1-4. 多様体の復習・多様体の例・接ベクトル空間

岩井雅崇 2022/10/07

講義では多様体の復習・多様体の例・接ベクトル空間を 4 回かけて行う (と聞いている). ただ演習では問題作成の都合上, 1-4 回の内容をまとめた. なお今回の演習問題は難易度が高いため, 解けない場合は適宜教科書やインターネット, TA・教官に頼っても良い. (わからなければこちらからヒントを出していきます).

多様体の作り方は大きく分けて次に分けられる.

- 多様体 M, N について, その直積 $M \times N$ は多様体
- 多様体 M の開集合 U は多様体.
- 多様体間の写像 $f : M \to N$ と $y \in N$ について, $f^{-1}(y)$ は"だいたい"M の部分多様体. これは次の定理を用いる.

定理 1. [多様体の基礎 定理 15-1]
$f : M \to N$ を多様体の間の C^r 級写像とする. さらに $q \in N$ を正則値であると仮定する. $f^{-1}(q) \neq \varnothing$ ならば, $f^{-1}(q)$ は $\dim M - \dim N$ 次元の C^r 級部分多様体である.
ここで $q \in N$ が $f : M \to N$ の正則値であるとは, 任意の $p \in f^{-1}(q)$ について, 微分写像

$$(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$$

が全射であることとする.

- 多様体 M を同値関係 $\sim$ で割ってできる多様体 $M/\sim$. ただし常に $M/\sim$ が多様体になるとは限らない.[1] 参考までに次の事実が知られている.[リー群と表現論 第 6 章]「Lie 群 G が多様体 M に推移的かつ連続に作用しているとき, $G_x = \{g \in G | gx = x\} (x \in M)$ は閉部分群になり G/G_x は M と C^∞ 微分同相となる.」

講義ではやらないが演習でちょっと使う重要な事実なので次の内容もまとめておく.

定義と定理 2. [埋め込みとはめ込み] $f : M \to N$ を多様体の間の C^r 級写像とする.

- f がはめ込みであるとは, 任意の点 $p \in M$ について微分写像 $(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ が単射であること.
- f が埋め込みであるとは, f がはめ込みであり, $f : M \to f(M)$ が同相であることとする. ここで $f(M)$ には N の相対位相を入れる. このとき $f(M)$ は N の部分多様体であることが知られている.

[1] 私が学部生だったとき群 G が多様体 M に固定点自由かつ真性不連続に作用している場合の内容をやった. 調べてみると担当教官がその道のプロであることがわかった.

問 1.1 * Give an example of a topological space that is connected but not path-connected.

問 1.2 * Show that any connected manifold is path-connected.

問 1.3 次の問いに答えよ.

(a) 実数の集合 $\mathbb{R}$ について, 同値関係 $\sim_1$ を

$$x \sim_1 y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

とし $\mathbb{R}/\sim_1$ に商位相を入れる. このとき $\mathbb{R}/\sim_1$ は多様体になることを示せ.

(b) 実数の集合 $\mathbb{R}$ について, 同値関係 $\sim_2$ を

$$x \sim_2 y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

とし $\mathbb{R}/\sim_2$ に商位相を入れる. このとき $\mathbb{R}/\sim_2$ は多様体とならないことを示せ.

問 1.4 $S^m := \{(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} | \sum_{i=1}^{m+1} x_i^2 = 1\}$ とおく. S^m が m 次元の C^∞ 級多様体であることを 2 通りの方法で示したい. 次の問いに答えよ.

(a) $N = (0, 0, \ldots, 1), S = (0, 0, \ldots, -1)$ とし, $U_N = S_m \setminus N$, $U_S = S_m \setminus S$ とおく.

$$\begin{array}{cccc} \varphi_N : & U_N & \to & \mathbb{R}^m \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) & \longmapsto & (\frac{x_1}{1-x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{1-x_{m+1}}) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \varphi_S : & U_S & \to & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) & \longmapsto & (\frac{x_1}{1+x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{1+x_{m+1}}) \end{array}$$

とおく. $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ が S^m の座標近傍系を与えることを示し, これにより S^m は m 次元の C^∞ 級多様体となることを示せ.

(b) $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ となる C^∞ 級写像で $f^{-1}(1) = S^m$ かつ $1 \in \mathbb{R}$ が f の正則値であるようなものを一つ求めよ. またこれを用いて S^m は m 次元の C^∞ 級多様体であることを示せ.

問 1.5 $i : S^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ を包含写像とする. 次の問いに答えよ.

(a) 任意の点 $a \in S^m$ について, 微分写像 $(di)_a : T_a S^m \to T_a \mathbb{R}^{m+1}$ は単射であることをしめせ.

(b) $a \in S^m$ を S^m の点とする. $(di)_a$ が単射であることと $T_a \mathbb{R}^{m+1} \cong \mathbb{R}^{m+1}$ により $T_a S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ とみなす. このとき

$$T_a S^m = \{v \in \mathbb{R}^{m+1} | < a, v >= 0\}$$

となることを示せ. ここで $< \bullet, \bullet >$ は $\mathbb{R}^{m+1}$ 上のユークリッド内積とする.

問 1.6 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $f(z)=z(z+1)$ とする．次の問いに答えよ．

(a) $z=x+\sqrt{-1}y$ によって $\mathbb{C}$ に座標 (x,y) を入れ f を座標表示せよ．

(b) $z\in\mathbb{C}$ においてヤコビ行列を求めよ．

(c) $(df)_p:T_z\mathbb{C}\to T_z\mathbb{C}$ が同型でない z を全て求めよ．

問 1.7 (多様体の基礎 11 章) $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ について, 同値関係 $\sim$ を

$$z\sim w\Leftrightarrow 0 \text{ でない複素数 } \alpha \text{ が存在して } z=\alpha w$$

と定義する.$\mathbb{CP}^n:=(\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\})/\sim$ と書き複素射影空間と呼ぶ．以下 $z=(z_1,z_2,\ldots,z_{n+1})$ を $\mathbb{CP}^n$ の元とみなしたものを $(z_1:\cdots:z_{n+1})$ と書き複素同次座標と呼ぶ．次の問いに答えよ．

(a) $\mathbb{CP}^n$ がハウスドルフであることを示せ．

(b) $U_i=\{(z_1:z_2:\ldots:z_{n+1})|z_i\neq 0\}$ とおき,

$$\begin{array}{cccc}\varphi_i: & U_i & \to & \mathbb{C}^n\\ & (z_1:z_2:\ldots:z_{n+1}) & \longmapsto & (\frac{z_1}{z_i},\ldots,\frac{z_{i-1}}{z_i},\frac{z_{i+1}}{z_i},\ldots,\frac{z_n}{z_i})\end{array}$$

と定める．$\{(U_i,\varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$ は座標近傍系となることを示し, $\mathbb{CP}^n$ は (実)$2n$ 次元の C^∞ 級多様体であることを示せ．

問 1.8 $\mathbb{CP}^1$ と S^2 は C^∞ 級微分同相であることをしめせ．

問 1.9 $i:\mathbb{C}\to\mathbb{CP}^1$ を $i(z)=(z:1)$ とすることにより, $\mathbb{C}$ を $\mathbb{CP}^1$ の開部分多様体と見なす．$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を $f(z)=z^2+1$ とおく．このときある $F:\mathbb{CP}^1\to\mathbb{CP}^1$ となる C^∞ 級写像で $F|_{\mathbb{C}}=f$ となるものがあることを示せ．

問 1.10 (多様体の基礎 11 章)

(a)

$$\begin{array}{cccc}\pi: & S^{2n+1} & \to & \mathbb{CP}^n\\ & (x_1,x_2,\ldots,x_{2n+1},x_{2n+2}) & \longmapsto & (x_1+\sqrt{-1}x_2,x_3+\sqrt{-1}x_4,\ldots,x_{2n+1}+\sqrt{-1}x_{2n+2})\end{array}$$

とおく． この写像が全射 C^∞ 級写像であることを示せ．

(b) $\mathbb{CP}^n$ はコンパクトであることを示せ．

(c) 任意の $z\in\mathbb{CP}^n$ について $f^{-1}(z)$ は S^1 と位相同相であることを示せ．

問 1.11 * n を 2 以上の整数とする．$H=\{(z_1:z_2:\ldots:z_{n+1})\in\mathbb{CP}^n|z_1+\cdots+z_{n+1}=0\}$ が C^∞ 級多様体であることを示し, その次元を求めよ．

問 1.12 ** n を 2 以上の整数とする．$Q=\{(z_1:z_2:\ldots:z_{n+1})\in\mathbb{CP}^n|z_1^2+\cdots+z_{n+1}^2=0\}$ が C^∞ 級多様体であることを示し, その次元を求めよ．

問 1.13 $M(n,\mathbb{R})$ を $n\times n$ 行列の全体の集合とする．$M(n,\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}^{n^2}$ と同一視する．特に $M(n,\mathbb{R})$ が n^2 次元 C^∞ 級多様体となる．次の問いに答えよ．

(a) $GL(n,\mathbb{R})=\{A\in M(n,\mathbb{R})|\det A\neq 0\}$ が C^∞ 級多様体であることを示し, その次元を求めよ．

(b) $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) | \det A = 1\}$ が C^∞ 級多様体であることを示し, その次元を求めよ.

問 1.14 (多様体の基礎 15 章) $O(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) | {}^tAA = E\}$ が C^∞ 級多様体であることを示し, その次元を求めよ.

問 1.15 $SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) | \det A = 1, {}^tAA = E\}$ が C^∞ 級多様体であることを示し, その次元を求めよ.

問 1.16 $SO(2,\mathbb{R})$ が S^1 と C^∞ 級微分同相であることを示せ.

問 1.17 * 次の問いに答えよ

(a) $GL(n,\mathbb{R})$ は弧状連結ではないことを示せ.

(b) $GL(n,\mathbb{R})_+ = \{A \in M(n,\mathbb{R}) | \det A > 0\}$ は弧状連結であること示せ.

問 1.18 * $SO(n,\mathbb{R})$ は弧状連結であることを示せ.

問 1.19 (多様体の基礎 15 章) k, m を $1 \geq k \geq m$ となる自然数とし $M_{k,m}$ を実数係数 $k \times m$ 行列全体とする.

$$V_{k,m} = \{A \in M_{k,m} | A({}^tA) = E\}$$

とする. 次の問いにこたえよ.

(a) $f : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^3$ を次で定める.

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^{2m} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_m) & \longmapsto & (\sum_{i=1}^m x_i^2, \sum_{i=1}^m y_i^2, \sum_{i=1}^m x_i y_i) \end{array}$$

$(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_m) \in \mathbb{R}^m$ での f のヤコビ行列を求めよ

(b) $V_{2,m}$ は $\mathbb{R}^{2m}$ の C^∞ 級部分多様体であることを示し, その次元を求めよ.

(c) $V_{3,m}$ は $\mathbb{R}^{3m}$ の C^∞ 級部分多様体であることを示し, その次元を求めよ.

問 1.20 *

$$\begin{array}{cccc} f: & S^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z,w) & \longmapsto & xy - zw \end{array}$$

とおく. $f^{-1}(0)$ は S^3 の部分多様体であることをしめせ.

問 1.21 *

$$M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | 2x^2 + 2 = 2z^2 + w^2, 3x^2 + y^2 = z^2 + w^2\}$$

とおく． 次の問いに答えよ．

(a) M は $\mathbb{R}^4$ の部分多様体であることを示し，その次元を求めよ

(b) $F : M \to \mathbb{R}^2$ を $F(x, y, z, w) = (x^2, y^2)$ とする．$p = (X, Y) \in \mathbb{R}^2$ について $F^{-1}(p)$ の元の個数を求めよ．

(c) M はコンパクトかどうか判定せよ

問 1.22 $*$ M, N を連結な C^∞ 級多様体とし，$f : M \to N$ を C^∞ 級写像とする．任意の $p \in M$ について $(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ が零写像であるならば，f は M を N の一点へ写す定値写像であることを示せ．

問 1.23 * M, N をそれぞれ m 次元，n 次元の C^∞ 多様体とし C^∞ 写像 $f : M \to N$ とする．さらに M はコンパクトとし N は連結コンパクトで $m \geq n$ であると仮定する．任意の $x \in M$ について $(df)_p : T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ が全射であるとき f も全射であることを示せ．

問 1.24 * $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ について，同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \Leftrightarrow 0 \text{ でない実数 } \alpha \text{ が存在して } x = \alpha y$$

と定義する.$\mathbb{RP}^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ と書き実射影空間と呼ぶ．$\mathbb{RP}^n$ は n 次元 C^∞ 級多様体となることが知られている．以下 $x = (x_1, z_2, \ldots, x_{n+1})$ を $\mathbb{RP}^n$ の元とみなしたものを $(x_1 : \cdots : x_{n+1})$ と書き実同次座標と呼ぶ．次の問いに答えよ．

(a)

$$\begin{array}{cccc} \pi : & S^n & \to & \mathbb{RP}^n \\ & (x_1, \ldots, x_{n+1}) & \longmapsto & (x_1 : \cdots : x_{n+1}) \end{array}$$

は全射 C^∞ 級写像であることをしめせ．

(b) 任意の $q \in \mathbb{RP}^n$ について $f^{-1}(q)$ の個数を求めよ．

(c) $f : S^2 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ とする．f と π を使って自然に $\tilde{f} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^3$ が定義できることを示せ．

(d) $\tilde{f}$ ははめ込みではないことをしめせ．

問 1.25 ** 上の記法において $g : S^2 \to \mathbb{R}^4$ を $g(x, y, z) = (yz, zx, xy, x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ とする．g と π を使って自然に $\tilde{g} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ が定義でき，$\tilde{g}$ は埋め込みであることを示せ．

問 1.26 ** 複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ について，その k 次元ベクトル部分空間全体の集合を $G_{n,k}$ とおく．$G_{n,k}$ は自然に C^∞ 級多様体の構造を持つことを示し，その次元を求めよ.(複素グラスマン多様体と呼ばれる)．

問 1.27 ** $G_{4,2}$ は $\{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5) \in \mathbb{CP}^5 | z_0 z_5 - z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0\}$ と C^∞ 級同相であることを示せ．(プリュッカー埋め込みと呼ばれる)．

問 1.28 * 授業や演習などこれまで出てきた多様体の例以外で面白い多様体の例をあげよ．ただし以下の点に注意すること．

(a) この問題は教官と TA が「面白い」と思わない場合，正答とならない．(例えば $\mathbb{R}^4$ の開集合やトーラス・メビウスの帯・クラインの壺などはよく見るので正答とはならない.)

(b) この問題は複数人が解答して良い.

(c) この問題の解答権は 2022 年 10 月中とする. 11 月以後はこの問題に答えることはできない.

5-6 ベクトル場と積分曲線

岩井雅崇 2022/11/18

1 おわび

前回の問題は「あまり教育的でない・難しすぎる」など少々良くなかった気がします. 今回は教育的な問題などを集めました. [2] また演習でも糟谷先生のプリントの問題も解いて良いです.[3]

2 多様体に関する諸注意

前回の演習の授業で少々気になった点があったので, 何点か補足する.

2.1 多様体の座標近傍の書き方.

多様体の基礎の座標近傍の定義や多様体の定義は次のとおりである.

定義 3. 位相空間 M の開集合 U から $\mathbb{R}^m$ の開集合 V への同相写像 $\varphi : U \to V$ について (U, φ) を m 次元座標近傍といい, φ を U 上の局所座標系という.
$p \in U$ について, $\varphi(p) = (x_1, \ldots, x_m)$ とかける. $x_1, \ldots, x_m$ を (U, φ) に関する p の局所座標という.(U, φ) のことを $(U; x_1, \ldots, x_m)$ と書くことがある.

定義 4. M をハウスドルフ空間とする. 次の条件が成り立つとき M は m 次元 C^∞ 級多様体と呼ばれる.

1. 座標近傍系 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ があって, $M = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ となる.
2. $U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ なる $\lambda, \mu \in \Lambda$ について $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ は C^∞ 級写像である

「多様体の基礎」の定義のおける $x_1, \ldots, x_m$ は厳密に言えば $x_i : U \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ となる U 上の関数である. 一方でこの本は後の方で「$(x_1, \ldots, x_m) \in \varphi(U)$ について...」と $x_1, \ldots, x_m$ が点を表しているように書いている. (これは初学者が大変困惑する同一視である. 慣れたらこっちの方が楽ではあるが.)[4]

また局所座標系を明示する際には (U, φ) と $(U; x_1, \ldots, x_m)$ の二つがあるが私は後者を使うことをお勧めする. これは接ベクトル空間の定義 5 の (3) をよく使うからである.[5]

2.2 接ベクトル空間の定義と書き方について.

定義 5 (接ベクトル空間)**.** m 次元 C^∞ 級多様体 M と $p \in M$ について次の集合は一致する.

1. p における方向微分 v の集合 $D_p^\infty(M)$. ここで v が p における方向微分であるとは, p の開近傍で定義された C^∞ 級関数 ξ について実数 $v(\xi)$ を対応させる操作であって次

[2] 演習の授業を担当していて気づいたのですが, 学生のみなさんは「演習問題は全て解けるもの」を用意してると思われているようです. 難しい問題や良くない問題も用意しているので, 全部解こうとはしないほうが賢明です.

[3] 演習でプリントの問題を発表して CLE で提出するのも良いです.

[4] 気になって別の本「トゥー 多様体 (L. W. Tu *An introduction to Manifolds.*)」を見たが, その本では区別して書いていた. 「トゥー 多様体」の英語版は学内から Springer Link を経由することで無料で入手可能である.

[5] 「トゥー 多様体」では「局所座標系を $(U, \varphi) = (U; x_1, \ldots, x_m)$ とする」と言う書き方をしていた. 要するに座標系の書き方は世界共通ではなさそうだ. 気になる人は「トゥー 多様体」の書き方でも良い.

を満たすものとする.

(a) ξ, η が p の周りで一致すれば $v(\xi) = v(\eta)$.

(b) 実数 a, b について $v(a\xi + b\eta) = av(\xi) + bv(\eta)$.

(c) $v(\xi\eta) = v(\xi)\eta(p) + \xi(p)v(\eta)$.

2. 曲線 c に沿った方向微分 v_c 全体の集合. ここで c は M にはいる C^∞ 級曲線 $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ で $c(0) = p$ を満たすものとし, v_c は p の開近傍で定義された C^∞ 級関数 ξ について実数
$$v_c : \xi \mapsto \left.\frac{d\xi(c(t))}{dt}\right|_{t=0}$$
を対応させるものとする.

3. $(U; x_1, \ldots, x_m)$ を p の周りの座標系とした場合の $(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_p$ ではられる $\mathbb{R}$ ベクトル空間 $T_p(M)$. ここで $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ とは p の開近傍で定義された C^∞ 級関数 ξ について実数
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : \xi \mapsto \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(p)$$
を対応させるものとする.

この $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間をM の接ベクトル空間と呼び T_pM とかく.

補足 **6.** C^∞ 級でない場合でも (3) $\subset$ (2) $\subset$ (1) は成り立つ. ただ (1) $\subset$ (3) が成り立つのは C^∞ 級の多様体のみである (多様体の基礎 p.86 注意を見よ).

また定義 5 の (3) においても定義 3 のような同一視がなされている. もっと正確に書けば, 座標系を $(U, \varphi) = (U; x_1, \ldots, x_m)$ とし, $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ の標準座標を $r_1, \ldots, r_m$ とするとき,
$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial(\xi \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(p)) \text{ となる.}$$

要するに接ベクトル空間 T_pM の元を表す方法は 3 つある. 人にもよるが私は定義 5 の (3) の書き方がわかりやすいと思う. つまり $v \in T_pM$ の元はある $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ を用いて
$$v = \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \text{ と書くことができる.}$$ [6]

定義 **7.** M を m 次元 C^∞ 級多様体, N を n 次元 C^∞ 級多様体, $f : M \to N$ を C^∞ 級写像とする. $p \in M$ をとり $q := f(p) \in N$ とする. 次の写像 $(df)_p : T_p(M) \to T_q(N)$ は一致する.

1. p における方向微分 v について
$$(df)_p(v) : \eta \mapsto v(\eta \circ f)$$
と定義する. (η は q の開近傍で定義された C^∞ 級関数である). $(df)_p(v)$ は q における方向微分となり, $T_q(N)$ の元となる.

2. 曲線 c に沿った方向微分 v_c(ただし c は C^∞ 級写像 $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ で $c(0) = p$ を満た

[6] 接ベクトル空間を「何かよくわからないもの $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ が $\mathbb{R}$ 上ではられるもの」と思うという荒技もある. これはベクトル束の立場から見るとそうなる. 恥ずかしながら接ベクトル空間の厳密な定義を最近まで忘れていた. (ベクトル場を構成した論文を出してたので油断していました.)

すもの) について,

$$(df)_p(v_c) := v_{f\circ c}$$

と定義する. $f\circ c(0)=q$ を満たすため $v_{f\circ c}$ は $T_q(N)$ の元である.

3. $(V, y_1,\ldots,y_n)$ を q の周りの座標系, $(U; x_1,\ldots,x_m)$ を $f(U)\subset V$ となる p の周りの座標系とする. f を $(U; x_1,\ldots,x_m)$ と $(V, y_1,\ldots,y_n)$ によって局所座標表示したものを

$$y_1=f_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,y_n=f_n(x_1,\ldots,x_m)$$

としたとき, $(df)_p : T_p(M)\to T_q(N)$ を次のように定義する.

$$(df)_p : \sum_{i=1}^m a_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \mapsto \sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^m a_i\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q$$

この $(df)_p : T_p(M)\to T_q(N)$ をp における f の微分という.

補足 **8.** 定義 7 (3) において, $b_j=\sum_{i=1}^m a_i\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)$ とおき, $n\times m$ 行の行列 $(Jf)_p$ を

$$(Jf)_p=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p)\end{pmatrix} \text{とすれば,} \begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=(Jf)_p\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix} \text{が成り立つ.}$$

$(Jf)_p$ をヤコビ行列と呼ぶ.[7] またここでも定義 3 のような同一視がなされている. 正確に書けば次のとおりである: 座標系を $(U,\varphi)=(U; x_1,\ldots,x_m)$ とする. $\varphi(U)\subset\mathbb{R}^m$ の標準座標を $r_1,\ldots,r_m$ とする. $(V,\psi)=(V, y_1,\ldots,y_n)$ を q の座標系とする. $\psi(z)=(y_1(z),\ldots,y_n(z))$ に注意すれば,

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial(y_j\circ f\circ\varphi^{-1})}{\partial r_i}(\varphi(p)) \text{ となる.}$$

3　ベクトル場の定義と性質

以下断りがなければ M を m 次元 C^∞ 級多様体とする.

定義 **9** (ベクトル場)**.**

1. $p\in M$ について $X_p\in T_pM$ が一つずつ対応しているとき, その対応 $X=\{X_p\}_{p\in M}$ をM 上のベクトル場という.
2. 座標近傍 $(U, x_1,\ldots,x_m)$ について, U 上のベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ を

$$\frac{\partial}{\partial x_i} := \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right\}_{p\in U} \text{ と定義する.}$$

3. M 上のベクトル場 X と座標近傍 $(U, x_1,\ldots,x_m)$ について, ある U 上の関数 $\xi_i : U\to\mathbb{R}$ があって

$$X|_U=\{X_p\}_{p\in U}=\xi_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\xi_m\frac{\partial}{\partial x_m}$$

[7] これは座標系 $(U; x_1,\ldots,x_m), (V, y_1,\ldots,y_n)$ に依存する.

とかける．各座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について上の ξ_i が C^∞ 級となるとき，X は C^∞ ベクトル場であるという M 上の C^∞ 級ベクトル場の集合を $\mathscr{X}(M)$ で表す．

定義 10 (ベクトル場の演算)**.** X, Y を M 上の C^∞ ベクトル場，f を M 上の C^∞ 級関数とする．

1. $p \in M$ について $Xf(p) := X_p(f)$ と定義する (定義 5 の (1) を使った)．Xf を関数 f にベクトル場を作用させて得られる関数と呼ぶ．座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について $X|_U = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \xi_m \frac{\partial}{\partial x_m}$ と書けている場合
$$Xf(p) = \xi_1(p)\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + \xi_m(p)\frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \text{ となる．}$$
2. X, Y のかっこ積 (Lie bracket)を $[X, Y] := XY - YX$ と定める．$[X, Y]$ は C^∞ 級ベクトル場となる．座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について $X|_U = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y|_U = \sum_{i=1}^m \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ と書けている場合
$$[X, Y]|_U = (XY - YX)|_U = \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^m \left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ となる．}$$
3. $F : M \to N$ を C^∞ 級微分同相写像とする．M 上の C^∞ 級ベクトル場 X について，N 上のベクトル場 F_*X を $(F_*X)_{f(p)} := (dF)_p(X_p)$ とする．

4 積分曲線・1 パラメーター変換群・リー微分

以下断りがなければ M を m 次元 C^∞ 級多様体とし，X を C^∞ 級ベクトル場とする．

定義 11 (積分曲線)**.** a を実数または $-\infty$，b を実数または $+\infty$ とし，開区間 (a, b) は 0 を含むとする．C^∞ 級曲線 $c : (a, b) \to M$ が X の積分曲線であるとは，任意の $\alpha \in (a, b)$ について
$$\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=\alpha} = X_{c(\alpha)}$$
が成り立つこととする (左辺に関しては定義 5 参照)．$c(0) = p$ を c の初期値という．

定理 12 (積分曲線の局所的な存在と一意性)**.**

1. 任意の $p \in M$ について，正の数 $\epsilon > 0$ と $c(0) = p$ となる積分曲線 $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ が存在する．
2. 0 を含む開区間 $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ と積分曲線 $c_1 : (a_1, b_1) \to M$，$c_2 : (a_2, b_2) \to M$ について，$c_1(0) = c_2(0)$ ならば，c_1 と c_2 は $(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$ 上で一致する．

定義 13.

1. $p \in M$ を初期値とする積分曲線 $c_p : (a, b) \to M$ で定義域をこれ以上広げられないものを極大積分曲線という．

2. 任意の $p \in M$ を初期値とする極大積分曲線 $c_p : (a, b) \to M$ の定義域 (a, b) が $\mathbb{R}$ であるとき, X は完備なベクトル場であるという.

c_p を p を初期値とする極大積分曲線 [8]とすると, $t \in \mathbb{R}$ について $c_p(t)$ は"ベクトル場 X に沿って時間 t だけ流した時の位置"を対応させているとみれる.

定理 14. X を完備な C^∞ 級ベクトル場とし, $p \in M$ を通る極大積分曲線を $c_p : \mathbb{R} \to M$ とする. $t \in \mathbb{R}$ について $\varphi_t : M \to M$ を

$$\begin{array}{rccc} \varphi_t : & M & \to & M \\ & p & \mapsto & c_p(t) \end{array}$$

とおく. このとき $\varphi_t : M \to M$ は C^∞ 級同相写像であり次が成り立つ.

1. $\varphi_0 = \mathrm{id}_M$.
2. $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ $(\forall t, s \in \mathbb{R})$.
3. $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$ $(\forall t \in \mathbb{R})$.
4. 次の写像 $F : \mathbb{R} \times M \to M$ は C^∞ 級写像である

$$\begin{array}{rccc} F : & \mathbb{R} \times M & \to & M \\ & (t, p) & \mapsto & \varphi_t(p) \end{array}$$

逆に C^∞ 級同相写像の族 $\{\varphi_t : M \to M\}_{t \in \mathbb{R}}$ が上の 4 条件を満たすとき, 定義 5 の (2) を用いてベクトル場 $X = \{X_p\}_{p \in M}$ を

$$X_p := \left.\frac{d\varphi_t(p)}{dt}\right|_{t=0} \in T_pM$$

で定義すると, X が完備なベクトル場であり p を初期値とする極大積分曲線は $c(t) = \varphi_t(p)$ で与えられる.
このような C^∞ 級同相写像の族 $\{\varphi_t : M \to M\}_{t \in \mathbb{R}}$ を1 パラメーター変換群と呼ぶ.

要するに「完備なベクトル場」と「1 パラメーター変換群」は 1 対 1 に対応する. 完備なベクトル場 X に対応する 1 パラメーター変換群 $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を $\{\mathrm{Exp}(tX)\}_{t \in \mathbb{R}}$ と表すこともある.

補足 15. C^∞ 級写像 $F : \mathbb{R} \times M \to M$ がフローとは $F(0, p) = p$ かつ $F(t, F(s, p)) = F(t + s, p)$ を満たすこととする. フローと 1 パラメーター変換群が一対一に対応する.

定理 16. X を完備な C^∞ 級ベクトル場とし, C^∞ 級同相写像の族 $\{\varphi_t : M \to M\}_{t \in \mathbb{R}}$ を 1 パラメーター変換群とする. C^∞ 級関数 f とベクトル場 Y についてリー微分 $\mathcal{L}_X(f), \mathcal{L}_X(Y)$ をそれぞれ以下で定める.

$$\mathcal{L}_X(f) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t^* f - f}{t} \quad \mathcal{L}_X(Y) = \lim_{t \to 0} \frac{(\varphi_{-t})_* Y - Y}{t}$$

このとき次が成り立つ.

1. $\mathcal{L}_X(f) = Xf$, $\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$.
2. $[X, Y] = 0$ であることは任意の $t \in \mathbb{R}$ について $(\varphi_t)_* Y = Y$ となることと同値である.

[8]多様体の基礎では $c_p(t)$ を $c(t, p)$ と書いている.

3. $\{\psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を Y の 1 パラメーター変換群とする. $[X,Y]=0$ であることは任意の $s,t\in\mathbb{R}$ について $\varphi_t\circ\psi_s=\psi_t\circ\varphi_s$ を満たすことと同値である.

定理 **17.** C^∞ 級写像 $f: M\to\mathbb{R}$ が固有な沈め込みであれば, 任意の $a,b\in\mathbb{R}$ について $f^{-1}(a)$ と $f^{-1}(b)$ は C^∞ 級微分同相である. ここで f が固有とは任意のコンパクト集合の f の逆像がコンパクトになることとし, f が沈め込みとは任意の $p\in M$ について $(df)_p$ が全射であることとする.

5　演習問題

以下断りがなければ M, N は C^∞ 級多様体とし, $m = \dim M$ とする.

• ベクトル場の問題

問 2.1　次の問いに答えよ.

(a) X を C^∞ 級ベクトル場とし f を M 上の C^∞ 関数とする. Xf と fX の厳密な定義とその違いを述べよ.

(b) $\mathbb{R}^2$ 上でのベクトル場のかっこ積 $[-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}]$ を計算せよ.

問 2.2　$a, b \in \mathbb{R}$ と $X, Y, Z \in \mathscr{X}(M)$ について, 次が成り立つことを示せ.[9]

(a) (双線型性) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z], [Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$.

(b) (交代性) $[Y, X] = -[X, Y]$.

(c) (ヤコビ恒等式) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

問 2.3　* Let $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ be the standard coordinates on $\mathbb{R}^{2n}$. The unit sphere S^{2n-1} in $\mathbb{R}^{2n}$ is defined by the equation $\sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 = 1$. Show that

$$X = \sum_{i=1}^n -y_i\frac{\partial}{\partial x_i} + x_i\frac{\partial}{\partial y_i}$$

is a no where-vanishing C^∞ vector field on S^{2n-1}.

問 2.4　$TM = \cup_{p\in M} T_pM = \cup_{p\in M}\{(p, v) | v \in T_pM\}$ とし, $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda) = (U_\lambda, x_1^\lambda, \ldots, x_m^\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を M の座標近傍系とする. $\lambda \in \Lambda$ について次のように写像を定める.

$$\begin{array}{cccc} \pi: & TM & \to & M \\ & (p, v) & \mapsto & p \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \Phi_\lambda: & \pi^{-1}(U_\lambda) & \to & \varphi_\lambda(U_\lambda) \times \mathbb{R}^m \\ & (p, \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i^\lambda}\right)_p) & \to & (\varphi(p), (a_1, \ldots, a_m)) \end{array}$$

次の問いに答えよ.

(a) Φ_λ は $\pi^{-1}(U_\lambda)$ と $\varphi_\lambda(U_\lambda) \times \mathbb{R}^m$ の一対一対応を与えることを示せ.

(b) TM の位相で任意の $\lambda \in \Lambda$ について $\pi^{-1}(U_\lambda)$ が開集合で Φ_λ が位相同型になるようなものが存在することを示せ.

(c) TM には $\{(\pi^{-1}(U_\lambda), \Phi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ が座標近傍系になるような $2m$ 次元の C^∞ 級多様体の構造が入ることを示せ. (TM, π) をM の接ベクトル束という. [10]

問 2.5　* 引き続き接ベクトル束 TM に関する次の問いに答えよ.

(a) $\pi : TM \to M$ は全射 C^∞ 級写像であることを示せ.

(b) 「C^∞ ベクトル場 X」は「C^∞ 級写像 $\chi : M \to TM$ で $\pi \circ \chi = id_M$ となるもの」と 1 対 1 に対応することを示せ.

[9] $(\mathscr{X}(M), [,])$ がリー代数の構造をもつ

[10] ベクトル束に関しては, 例えば「今野 微分幾何学」を参照のこと. 実はヤコビ行列を用いても接ベクトル束を構成することができる.

(c) M 上の C^∞ ベクトル場 $X_1, \dots, X_m$ で，任意の $p \in M$ について $(X_1)_p, \dots, (X_m)_p$ が T_pM の基底となるものが存在すると仮定する．このとき TM と $M \times \mathbb{R}^m$ は微分同相であることを示せ．

問 2.6 TS^1 は $S^1 \times \mathbb{R}$ と微分同相であることを示せ．ただしこの問題の解答期限は問 2.3 と問 2.5 が解かれるまでとする．[11]

問 2.7 * TS^n は $\{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} z_i^2 = 1\}$ と微分同相であることを示せ．[12]

問 2.8 * $i : \mathbb{C} \to \mathbb{CP}^1$ を $i(z) = (z : 1)$ とすることにより，$\mathbb{C}$ を $\mathbb{CP}^1$ の開部分多様体と見なす．$\mathbb{C}$ 上のベクトル場 $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ と定める (ただし $z = x + \sqrt{-1}y$ として (x, y) を $\mathbb{C}$ の座標を考えている)．このとき X は $\mathbb{CP}^1$ 上の C^∞ 級ベクトル場 $\tilde{X}$ に拡張されることを示せ．また $\tilde{X}_p = 0$ となる $p \in \mathbb{CP}^1$ を全て求めよ．

問 2.9 Let $F : M \to N$ be a C^∞ diffeomorphism of manifolds.

(a) Prove that if g is a C^∞ function and X is a C^∞ vector field on M, then $F_*(gX) = (g \circ F^{-1})F_*X$.

(b) Prove that if X and Y are C^∞ vector fields on M, then $F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y]$.

● 積分曲線の問題

問 2.10 (a) Find the maximal integral curve of $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ starting at $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Find the maximal integral curve of $Y = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ starting at $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$.

問 2.11 $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場を $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ とする．次の問いに答えよ．

(a) X は完備であることを示せ．

(b) $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を 1 パラメーター変換群とする．$\varphi_t : M \to M$ を求めよ．

(c) $X_p = \left.\frac{d\varphi_t(p)}{dt}\right|_{t=0}$ を確かめよ．

問 2.12 *$\mathbb{R}^2$ に対し同値関係 $\sim$ を

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \text{ かつ } y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$$

で定め，2 次元トーラス $T^2 := \mathbb{R}^2 / \sim$ とする．$\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ という商写像により T^2 に位相を入れる．[13] 次の問いに答えよ．

(a) $Y = \frac{\partial}{\partial x}$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級ベクトル場とする．このとき T^2 上の C^∞ 級ベクトル場 X で，任意の $p \in \mathbb{R}^2$ について $(d\pi)_p(Y) = X_{\pi(p)}$ となるものが存在することを示せ．

(b) X が生成する 1 パラメーター変換群 $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を求めよ．

(c) $T(T^2)$ は $T^2 \times \mathbb{R}$ と微分同相であることを示せ．

問 2.13 コンパクト C^∞ 級多様体 M 上の任意の C^∞ 級ベクトル場は完備であることを示せ．

問 2.14 定理 16 の (1)-(3) をそれぞれ示せ．

---

[11] 問 2.3 と問 2.5(c) から TS^1 と $S^1 \times \mathbb{R}$ は微分同相であることがいえる．もし別解があれば発表してもよい．

[12] ヒント．前回演習の問 1.5 を用いる．

[13] $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ ともかく．この問題では T^2 が C^∞ 級多様体であることを認めて良い．また T^2 は $S^1 \times S^1$ と微分同相である．

問 2.15 * M をコンパクト C^∞ 級多様体とし X を C^∞ 級ベクトル場とする. M 上の C^∞ 級関数 $f, g : M \to \mathbb{R}$ が $Xf = g, Xg = f$ を満たすとする. 次の問いに答えよ.

(a) X の任意の積分曲線 $c : \mathbb{R} \to M$ について $(f \circ c)''(t) = (f \circ c)(t)$ であることを示せ.

(b) f, g は恒等的に 0 であることを示せ.

● 教育的な問題

第 1-4 回の演習で出した問題以外でとても教育的な問題を追加で出しておく.

問 2.16 M を m 次元コンパクト C^∞ 級多様体とする. C^∞ 級写像 $f : M \to \mathbb{R}^m$ ではめ込みとなるものは存在しないことを示せ. ($m = \dim M$ に注意すること).

問 2.17 M と N が微分同相であるならば $\dim M = \dim N$ を示せ.

問 2.18 $f : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{R}$ を

$$f([x_1 : \cdots : x_{n+1}]) = \frac{x_1^2}{x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2}$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(a) f が well-defined な C^∞ 級写像であることを示せ.

(b) $(df)_p$ が消える $p \in \mathbb{RP}^n$ の点を全て求めよ.

(c) f の最大値・最小値を求めよ

問 2.19 (糟谷先生の第 3 回のプリントの問題) $f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級写像とする.

(a) $p \in M$ において $(df)_p \neq 0$ ならば, ある C^∞ 級写像 $c : (-1, 1) \to M$ で $c(0) = p$ かつ $(f \circ c)'(0) > 0$ となるものが存在することを示せ.

(b) M がコンパクトならば $(df)_p = 0$ となる $p \in M$ が存在することを示せ.

問 2.20 m, k を正の自然数とする. C^∞ 級写像 $f : \mathbb{R}^{m+k} \to \mathbb{R}^k$ とその正則値 c を考える. $M = f^{-1}(c)$ は $\mathbb{R}^{m+k}$ の部分多様体となり, 任意の $p \in M$ について $T_pM = \mathrm{Ker}(df)_p$ となることを示せ. またこれを用いて問題 1.5 を示せ.（つまり $a \in S^m$ について $T_aS^m = \{v \in \mathbb{R}^{m+1} | < a, v >= 0\}$ となることを示せ. ここで $< \bullet, \bullet >$ は $\mathbb{R}^{m+1}$ 上のユークリッド内積とし, $T_a\mathbb{R}^{m+1}$ と $\mathbb{R}^{m+1}$ を同一視する.)

● 発展課題

以下の問題は私が少々気になった事柄である. 余裕のある人向けの問題となっております. [14]

問 2.21 * $C^\infty(M)$ を M 上の C^∞ 級関数全体のなす集合とする. 次の問いに答えよ.[15]

(a) C^∞ 級ベクトル場 X について $D_X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ を $D_X(f) := Xf$ で定める. D_X が線形かつライプニッツ則を満たすことを示せ.

(b) 写像 $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ が線形でありライプニッツ則を満たすとき, ある C^∞ 級ベクトル場 X があって $D = D_X$ となることを示せ.

(c) C^∞ 級ベクトル場 X, Y について $X = Y$ であることは $D_X = D_Y$ であることと同値であることを示せ. [16]

[14] 教育的な問題からそうでない問題まで揃えております.

[15] 必要であれば多様体の基礎 命題 13.11 を用いて良い.

[16] 多様体の基礎 命題 16.5 の証明を見ていると, この本ではこの事実を認めている気がする.

ここで「線形」と「ライプニッツ則」については次のように定義する.

- D が線形であるとは $a, b \in \mathbb{R}, f, g \in C^\infty(M)$ について $D(af+bg) = aD(f) + bD(g)$ であることとする.
- D がライプニッツ則を満たすとは $f, g \in C^\infty(M)$ について $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ であることとする.

問 2.22 $f: M \to N$ を C^∞ 級写像とする. $C^\infty(M)$ を M 上の C^∞ 級関数全体の集合として,

$$\begin{array}{cccc} f^*: & C^\infty(N) & \to & C^\infty(M) \\ & \xi & \mapsto & \xi \circ f \end{array}$$

と定める. $X \in \mathscr{X}(M), Y \in \mathscr{X}(N)$ について X と Y が f-関係にあるとは $D_X \circ f^* = f^* \circ D_Y$ であることとする. 次の問いに答えよ.

(a) X と Y が f-関係にあることは, 任意の $p \in M$ について $(df)_p(X_p) = Y_{f(p)}$ であることと同値であることを示せ.

(b) f が微分同相写像のとき, 任意の $X \in \mathscr{X}(M)$ について, X と f-関係にあるベクトル場 Y がただ一つ存在することを示せ.

(c) X_1 と Y_1 が f-関係にあり, X_2 と Y_2 が f-関係にあるとき, $[X_1, X_2]$ と $[Y_1, Y_2]$ も f-関係にあることをしめせ.

問 2.23 $M = N = \mathbb{R}$ とし, $f: M \to N$ を $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ とする. M は $\mathbb{R}$ への通常の C^∞ 級多様体の構造を入れる. また N には $f^{-1}: N \to M = \mathbb{R}$ によって C^∞ 級多様体の構造を入れる (つまり $\{(N, f^{-1})\}$ が N の座標近傍系となる). 次の問いに答えよ.

(a) $\varphi: M \to N$ を恒等写像とする. φ は全単射な C^∞ 級写像であることを示せ

(b) φ^{-1} は C^∞ 級写像ではないことを示せ. つまり φ は C^∞ 級微分同相ではない.

(c) $X = \frac{\partial}{\partial x}$ について φ-関係にある N 上の C^∞ 級ベクトル場は存在しないこと示せ.

問 2.24 ** TS^3 は $S^3 \times \mathbb{R}^3$ と微分同相であることを示せ. [17]

問 2.25 *** TS^n が $S^n \times \mathbb{R}^n$ と微分同相となるような自然数 n を決定せよ. [18]

[17] ヒント: 四元数体のノルム 1 の全体集合が S^3 になる.

[18] n が偶数ではないことは Poincare-Hopf の定理からわかる. n が奇数のときどのように議論するか私はわからない.

8-12. 微分形式とストークスの定理

岩井雅崇 2022/12/02

6 ベクトル空間のテンソル積

定義 18. V を m 次元の $\mathbb{R}$ ベクトル空間とする.

- V の双対ベクトル空間 V^* を $V^* := \{\omega : V \to \mathbb{R} \,|\, \omega$ は線型写像 $\}$ とする.
- $\{e_1, \ldots, e_m\}$ を V の基底とするとき, $1 \leq i \leq m$ なる i について $\omega_i \in V^*$ を
$$\begin{array}{rccc} \omega_i : & V & \to & \mathbb{R} \\ & a_1e_1 + \cdots + a_me_m & \mapsto & a_i \end{array}$$
と定義する. $\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ は V^* の基底で, $\{e_1, \ldots, e_m\}$ の双対基底と呼ばれる.
- V 上の k 次多重線型形式とは $\omega : V^k = V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ となる写像で $\omega(v_1, \ldots, v_k)$ が各 v_i について線型であることとする. V 上の k 次多重線型形式なす m^k 次元のベクトル空間を $\otimes^k V^*$ と表す.
- $\omega \in \otimes^k V^*$ が k 次対称形式であるとは, 任意の k 次の置換 σ と, 任意の $(v_1, \ldots, v_k) \in V^k$ について $\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \omega(v_1, \ldots, v_k)$ となることとする.
- $\omega \in \otimes^k V^*$ が k 次交代形式であるとは, 任意の k 次の置換 σ と, 任意の $(v_1, \ldots, v_k) \in V^k$ について $\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(v_1, \ldots, v_k)$ となることとする. V の k 次交代形式の ${}_mC_k$ 次元のベクトル空間を $\wedge^k V^*$ で表す.

例 19. $\eta_1, \ldots, \eta_k \in V^*$ について

$$\begin{array}{rccc} \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_k : & V \times \cdots \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (v_1, \ldots, v_k) & \mapsto & \eta_1(v_1) \cdots \eta_k(v_k) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k : & V \times \cdots \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (v_1, \ldots, v_k) & \mapsto & \det((\eta_i(v_j))_{1 \leq i,j \leq k}) \end{array}$$

と定義する. $\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_k \in \otimes^k V^*$ であり $\eta_1, \ldots, \eta_k$ のテンソル積と呼ばれる.

$\{e_1, \ldots, e_m\}$ を V の基底とし, $\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ を $\{e_1, \ldots, e_m\}$ の双対基底とするとき, $\{\omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_k}\}_{i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m}$ は $\otimes^k V^*$ の基底となる. また $\{\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m}$ は $\wedge^k V^*$ の基底となる. 定義から $\omega_2 \wedge \omega_1 = -\omega_1 \wedge \omega_2$ や $\omega_1 \wedge \omega_1 = 0$ であることがわかる.

7 微分形式

定義 20.

- $p \in M$ について, 接ベクトル空間 T_pM の双対空間を余接ベクトル空間と呼び T_p^*M と表す.
- 任意の $p \in M$ について $\omega_p \in T_p^*M$ が一つずつ対応しているとき, その対応 $\omega = \{\omega_p\}_{p \in M}$ を M 上の 1 次微分形式という.
- 座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について $(dx_i)_p$ を
$$\begin{array}{rccc} (dx_i)_p : & T_pM & \to & \mathbb{R} \\ & a_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \cdots + a_m\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p & \mapsto & a_i \end{array}$$

とし, U 上の 1 次微分形式 $dx_i := \{(dx_i)_p\}_{p\in U}$ と定義する. これにより M 上の 1 次微分形式は座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について, ある U 上の関数 $f_i : U \to \mathbb{R}$ があって

$$\omega|_U = f_1 dx_1 + \cdots + f_m dx_m$$

とかける. 各座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について上の f_i が C^∞ 級となるとき, ω は C^∞ 級 1 次微分形式という.

例 21. $f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級写像とすると, 微分写像 $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ により, $df := \{df_p\}_{p\in M}$ は M 上の 1 次微分形式だと思える. 座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ を用いて 1 次微分形式 df は

$$df|_U = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$ と表せられる.

定義 22. $k = 1, \ldots, m = \dim M$ となる自然数とする.

- 任意の $p \in M$ について $\omega_p \in \wedge^k T_p^* M$ が一つずつ対応しているとき, その対応 $\omega = \{\omega_p\}_{p\in M}$ をM 上の k 次微分形式という.
- M 上の k 次微分形式 ω は座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について, ある U 上の関数 $f_{i_1 i_2 \cdots i_k} : U \to \mathbb{R} (1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m)$ があって

$$\omega|_U = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} f_{i_1 i_2\cdots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

とかける. 各座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ について上の $f_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ が C^∞ 級となるとき, X はC^∞ 級 k 次微分形式であるという.

断りのない限り微分形式は全て C^∞ 級であるとする.

定義 23 (外積)**.** M 上の k 次微分形式 ω と l 次微分形式 η について, その外積 $\omega \wedge \eta$を

$$\omega\wedge\eta(X_1, \ldots, X_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma\in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)})\eta(X_{\sigma(k+1)}, \ldots, X_{\sigma(k+l)})$$ とする.

$\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} f_{i_1\cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, $\eta = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_l\le m} g_{j_1\cdots j_l} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$ と座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ 上でかけている場合,

$$\omega \wedge \eta = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} \sum_{1\le j_1<\cdots<j_l\le m} f_{i_1\cdots i_k} g_{j_1\cdots j_l} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$$ となる.

定義 24 (外微分)**.** M 上の k 次微分形式 ω について, 外微分 $d\omega$を

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \ldots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_m)) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_m). \end{aligned}$$

とする． ここで $(X_1,\dots,X_{k+1})$ はベクトル場とし， $(X_1,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_m)$ は $(X_1,\dots,X_{i-1},X_{i+1},\dots,X_m)$ を意味する．$\omega=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} f_{i_1\cdots i_k}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$ と座標近傍 $(U,x_1,\dots,x_m)$ 上でかけている場合，

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} df_{i_1\cdots i_k}dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m}\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_j}dx_j\right)\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} \text{となる．}\end{aligned}$$

定義 25 (引き戻し)**.** $\varphi: M\to N$ を C^∞ 写像とする．N 上の l 次微分形式 η について，η の φ による<u>引き戻し $\varphi^*\eta$</u>を

$$(\varphi^*\eta)_p(X_p):=\eta_{\varphi(p)}((d\varphi)_pX_p)\quad(\forall p\in M,\forall X\in T_pM)$$

と定める．これは M 上の l 次微分形式となる．M の座標近傍 $(U,x_1,\dots,x_m)$, N の座標近傍 $(V,y_1,\dots,y_n)$ に関して，$\eta=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_l\le m} g_{j_1\cdots j_l}dy_{j_1}\wedge\cdots\wedge dy_{j_l}$ とかけている場合，

$$\varphi^*\eta:=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_l\le m}(g_{j_1\cdots j_l}\circ\varphi)\left(\sum_{i_1=1}^m\frac{\partial y_{j_1}}{\partial x_{i_1}}dx_{i_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{i_l=1}^m\frac{\partial dy_{j_l}}{\partial x_{i_l}}dx_{i_l}\right)\text{となる．}$$

例 26. $\omega=f_1dx_1+f_2dx_2$, $\eta=g_1dx_1+g_2dx_2$, $\varphi(z_1,z_2)=(\varphi_1(z_1,z_2),\varphi_2(z_1,z_2))$ とすると外積，外微分，引き戻しはそれぞれ次の通りとなる．

$$\omega\wedge\eta=(f_1dx_1+f_2dx_2)\wedge(g_1dx_1+g_2dx_2)=(f_1g_2)dx_1\wedge dx_2+(f_2g_1)dx_2\wedge dx_1=(f_1g_2-f_2g_1)dx_1\wedge dx_2.$$

$$d\omega=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2\right)\wedge dx_1+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2\right)\wedge dx_2=\left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)dx_1\wedge dx_2.$$

$$\varphi^*\omega=f_1(\varphi(z))d\varphi_1+f_2(\varphi(z))d\varphi_2=f_1(\varphi(z))\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_1}dz_1+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z_2}dz_2\right)+f_2(\varphi(z))\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_1}dz_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_2}dz_2\right).$$

命題 27. ω を k 次微分形式，η を l 次微分形式，ζ を s 次微分形式とする．次が成り立つ．

- $\omega\wedge\eta=(-1)^{kl}\eta\wedge\omega$, $\omega\wedge(\eta\wedge\zeta)=(\omega\wedge\eta)\wedge\zeta$.
- $\varphi^*(\omega\wedge\eta)=\varphi^*(\omega)\wedge\varphi^*(\eta)$.
- $d(\omega\wedge\eta)=(d\omega)\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge(d\eta)$.
- $d(d\omega)=0$, $d(\varphi^*\omega)=\varphi^*(d\omega)$.

定義 28 (ド・ラームコホモロジー)**.** k 次微分形式の集合を $\Omega^k(M)$ とする．

$$0\to\Omega^0(M)\xrightarrow{d}\Omega^1(M)\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}\Omega^m(M)\xrightarrow{d}0$$

をド・ラーム複体といい,

$$H^k_{DR}(M) := \frac{\ker(d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M))}{\mathrm{Im}(d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M))}$$

を M のk 次のド・ラームコホモロジー群という.

補足 29. $d\omega = 0$ なる微分形式を閉形式といい, ある微分形式 η があって $\omega = d\eta$ とかける微分形式 ω を完全形式という. $d \circ d = 0$ なので完全形式ならば閉形式である. ド・ラームコホモロジー群は閉形式と完全形式のずれを記述している群である.

8 1 の分割と多様体上の積分

定理 30. $p \in M$ と p の開近傍 U について, ある p の開近傍 V と C^∞ 級関数 $\rho : M \to \mathbb{R}$ があって $\overline{V} \subset U$ かつつぎを満たす.

$$\begin{cases} \rho(q) = 1 & q \in \overline{V} \\ 0 \leqq \rho(q) < 1 & q \in U \setminus \overline{V} \\ \rho(q) = 0 & q \in M \setminus U \end{cases}$$

特に ρ の台 $\mathrm{Supp}(\rho) := \overline{\{q \in M | \rho(q) \neq 0\}}$ とするとき, $\mathrm{Supp}(\rho) \subset U$ となる.

定理 31 (1 の分割)**.** M が第二可算であると仮定する. 任意の M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ についてある可算個の C^∞ 級関数 $\rho_j : M \to \mathbb{R} (j \in \mathbb{N})$ があって次が成り立つ

1. $\{\mathrm{Supp}(\rho_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ は M の被覆であり, $p \in M$ についてある p の開近傍 U をとれば $U \cap \mathrm{Supp}(\rho_j) \neq \varnothing$ なる j は有限個になる.(局所有限な被覆という.)
2. 任意の $j \in \mathbb{N}$ についてある $\alpha_j \in A$ があって $\mathrm{Supp}(\rho_j) \subset U_{\alpha_j}$ となる. ($\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の細分という.)
3. $0 \leq \rho_j \leq 1$ かつ $\sum_{j \in \mathbb{N}} \rho_j \equiv 1$.

この $\{\rho_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ を$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に従属する 1 の分割という.

補足 32. 上は σ コンパクトで成り立つ定理である.(第二可算な多様体は σ コンパクトであるらしい.) ただ σ コンパクトは応用上で使うか怪しいし, 多様体に第二可算を仮定することが多いので, ここでは第二可算として主張を述べた.[19]要するに 1 の分割は取れると思って良い.

定義 33. $(U, \varphi) = (U, x_1, \ldots, x_m)$ を座標近傍とし, U 上の m 次微分形式を $\omega = f(x_1, \ldots, x_m) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ とする. $\varphi(U)$ が正方形領域 $V := [-a, a]^m$ に含まれるとき, ω の U 上の積分を

$$\int_U \omega := \int_{[-a,a]^m} f(x_1, \ldots, x_m) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$$で定義する.

[19] 「トゥー 多様体」では多様体に第二可算を仮定している.

定義 34. • $(U, x_1, \ldots, x_m)$, $(V, y_1, \ldots, y_m)$ を $U \cap V \neq \phi$ となる M の座標近傍とする. $(U, x_1, \ldots, x_m)$ と $(V, y_1, \ldots, y_m)$ が同じ向きであるとは, $U \cap V$ 上で

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)} := \det\left(\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)_{1 \leq i,j \leq m}\right) > 0 \text{ となることとする.}$$

- M が向きづけ可能であるとは, M の座標近傍系 $\{(U_\alpha, x_1^\alpha, \ldots, x_m^\alpha)\}$ であって, 同じ向きになるものが存在することとする.

定理 35. M が向きづけ可能なコンパクト m 次元多様体とし, ω を m 次微分形式とする. このとき同じ向きになる M の座標近傍系 $U_1, \ldots, U_N$ とそれに従属する 1 の分割 $\rho_1, \ldots, \rho_N$ があって, ω の M 上の積分を

$$\int_M \omega := \sum_{j=1}^{N} \int_M \rho_j \omega$$

で定義する. この積分の値は実数値であり, 1 の分割や近傍系の取り方によらない.

補足 36. $\rho_j \omega$ は定義 33 の仮定を満たすため上のように積分が定義できる. M がコンパクトでない場合でも 1 の分割が取れれば積分は定義できるが, 有限の値になるかはわからない.

9 ストークスの定理

以下の内容は「坪井俊 著 幾何学 3 微分形式」を参考にした.

定義 37. M を第二可算ハウスドルフ空間とする. 次の条件が成り立つとき M は m 次元境界つき (C^∞ 級) 多様体と呼ばれる.

1. M の開被覆 $M = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ と像への同相写像

$$\varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{H}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m | x_1 \geqq 0\} \text{ が存在する.}$$

2. $U_\lambda \cap U_\mu \neq \phi$ なる $\lambda, \mu \in \Lambda$ について $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \to \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ は C^∞ 級写像である

$\partial M := \cup_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \subset$ を M の境界と呼ぶ.

補足 38. M の境界 ∂M は $m-1$ 次元多様体となる. また M が向きづけ可能であるとき, ∂M には座標近傍系 $\{(U_\lambda, x_2^\lambda, \ldots, x_m^\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ によって向きが入る.

定理 39. M が向きづけ可能なコンパクト m 次元境界つき多様体とし, η を $m-1$ 次微分形式とするとき, 次が成り立つ.

$$\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta$$

ストークスの定理は境界がない多様体 (つまり普通の意味での”多様体”) について述べると次のとおりである. 「M が向きづけ可能なコンパクト m 次元多様体とし, η を $m-1$ 次微分形式とするとき, $\int_M d\eta = 0$ となる.」ストークスの定理は研究でも応用でも使われる定理である.

10　演習問題

問題の上に • がついている問題は解けてほしい問題である．問題の上に * がついている問題は面白いかちょっと難しい問題である．

以下断りがなければ M, N は C^∞ 級多様体とし，$m = \dim M$ とする．$\mathbb{R}^n$ をユークリッド空間とし，$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を半径 1 の n 次元球面とする．

• 微分形式の問題

問 3.1 • 講義で配られるプリントにある微分形式に関する計算問題を好きなだけ解答せよ．[20]

問 3.2 • $\mathbb{R}^{2n}$ 上の 2 次微分形式 $\omega = \sum_{i=1}^n dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}$ について ω^n を求めよ．

問 3.3 • $i : S^2 \to \mathbb{R}^3$ を包含写像とする．次の問いに答えよ．

(a) $i^*(dx \wedge dy \wedge dz)$ を求めよ．

(b) $i^*(dx \wedge dy)$ の値が 0 になる S^2 の点を全て求めよ．

問 3.4 (多様体の基礎 19 章) $f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．

(a) 微分写像 $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ により，$df := \{df_p\}_{p\in M}$ は M 上の微分形式だと思える．座標近傍 $(U, x_1, \ldots, x_m)$ を用いて，微分形式 df は次のように表せることを示せ．

$$df|_U = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m$$

(b) X をベクトル場とするとき，$(df)(X) = X(f)$ を示せ．

問 3.5 V を $\mathbb{R}$ 上の m 次元ベクトル空間とし，$\{e_1, \ldots, e_m\}$ を V の基底とし，$\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ は V^* を $\{e_1, \ldots, e_m\}$ の双対基底とする．また k を 2 以上の自然数とする．次の問いに答えよ

(a) k 次多重線型形式のなす空間 $\otimes^k V^*$ の基底を一つ構成せよ．また $\otimes^k V^*$ の次元を求めよ．

(b) k 次対称形式のなす空間 $\mathrm{S}^k(V^*)$ の基底を一つ構成せよ．また $\mathrm{S}^k(V^*)$ の次元を求めよ．

(c) k 次交代形式のなす空間 $\wedge^k V^*$ の基底を一つ構成せよ．また $\wedge^k V^*$ の次元を求めよ．

問 3.6 k を 1 以上の自然数とする．$\wedge^k T^*M = \cup_{p\in M} \wedge^k T_p^*M$ に C^∞ 級多様体の構造が入ることを示せ．またその多様体の次元を求めよ．[21]

問 3.7 * $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ とし，$f(x,y,z)$ を X 上の C^∞ 級関数で $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ を用いて $f(x,y,z) = h(r)$ とかけているとする．X 上の 1 次微分形式 ω を

$$\omega = f(x,y,z)(xdx + ydy + zdz)$$

とする．次の問いに答えよ．

(a) $d\omega = 0$ を示せ．つまり ω は閉形式である．

(b) ある C^∞ 級関数 g があって $\omega = dg$ となることを示せ. つまり ω は完全形式である．

(c) $\Delta\varphi = 0$ となる C^∞ 級関数 φ によって $\omega = d\varphi$ となるとき，f を x, y, z を用いて表せ．ここで

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \text{である．}$$

[20] この問題は解答者が複数いても良い．なるべく糟谷先生のプリントの問題も解いてください．

[21] 難しければ $k = 1, m$ の場合のみ解答しても良い．T^*M は余接ベクトル束と呼ばれる．

問 3.8 • $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の 1 次微分形式

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

について次の問いに答えよ.

(a) 極座標 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を用いて ω を $dr, d\theta$ で表せ.

(b) $d\omega = 0$ を示せ. つまり ω は閉形式である.

(c) $C = S^1$ とし, 向きを反時計回りで入れる. $\int_C \omega$ を計算せよ.

(d) $\omega = dg$ となる C^∞ 級関数は存在しないことを示せ. つまり ω は完全形式ではない.

問 3.9 連結な多様体 M について 0 次ド・ラームコホモロジー群 $H^0_{DR}(M)$ を求めよ.

問 3.10 * 次の問いに答えよ.

(a) ω を $d\omega = 0$ となる $\mathbb{R}^2$ の 1 次微分形式とする. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ について $L_{(x,y)}$ を 0 が始点で (x, y) が終点となる線分とし, $g(x, y) = \int_{L_{(x,y)}} \omega$ とおく. このとき $g(x, y)$ は $\omega = dg$ となる $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級関数であることを示せ.

(b) $\mathbb{R}^2$ の 2 次微分形式 η についてある 1 次微分形式 ω があって $\eta = d\omega$ となることを示せ.

(c) $\mathbb{R}^2$ のド・ラームコホモロジー群 $H^k_{DR}(\mathbb{R}^2)(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を求めよ. [22]

問 3.11 * S^1 のド・ラームコホモロジー群 $H^k_{DR}(S^1)(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を求めよ.[23]

問 3.12 $\mathbb{R}^3$ の関数 (スカラー場)$F(x, y, z)$ とベクトル場 $\mathbf{V}(x, y, z) = (V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z))$ について,

$$\mathrm{grad}(F) = \nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \quad \mathrm{div}(\mathbf{V}) = \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{V}) = \nabla \times \mathbf{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}, \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)$$

と定義する. 次の問いに答えよ.[24]

(a) 下の図式が可換になるように Φ_1, Φ_2, Φ_3 をうまく定義せよ.

$$\begin{tikzcd}
\{\text{関数 (スカラー場)}\} \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, equal] & \{\text{ベクトル場}\} \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, "\Phi_1"] & \{\text{ベクトル場}\} \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\Phi_2"] & \{\text{関数 (スカラー場)}\} \arrow[d, "\Phi_3"] \\
\{\text{関数 (0 次微分形式)}\} \arrow[r, "d"] & \{\text{1 次微分形式}\} \arrow[r, "d"] & \{\text{2 次微分形式}\} \arrow[r, "d"] & \{\text{3 次微分形式}\}
\end{tikzcd}$$

(b) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(F)) = 0$ と $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\mathbf{V}) = 0$ をそれぞれ示せ.

(c) $\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $\mathbf{V}$ について, $\mathrm{rot}\mathbf{V} \equiv 0$ であることは $\mathbf{V} = \mathrm{grad}\phi$ なるスカラー場 (スカラー・ポテンシャル)ϕ が存在することと同値であることを示せ.[25]

[22] 余裕があれば $H^k_{DR}(\mathbb{R}^n)$ はどうなるか考察せよ.

[23] 頑張れば今の状況でも求められる.(トゥー 多様体 24 章を見よ.) 他にもド・ラームの定理「滑らかな多様体 M について $H^k_{DR}(M) \cong \mathrm{Hom}(H_k(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R})$ が成り立つ」を認めればホモロジー群から求められる.

[24] この問題は「$\mathbb{R}^3$ 上のベクトル解析が微分形式によって再解釈される」ことを確かめる問題である. そのため数学的な記述は少々曖昧であるのでご了承いただきたい.

[25] ヒント: $k > 0$ について $H^k_{DR}(\mathbb{R}^3) = 0$ であることを用いる. 同様に $\mathrm{div}\mathbf{V} \equiv 0$ であることは $\mathbf{V} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ なるベクトル場 (ベクトル・ポテンシャル)$\mathbf{A}$ が存在することと同値であることがわかる.

問 3.13 [Tu. Problem 19.13] 次を英訳し問題に解答せよ．

In Maxwell's theory of electricity and magnetism, developed in the late nineteenth century, the electric field $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ and the magnetic field $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ in a vacuum $\mathbb{R}^3$ with no charge or current satisfy the following equations:

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \mathrm{rot}\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \mathrm{div}\mathbf{E} = 0, \mathrm{div}\mathbf{B} = 0.$$

We define the 1-form E on $\mathbb{R}^3$ corresponding to the vector field $\mathbf{E}$ by $E = E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz$ and define the 2-form B on $\mathbb{R}^3$ corresponding to the vector field $\mathbf{B}$ by $B = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$.

Let $\mathbb{R}^4$ be space-time with coordinates (x, y, z, t). Then both E and B can be viewed as differential forms on $\mathbb{R}^4$. Define F to be the 2-form

$$F = E \wedge dt + B$$

on space-time. Decide which two of Maxwell's equations are equivalent to the equation $dF = 0$. Prove your answer. [26]

●1 の分割・多様体上の積分・ストークスの定理

問 3.14 Let A and B two disjoint closed sets in a manifold M. Find C^∞ function f on M such that f is identically 1 on A and identically 0 on B.

問 3.15 M を向きづけ可能なコンパクト m 次元多様体とし，N を $m-1$ 次元の M の閉部分多様体とする．ω を m 次微分形式とするとき $\int_M \omega = \int_{M \setminus N} \omega$を示せ．

問 3.16 •(多様体の基礎 20 章) リーマン球面 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \mathbb{C}$ を構成する 2 つの複素平面 $\mathbb{C}$ をそれぞれ $z = x + iy$, $\xi = \zeta + i\eta$ の対応で (ζ, η) 平面, (x, y) 平面と同一視する．次の問いに答えよ．

(a) 座標変換 $z = \frac{1}{\xi}$ を (ζ, η) と (x, y) を用いて表せ．

(b) (x, y) 平面上の 2 次微分形式 $\omega = \frac{dx \wedge dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$ は $\mathbb{CP}^1$ 上の 2 次微分形式 $\widetilde{\omega}$ に拡張できることを示せ．[27]

(c) $\int_{\mathbb{CP}^1} \widetilde{\omega}$ の値を求めよ．

問 3.17 2 次元トーラス $T^2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x^2 + y^2 = z^2 + w^2 = 1\}$ について

$$\int_{T^2} yzw \, dx \wedge dz$$

を求めよ．ただし T^2 にどのような向きを入れたのかを明記すること．

問 3.18 •

$$\int_{S^2} xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$$

を求めよ．ただし S^2 にどのような向きを入れたのかを明記すること．

[26] この文章には続きがあった．"The other two are equivalent to $d{*}F = 0$ for a star-operator $*$ defined indifferential geometry."つまり後二つは $d * F = 0$ と同じである．ここで $*$ は Hodge-star operator である．

[27] ヒント: (ζ, η) 平面上の C^∞ 級 2 次微分形式 α で，(ζ, η) 平面と (x, y) 平面の共通部分で ω と一致するものを一つ見つけよ．そうすると α と ω の貼り合わせで $\widetilde{\omega}$ が構成できる．

問 3.19 • $D = [a,b] \times [c,d]$ とし, $f(x,y), g(x,y)$ を D 上の C^∞ 級関数とする.[28]グリーンの定理

$$\int_{\partial D} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy$$

を示せ. ただし ∂D にどのような向きを入れたか明記すること.

問 3.20 • $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上で定義された領域上で定義された関数 $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ を考える. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の 1 次微分形式を $\omega := \frac{\partial f}{\partial x}dy - \frac{\partial f}{\partial y}dx$ とする. 次の問いに答えよ.

(a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上 $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ であることを示せ.
(b) C_1 を中心 $(3,0)$ で半径 2 の円周とし, 向きを反時計回りに入れる. $\int_{C_1} \omega$ を計算せよ.
(c) C_2 を中心 $(1,0)$ で半径 4 の円周とし, 向きを反時計回りに入れる. $\int_{C_2} \omega$ を計算せよ.

• 向きづけの問題

問 3.21 *(多様体の基礎 20 章) 多様体 M が向きづけ可能であるための必要十分条件は, どの点でも 0 にならない m 次微分形式 ω が存在することであることを示せ.(つまり向きづけ可能とは $\wedge^m T^*M$ が自明になることと同値である.)

問 3.22 * 多様体 M についてその接ベクトル束 TM は常に向きづけ可能であることを示せ.

問 3.23 * $\mathbb{CP}^n$ は向きづけ可能であることを示せ.

問 3.24 * $(-1,1) \times \mathbb{R}$ に同値関係 $\sim$ を

$$(x,y) \sim (z,w) \Leftrightarrow \text{ある整数 } m \text{ があって } z = (-1)^m x, w = y + m.$$

と定義する. $X := ((-1,1) \times \mathbb{R})/\sim$ としメビウスの帯という. 商写像 $\pi : (-1,1) \times \mathbb{R} \to X$ によって X に位相を入れる. 次の問いに答えよ.

(a) $U_1 := \pi((-1,1) \times (0,1))$, $U_2 := \pi((-1,1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ とおく. 各 $i = 1,2$ について $\mathbb{R}^2$ の開集合 V_i への同相写像 $\varphi_i : U_i \to V_i$ で, $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ が X の座標近傍系になるような φ_1, φ_2 を一つ構成せよ. またメビウスの帯は C^∞ 級多様体になることを示せ.
(b) メビウスの帯 X は向きづけ不可能であることを示せ.

問 3.25 ** $\mathbb{RP}^n$ は n が奇数なら向きづけ可能であるが, n が偶数なら向きづけ不可能であることを示せ. [29]

• 発展課題[30]

問 3.26 * X をベクトル場とし, ω を k 次微分形式とする.

$$(L_X\omega)(X_1,\ldots,X_k) := X(\omega(X_1,\ldots,X_k)) - \sum_{i=1}^{k} \omega(X_1,\ldots,[X,X_i],\ldots,X_k)$$

と定義する. $L_X\omega$ を ω の X による Lie 微分という. 次の問いに答えよ. [31]

[28] D° 上で C^∞ 級で D 上で連続と言った方がいい?
[29] 一応問 3.21 を使えば現時点でも求められる. 他にも「m 次元コンパクト連結多様体 M について, その n 次ホモロジー群 $H_n(X,\mathbb{Z})$ が $\mathbb{Z}$ ならば向きづけ可能であり, 0 ならば向きづけ不可能である」という定理を使えば, ホモロジー群からも求められる.
[30] 教育的な問題からそうでない問題まで揃えており, 余裕のある人向けの問題となっております.
[31] 難しければ $k = 1$ など低い次数の微分形式対して示して良い.

(a) $L_X\omega$ は k 次微分形式であることを示せ.

(b) $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を X の 1 パラメーター変換群とするとき, $L_X\omega = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^*\omega-\omega}{t}$ を示せ.

(c) $L_XL_Y - L_YL_X = L_{[X,Y]}$ を示せ.

(d) $L_X(\omega\wedge\eta) = L_X(\omega)\wedge\eta + \omega\wedge L_X(\eta)$ と $dL_X = L_Xd$ をそれぞれ示せ.

問 3.27 * X をベクトル場とし, ω を k 次微分形式とする.

$$(i_X\omega)(X_1,\dots,X_{k-1}) := \omega(X, X_1,\dots,X_{k-1})$$

と定義する. $i_X\omega$ を ω と X の内部積という. 次の問いに答えよ

(a) $i_X\omega$ は $k-1$ 次微分形式であることを示せ.

(b) ω を k 次微分形式とするとき, $i_X(\omega\wedge\eta) = i_X(\omega)\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge i_X(\eta)$ を示せ.

(c) $i_{[X,Y]} = L_Xi_Y - i_YL_X$ を示せ.

(d) Cartan の公式 $L_X = i_Xd + di_X$ を示せ.

問 3.28 * ω を $\mathbb{R}^n$ 上の 1 次微分形式とし, S_ω を $\mathbb{R}^n$ のベクトル場 X で $i_X\omega = 0$ となるものの集合とする. $d\omega\wedge\omega = 0$ ならば任意の $X, Y \in S_\omega$ について $[X,Y]\in S_\omega$ であることを示せ.

問 3.29 * M を向きづけ可能なコンパクト多様体とし g を M 上のリーマン計量とする.

(a) $\{(U_\lambda, x_1^\lambda,\dots,x_m^\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに同じ向きになる座標近傍系とする. $g_{ij}^\lambda = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i^\lambda}, \frac{\partial}{\partial x_j^\lambda}\right)$ とし,

$$\omega_\lambda := \sqrt{\left|\det\left(g_{ij}^\lambda\right)\right|}dx_1^\lambda\wedge\cdots\wedge dx_m^\lambda$$

とおく. M 上の m 次微分形式 ω_g で $\omega_g|_{U_\lambda} = \omega_\lambda$ となるものが存在することを示せ. この ω_g はリーマン計量の体積要素と呼ばれる.

以下, $\mathbb{R}^n$ に標準的なリーマン計量 g, つまり $g_{ij} = \delta_{ij}$ となる計量 g を入れる. [32]

(b) S^1 に $\mathbb{R}^2$ から誘導されるリーマン計量 g_{S^1} を入れる. $\int_{S^1}\omega_{g_{S^1}}$ を求めよ.

(c) S^2 に $\mathbb{R}^3$ から誘導されるリーマン計量 g_{S^2} を入れる. $\int_{S^2}\omega_{g_{S^2}}$ を求めよ.

問 3.30 ** (学部一年の積分の授業で習ったと思われる) 曲線の長さや曲面の表面積を求める公式を上のリーマン計量の体積要素を用いて導出せよ. [33]

問 3.31 ** ベクトル解析におけるガウスの発散定理を調べ, それが (多様体の) ストークスの定理から導かれることを示せ.[34]

演習の問題は授業ページ (`https://masataka123.github.io/2022_winter_generaltopology/`) にもあります. 右の QR コードからを読み込んでも構いません.

[32] δ_{ij} はクロネッカーのデルタである.

[33] 学部 1 年で線分の長さや表面積の公式習ったと思うが, その公式の証明はされていなかったと思う. 実は表面積や線分の長さの公式はリーマン計量の体積要素からわかるものであり, とどのつまり学部 3 年にしてようやく表面積や曲線の長さが定義できたのである.

[34] 面積分をうまく定義する必要がある. 本当はもっと演習問題ぽく出したかったがどうもリーマン計量が出てくるためうまく問題が作れなかった...