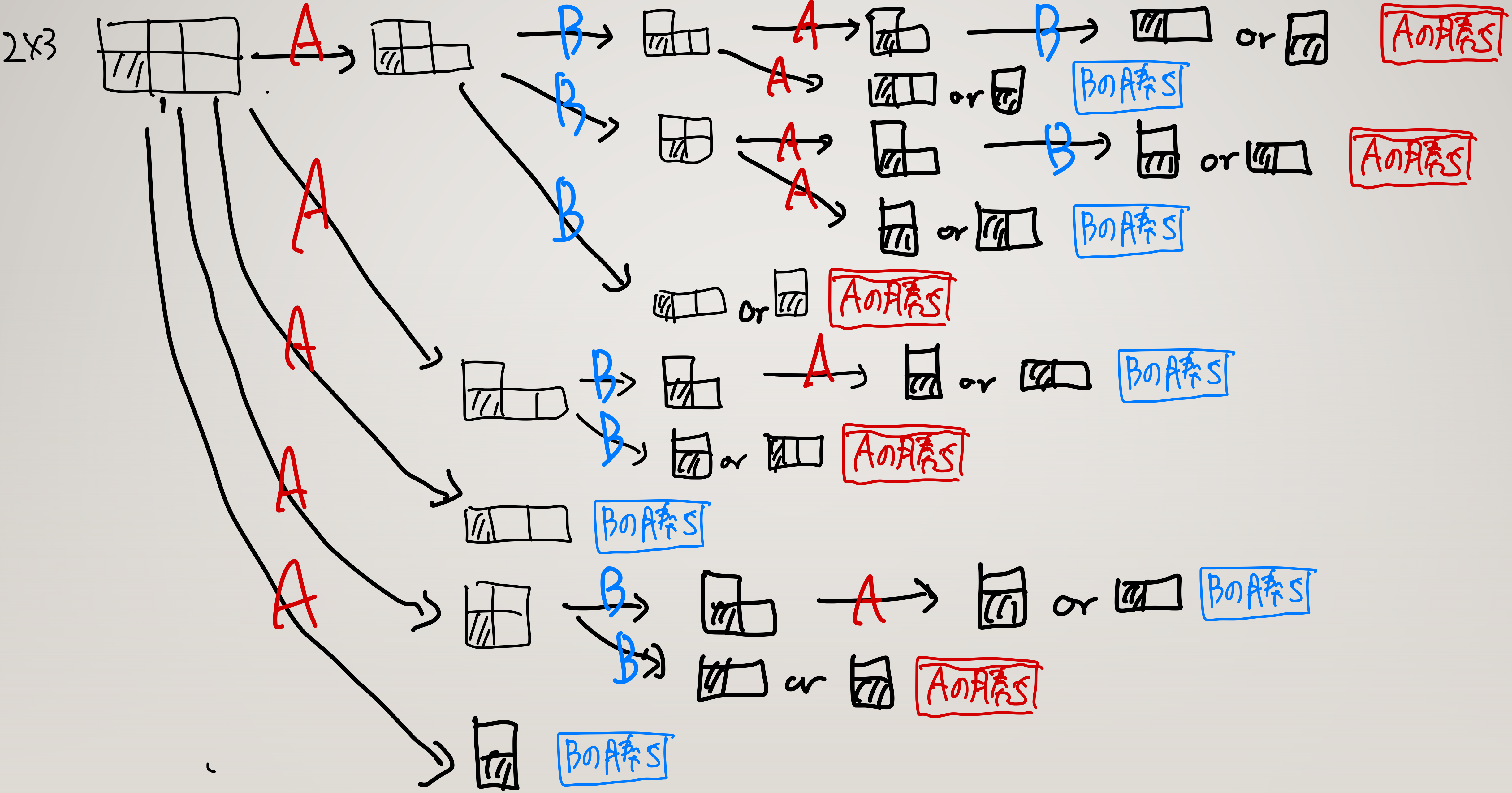
・Aさんのかち

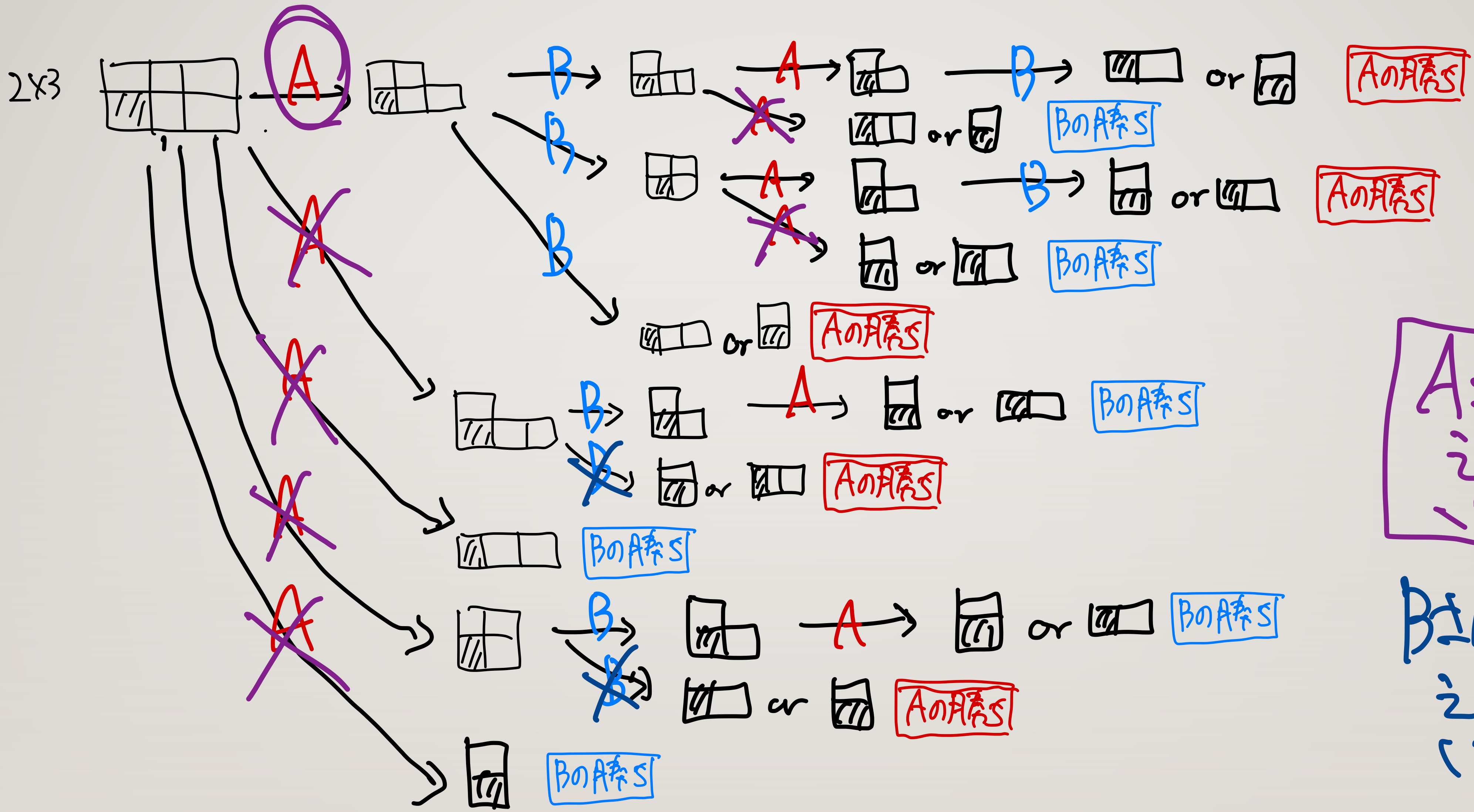
Aさんのまけ

次にむけて...

Bさんに  がわたれば Aさんのまけ

Aさんに  がわたれば Bさんのまけ


2×3
A
B
or
Aの勝ち
Bの勝ち



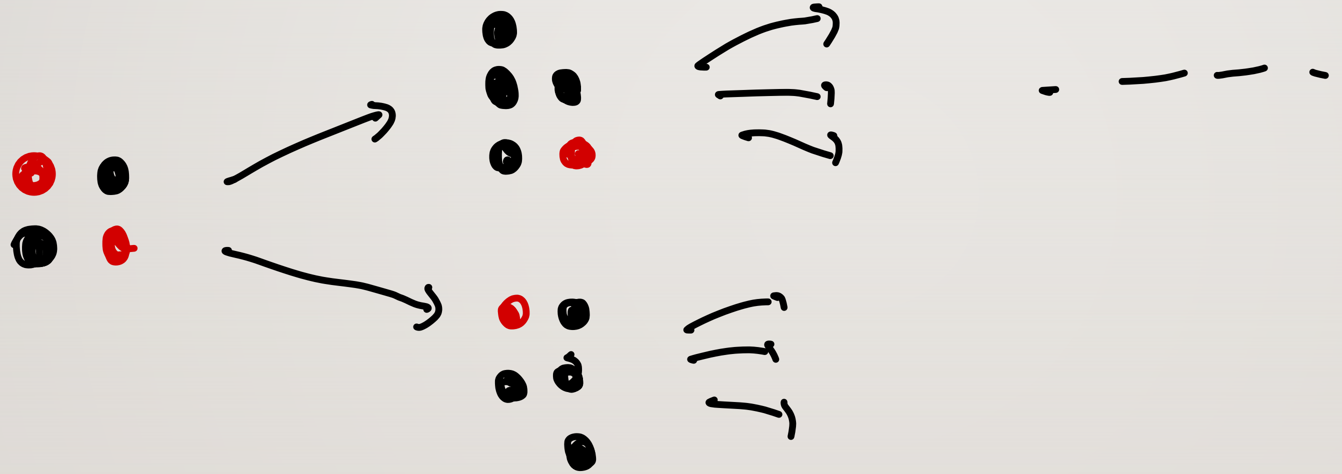
Aさんが
えらんでは
いけない手

Bさんが
えらんでは
いけない手

二人零和有限確定完全情報ゲームの必勝法の存在

理論的にはチョンプと同じことをすれば良い

オセロ



最終形

⇒ Aさん, Bさんの"悪手"を外していく ⇒ 上と同じように勝ちまけ、引き分けを示せる

- 平均 N 手
- 平均 M 回でおわる $\Rightarrow$ N^M 回しらべる

なんでこれができないの?

- あまりにも計算量が多い.

例えば富岳は1秒に44京2010兆≒4×10^{17}回計算できる.

この方法で将棋の解析をするには

$10^{220} \div (4\times 10^{17})=2.5\times 10^{202}$ (秒) ≒ 10^{195} (年)かかる

ちなみに地球が生まれて今まで46億年=4.6×10^{9}(年).

表 2.1　ゲームとその探索局面数

ゲーム	探索局面数
チェッカー	10の 30乗
オセロ	10の 60乗
チェス	10の120乗
中国象棋	10の150乗
将　棋	10の220乗
囲　碁	10の360乗

できた例

- 以下はWikipedia情報なので真偽は不明. (Wikipediaの二人零和有限確定完全情報ゲームの欄に書いてた)

双方のプレーヤーが最善手をプレイし続けた場合の勝敗が判明しているゲームの例として、以下のものなどがある。

先手必勝

初期ルールの五目並べ[3]

後手必勝

6×6のリバーシ[4]、どうぶつしょうぎ[5]、十六むさし[6]

引き分け

三目並べ[7]、チェッカー[8]

WIKIPEDIAは信じられないのでソース源を辿ると..

Chinook と言うProjectがあるらしい (https://webdocs.cs.ualberta.ca/~chinook/games/)

そのプロジェクトで次のものが解決したとのこと

- コネクトフォー(1988)　先手必勝
- 五目並べ(1994)　先手必勝??
- ナインメンズモリス (1994) 引き分け
- 7×7 ヘックス
- 5×5 囲碁
- 6×6 オセロ

ちなみに….

- 総当たりする方法ではなく, なんか良い手だけ調べる「枝刈り」とかある.
- 前は先人の差し手のデータを学習させて良い手を考える機械学習とか人気だった気がする.
- ちょっと前(今も)AI同士を戦わせて強くなる強化学習とか人気⁇

詳しくはゲーム情報学概論か松尾豊先生(機械学習・深層学習の第一人者)の本などを読んでください.

おまけ
チョンプ・ヘックスは先手必勝

[証明] ジョン・ナッシュによる戦略盗用論法(Strategy-stealing argument)

チョンプだけ考える. (ヘックスもほぼ同じ)
仮に後手(Bさん)に必勝法があったとする. 先手(Aさん)は一番右上だけとる. Bさんには必勝の応じ手があることになる. でもその手はAさんが1手目にできた手である. よってAさんに必勝の手が打てることになり矛盾である.

ヘックスも「先手(Aさん)が適当に1手目をうって, そっからそのうった手を忘れて後手必勝の手を打っていく」とかいう議論をしていく

参考文献(?)

- 伊藤 毅志 ゲーム情報学概論
- 安田健彦 ゲームで大学数学入門
- ピーターウィンクラー とっておきの数学パズル
- Chinook https://webdocs.cs.ualberta.ca/~chinook/games/
- 世界のアソビ大全51】ボドゲガチ勢が完全実力ゲー全12種でCPU最高難易度『やばい』を淡々と倒すだけ [https://www.youtube.com/watch?v=2AXEur7pe_s&t=34s]

次回はポーカーです

学問の扉
(ゲームにまつわる数学)

第6回 ポーカー

担当教官 : 岩井雅崇(いわいまさたか) (大阪大学)

ポーカー

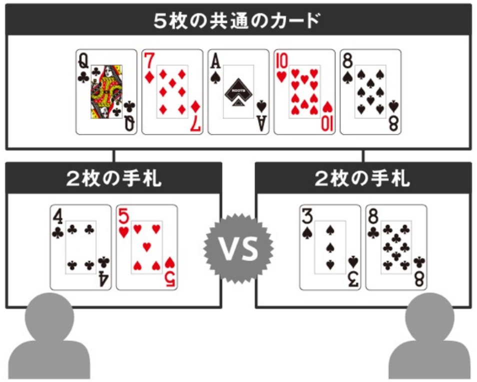
- 今流行ってるのは”テキサスホールデム”という形式のポーカー
- プレイ人口１億人. WSOP (ポーカーの世界大会)では優勝賞金10億円
- 海外のカジノに行けばお金を賭けてポーカーをすることができる. (韓国, アメリカのラスベガス…)
- 日本ではお金を賭ける行為は賭博罪にあたるので, 絶対にしてはいけません! (確か賭け麻雀総裁もいましたね…)
- 日本だとアミューズメントカジノがあり, ポーカーをお金をかけずに楽しく遊べる.
- 日本でもカジノ誘致してるので, カジノができれば日本でもお金をかけたポーカーができるかも. (まあでも政治的な道具にされてる感じが否めない…)

簡単なポーカーの説明

以下はROOTSのページ
から取ってきました

ルールは非常に簡単です。全てのプレイヤーに裏向きで2枚のカードが配られた後に、5枚の共通カードが場に表向きになって配られます。

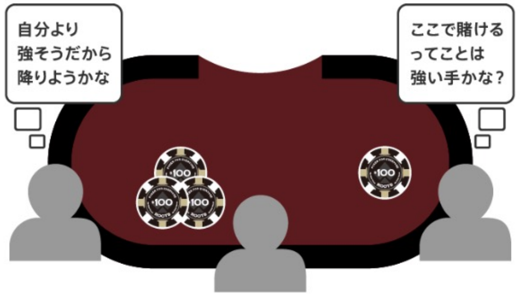
このプレイヤー毎に違った2枚のカードと全員共通の場に出た5枚のカード、計7枚のカードから一番強い5枚のカードを選んで役を作り、最も強い役を作ったプレイヤーが勝利します。



この時、プレイヤーはカードが配られた直後から5枚のカードが全て出るまでの間に、計4回のベッティング（チップを賭ける）ラウンドをプレイします。このベッティングラウンド中に賭けたチップの総額を最終的な勝者が総取りします。

この時、プレイヤーはカードが配られた直後から5枚のカードが全て出るまでの間に、計4回のベッティング（チップを賭ける）ラウンドをプレイします。このベッティングラウンド中に賭けたチップの総額を最終的な勝者が総取りします。

ベッティングラウンドでは、前のプレイヤーが賭けた金額と同額以上をベットしない場合、ゲームを降りたという扱いになり、実際の手の強さに関係無く負けが確定します。このベッティングラウンドでのプレイヤー同士のブラフ（嘘）や、それを見破る駆け引きが数々のドラマを生んでいく、ポーカーの醍醐味と言えます。



より強い手を作り多くのチップを手に入れるか、弱い手で相手を欺き、勝負から降ろすか。ゲームの中で無数の選択を迫られ、対戦相手が変わる事で自分の取るべき選択も変わっていく、究極の対人ゲームがテキサスホールデムです。

運と実力、そして駆け引き。

数多の物語が交差する、ポーカーの世界へようこそ。

なんで今こんなにポーカー流行ってんの?

- おそらく横澤真人さんがかなり広めた(気がする).
- 日本人ポーカー賞金ランキングTOP10に入るほどの実力.
- 海外のカジノに行っては, 100万・200万円を一瞬にして失ったり, 3週間で800万円稼ぐなど, 金銭感覚ぶっ壊れる動画が多い.
- 破天荒なギャンブラーに見えつつきちんと合理的な行動をしている. 特にポーカーを”期待値”に基づいてプレイしている. (ので私は見てて結構楽しいです.)

ナッシュの**3**人ポーカーゲーム

使う道具: トランプの絵札(高カード)とそれ以外 (低カード)4枚ずつ・チップ 1人15枚
ルール

1. プレイヤー3人は2枚のチップを場に出す(アンティ・場代)
2. カードを1枚配る.
3. 最初のプレイヤーから順番に次の選択肢を選ぶ.
   - 勝負に挑む. この場合さらに2枚のチップを場に出す(オープン)オープンレイズのこと？
   - 様子見する. 次の人に手番を渡す. (パス)
4. 一周回ってだれもオープンしていなければその場は流れ, 場にあるチップは各プレイヤーに戻る.
5. もし自分の手前の人がレイズしてたら次の選択肢を選ぶ.
   - 相手の勝負に挑む. この場合2枚のチップを場に出す(コール)
   - 勝負から降りる. この場合1で場に出した2枚のチップは戻らない (フォールド)
6. 勝負する. 賭けに参加し高カードを持つ人たちで場に出ているチップを等分する.

注意: レイズにレイズをする(リレイズ)はできません!

ルール複雑なんで一度テストプレイします.

この中でポーカー知ってる人や, このルール見てわかった人はご協力ください

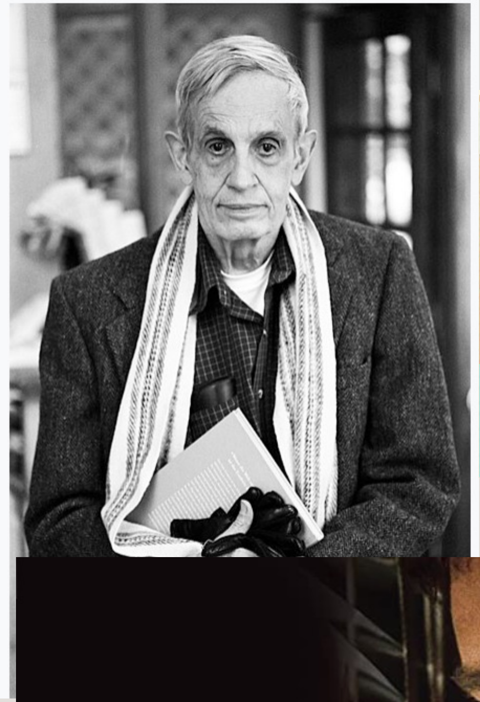
テストプレイが終わったら, チップ**15**枚とトランプを渡しますのでナッシュの**3**人ポーカーをしましょう.
(具体的にどうやってやるかは当日の私がなんとかやってくれます. もしくはポーカー経験者に委ねます.)

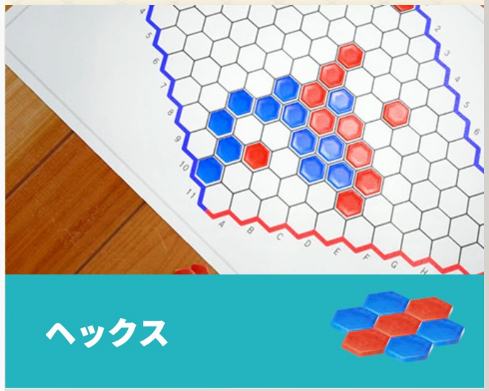
実はナッシュの3人ポーカーは最適戦術が解析されている.

Nash, John. “Non-Cooperative Games.” *Annals of Mathematics* 54, no. 2 (1951): 286–95. https://doi.org/10.2307/1969529.
という論文で最適戦術が数学的に解析された.

ジョン・ナッシュ (JOHN NASH)

- ゲーム理論の創始者. (ナッシュ均衡とか聞いたことあるはず) その業績によりノーベル賞受賞.
- 数学の業績も多い. (ナッシュの埋め込み定理など)
- ヘックスを作った.
- かなり波瀾万丈な人生を送る. 統合失調症になる中, 数学の研究を続けていたらしい. 詳しくは「ビューティフルマインド」という映画を見よう!
- 2015年没. 数学のアーベル賞の受賞後にタクシー乗車し, そのタクシーが交通事故を起こし, そして死去した.





Nash すべてのゲームは均衡点をもつ.

3人ポーカーのばあいは…

P パス
B ベット.

Player 1

He holds	High	Low
Faced with:	he bets with probability:	
--	α 0.308	β 0
PBB	ο 1	π 0
PBP	ρ 1	σ 0
PPB	τ 1	υ 0

Player 2

He holds	High	Low
Faced with:	he bets with probability:	
B	γ 1	δ 0
P	ε 0.826	ζ 0.094
PPBB	φ 1	χ 0
PPBP	ψ 1	ω

Player 3

He holds	High	Low
Faced with:	he bets with probability:	
BB	η 1	θ 0
BP	ι 1	κ 0
PB	λ 1	μ 0
PP	ν 1	ξ 0.635

BEHAVIOR COEFFICIENTS

−0.147　　−0.096　　0.243

ざっくりだと…

・player1 ローカードもったら勝負しない
ハイカードもったら初手で $\boxed{30.8\%}$ のかくりつでベットする

player2 ・ハイカードもっていて、player1がベットしたらベットする。
・ハイカードもっていて、player1がパスしたら $\boxed{82.6\%}$ のかくりつでベットする
・ローカードもっていて、player1がベットしたらおりる
・ローカードもっていて player1がパスしたら $\boxed{9.4\%}$ のかくりつでベットする
・パスしたのちはハイカードもってたらベット、ローカードならおりる

player3 ・player1,2がパスしていて、ローカードもっているとき $\boxed{63.5\%}$ でベットする
・それ以外は ハイカードもってるときは勝負して
ローカード 〃 おりる。

3人ポーカーのばあいは…

P パス
B ベット.

Player 1		
He holds	High	Low
Faced with:	he bets with probability:	
--	α 0.308	β 0
PBB	ο 1	π 0
PBP	ρ 1	σ 0
PPB	τ 1	υ 0

Player 2		
He holds	High	Low
Faced with:	he bets with probability:	
B	γ 1	δ 0
P	ε 0.826	ζ 0.094
PPBB	φ 1	χ 0
PPBP	ψ 1.	ω

Player 3		
He holds	High	Low
Faced with:	he bets with probability:	
BB	η 1	θ 0
BP	ι 1	κ 0
PB	λ 1	μ 0
PP	ν 1	ξ 0.635

BEHAVIOR COEFFICIENTS

−0.147 −0.096 0.243

次回予告

- 次回は素数大富豪です.
- この中でトランプを持って来れる人は持っていてください(トランプ2デックだと足りないかも…)

参考文献(?)

- H.W.クーン S. ナサー ナッシュは何を見たか 純粋数学とゲーム理論.
- Nash, John. “Non-Cooperative Games.” *Annals of Mathematics* 54, no. 2 (1951): 286–95. https://doi.org/10.2307/1969529.
- Nash, J. F. and Shapley, L. S.. "10. A SIMPLE THREE-PERSON POKER GAME". *Contributions to the Theory of Games (AM-24), Volume I*, edited by Harold William Kuhn and Albert William Tucker, Princeton: Princeton University Press, 1951, pp. 105-116. https://doi.org/10.1515/9781400881727-011
- 世界のヨコサワ Youtubeチャンネル https://www.youtube.com/@yokosawa/featured
- **【すぐ出来る】ポーカーのルールを世界一わかりやすくプロギャンブラーが解説します。【テキサスホールデム】https://www.youtube.com/watch?v=tGoA4OWzzAk&t=1145s**
- **【必勝法】カジノの勝ち方、全て話します。～なぜあなたはギャンブルで負けるのか~ https://www.youtube.com/watch?v=GAaj8hlls6I&t=15s**
- **ROOTS What is poker ポーカーってなに? https://roots-poker.com/what-is-poker**

有限ゲーム　プレイヤーn人，純粋戦略 $\{\pi_{i\alpha}\}_{i=1}^{n}{}_{\alpha=1}^{m}$．
利得関数 $\{P_i\}_{i=1}^{n}$

$$S_i = \sum_{\alpha=1}^{m} c_{i\alpha}\pi_{i\alpha}$$ ：混合戦略 $\left(\sum c_{i\alpha}=1,\ c_{i\alpha}\geq 0\right)$

$$S_i \in \{\sum r_\alpha \pi_{i\alpha} \mid r_1+\cdots+r_m=1\}.$$

$$P_i(S_1,\ldots S_n)=$$

$$\left(P_i(S_1,S_2)=P_i\left(\sum_{\alpha_1=1}^{m} c_{1\alpha_1}\pi_{1\alpha_1},\sum_{\alpha_2=1}^{m} c_{2\alpha_2}\pi_{2\alpha_2}\right)\right.$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_1=1 \\ \alpha_2=1}}^{n} G_{1\alpha_1} G_{2\alpha_2} P_2(\pi_{1\alpha_1}, \pi_{2\alpha_2})$$

$\boxed{例}$ $n=2$, $\pi_{11} = \pi_{21} =$ グー

$\pi_{12} = \pi_{22} =$ チョキ

$\pi_{13} = \pi_{23} =$ パー.

$$P_1(\pi_{1\alpha}, \pi_{2\beta}) = \begin{cases} 1 & \text{かち（プレイヤー1が）} \\ 0 & \text{引き分け} \\ -1 & \text{まけ.} \end{cases}$$

$$P_1(S_1, S_2) = \sum_{1\le\alpha,\beta\le 3} C_{1\alpha} C_{2\beta} \underline{P_1(\Pi_{1\alpha}, \Pi_{2\beta})}$$

(0,1,-1)とる

$\boxed{\text{均衡点}}$ $i=1,2,\dots,n$について

$$P_i(S_1,\dots,S_n) = \max_{r_i\in[0,1]} P_i(S_1, S_2, \dots, r_i, \dots, S_n)$$

各プレイヤーの戦略は <u>最適</u>

例1　$n=2$.　$\pi_{11}=\pi_{21}=$ グー
$\pi_{12}=\pi_{22}=$ パー

P_1 の値が

	グ	パ
	0	-1
パ	1	0

$$
\begin{cases}
P_1(S_1,S_2)=\displaystyle\sum_{\substack{\alpha=1\\ \beta=1}}^{2} C_{1\alpha}C_{2\beta}\,P_1(\pi_{1\alpha},\pi_{2\beta}) \\
\qquad\qquad = -C_{11}C_{22}+C_{12}C_{21} \\
P_2(S_1,S_2) = C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21}.
\end{cases}
$$

目てき　$C_{11}=0=C_{21}$,　$C_{22}=C_{12}=1$

$\boxed{\text{例12}}$　$n=2$　$\pi_{11}=$グー　$\pi_{21}=$パー

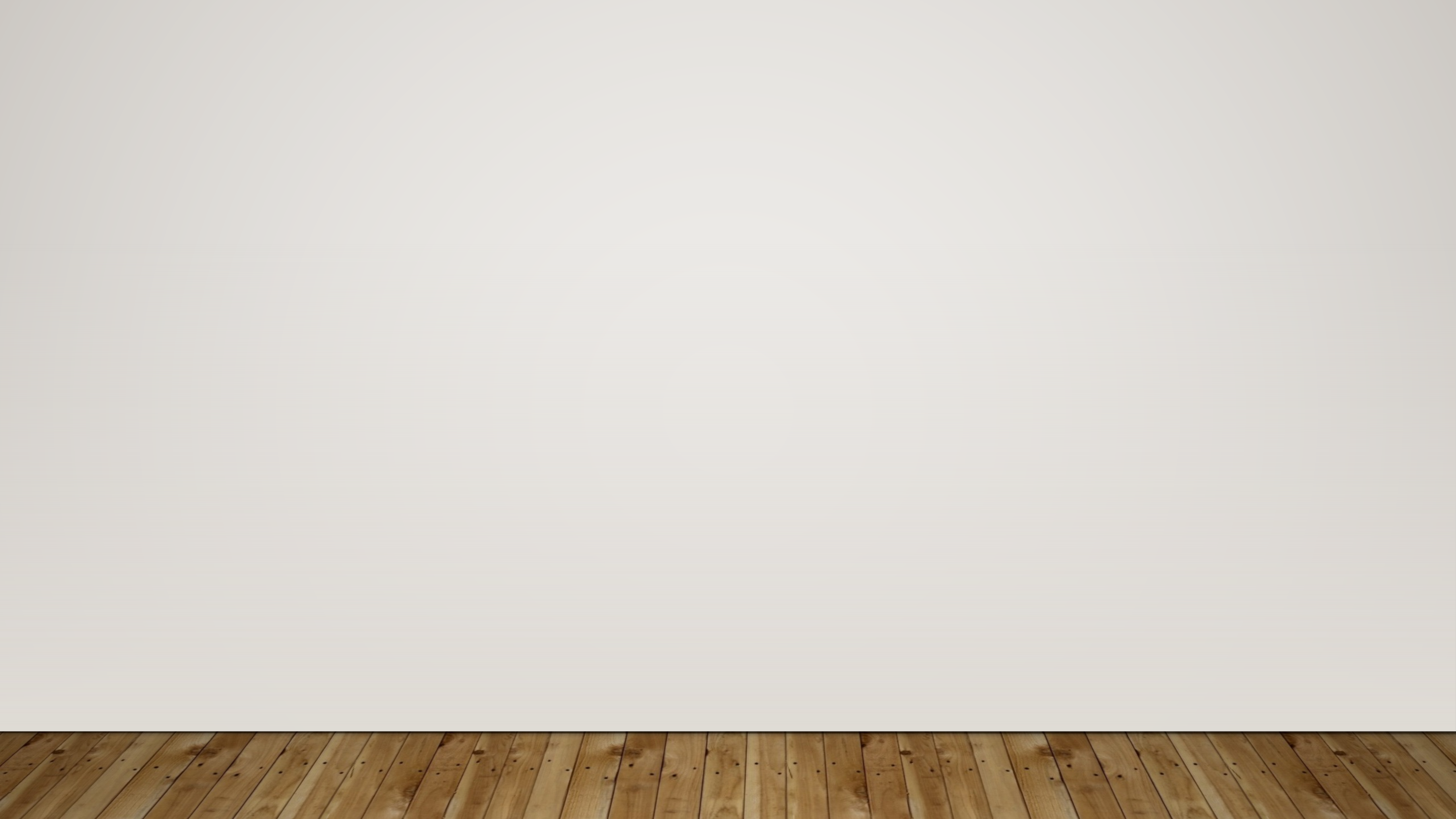
$\pi_{12}=\pi_{22}=$パー

$$p_1(s_1,s_2) = -c_{11}c_{22}$$

$$p_2(s_1,s_2) = c_{11}c_{22}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} c_{11}=0 & c_{12}=1 \\ c_{22}=1 & c_{21}=0 \end{array}}$$

Nash すべてのゲームは均衡点をもつ.



学問の扉
(ゲームにまつわる数学)

第7回 素数大富豪

担当教官 : 岩井雅崇(いわいまさたか) (大阪大学)

学問の扉
(ゲームにまつわる数学)

第7回 素数大富豪

担当教官 : 岩井雅崇(いわいまさたか) (大阪大学)

前回の授業に関して

素数

2,3,5,7,11,13,17,19,23...

- 2以上の自然数で約数が1と自分自身であるものを素数という. (例: 2,3,5,7,....)
- 素数は無限個存在する. おそらくユークリッドが最初に証明したはず(紀元前3世紀)

(ギリシャ)

- 現在でも素数の研究は多く, 毎年まあまあ結構な人が素数などに関する分野(数論)に行く気がする. (ただ結構難しい...)
- 私は素数の研究をしたことがないので, そこまで素数好きじゃないです. (logや自然対数とかの方が好きです.)

log　e

ユークリッドによる素数が無限個の証明.

有限コであると仮定, $P=\{P_1, P_2, \ldots, P_N\}$ とおく.

(例) $120=2^3\times3\times5$

$\Rightarrow$ $Q = P_1 \times \cdots \times P_N + 1$ とおく.

$\Rightarrow$ $\boxed{Q = P_1^{n_1} \times \cdots \times P_N^{n_N}}$ と素因数分解できる

$\Rightarrow$ ところが Q は $P_1, \ldots, P_N$ であって 1 あまる数
右は $P_1, \ldots$ わりきれるかず $\Rightarrow$ 矛盾.

素数大富豪

- 2014年当時大阪大学の院生(現:青山学院大学 理工学部 物理・数理学科助教)の関 真一朗さんによって考案.
- 簡単にゆうとトランプ使って大きい素数を作って手札を減らしていくゲーム
- 調べたら素数大富豪普及協会もあるらしい.

今回はこれをやって, あとは素数に関する話(いい話と悪い話)をしていきます.

ルール説明

めんどくさいのでWikipediaから転載します. (素数大富豪のWikipediaのページ見てください)

ルール [編集]

プレイ人数は2人以上。ジョーカー2枚を含むトランプ1組・54枚を使用する。プレイヤー以外に素数判定を行う素数判定員を置くことが望ましいが、人員が足りない場合はプレイヤーが素数判定員を兼任してもよい。

ゲームの流れ [編集]

1. カードはよくシャッフルしたうえで全プレイヤーに同枚数ずつ（原則は素数枚数ずつ）配り、残ったカードは山札として中央に積む。
2. ジャンケン等により親を決める。
3. 最初の親が手札から最初の数を出し、以降順番に次のプレイヤーがカードを出し重ねていく。最初の数はカードを何枚使用してもよい。
4. 次のプレイヤーは、手番が回ってきた時点で場にあるカードと「同じ枚数」かつ「より大きい数」しか出すことができない（例：場には2のカードが1枚出ている→1枚で3以上の大きさのカードしか出せない）。
5. 手番が回ってきた時には、山札からカードを引いて手札に加えることができる。引けるカードは1度の手番につき1枚までである。引かずに出す（またはパスをする）こともできる。
6. 出せるカードがない時、もしくは戦略上出したくない時にはパスが許される。パスの回数は制限されない。
7. 他のプレイヤー全員がパスし、再び場にあるカードを出したプレイヤーまで順番が回ってきたらそのプレイヤーは親になる。このとき、場にあるカードは流され（場から退けられ）、親は手札から好きな数を出せる。
8. 以上を繰り返し、一番早く手札が無くなった（上がった）プレイヤーが勝者となる。

ペナルティ [編集]

以下の場合には、プレイヤーはペナルティを受けなければならない。

- 素数ではない数を素数として場（素因数場を含む）に出した場合
- 合成数出しにおいて素因数の計算が誤っている場合

ペナルティとしては、ペナルティを受けるプレイヤーがその手番で場（素因数場を含む）に出したカードを全て手札に戻すとともに、戻したカードと同枚数を山札からも引くことが求められる。

なお、場に出ている数以下の数を出した場合やカードの枚数が同じでない場合は、そもそも場に出すことができないためペナルティの対象にはならない。

わざと素数ではない数を出してペナルティを受け手札を増やすという戦略もある。

ジョーカーの使用 [編集]

ジョーカーは、1枚出しでは最強のカードとなり、出すと同時に場を流すことができる。他のカードと組み合わせて2枚以上で使用する場合、または合成数出しにおける素因数として使用する場合は、0から13（K）までの好きなカードとして使用できる。

合成数出し・指数表記 [編集]

手札を組み合わせて合成数の素因数を作って出すことにより、場にその合成数を出すことができる。素因数は、素因数場に出す（例：8を場に出し、2のカード3枚を素因数場に出す→8＝2×2×2を出すことができる）。素因数場に出されたカードは、次のプレイヤーに手番がうつるとともに流される。

また、合成数出しを行う際に使用する素因数には、指数表記が許される。（例：8を場に出し、2のカードの右上に3のカードを載せた形で素因数場に出す→8＝2＾3として出すことができる） ただし、指数を0（ジョーカーによる）として1を出したり、1としてその数を出すことは許されない。

特別な数と効果 [編集]

グロタンディーク素数切り（57） [編集]

57という数がしばしば「グロタンディーク素数」と呼ばれることから、素数大富豪においては特別に57を単体で（素因数を同時に出すことなしに）出すことができる。57が出ると、即座に場が流れ、57を出した者が次の親になる。「グロタンカット」とも呼ばれる。

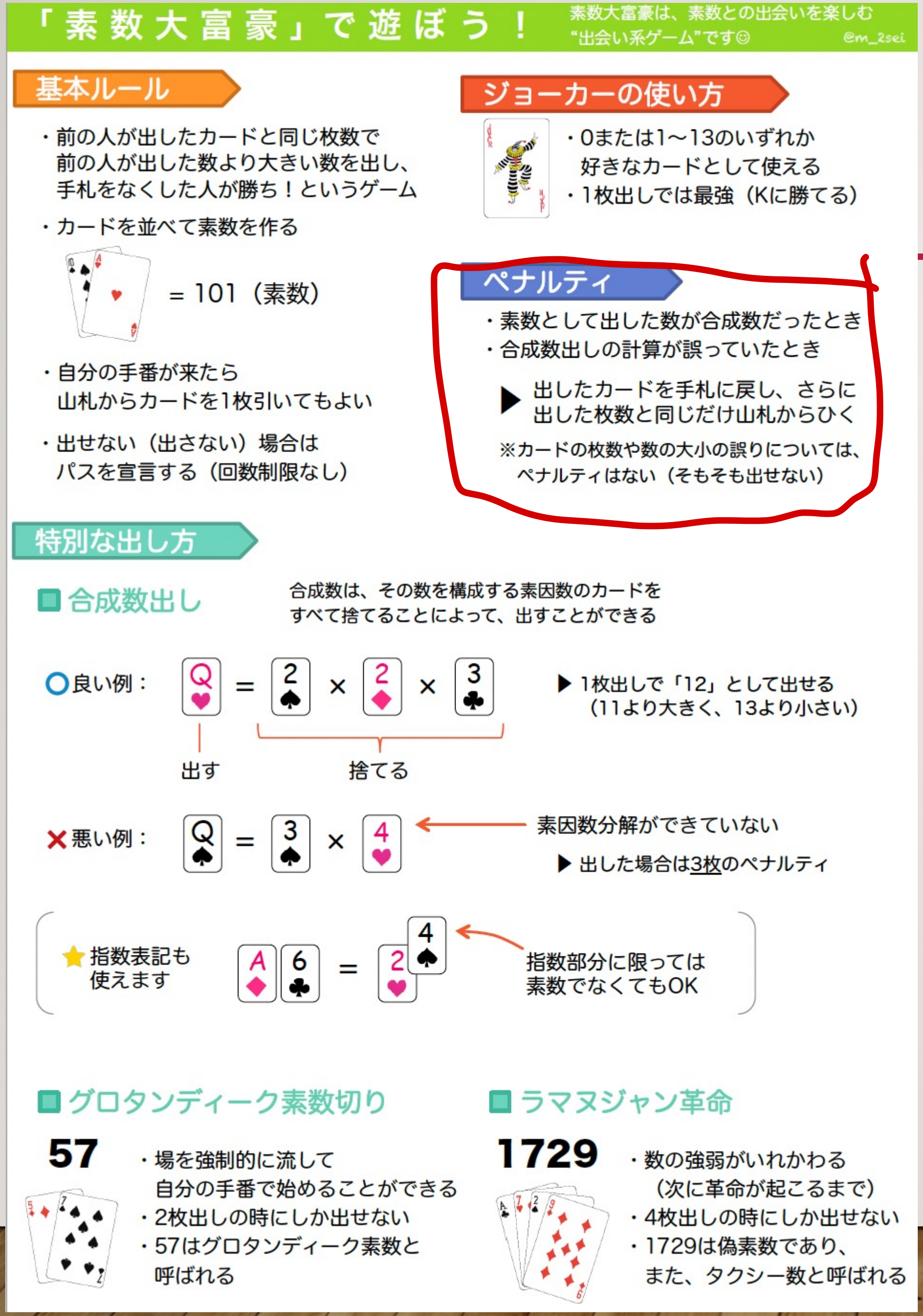
なお、57を合成数（57＝3×19）として出すこともできるが、この場合は特別な効果は持たない。

ラマヌジャン革命（1729） [編集]

1729は、数学者シュリニヴァーサ・ラマヌジャンの逸話からタクシー数と呼ばれる。また、絶対偽素数（カーマイケル数）でもある。1729＝7×13×19と表せる合成数であるが、これも57と同様に、素数大富豪においては特別に単体で出すことができる。1729が出されると数の大小が逆転し、次のプレイヤーからは場に出ている数より小さな数を出さなければならなくなる。この効果は、同じゲーム中で再度1729が素数として出されるか、ゲームが終了するまで続く。ただし、1枚出しでジョーカーが最強であることに限っては革命の前後で変化しない。

なお、1729を合成数（1729=7×13×19）として出すこともできるが、この場合は特別な効果は持たない。

調べたらもっといい
説明書がありました.


「素数大富豪」で遊ぼう！
素数大富豪は、素数との出会いを楽しむ
"出会い系ゲーム"です☺
@m_2sei

基本ルール

・前の人が出したカードと同じ枚数で
前の人が出した数より大きい数を出し、
手札をなくした人が勝ち！というゲーム

・カードを並べて素数を作る

= 101（素数）

・自分の手番が来たら
山札からカードを1枚引いてもよい

・出せない（出さない）場合は
パスを宣言する（回数制限なし）

ジョーカーの使い方

・0または1〜13のいずれか
好きなカードとして使える
・1枚出しでは最強（Kに勝てる）

ペナルティ

・素数として出した数が合成数だったとき
・合成数出しの計算が誤っていたとき

▶ 出したカードを手札に戻し、さらに
出した枚数と同じだけ山札からひく

※カードの枚数や数の大小の誤りについては、
ペナルティはない（そもそも出せない）

特別な出し方

■ 合成数出し

合成数は、その数を構成する素因数のカードを
すべて捨てることによって、出すことができる

○良い例： Q = 2 × 2 × 3
出す 捨てる
▶ 1枚出しで「12」として出せる
（11より大きく、13より小さい）

✕悪い例： Q = 3 × 4
素因数分解ができていない
▶ 出した場合は3枚のペナルティ

★ 指数表記も
使えます
A 6 = 2^4
指数部分に限っては
素数でなくてもOK

■ グロタンディーク素数切り

57

・場を強制的に流して
自分の手番で始めることができる
・2枚出しの時にしか出せない
・57はグロタンディーク素数と
呼ばれる

■ ラマヌジャン革命

1729

・数の強弱がいれかわる
（次に革命が起こるまで）
・4枚出しの時にしか出せない
・1729は偽素数であり、
また、タクシー数と呼ばれる

ということでやってみましょう

- 一回テストプレイした方がいい場合はそうします.
- あとは当日の私がなんとか仕切ってくれます.

アレキサンダー・グロタンディーク
ALEXANDER GROTHENDIECK (1928–2014)

- 代数幾何学・数論幾何学・関数解析の専門.
- 代数幾何学という分野を“スキーム”という概念ですべて書き直し, “数論幾何学”を作った.
- 数論幾何学はその後の「フェルマーの最終定理(300年もの未解決問題)」や「ABC予想」などの解決につながる.
- フィールズ賞(数学のノーベル賞)受賞.
- 2014年没. 当時学部3年の私は偉い先生が「今電話があってグロタンディークが亡くなったようです.」と話してたのを聞いた.

グロタンディーク素数 57

グロタンディークの逸話の一つ
(あるひと)「ある素数を考えてみたらどうですか?」
(グロタンディーク)「実際にある数ということですか？」
(あるひと)「そうです, 実際の素数です.」
(グロタンディーク)「よし、57を考えてみましょう.」

という逸話があり57はグロタンディーク素数と呼ばれることに.

$57 = 3 \times 19$

グロタンディーク素数の逸話

これ本当なのか気になって調べたら, ちゃんと本当でした.

- *A. Jackson Comme Appelé du Néant*-As If Summoned from the Void: The Life of Alexandre Grothendieck

その文章の続きには…

~~具体~~ → 抽象

マンフォードさん(フィールズ賞受賞者)

「彼(グロタンディーク)は具体的に考えていないのです. 彼は本当に例題に取り組まなかった. 例題を通してしか物事を理解せず、徐々に抽象度を高めていく。グロテンディークが例題を見ることは、少しも役に立たなかったと思う。彼は、可能な限り抽象的な方法で考えることによって、状況をコントロールすることができたのです。それはとても不思議なことです。それが彼の頭の働き方なのです」

ちなみに, 数学の研究では具体的な計算が本当に少ない…

具体的な数字は0,1,2ぐらい. 私の分野は特に抽象的な議論が多くて数字がマジで出ない.

右は去年出した私たちの論文の定理の証明. こんなんがずっと続く.

長らく計算してないので, 計算能力は皆さんの方が高いと思います.

Theorem 1.2. *Let X be a compact Kähler manifold with the nef canonical bundle K_X. Then, the following conditions are equivalent:*

(1) *The second Chern class $c_2(X)$ vanishes in $H^{2,2}(X, \mathbb{R})$.*
(2) *Ω_X is nef, and $\nu(K_X)$ is 0 or 1.*

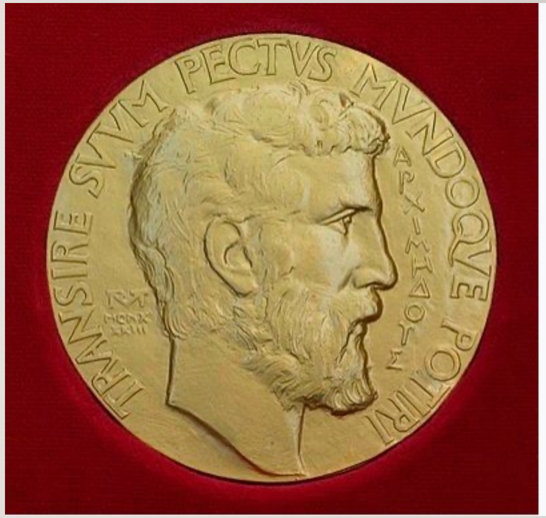
Proof of Theorem 1.2. Assume Condition (2). Then, from [DPS94, Corollary 2.6], we obtain

$$0 \leq c_2(X)\omega^{n-2} \leq c_1(X)^2\omega^{n-2} = 0$$

for any Kähler form ω. This implies that $c_2(X) = 0$ by Theorem 1.6 (1).

Conversely, we assume Condition (1). Since K_X is nef, the cotangent bundle Ω_X is $\{\omega\}^{n-1}$-generically nef for any Kähler from ω by [Eno93, Theorem 1.4] and [Cao13, Theorem 1.2]. Then, by Theorem 1.6 (1) and $c_2(X) = 0$, we can see that Ω_X is nef. It remains to show that $\nu(K_X) \leq 1$. If $\nu(K_X) > 1$, there exists a nef line bundle $L \subset \Omega_X$ such that $c_1(L) = c_1(K_X)$. This follows from [Cao13] in the Kähler case and [Ou17] in the projective case (see Theorems 5.7 and 5.3). Then, the Bogomolov-Sommese vanishing theorem implies $H^0(X, \Omega_X \otimes L^*) = 0$. This contradicts the fact that L is a subbundle of Ω_X. Hence, we conclude that $\nu(K_X) = 0$ or 1. $\square$

素数に関する最近の話題
フィールズ賞



- 数学のノーベル賞とも(ノーベル賞には数学がない)
- 受賞前に”国際数学者会議(ICM)”があり, そこで受賞者が決まる. (2022年のICMはYouTubeライブでやってた)
- 受賞制限がきつい. 「4年に一度, 顕著な業績を上げた, 40歳以下の数学者, 2~4名」に授与される.
- 日本人は今までに3人授与されている. 「小平邦彦, 広中平祐, 森重文」(全員代数幾何学という分野.)
- 数学の賞の中で一番大きい賞. ちなみに賞金は200万らしい. (ノーベル賞は1億円. 数学ブレイクスルー賞は3億円)

望月拓郎氏

2022年フィールズ賞受賞者
ジェームズ・メイナード（JAMES MAYNARD)

とにかく結果が面白い. 私は証明は全く分からんが…

① 7を桁にふくまない　素数はむげんにある

2, 3, 5, 11, 13, 19, 23, 29, ...　(2019年)

7をふくまない

② 双子素数予想にまつわるはなし

(p, q) が双子素数 $\Leftrightarrow$ p と q が素数, $q-p=2$.

$(p, p+2)$ がそう!

例 $(3, 5)$ $(11, 13)$ $(17, 19)$ $(29, 31)$, …

予想 双子素数は無限にあるか?

[2015] J. Maynard.

$q-p \leq 600$ となる素数組 (p, q) は無限にある

参考文献(?)

- **素数大富豪普及協会** https://primeqk.themedia.jp
- *A. Jackson Comme Appelé du Néant*-As If Summoned from the Void: The Life of Alexandre Grothendieck
- Maynard, J. Primes with restricted digits. Invent. math. 217, 127–218 (2019). https://doi.org/10.1007/s00222-019-00865-6
- Maynard, J. **Small gaps between primes. Ann. of Math.** Pages 383-413 from Volume 181 (2015), Issue 1 https://doi.org/10.4007/annals.2015.181.1.7

6/7(火) 休講

学問の扉
(ゲームにまつわる数学)

第8回 研究者のお仕事

担当教官 : 岩井雅崇(いわいまさたか) (大阪大学)

今回の授業に関して

- 今回の話は個人的な話が多いので面白くないかもしれません
- 退屈しのぎにパズルを用意しました. それでも解きながら聞いてください.
- 気になる質問があれば適当に聞いてください.

大学の教員のお仕事って何か知ってます？

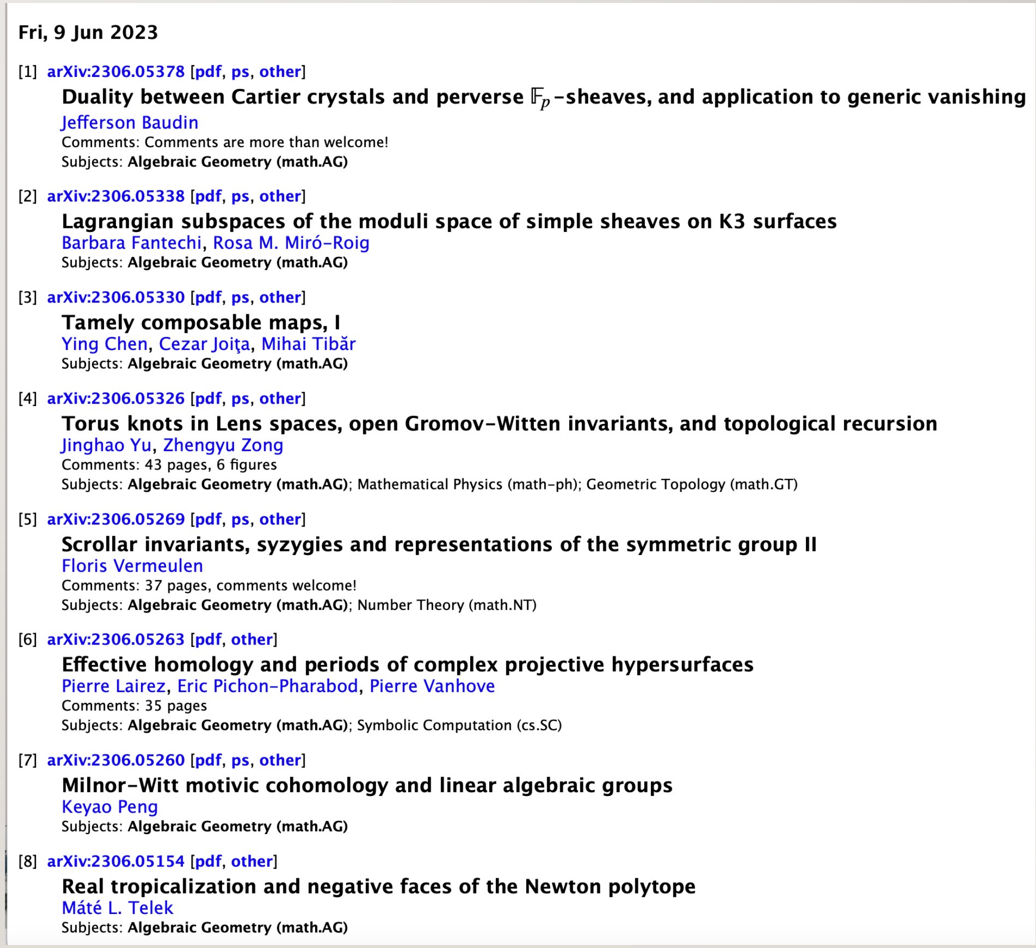
1. 大学の運営に関わる仕事
   - 講義・演習
   - 修士・博士の育成
   - その他の運営に関わる仕事(オープンキャンパスとか)
2. 研究に関わる仕事
   - 研究する
   - 論文を書く
   - 研究発表を行う
   - 研究集会を開く
   - その他いろいろ

みなさん学問をわかった気になってないですかね?

基本的にみなさんが触れる物事は先人の天才が既にやってます.(まあ天才の真似事やってる感じですかね.)
→学問をわかった気になりやすい.

しかし,実際は逆でまだまだ未解決問題がいっぱいある.むしろわからないことの方が多い.大体の人は井の中の蛙状態です.

例えば数学ではArXivというサイトで毎日論文がアップロードされている.　1ヶ月で8000本らしい.



Fri, 9 Jun 2023

[1] arXiv:2306.05378 [pdf, ps, other]
Duality between Cartier crystals and perverse $\mathbb{F}_p$-sheaves, and application to generic vanishing
Jefferson Baudin
Comments: Comments are more than welcome!
Subjects: Algebraic Geometry (math.AG)

[2] arXiv:2306.05338 [pdf, ps, other]
Lagrangian subspaces of the moduli space of simple sheaves on K3 surfaces
Barbara Fantechi, Rosa M. Miró-Roig
Subjects: Algebraic Geometry (math.AG)

[3] arXiv:2306.05330 [pdf, ps, other]
Tamely composable maps, I
Ying Chen, Cezar Joiţa, Mihai Tibăr
Subjects: Algebraic Geometry (math.AG)

[4] arXiv:2306.05326 [pdf, ps, other]
Torus knots in Lens spaces, open Gromov-Witten invariants, and topological recursion
Jinghao Yu, Zhengyu Zong
Comments: 43 pages, 6 figures
Subjects: Algebraic Geometry (math.AG); Mathematical Physics (math-ph); Geometric Topology (math.GT)

[5] arXiv:2306.05269 [pdf, ps, other]
Scrollar invariants, syzygies and representations of the symmetric group II
Floris Vermeulen
Comments: 37 pages, comments welcome!
Subjects: Algebraic Geometry (math.AG); Number Theory (math.NT)

[6] arXiv:2306.05263 [pdf, other]
Effective homology and periods of complex projective hypersurfaces
Pierre Lairez, Eric Pichon-Pharabod, Pierre Vanhove
Comments: 35 pages
Subjects: Algebraic Geometry (math.AG); Symbolic Computation (cs.SC)

[7] arXiv:2306.05260 [pdf, ps, other]
Milnor-Witt motivic cohomology and linear algebraic groups
Keyao Peng
Subjects: Algebraic Geometry (math.AG)

[8] arXiv:2306.05154 [pdf, other]
Real tropicalization and negative faces of the Newton polytope
Máté L. Telek
Subjects: Algebraic Geometry (math.AG)

数学の研究の流れ

1. 取り組む課題を見つける. 問題を考える.
2. 課題に関連したことを調べる.
3. 新しい結果を出す. (ここが一番難しい. なぜなら大体の問題は先人がすでにやってる)
4. 結果を論文にまとめる
5. arXivに投稿する.
6. 自分の論文を論文雑誌の出版社に投稿する. その際掲載されるかどうかはチェックされる.
7. 6で掲載拒否になった場合は再度別の出版社に投稿する.
8. 6で掲載決定になった場合は論文の出版がきまる.

原則的には”論文の結果のレベル = 掲載決定した雑誌のレベル”に相当する.
ところで前のarxivのページを見て気づいたことはありますかね?

数学の研究は基本的に英語です.

- 読むのも英語 (英語の長文読解)
- 書くのも英語 (A4 30ページの英作文)
- 海外の人からの自分の論文へのコメントも英語
- 海外の人にメールするときも英語
- 出版社へのやりとりも英語
- 海外の人と共同研究するときも英語
- 国際研究集会の講演も英語 (日本人だけなら日本語でいいです)
- 国際研究集会の休憩中に議論するときも英語

嫌になるくらいの英語地獄. もちろん日本人同士のやりとりは日本語でいいです.

先週どこに行ってたのか?

先週はフランスのオッソワで開かれた研究集会「 Alpine meeting on nonpositive curvature in Kähler geometry」に行ってました.

パリから電車で5時間. かなりの山奥
飛行機・電車の予約は自分でやります.

研究集会「ALPINE MEETING ON NONPOSITIVE CURVATURE IN KÄHLER GEOMETRY」

- 参加者40人弱. 日本人は私を入れて2人(うち一人は私の元指導教官)
- 合宿形式で数学の講演・講義を聞く.
- 3食つきのホテル(?) 6人がけテーブルでみんなで卓を囲んで食事をする

最新の研究とかいろいろ聞きに行ってました.
偉い先生に質問したり, ドイツの博士の学生と共同研究することになりました.

	Monday 05/06/23	Tuesday 06/06/23	Wednesday 07/06/23	Thursday 08/06/23	Friday 09/06/23
9h - 10h	Stéphane DRUEL	Yohan BRUNEBARBE	Omprokash DAS	Benoît CLAUDON	Shigeharu TAKAYAMA
10h30-11h25	Bruno KLINGLER	Christian SCHNELL	Bruno KLINGLER	Christian SCHNELL	Sébastien BOUCKSOM
11h30-12h25	Christian SCHNELL	Bruno KLINGLER	Christian SCHNELL	Bruno KLINGLER	Valentino TOSATTI
14h - 15h	SHORT TALKS	Martin DERAUX		SHORT TALKS	
15h30 - 16h30	Benjamin BAKKER	Erwan ROUSSEAU		Carolina TAMBORINI	

ちなみに研究者になるには…

- 学部(4年) (18~22歳)　無給
- 修士(2年) (22~24歳)　無給 (運が良ければお金をもらえるかも)
- 博士(3年) (24~27歳)　もし学振(DC1,2)に受かれば年収240万円. そうでない場合無給

博士論文が書けなければ留年. 博士留年はよくある.

- 研究員・ポスドク(ポストドクター) (27歳-30~40)

もし学振PDやRIKENに受ければ年収440~600万円. そうでない場合は年収0~240万円. 大体1~3年の任期がついている. 任期が切れた後の保証はない.

- 特任助教・助教 (30~40歳)

大学が公募を出しているのでそれに応募する. 受ければ助教として採用される. (大阪大学の卒業生が大阪大学に就職できるとは限らないです.) 3-5年任期があることも.

- 准教授(30後半~40-50歳)教授(40-50~65歳)

大学が公募を出しているのでそれに応募する. (自動昇進は運が良ければ)

うまく行っている例

私の例

最近は...

- 最近は博士の学生の支援が進んでいるらしい.
- でも博士の学生が卒業した後の進路は自己責任になっている. 企業も力を入れる気がない. (基本的に数学の博士学生が大企業への就職するのは厳しい.)
- なので結局修士行ってその後民間就職が理系の一般的になっている.
- 卒業後に無職回避のために海外に行く人もしばしば. ヨーロッパ・アメリカ・中国などなど.
- もし研究者になりたい人はそれなりに覚悟した方がいいと思います. ちなみに私は覚悟してなくなあなあと博士になったのでまあまあ大変なことになりました.
- ただ一回就職してから博士になるという手もあります. 他の分野だと会社に通うながら博士を取ることもできたりします. 退職してから学び直ししても良いと思います.

東大物理の須藤先生のスライド

典型的な研究者タイプと思われがちであるにもかかわらず実は研究者に向いていない人

- 他人とコミュニケーションがうまくとれない
  - 結果の批判を通じてさらなる発展が期待できない
- 本を読んで勉強することだけが好き
  - これでは新たな学問・研究にならない
- 難しい分野・問題・テーマだけが好き
  - 優れた学者と同じ道を歩んでいることで自分も優れた研究者であると勘違いする
- 語学力・文章力・表現力が低い
  - 実は私の日常のほとんどの時間は、日本語か英語での議論あるいは文章書きに費やしている
  - 実は理系でも（こそ）重要

12

研究者に向いている人

- 大学（院）入学までに行う試験での評価基準
  - 正解が存在することがわかっている問題を
  - 決められた時間内に
  - 一人だけで何も見ず
  - すべての科目を万遍なく
- これらは研究（あらゆる仕事）と「矛盾する」制約
  - 試験での秀才が必ずしも優れた研究者にはなっていない
- 人間の才能は1次元の数値（全教科の総合得点）ではなく、多次元空間で表現すべきもの
  - 必ずしも（とびぬけて）優秀である必要はない
  - 何でも良いから余人をもって代えがたい度合いが重要
- ただし研究が好き・楽しめることが大前提

13

数学パズル

- この問題はMartin Derauxさん(私が参加した集会の講演者の一人)のホームページにあった問題.
- ちょっと気になって集会中に解いてました. Derauxさんに私の解答が合ってるか聞いてました.
- ただ「プログラミング使ってといた」と言ったらDerauxさんに「You are cheeting!」と言われました…

さて配布した問題解けました?　残りの時間はこの問題を解くことにしましょう.
周りの人と考えながらでいいです.
ヒントを出していきます.

ヒント1
問題文の和訳

ある教授が助手に、昨晩3人と食事をしたことを伝えた。また、3人の年齢の和が助手の年齢の2倍であること、3人の年齢の積が2,450であることを伝えた。そして、3人の年齢を教えてほしいと頼む。しばらくして、助手は教授に「問題を解くのに十分な情報がない」と言う。彼女はそれに同意し、自分が食事をした3人全員より年上だと言う。彼女の年齢を知っている助手は、早速、教授に正しい年齢を伝える。問題は、この物語に登場する5人全員の年齢は何歳でしょうか？

By DeepL翻訳

ヒント2

ABC = 2450かつA≧B ≧ Cとなる(A,B,C, A+B+C)は以下のとおりです

- (25, 14, 7, 46)
- (35, 10, 7, 52)
- (35, 14, 5, 54)
- (35, 35, 2, 72)
- (49, 10, 5, 64)
- (49, 25, 2, 76)
- (50, 7, 7, 64)
- (50, 49, 1, 100)
- (70, 7, 5, 82)
- (70, 35, 1, 106)
- (98, 5, 5, 108)
- (98, 25, 1, 124)
- (175, 7, 2, 184)
- (175, 14, 1, 190)
- (245, 5, 2, 252)
- (245, 10, 1, 256)
- (350, 7, 1, 358)
- (490, 5, 1, 496)
- (1225, 2, 1, 1228)
- (2450, 1, 1, 2452)

参考文献

- 須藤靖先生の講演資料 http://www-utap.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~suto/myresearch/souma08.pdf
- **Arxiv https://arxiv.org**
- **Martin Deraux https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~deraux/**

次の話を読みその問いに答えよ.

A professor tells her assistant that she dined with three people last night. She also tells him that the sum of the three people's ages is twice the assistant's age and that the product of the three people's ages is 2,450. Then, she asks him to tell her the ages of the three people. After a while, the assistant tells the professor that he doesn't have enough information to solve the problem. She agrees and says that she is older than all three people with whom she dined. The assistant, who knows her age, promptly gives the professor the correct ages. The question is: What are the ages of all <u>five</u> people in this story?

学問の扉
(ゲームにまつわる数学)

第8回 BABA IS YOU

担当教官 : 岩井雅崇(いわいまさたか) (大阪大学)

BABA IS YOU

- 『Baba Is You』はフィンランドのインディーゲーム開発者であるArvi Teikariによって開発されたパズルゲームである。PCとNintendo Switch向けに配信されている。
- 「Baba Is You」はプレイするルールを自由に変更できるパズルゲームです。全てのステージにおいて、ルール自体が接触可能なブロックとして配置されています。そのブロックを操作することでステージの原則も変わり、ステージの動作に予想できない効果を引き起こすことができます！ブロックをあちこち押すだけで、自分を岩に変えたり、地面に植えている草を危険な熱い障害物に変えたり、達成するために必要な目標をまったく違うものに変えることさえできます。
- まあやってみましょう.

BABA IS YOU

- とにかくめちゃくちゃ難しい! いろんなYoutuber(Quizknock, もこう先生 etc…)がやってるが, ほとんど最初で終わってる.
- 私はヒントめちゃくちゃみまくって60時間かかってクリアしました. 最後の方のステージ構成はかなり面白い.(ネタバレになるので言えないですが…)
- “論理的な思考力”や“問題を解決する上で答えから逆算する力”を鍛えられるもの凄くいいゲーム. 情報系・数学系の人が好みそう.

BABA IS YOUの面白い挙動

- BABA IS YOUには面白い挙動”infinite loop”がある.
- 無限ループが発生したときこのゲームはバグみたいな現象が起こる.

(例) 次の二つのルールがこのゲームに存在していたとする.

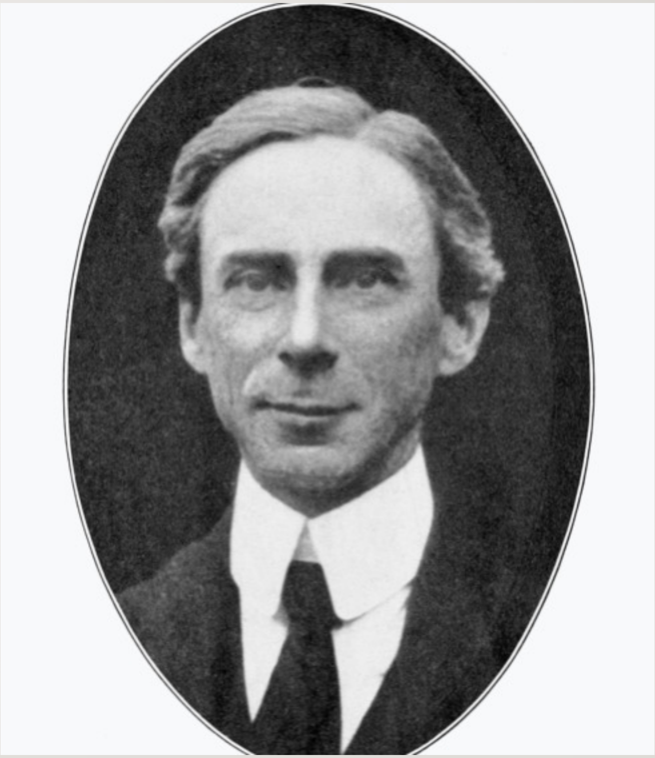
- If BABA is YOU, then BABA is NOT YOU.
- BABA is YOU

するとこのゲームは即座にバクってしまう.

これ数学と何か関係あるんか?

- 実は数学にも似たようなことがある.
バートランド・ラッセルさんが思いついた「ラッセルのパラドックス」

バードランド・ラッセルは哲学者としても有名(この中で知ってる人います?)



集合論におけるパラドックス

集合を”物の集まり”と思って扱うと次の矛盾が出てしまう.

$R=\{x$ 集合 $\mid x \notin x\}$ とおく. Rも”物の集まり”で集合だから $R \in R$ または $R \notin R$ が成り立つ.

1. $R \in R$ のとき. Rの定め方に矛盾.
2. $R \notin R$ のとき. Rの定義から $R \in R$ になり矛盾.

よってRは集合ではない.

もう一個やばい定理

-選択公理- 集合A1,A2,…..から一つずつ元a1,a2,…を取ることができる」
これを認めると次の定理が成り立つ.

-バナッハ・タルスキーの定理-
3 次元空間内の半径1 の球体を有限個に分割したのち、それらのパーツを平行移動したり回転させたりして組み合わせることにより半径1 の球体を2 個作ることが出来る.

なんで数学の世界では球体を1個から2個に増やすことができる.

バナッハ・タルスキーの定理って意味わからんくない？

- まずもって現実世界で球体を1個から2個に増やすのは無理です.

[理由] この定理で”球体を有限個に分割”しますが, その分割したパーツは体積が定められません. 一般に体積が定められないものに現実世界では分割できないです.

この定理が直感に反するのは「体積がいつでも定められる」とみんなが思い込んでいるところですかね?

次回に関して

- マインクラフトに関して授業をしたいのですが, 誰かマインクラフトの良さ・プレイ動画などを何分か教えてくれませんかね? (私はマインクラフトやったことがないので…)
- もしくはマインクラフトの面白い動画(5-20分程度?)があれば教えてください. それを説明の代わりにみましょう.

参考文献

- **田中 尚夫　選択公理と数学**
- 小澤 登高　バナッハ＝タルスキーのパラドックス https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/kokai-koza/H27-ozawa.pdf

学問の扉
(ゲームにまつわる数学)
第10回 MINECRAFT

担当教官 : 岩井雅崇(いわいまさたか) (大阪大学)

前回の授業に関して

MINECRAFT

『Minecraft』（マインクラフト）は、マルクス・ペルソン（Notch）とMojang Studiosの社員が開発したゲーム.

Minecraft では、世界は自分の手のひらにあります。ブロックを使って建築するこのサンドボックスゲームは、さまざまな遊び方があります。夜を生き抜いたり、アーティスティックな作品を作ったり、何をするのもあなたの自由です！だけど、新しいゲームのコツをつかむのって、難しかったりすることもありますよね。心配はいりません、Minecraft の旅をお手伝いするライブラリをご用意しました。クラフトする方法や、コントローラーの使い方から友達とプレイする方法まで、Minecraft の基礎を身に付けられます。

マイクラってどんなゲームなん?

ちょっと誰かプレイしたことある人教えて!!

マインクラフトでは何でもできる?

なんとPCをマインクラフトで作った猛者がいる. 世の中にはすごい人がいる.

CHUNGUS 2 - A very powerful 1Hz Minecraft CPU

https://www.youtube.com/watch?v=FDiapbD0Xfg

じゃあ理論的にはどうなんでしょう?
そもそも"なんでもできる"とはなんなんでしょう?
→それを定義したのが数学者のアラン・チューリング

アラン・チューリング

- アラン・リューリング(1912-1954) イギリスの数学者
- コンピューターの理論の基礎を作った人.
- 第二次世界大戦でドイツナチス軍の暗号(エニグマ)を解読する手法を開発. (気になる人はイミテーション・ゲームという映画があるのでそれを見よう!)
- 同性愛の罪で逮捕, その後自殺. その後イギリス政府は2009年に謝罪をした.

チューリングによる計算可能性

“なんでもできる” = “なんでも計算できる”
=なんでも計算できる機械(万能チューリングマシン)を模倣(まね)できる
“なんでも計算できる”ものをチューリング完全という.

(例) C, C++, Python などのプログラミング言語　(プログラミングでなんでも計算できそうですよね, ちなみにホームページなどで作る言語htmlはチューリング完全ではない)

チューリング完全なものはプログラミング使って作れるものを真似することができる!
要するにチューリング完全なら”原理的には”なんでも作れる.

マインクラフトはチューリング完全

(証明) 前の動画でコンピューターを作れることがわかっているから. そして作ったコンピューターはチューリング完全なので.

よってプログラミングで作れるものは原理的にはマインクラフトで作れる. マインクラフトでテトリスなども作れる.

ということで以下チューリング完全の例を言っていきます.

マリオメーカーはチューリング完全

ニコニコ動画やYouTubeに解説動画がある. **On the Turing Completeness of Super Mario Maker**
https://www.youtube.com/watch?v=hd0EtsTUbmg
[証明] Cyclic tag systemと呼ばれるものをマリオメーカーで真似でき, Cyclic tag system はチューリング完全であるので.

調べてみると吉田 雄紀(カラクリ株式会社)さんが示したらしい.
この方は数学オリンピック・情報オリンピックとか出てたらしい.

よってプログラミングで作れるものは原理的にはマリオメーカーで作れる.

BABA IS YOU はチューリング完全

前回やったBABA IS YOUはチューリング完全.

[証明]
コンウェイのgame of lifeはチューリング完全であり,
BABA IS YOUでgame of lifeを真似できるから.

よってプログラミングで作れるものは原理的には
BABA IS YOUで作れる.

マジック・ザ・ギャザリングはチューリング完全

これは論文が出ている.

A. Churchill, S. Biderman, A. Herrick “Magic: The Gathering is Turing Complete” arXiv:1904.09828v2

よってプログラミングで作れるものは原理的にはマジック・ザ・ギャザリングで作れる.

パワーポイントはチューリング完全

これはYouTubeで講演内容が見れる.

On The Turing Completeness of PowerPoint

(SIGBOVIK)

https://www.youtube.com/watch?v=uNjxe8ShM-8

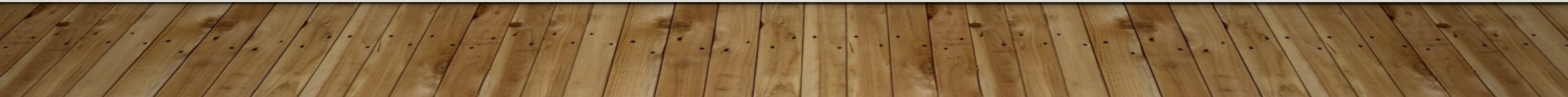
よってプログラミングで作れるものは原理的にはパワーポイントで作れる.

チューリング完全やばくない?

ただし, 注意して欲しいのは”原理的には”なんでも作れる点. 実際どうやってマジック・ザ・ギャザリングでテトリス作れるかはわかっていない. (あくまで存在を言っているだけ.)

参考文献

- **This 8-bit processor built in Minecraft can run its own games** https://www.pcworld.com/article/559794/8-bit-computer-processor-built-in-minecraft-can-run-its-own-games.html
- **CHUNGUS 2 - A very powerful 1Hz Minecraft CPU** **https://www.youtube.com/watch?v=FDiapbD0Xfg**
- **On the Turing Completeness of Super Mario Maker** **https://www.youtube.com/watch?v=hd0EtsTUbmg**
- A. Churchill, S. Biderman, A. Herrick “Magic: The Gathering is Turing Complete” arXiv:1904.09828v2



学問の扉
(ゲームにまつわる数学)

第11回 確率テスト

担当教官 : 岩井雅崇(いわいまさたか) (大阪大学)

次回以降に関して

- **7/5** (今日) 確率テスト
- **7/12** ゼルダの伝説・まとめ (授業は実質ここで終わり)
- **7/19** 質疑応答の時間
- **7/26** 休講 (なぜなら私が日本にないから)

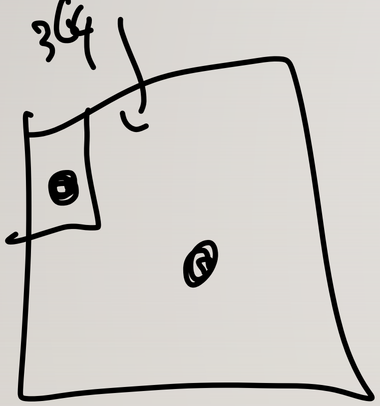
今回の授業に関して

- 皆さん大好きな数学の試験です. 14:00までとします.
- リンクはこちらです. (右のQRからも読み取れます.)
  https://docs.google.com/forms/d/1kExMe0-HiqSupQRpliFXW5Ji4vXBR3GAAWNEvVyUUys/edit
- 数学的に解くのもよし, 直感で解くのもよし, お好きに解答してください
- スライド作る時間なかったので, 手書きでなんとかしていきます. (すみません, 今は本当に時間がないです. …)

① 34.69% → $\boxed{35\%}$

余事象 32人のたんじょう日が一致しないかくりつ

23人で
誕生日が
一致する
→50%



$$\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}$$

18人

$$1-\left(\frac{365}{365}\times\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\cdots\frac{365+1-18}{365}\right)=\boxed{34.69\%}$$

1 2 3 … 18

② 1% のガチャを100回にあたるかくりつ

$\boxed{\text{あたらないかくりつ}}$ $\left(\frac{99}{100}\right)^{100}$

あたるかくりつ $1-\left(\frac{99}{100}\right)^{100}=63.39\%$

$\boxed{63\%}$

③ 1回100円 あたり1% だったら

1回目 $\frac{1}{100}$ $\times 100$ 円

2回 $\frac{99}{100}\times\frac{1}{100}$ $\times 200$

3回 $\frac{99}{100}\times\frac{99}{100}\times\frac{1}{100}$ $\times 300$ ……

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{99}{100}\right)^{n-1}\times\left(\frac{1}{100}\right)100=\frac{100}{\frac{1}{100}}=10000\text{円}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha)^{n-1}\alpha = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1-\alpha)^{n-1}\alpha = \frac{1}{\alpha}$$

直 めちゃいっぱい試行

100万回ガチャ → あたり 100万×1%

=1万こ

1かいあたりかかるひよう

$$\frac{100万 \times 100}{10000} 円$$

$$= \boxed{1万円}$$

④ 6面サイコロをくりかえしふって 6つの面すべてでる平均かいすう

$$1+\sum_{n_2,\ldots,n_5=1}^{\infty}(n_2+n_3+n_4+n_5+n_6)$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{n_2-1}\left(\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{4}{6}\right)^{n_3-1}\times\left(\frac{2}{6}\right)$$

$$\times\left(\frac{3}{6}\right)^{n_4-1}\left(\frac{3}{6}\right)\times\left(\frac{2}{6}\right)^{n_5-1}\times\left(\frac{4}{6}\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{6}\right)^{n_6-1}\times\left(\frac{5}{6}\right)$$

期待値の線型性

$\left(\text{1の目がでる平均回数}\right) + \left(\text{2の目のでる平均回数}\right) + \left(\text{3の目のでる平均回数}\right)$

$\parallel$

$\left(\text{3〜5がうの目がでる平均回数}\right)$

$E[X_1]+E[X_2]+E[X_3]=E[X_1+X_2+X_3]$

$\left(\begin{array}{c}1つ目がでる\\平均回数\end{array}\right) = 1回$

1つ目を1

$\sum n(1-\alpha)^{n-1}\alpha = \frac{1}{\alpha}$

$\left(\begin{array}{c}2つ目がでる\\平均回数\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}1以外が\\でる平均回数\end{array}\right) = \sum n\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}$

$\left(3つ\right) = \left(\begin{array}{c}1,2以外がでる\\平均かいすう\end{array}\right) = \sum n\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{\frac{4}{6}} = \frac{6}{4}$

$\left(4つ\right) = \frac{1}{\frac{3}{6}} = \frac{6}{3}$

$\left(5つ\right) = \frac{1}{\frac{2}{6}} = \frac{6}{2}$

$\left(6つ\right) = \frac{1}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{1}$

$$\left(1+\frac{6}{5}+\frac{6}{4}+\frac{6}{3}+\frac{6}{2}+\frac{6}{1}\right)=\boxed{14.7}$$

ガチャ，n回コンプ，かいす!

nコのガチャをコンプする平均回数

$$n \times \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{1}\right) \text{回}$$

($n=6$ サイコロ)

⑤ 100コのうちあたりA, B, C, D, E がある。費用100円

A〜E をコンプするための費用の期待値は

(1つめをそろえるのに必要なひよう)

$$\left(n\left(\frac{95}{100}\right)^{n-1}\times\frac{5}{100}\right)\times 100 = \frac{100}{\frac{5}{100}}\text{円}$$

2つ

$$\left(n\left(\frac{96}{100}\right)^{n-1}\times\frac{4}{100}\right)\times 100 = \frac{100}{\frac{4}{100}}\text{円}$$

〜)

$$\left(\frac{10000}{5}+\frac{10000}{4}+\frac{10000}{3}+\frac{10000}{2}+\frac{10000}{1}\right)\fallingdotseq 22800$$

確率 α で n こ のものをコンプする必要回数

$$\left(\frac{1}{n\alpha}+\frac{1}{(n-1)\alpha}+\cdots+\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+1\right) \text{回}$$

$\alpha=\frac{1}{100}$, $n=5$

$$\rightarrow \quad 100\times\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\cdots+1\right)\fallingdotseq 228 \text{回}.$$

⑥ 20%で1発せっかく

1発

2発

3発

⋮

$$\frac{80}{100} \times 1$$

$$\frac{20}{100} \times \frac{80}{100} \times 2$$

$$\frac{20}{100} \times \frac{20}{100} \times \frac{80}{100} \times 3$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{80}{100}\right) \times \left(\frac{20}{100}\right)^{n-1} n$$

$$= \frac{1}{\frac{80}{100}} = \frac{100}{80} \fallingdotseq 1.25$$

20%で 100発

$\boxed{\text{期待値の線型性}}$

100×1.25 発
$\quad\quad\;\; \|$
$\quad\quad\;\; 125$

17

$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{256} \times (400))$

$\frac{75}{256} \times 100$

$\frac{15}{256} \times 200$

$\frac{1}{256} \times 300$

$E(x)$

$\frac{-1100}{216}$ [illegible]

A B C D E F

1 2 3 4 5 6

111 → DEFからとった100円をAにわたす

112 → 〃 Aに200円Bに100

123 → 〃 ABC 100円ずつわたす

8) 3000 $\boxed{D}$ #3

A A   A B   B B 7\ㅣ=

2'

A 500   A 500   ~~B 500~~

A 500   ~~B 500~~   ~~B 500~~

$$\frac{500 + 500}{1500 \boxed{D}} = \frac{1000}{1500} = \frac{2}{3}$$

学問の扉
(ゲームにまつわる数学)

第12回 ゼルダの伝説・まとめ

担当教官 : 岩井雅崇(いわいまさたか) (大阪大学)

次回以降に関して

- **7/12** ゼルダの伝説・まとめ (授業は実質ここで終わり)
- **7/19** 質疑応答の時間
- **7/26** 休講 (なぜなら私が日本にないから)
- **8/2**　休講 (というか試験科目ではないので**16**回目の授業は存在しないはず. なのに**KOAN**にはあります.)

今回の内容

- 学問の扉の研修で思いついたネタです.
- 本当はグループワークとかにしようと思いました.
- 没になった理由は,文系の友達に話したら「え？どういうこと？え？」と反応が来たからです.そもそもが意味わからん感じがあります.

ゼルダの伝説 ブレス オブ ザ ワイルド
ティアーズ オブ ザ キングダム

この世界はどんな世界なんだろう?

実はこのゲームは端っこがある.ちょっとみてみる.

最近のゲームは端っこがある世界が多い

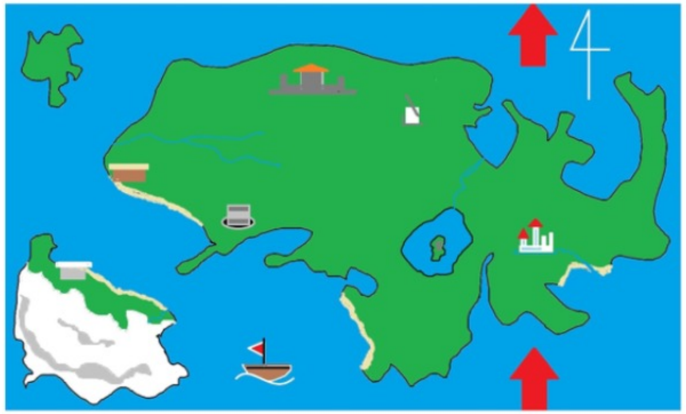
- オープンワールドのゲームと言いつつ端っこがある.

(つまり主人公がいける場所には限界がある.)

- 最近のオープンワールドのゲームは

昔のゲームは端っこがなかった

- ファイナルファンタジー・ドラゴンクエストとかとか.
- 下の図のように移動しまくれた (ゲーム容量少なかったから？)



前回の問題の解答

ファイナルファンタジー7というゲームをご存知だろうか. クラウドやセフィロスなどスマブラのキャラが出てくるゲームである. (私は小学生の時にめちゃくちゃやりました.)

このゲームの中盤では飛空挺を手に入れ, ゲームの世界を行き来できる. 図のように主人公一行が右方向に進めば地図の左側から現れ, 上側に進めば主人公は下から現れる.

さてこのゲームの世界はどのような形をしているだろうか.

[補足]
我々は地球という球体上で日夜"人生"というゲームをしていると思えます. クラウドは果たして球体上でゲームをしているのでしょうか? それとも端っこのある世界でゲームをしているのでしょうか?

15 件の回答

- 球体
- ドーナツ型
- どーなつ
- ドーナツのような穴のあいたリングの形をした世界
- 端にいくと、移動距離が遅くなるとかないなら球体ではない？
- 端っこのある世界
- トーラス
- 端っこまでいったら、決められたポイントに飛ぶようにプログラムされた立体では表せない世界
- クラウドやFF7をやり込む小学生は、トーラスの形をした世界で"人生"というゲームをしている。

- 実はドラクエ・FFの世界はドーナツ型をしていた. (これ小学生の時わからんかった.)
- つまり主人公たちは我々のような球体で暮らしてなかった.

一方で地球上では次のことが起こる

猟師が小屋を出て南に10キロメートル歩いた. それから90度向きを変えて西に10キロメートル歩いた. それからさらに90度向きを変えて北に10キロメートル歩いたら、自分の小屋に戻ったという. もちろん小屋の位置は, 最初から変わっていない.
こんな妙なことがありうるだろうか.

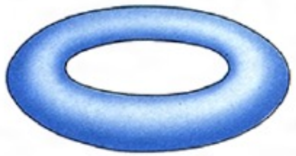
15 件の回答

- 地面が球体であれば、あり得る
- 極に小屋があるとできる。
- 北極点に小屋がある場合はあり得る
- とても小さな球状の上でならありえる
- あるんちゃう
- めちゃめちゃ小さい球体だったら有り得る？
- 小さい球体の上の話
- ある
- 斜めに歩いたらあるかも？

- 答えは北極・南極
- 地球上では内角が270度の三角形が作れる.
- じゃあクラウドたちがすむ世界だとどうなる？

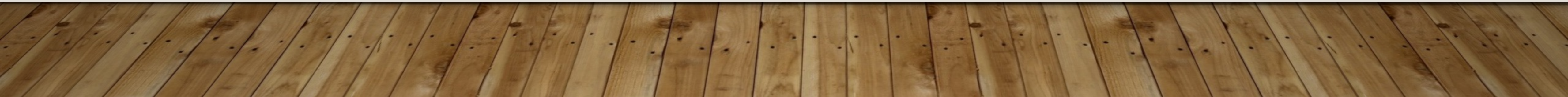
→実はドーナツ型の世界では三角形の内角の和は180度

数学的にいうと・・・

			
穴の数	0	1	2 以上
リッチ曲率	正	0	負

てなことをもっと詳しくやりたかったのですが…

- ここまでくると難しいですよね…
- 実は私の専門に直に関わるのでやりたかったですが.(さっきの図も研究発表で使った図である.)
- もう一つ, 最近のゲームをした人はドーナツ型の世界がわからない(私の友人がまさにそうでした.)



まとめ
この授業のきっかけ

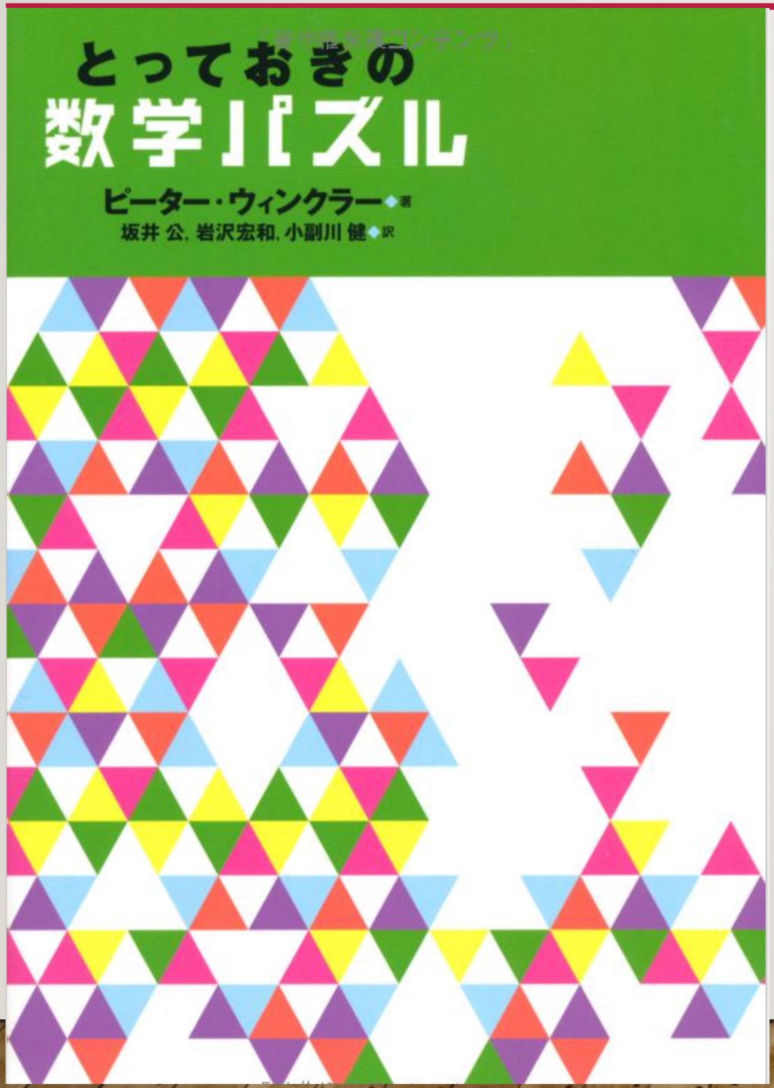
- 去年の8月ぐらいに「学問の扉」の案を考えました.
- なんか数学をガチでやるのは嫌だし, プログラミング的なことやりたいし, 数学パズルちょっとやりたいし, 自分の知らないことやりたいし…ということで今回の授業のタイトルにしました.
- こういうことやりたいなーって思ったことを授業にしました. 寝る前とか散歩中とかに考えたことが元になってます.

- 他にも以下に挙げるものがきっかけとなってます.

きっかけI
ゲームで大学数学入門

- 安田健彦先生(本大学数学科専攻長)が著者の本
- ゲームという切り口から大学数学を垣間見る, なかなか一味違った本
- 安田健彦先生自らゲームを作った.「オイラー・ゲッター」と呼ばれる. 先生のホームページに行けば体験できる.
- 授業のアイデアを結構取りました.この本かなり面白いです.

きっかけ 2
とっておきの数学パズル



- ピーターウィンクラー著のパズル集
- 確率テストは 3 問くらいこっから取ってます.
- めちゃくちゃ難しい！正直数学者を唸らせるパズルがたくさん載ってます.

きっかけ 3
ATCODER

- 言わずと知れた競技プログラミングのサイト
- 博士2年くらいちょっとハマってて, 大会に2回参加しました.

(Quizknockの鶴崎くんに会ったことあるのもこの関連)

- 今はめちゃくちゃ人数多いらしい. 本も色々あるらしい.
- 今は全然やらなくなっちゃいました. まあプログラミングできるようになったからいいかな?
- プログラミングやりたいけど, 作りたいものとかない人はおすすめです. 高校数学みたいな問題が多いので. (実際, 高校生に負けまくってました…)
- 二人零和有限確定完全情報ゲーム・グランディ数はこっから取りました.

授業を終えて・・・

- 私としてはグランディ数・チューリング完全・ナッシュ均衡など学べたので面白かったです.
- 研究者のお仕事・**BABA IS YOU**は完全に私がやりたかった内容です.
- 私がやりたい内容をほぼ全てやったので, みんなはどうか知りませんが, 私はすごく楽しかったです.
- まあちょっと行き当たりばったりでしたかね？？
- 自分で準備するのは意外と疲れました. しかも最近忙しいので, もっと計画性持って授業するべきですかね？
- 次やるなら競技プログラミング関連でもやりましょうかね？教えられる気しないですが. (ガチ数学でもいいですが, 私が学ぶことなくて面白くない)


おしまい