基礎解析学 2 -一変数と多変数の積分-

岩井雅崇 (大阪大学)

September 27, 2022 ver 1.00

Contents

1 一変数の積分

1.1 微分積分学の基本定理 (三宅先生の本, 3.1 と 3.4 の内容)

この回の内容はかなり難しいので, 積分の理論を気にせず計算だけしたい人はこの回の内容を読み飛ばして, 1.2 節の内容に移って良い. また証明等を少々省略するので, 詳しくリーマン積分を理解したい人は「杉浦光夫 解析入門 1 (東京大学出版会)」を見てほしい.

1.1.1 リーマン積分の定義

この節では $I = [a, b]$ とし, $f(x)$ は I 上の関数とする.

- 関数 $f(x)$ が I 上で有界であるとは, ある正の数 $M > 0$ があって, 任意の $x \in I$ について $|f(x)| < M$ となること.[1]

以下, 関数 $f(x)$ が I 上で有界であるとする.

- Δ が I の分割とは, 正の自然数 m と $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$ となる数の組 $(a, x_1, \ldots, x_{m-1}, b)$ のこと. 以下 $\Delta = (a, x_1, \ldots, x_{m-1}, b)$ とかく. (この授業だけの記号である.)
- Δ を I の分割として, Δ の幅を $|\Delta| = \max_{1 \leqq i \leqq m}\{|x_i - x_{i-1}|\}$ とする.
- Δ を I の分割とする. $1 \leqq i \leqq m$ となる自然数 i について

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i\}, \quad m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leqq x \leqq x_i\} \text{ とし},$$

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{m} M_i(x_i - x_{i-1}), \quad T_\Delta = \sum_{i=1}^{m} m_i(x_i - x_{i-1}) \text{ とおく}.$$

定義から $T_\Delta \leqq S_\Delta$ となる.

定理 1 (ダルブーの定理)**.** ある実数 S, T があって,

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S_\Delta = S, \quad \lim_{|\Delta| \to 0} T_\Delta = T.$$

[2]

定義 2 (リーマン積分の定義)**.** $I = [a, b]$ かつ $f(x)$ を I 上の有界関数とする.

[1] I 上で連続ならば $f(x)$ は有界なので, わからなければ $f(x)$ は連続として良いです.

[2] $\lim_{|\Delta| \to 0} S_\Delta = S$ の意味は, Δ の幅が 0 になるように分割をとっていくと, S_Δ は S に限りなく近くという意味である.

f が I 上でリーマン積分可能 (リーマン可積分)とは $S=T$ となること．このとき，

$$S=\int_a^b f(x)dx \text{ と表す．}$$

$\int_a^b f(x)dx$ を $f(x)$ の $[a,b]$ における定積分という．
また

$$\int_a^a f(x)dx=0,\quad \int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx \text{ とする．}$$

以下，リーマン積分可能を単に積分可能ということにする．

例 **3.**
- $I=[a,b]$ とし，f を I 上での連続関数とする．このとき f は I 上で積分可能.(みんながよく知っている関数は積分可能.)
- $I=[0,1]$ とし，I 上の有界関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}1 & x \text{ は有理数}\\ 0 & x \text{ は無理数}\end{cases}$$

とおくとき，任意の I の分割 Δ について，$S_\Delta=1$ であり，$T_\Delta=0$ である．よって $S=1$ かつ $T=0$ より，f は I 上で積分可能ではない．

定理 4 (区分求積法)**.** $I=[a,b]$ とし，$f(x)$ を I 上の積分可能な関数とする．任意の $n\in N$ について，$x_i=a+\frac{(b-a)i}{n}$ (i は $1\leqq i\leqq n$ なる自然数) とおき，$D_n=\sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{n}$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty} D_n=\int_a^b f(x)dx \text{ となる．}$$

例 **5.** $I=[0,1]$ とし，$f(x)=x^2$ を I 上の関数とする．任意の $n\in N$ について，$x_i=0+\frac{(1-0)i}{n}=\frac{i}{n}$($i$ は $1\leqq i\leqq n$ なる自然数) であるので，

$$D_n=\sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{n}=\sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

以上より区分求積法から

$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty} D_n=\frac{1}{3} \text{ である．}$$

1.1.2　微分積分学の基本定理

定義 6. $f(x)$ を区間 I 上の連続関数とする．$a \in I$ を一つ固定する．

$$\begin{array}{rccc} F: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \int_a^x f(x)dx \end{array}$$

を $f(x)$ の不定積分と呼ぶ．$F(x)$ を $\int f(x)dx$ とも表す．不定積分は定数を除いてただ一つに定まる．

定理 7 (微分積分学の基本定理)**.** $f(x)$ を区間 I 上の連続関数とする．不定積分 $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ は I 上で微分可能で $F'(x) = f(x)$ である．特に

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \text{ である．}$$

命題 8. $f(x)$ を区間 I 上の連続関数とし，$G(x)$ を I 上の関数とする．$G'(x) = f(x)$ ならばある定数 c があって，

$$G(x) = \int f(x)dx + c \text{ となる．}$$

例 9. $f(x) = x^2, G(x) = \frac{x^3}{3}$ とすると $G'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x)$ よりある定数 c があって $\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + c$ となる．

定理 10. $f(x)$ を $[a, b]$ 上の連続関数とし，$G(x)$ を $G'(x) = f(x)$ となる $[a, b]$ 上の関数とする．このとき

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a) \text{ となる．}$$

例 11.

$$\int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

である．(区分求積法を用いるよりもずっとずっと簡単である.)

1.2　積分の性質 (三宅先生の本, 3.1 と 3.2 の内容)

1.2.1　積分の性質

命題 12 (積分の性質)**.** $f(x), g(x)$ 共に $[a, b]$ 上の連続関数とし，$G(x) = \int g(x)dx$ とする．

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
2. k を定数とするとき，$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

3. (置換積分法)

$$\begin{array}{rccc} x(t): & [\alpha, \beta] & \to & [a, b] \\ & t & \longmapsto & x(t) \end{array}$$

を C^1 級関数とし, $a = x(\alpha), b = x(\beta)$ とするとき

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\frac{dx(t)}{dt}dt \ \text{となる.}$$

4. (部分積分法) $f(x)$ が C^1 級であるとき,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \Big[f(x)G(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx \ \text{となる.}$$

1.2.2　不定積分の例

簡単な積分に関してまとめておく. 積分定数に関しては省略する. また a を実数とする.

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1 \text{ のとき})$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{|a|} \quad (a \neq 0 \text{ のとき})$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{a} \quad (a \neq 0 \text{ のとき})$$

$$\int e^x\,dx = e^x$$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\log a}a^x \quad (a > 0 \text{ かつ } a \neq 1 \text{ のとき})$$

$$\int \log x\,dx = x\log x - x$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x$$

1.3　不定積分の計算方法 (三宅先生の本, 3.2 の内容)

1.3.1　有理式の不定積分の計算方法

定義 13 (有理式)**.** $f(x)$ と $g(x)$ を実数係数多項式とするとき, $\underline{\frac{f(x)}{g(x)} \text{ を有理式}}$ という.

以下 $f(x)$ と $g(x)$ を同時に割り切る多項式はないものと仮定する.(つまり $f(x)$ と $g(x)$ は互いに素とする.)

定理 14 (有理式)**.** 有理式 $\frac{f(x)}{g(x)}$ は次の 3 つの式の和に分解できる.

1. 多項式
2. $\frac{a}{(x+b)^m}$ $(a, b \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N})$
3. $\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^m}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N})$

特に $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{R}$ と $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}$ を用いて $g(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_l)^{m_l}$ と書けるとき, 有理式 $\frac{f(x)}{g(x)}$ は多項式と $\frac{\beta_i}{(x-\alpha_i)^m}$ $(\beta_i \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N},\ 1 \leqq m \leqq m_i)$ の和で表せられる.

例 15. $\frac{5x-4}{2x^2+x-6}$ に関して上の定理より,

$$\frac{5x-4}{2x^2+x-6} = \frac{a}{2x-3} + \frac{b}{x+2}$$

となる実数 $a, b \in \mathbb{R}$ が存在する. 通分して計算すると $a = 1, b = 2$ をえる.

例 16.

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}$$

定理 17. 有理式の不定積分は計算できる.

例 18.

$$\int \frac{5x-4}{2x^2+x-6}dx = \int \frac{1}{2x-3}dx + \int \frac{2}{x+2}dx = \frac{1}{2}\log|2x-3| + 2\log|x+2|$$

$$\int \frac{2}{(x-1)(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x^2+1| - \mathrm{Tan}^{-1}x$$

1.3.2　無理関数の不定積分の計算方法

テクニックだけまとめておく.

- $\sqrt[n]{ax+b}$ に関して, $t = \sqrt[n]{ax+b}$ とおくと

$$x = \frac{t^n - b}{a}, dx = \frac{nt^{n-1}dt}{a}$$

  より有理式に帰着できる.

- $\sqrt{ax^2+bx+c}$ に関して, $a > 0$ ならば $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ とおく.
- $\sqrt{ax^2+bx+c}$ に関して, $ax^2+bx+c = (x-\alpha)(x-\beta)$ となる実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ があるとき, $t = \sqrt{\frac{a(x-\beta)}{(x-\alpha)}}$ とおく.

例 19. 不定積分 $\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}$ を求めよ.
(答.) $t=\sqrt{x-1}$ とおくと, $x=t^2+1, dx=2tdt$ より

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}} &= \int \frac{2t}{t^2+1+2t}dt = \int \frac{2t+2-2}{(t+1)^2}dt = \int \frac{2}{t+1}dt - \int \frac{2}{(t+1)^2}dt \\ &= 2\log|t+1| + \frac{2}{t+1} = 2\log\bigl(1+\sqrt{x-1}\bigr) + \frac{2}{1+\sqrt{x-1}}\end{aligned}$$

1.3.3 三角関数の有理式の不定積分の計算方法

定理 20. 三角関数に関する有理式の不定積分は計算できる. 具体的には $t=\tan\frac{x}{2}$ とおけば, $\sin x$ などは次のように表される.

- $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$
- $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

例 21. 不定積分 $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$ を求めよ.
(答.) $t=\tan\frac{x}{2}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx &= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2+2t+1}{1+t^2}dt = \int 1+\frac{2t}{1+t^2}dt \\ &= t+\log\bigl(1+t^2\bigr) = \tan\frac{x}{2} + \log\left|1+\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2\right|\end{aligned}$$

2　重積分法

2.1　重積分の定義 (三宅先生の本, 5.1 の内容)

この回の内容はかなり難しいので, 積分の理論を気にせず計算だけしたい人はこの回の内容を読み飛ばして, 2.2 節の内容に移って良い. また証明等を少々省略するので, 詳しくリーマン積分を理解したい人は「杉浦光夫 解析入門 1 (東京大学出版会)」を見てほしい.

2.1.1　重積分の定義

この節では $D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d\}$ とする.

- 関数 $f(x, y)$ が D 上で有界であるとは, ある正の数 $M > 0$ があって, 任意の $(x, y) \in D$ について $|f(x, y)| < M$ となること.

以下, 関数 $f(x, y)$ が D 上で有界であるとする.

- Δ が D の分割とは, ある正の自然数 m, n と

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b, \ \ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$$

  となる数の組 $(a, x_1, \ldots, x_{m-1}, b), (c, y_1, \ldots, y_{n-1}, d)$ のこと.

  以下 $\Delta = \{(a, x_1, \ldots, x_{m-1}, b), (c, y_1, \ldots, y_{n-1}, d)\}$ とかく. (この授業だけの記号である.)

- Δ を D の分割として, Δ の幅を

$$|\Delta| = \max_{1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n} \{|x_i - x_{i-1}|, |y_j - y_{j-1}|\} \text{ とする.}$$

- Δ を D の分割とする. $1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n$ となる自然数 i, j について

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y) | x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j\}$$

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) | x_{i-1} \leqq x \leqq x_i, y_{j-1} \leqq y \leqq y_j\} \text{ とおき}$$

$$S_\Delta = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \ \ T_\Delta = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \text{ とおく.}$$

  定義から $T_\Delta \leqq S_\Delta$ となる.

定理 22 (ダルブーの定理)**.** ある実数 S, T があって,

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S_\Delta = S, \ \ \lim_{|\Delta| \to 0} T_\Delta = T.$$

[3]

[3] $\lim_{|\Delta| \to 0} S_\Delta = S$ の意味は, Δ の幅が 0 になるように分割をとっていくと, S_Δ は S に限りなく近くという意味である.

定義 23. $D=[a,b]\times[c,d]$ かつ $f(x,y)$ を D 上の有界関数とする.
f が D 上でリーマン積分可能 (リーマン可積分)とは $S=T$ となること. このとき,

$$S=\iint_D f(x,y)dxdy \text{ と表す.}$$

S を $f(x,y)$ の D 上での重積分という.

以下, リーマン積分可能を単に積分可能ということにする.

例 24.

- $D=[a,b]\times[c,d]$ とし, f を D 上での連続関数とする. このとき f は D 上で積分可能.(みんながよく知っている関数は積分可能.)
- $D=[0,1]\times[0,1]$ とし, D 上の有界関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & x \text{ も } y \text{ も共に有理数}\\ 0 & \text{上以外}\end{cases}$$

とおくとき, 任意の D の分割 Δ について, $S_\Delta=1$ であり, $T_\Delta=0$ である. よって $S=1$ かつ $T=0$ より f は D 上で積分可能ではない.

2.1.2 一般集合上での積分

$D\subset\mathbb{R}^2$ が有界であるとは, ある正の数 $M>0$ を $D\subset[-M,M]\times[-M,M]$ となることをいう.

定義 25. $D\subset\mathbb{R}^2$ を有界集合とし, ある正の数 $M>0$ を $D\subset[-M,M]\times[-M,M]$ となるようにとる. $\tilde{D}=[-M,M]\times[-M,M]$ とおく.
$f(x,y)$ を D 上の有界関数として, f が D 上リーマン積分可能 (リーマン可積分) とは

$$\tilde{f}(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$

とおくとき, $\tilde{f}$ が $\tilde{D}$ 上で積分可能であること. このとき

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{\tilde{D}}\tilde{f}(x,y)dxdy \text{ と定義する.}$$

定義 26. $D\subset\mathbb{R}^2$ を有界集合とする. D が面積確定 (ジョルダン可測)とは D 上の定数関数

$$\chi_D(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in D\\ 0 & (x,y)\notin D\end{cases}$$

が D 上で (リーマン) 積分可能であること. このとき D の面積 $S(D)$ を $\chi_D(x,y)$ の積分値

とし
$$S(D) = \iint_D dxdy \text{ と表す.}$$

例 **27.** • $D = [a, b] \times [c, d]$ とすると D は面積確定である．面積 $S(D) = (b-a)(d-c)$ である.

- $\phi_1(x), \phi_2(x)$ を $\phi_1(x) \leqq \phi_2(x)$ となる $[a, b]$ 上の連続関数とする.
  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leqq x \leqq b, \phi_1(x) \leqq y \leqq \phi_2(x)\}$ とおくとき, D は面積確定である.(これは後のページにある定理 32 の内容となる.)
  $$S(D) = \int_a^b \{\phi_2(x) - \phi_1(x)\} dx \text{ となる.}$$
  特に半径 1 の円は $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leqq x \leqq 1, -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}\}$ と書けるので, $S(D) = \pi$ となる．(みんながよく知っている図形は面積確定.)
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x$ も y も共に有理数 $\}$ とおくとき, 例 24 から D は面積確定ではない.

定理 28 (区分求積法)**.** $D = [a, b] \times [c, d]$ とし, f を D 上の連続関数とする．任意の正の自然数 N について
$$\Sigma_N = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N f\left(a + i\frac{(b-a)}{N}, c + j\frac{(d-c)}{N}\right) \frac{(b-a)(d-c)}{N^2}$$
とおくと $\lim_{N\to\infty} \Sigma_N = \iint_D f dxdy$ である.

例 **29.** $D = [0, 1] \times [0, 1]$ とし, $f(x, y) = x^2 + y^2$ とする．N を正の自然数とすると,
$$\Sigma_N = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N f\left(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}\right) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{i^2 + j^2}{N^4} = \frac{N^2(N+1)(2N+1)}{3N^4} \text{であるので,}$$
$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} x^2 + y^2 dxdy = \lim_{N\to\infty} \frac{N^2(N+1)(2N+1)}{3N^4} = \frac{2}{3} \text{となる.}$$

定理 30. D を面積確定な有界閉集合とし, f を D 上で連続とするとき, f は D 上で積分可能である.

以上から, みんながよく知っている図形の上での, みんながよく知っている関数の積分は可能である.

命題 31. D を面積確定な有界閉集合とし, $f(x, y), g(x, y)$ を連続関数, α を実数とする．こ

のとき以下が成り立つ

$$\iint_D \{f+g\}dxdy = \iint_D fdxdy + \iint_D gdxdy, \quad \iint_D \alpha fdxdy = \alpha \iint_D fdxdy$$

2.2 累次積分と微分と積分の順序交換 (三宅先生の本, 5.1 の内容)

2.2.1 累次積分

定理 32. $\phi_1(x), \phi_2(x)$ を閉区間 $[a,b]$ 上の $\phi_1(x) \leqq \phi_2(x)$ となる連続関数とする.
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leqq x \leqq b, \phi_1(x) \leqq y \leqq \phi_2(x)\}$ とし, $f(x,y)$ を D 上の連続関数とする.
このとき, $f(x,y)$ は D 上で積分可能であり,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \text{ となる.}$$

これを$f(x,y)$ の累次積分という. 特に D は面積確定で

$$S(D) = \iint_D dxdy = \int_a^b \{\phi_2(x) - \phi_1(x)\}dx.$$

例 33. $D = [0,1] \times [0,1]$, $f(x,y) = x^2 + y^2$ とする. $\iint_D f(x,y)dxdy$ を求めよ.
(解.) $\phi_1(x) = 0, \phi_2(x) = 1$ とすると上の定理より,

$$\iint_D x^2+y^2dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 + y^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx = \int_0^1 x^2 + \frac{1}{3}dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

例 34. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leqq x \leqq 1, -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}\}$ とする. $S(D) = \iint_D dxdy$ を求めよ.
(解.) $\phi_1(x) = -\sqrt{1-x^2}, \phi_2(x) = \sqrt{1-x^2}$ とすると上の定理より,

$$\iint_D dxdy = \int_{-1}^1 \left\{ \sqrt{1-x^2} - \left(-\sqrt{1-x^2} \right) \right\} dx = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx = \pi.$$

つまり半径 1 の円の面積は π.

例 35. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq x\}$ とし, $f(x,y) = x^2y$ とするとき, $\iint_D f(x,y)dxdy$ を求めよ.
(解.) $\phi_1(x) = 0, \phi_2(x) = x$ とすると上の定理から

$$\iint_D x^2ydxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x x^2ydy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2} \right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^4}{2}dx = \left[\frac{x^5}{10} \right]_0^1 = \frac{1}{10}.$$

一方で $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0\leqq y\leqq 1, y\leqq x\leqq 1\}$ ともかけるので,

$$\iint_D x^2 y dxdy = \int_0^1 \left(\int_y^1 x^2 y dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3 y}{3}\right]_y^1 dy = \frac{1}{3}\int_0^1 (y-y^4)dy = \frac{1}{3}\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{10}.$$

例 **36.** $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqq x\leqq 1, x^2\leqq y\leqq 1\}$ とし, $f(x,y)=xe^{-y^2}$ とするとき, $\iint_D f(x,y)dxdy$ を求めよ.

(解.) 普通に定理を適用すると,

$$\iint_D xe^{-y^2}dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 xe^{-y^2}dy\right)dx$$

となるが, e^{-y^2} の不定積分がわからないため, ここで手詰まりとなる.

そこで $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0\leqq y\leqq 1, 0\leqq x\leqq \sqrt{y}\}$ に注意すると,

$$\begin{aligned}\iint_D xe^{-y^2}dxdy &= \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{y}} xe^{-y^2}dx\right)dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^2 e^{-y^2}}{2}\right]_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \frac{ye^{-y^2}}{2}dy = \left[\frac{-e^{-y^2}}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right).\end{aligned}$$

2.2.2 微分と積分の順序交換

定理 **37.** $f(x,y)$ を $D=[a,b]\times[c,d]$ 上の連続関数とする. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ が D 上で連続であるならば

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

例 **38.** $\frac{d}{dy}\int_1^2 \frac{e^{xy}}{x}dx = \frac{e^{2y}-e^y}{y} (y>0)$ である. なぜならば $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{e^{xy}}{x}) = e^{xy}$ より上の定理を使うと

$$\frac{d}{dy}\int_1^2 \frac{e^{xy}}{x}dx = \int_1^2 e^{xy}dx = \left[\frac{e^{xy}}{y}\right]_1^2 = \frac{e^{2y}-e^y}{y}$$ となる.

2.3 多重積分の変数変換公式 (三宅先生の本, 5.2 の内容)

定義 **39.** $D, E\subset\mathbb{R}^2$ を区分的に滑らかな曲線で囲まれた面積確定な有界閉領域とする.

$$\begin{array}{rccc}\Phi: & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x(u,v), y(u,v))\end{array}$$

となる Φ が重積分の変数変換の条件を満たすとは, 次の条件 (1)-(3) を満たすこと.

[条件 (1).] $x(u,v), y(u,v)$ は C^1 級である.

[条件 (2).] $D=\Phi(E)$ とするとき, E の境界以外で Φ は 1 対 1 写像.

[条件 (3).] Φ のヤコビ行列

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

とし, ヤコビアンを $\det D\Phi = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)$ とするとき, $\det D\Phi$ は E の境界以外で 0 にならない.

例 **40.**

- $E = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ とし,

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

とすると, 条件 (1)-(3) を満たし. $D = \Phi(E) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2 + y^2} \leqq 1\}$ となる. 特に $D\Phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ かつ $\det D\Phi = r$ である.[4]

- $E = [0, 1] \times [0, 4\pi]$ とし,

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

とすると, 条件 (2) を満たさない. なぜなら $\Phi(\frac{1}{2}, \pi) = \Phi(\frac{1}{2}, 3\pi) = (-\frac{1}{2}, 0)$ であるため 1 対 1 ではないからである.

定理 41 (多重積分の変数変換公式)**.** 定義 39 の状況において, 関数 $f(x, y)$ が $D = \Phi(E)$ 上で積分可能であるとき

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v))|\det D\Phi|dudv \text{ となる.}$$

例 **42.** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2 + y^2} \leqq 1\}$ とする. $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ を求めよ.
(解.) $E = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ とし,

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

とすると, 条件 (1)-(3) を満たし. $D = \Phi(E)$ かつ $\det D\Phi = r$ である.

[4] この例では $E \setminus \partial E = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 | 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$ であるため, E の境界以外の集合である $E \setminus \partial E$ 上で $\det D\Phi = r$ は 0 ではない.

以上より多重積分の変数変換の公式から

$$\begin{aligned}\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy &= \iint_E e^{-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}|r|drd\theta \\ &= \iint_E e^{-r^2}rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 e^{-r^2}rdr\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{-e^{-r^2}}{2}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1-e^{-1}}{2}d\theta = \pi\left(1-\frac{1}{e}\right).\end{aligned}$$

例 43. $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | |x+2y|\leqq 1, |x-y|\leqq 1\}$ とする. $\iint_D (x-y)^2dxdy$ を求めよ.
(解.) $E=[-1,1]\times[-1,1]$ とし,

$$\begin{array}{cccc}\Phi: & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & (\frac{u+2v}{3}, \frac{u-v}{3})\end{array}$$

とすると, 条件 (1)-(3) を満たし, $D=\Phi(E)$ かつ $D\Phi=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ かつ $\det D\Phi=-\frac{1}{3}\neq 0$ である. 以上より多重積分の変数変換の公式から,

$$\begin{aligned}\iint_D (x-y)^2dxdy &= \iint_E\left(\frac{u+2v}{3}-\frac{(u-v)}{3}\right)^2\left|-\frac{1}{3}\right|dudv \\ &= \iint_E \frac{v^2}{3}dudv = \int_{-1}^1\left(\int_{-1}^1 \frac{v^2}{3}dv\right)du = \int_{-1}^1\left[\frac{v^3}{9}\right]_{-1}^1 du = \int_{-1}^1 \frac{2}{9}du = \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

例 44. $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2\leqq x\}$ とする. 重積分 $\iint_D \sqrt{x}dxdy$ の値を求めよ.
(解.) $E=\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 | 0\leqq r\leqq\cos\theta, -\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\}$ とし,

$$\begin{array}{cccc}\Phi: & E & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta)\end{array}$$

とすると, 条件 (1)-(3) を満たし. $D=\Phi(E)$ かつ $\det D\Phi=r$ である.
以上より多重積分の変数変換の公式から

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x}dxdy &= \iint_E (r\cos\theta)^{\frac{1}{2}}rdrd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta} r^{\frac{3}{2}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}drd\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{5}r^{\frac{5}{2}}\right]_0^{\cos\theta}d\theta = \frac{2}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^3d\theta = \frac{8}{15}.\end{aligned}$$

2.4　3 次元の積分と体積 (三宅先生の本, 5.4 の内容)

定義・定理 45. V を $\mathbb{R}^3$ 内の有界閉集合とし, $f(x,y,z)$ を V 上の連続関数とする. このと

き $f(x,y,z)$ は V 上でリーマン可積分であり, 重積分

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

が 2 次元のときと同様に定まる. 特に

$$\iiint_V dxdydz$$

を V の体積と呼ぶ.

同様の方法で正の整数 n について n 次元の重積分や体積を定義することができる.

定理 46 (累次積分)**.** $D \subset \mathbb{R}^2$ を有界閉集合とし, $\phi_1(x,y), \phi_2(x,y)$ を閉区間 D 上の $\phi_1(x,y) \leqq \phi_2(x,y)$ となる連続関数とする.
$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y) \in D,\ \phi_1(x,y) \leqq z \leqq \phi_2(x,y)\}$ とし, $f(x,y,z)$ を V 上の連続関数とする. このとき, $f(x,y,z)$ は V 上で積分可能であり,

$$\iint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy \text{ となる.}$$

特に V の体積は次の重積分で得られる.

$$v(V) = \iiint_V dxdydz = \iint_D \{\phi_2(x,y) - \phi_1(x,y)\}dxdy.$$

例 **47.** 半径 $a > 0$ の球の体積は $\frac{4}{3}\pi a^3$ である.
(解.)

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2\}$$

として V の体積を求めれば良い. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqq a^2\}$ とおくと,

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \leqq z \leqq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x,y) \in D\}$$

であるため累次積分を使って

$$\begin{aligned}\iint_V dxdydz = \iint_D 2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy &= \iint_{[0,a]\times[0,2\pi]} 2r\sqrt{a^2 - r^2}drd\theta \\ = 4\pi \int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2}dr &= \frac{4}{3}\pi a^3.\end{aligned}$$

定理 48 (ガバリエリの原理)**.** V を体積確定な R^3 内の有界閉集合とする. さらに V は平面 $z = a$ と $z = b$ の間にあると仮定する. $(0,0,z)$ を通り z 軸に垂直な平面で切った切り口の

面積が $S(z)$ という $[a,b]$ 上の連続関数で与えられるとき V の体積は

$$v(V) = \int_a^b S(z)dz \text{ である.}$$

例 49. 半径 $a>0$ の球 $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2\leqq a^2\}$ の体積をガバリエリの原理から求めてみる.

V は $z=-a$ と $z=a$ の間にあり, $-a\leqq t\leqq a$ なる t について V を $z=t$ 平面で切った切り口の面積は半径 $\sqrt{a^2-t^2}$ の円の面積なので

$$S(t)=\pi(a^2-t^2)$$

である. 以上より

$$v(V)=\int_{-a}^{a}\pi(a^2-t^2)dz=\frac{4}{3}\pi a^3 \text{である.}$$

定理 50 (重積分の変数変換公式)**.** $D,E\subset\mathbb{R}^3$ を面積確定な有界閉領域とし

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & E & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v,w) & \longmapsto & (x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \end{array}$$

となる Φ が重積分の変数変換の条件を満たすとする. $f(x,y,z)$ を E 上の積分可能関数とすると次が成り立つ.

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz=\iint_E f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|\det D\Phi|dudvdw$$

ここで

$$D\Phi=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

という 3×3 行列とする. $\det D\Phi$ は $D\Phi$ の行列式である.

例 51 (極座標変換)**.** $O=(0,0,0)\in\mathbb{R}^3$ を原点とする. 点 $P=(x,y,z)$ について r を OP の長さ, θ を z 軸と OP のなす角度, φ を OP の xy 平面への射影と x 軸がなす角度とする. すると

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta \text{となる.}$$

例 52. 半径 $a>0$ の球 $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2\leqq a^2\}$ を極座標変換で求めてみる.

$$E=\{(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3|0\leqq r\leqq a,0\leqq\theta\leqq\pi,0\leqq\varphi<2\pi\} \text{ とおき}$$

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & E & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (r,\theta,\varphi) & \longmapsto & (r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta) \end{array}$$

である．よって，

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

よって $|\det D\Phi| = r^2\sin\theta$ であるので，

$$\iiint_V dxdydz = \iiint_E r^2\sin\theta drd\theta d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^2\sin\theta drd\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

3　広義積分

3.1　広義積分 (三宅先生の本, 3.3 の内容)

定義 53 (広義積分)**.** a を実数とし, b は実数または $b=+\infty$ とする. $f(x)$ を $[a,b)$ 上の連続関数とする. 左極限 $\lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta f(x)dx$ が存在するとき, 広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は収束するといい

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta f(x)dx \text{ とする.}$$

この積分を広義積分という. 極限が存在しないときは, 広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は発散するという.

例 54.

- $\int_1^\infty x^p dx$ は $p<-1$ のとき収束し, $p\geqq -1$ のとき発散する.
- $\int_0^1 x^p dx$ は $p>-1$ のとき収束し, $p\leqq -1$ のとき発散する.

定理 55. $f(x)$ を $[a,b)$ 上の連続関数とする. $[a,b)$ 上の連続関数 $g(x)$ があって, $[a,b)$ 上で $|f(x)|\leqq g(x)$ かつ広義積分 $\int_a^b g(x)dx$ が収束すると仮定する. このとき広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ もまた収束する.

定理 56. $f(x)$ を $[a,b)$ 上の連続関数とする. $[a,b)$ 上の連続関数 $g(x)$ があって, $[a,b)$ 上で $0\leqq g(x)\leqq f(x)$ かつ広義積分 $\int_a^b g(x)dx$ が発散すると仮定する. このとき広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ もまた発散する.

例 57. 広義積分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}dx$ は収束する. これは $[0,1)$ 上で $|\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}|\leqq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ かつ広義積分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ が収束するからである.

例 58. 広義積分 $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}}dx$ は発散する. これは $[2,\infty)$ 上で $0\leqq x^{-\frac{2}{3}}\leqq \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}}$ かつ広義積分 $\int_2^\infty x^{-\frac{2}{3}}dx$ が発散するからである.

定理 59 (広義積分の判定法)**.** $f(x)$ を $[a,b)$ 上の連続関数とする.

1. $b=+\infty$ のとき, ある $\lambda>1$ があって, $f(x)x^\lambda$ が $[a,+\infty)$ 上で有界ならば, 広義積分 $\int_a^\infty f(x)dx$ は収束する.
2. b が実数のとき ($b<+\infty$ のとき), ある $\mu<1$ があって, $f(x)(x-b)^\mu$ が $[a,b)$ 上で有界ならば, 広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は収束する.

[5]

例 60. 広義積分 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ は収束する. $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}x^2=0$ から, $e^{-x^2}x^2$ は $[0,+\infty)$ 上で有界のため, $\lambda=2$ として定理 59 を適応すれば良い.

[5]関数 $g(x)$ が $[a,b)$ 上で有界とは, ある正の数 $M>0$ があって, 任意の $x\in[a,b)$ について $|g(x)|<M$ となること.

例 61. 実数 $s>0$ について, 広義積分 $\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する.
(証.) $\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx = \int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}dx + \int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx$ より両方の広義積分が収束することを示す.
(1). $\lim_{x\to\infty}(e^{-x}x^{s-1})x^2 = \lim_{x\to\infty} e^{-x}x^{s+1} = 0$ より定理 59 から広義積分 $\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する.
(2). $\lim_{x\to 0}(e^{-x}x^{s-1})x^{1-s} = \lim_{x\to 0} e^{-x} = 1$ であり, $1-s<1$ のため, 定理 59 から広義積分 $\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}dx$ は収束する.

定理 62 (ガウス積分)**.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

3.2 ガンマ関数とベータ関数 (三宅先生の本, 5.5 の内容)

定義 63.

- $s>0$ なる実数 s について, ガンマ関数 $\Gamma(s)$ を

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx \text{ と定義する.}$$

- $p>0, q>0$ なる実数 p, q について, ベータ関数 $B(p,q)$ を

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \text{ と定義する.}$$

ガンマ関数, ベータ関数においての広義積分が収束することは定理 59 から分かる. ガンマ関数は階乗の概念の一般化と思って良い.

定理 64. ガンマ関数 $\Gamma(s)$, ベータ関数 $B(p,q)$ について次が成り立つ.

1. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \Gamma(1) = 1$. 特に正の自然数 n について $\Gamma(n+1) = n!$.
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. 特に正の自然数 n について $\Gamma(\frac{1}{2}+n) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$.
3. $B(p,q) = B(q,p)$.
4. $B(p,q) = B(p+1,q)+B(p,q+1)$, $B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B(p,q)$, $B(p,q+1) = \frac{q}{p+q}B(p,q)$.
5. $B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{2p-1}(\sin t)^{2q-1}dt$.
6. $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.
7. $B(1,1) = 1$, $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi$. 特に l, m を正の自然数として, $B(l,m) = \frac{(l-1)!(m-1)!}{(l+m-1)!}$.

[6]

[6] $n!!$ は二重階乗と呼ばれる. n を正の自然数として, $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$, $(2n)!! = (2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2$ である. 便宜上 $0!! = 1$ とする.($0! = 1$ であるので.)

例 **65.** n を自然数として,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt \text{ の値を求めよ.}$$

(解.) 定理 64 から

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2(\frac{n+1}{2})-1} (\sin t)^{2(\frac{1}{2})-1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ となる.}$$

(1). n が偶数のとき. $n = 2m$ とおくと, 定理 64 から

$$I_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(2m-1)!!\sqrt{\pi}}{2^m (m!)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ である.}$$

(2).n が奇数のとき. $n = 2m+1$ とおくと, 定理 64 から

$$I_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{2^{m+1}(m!)}{(2m+1)!!\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(n-1)!!}{n!!} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \text{ である.}$$

例 **66** (ウォリスの公式)**.**

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{m\to\infty} \frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m-1)} \cdot \frac{(2(m-1))^2}{(2m-1)(2m-3)} \cdots \frac{2^2}{3\cdot 1} \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{(1-\frac{1}{4m^2})} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{4(m-1)^2})} \cdots \frac{1}{(1-\frac{1}{4})} \text{ となる.} \end{aligned}$$

[7] つまり

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \cdot \frac{6\cdot 6}{5\cdot 7} \cdot \frac{8\cdot 8}{7\cdot 9} \cdots \quad \text{である.}$$

(証.) $J(m) = \frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m-1)} \cdot \frac{(2(m-1))^2}{(2m-1)(2m-3)} \cdots \frac{2^2}{3\cdot 1}$ とおく. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$ とおくと, $I_{2m+2} \leqq I_{2m+1} \leqq I_{2m}$ より, 例 65 から

$$\frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!} \frac{\pi}{2} \leqq \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \leqq \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2} \text{ である.}$$

この不等式の両辺に $\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}$ をかけると

$$\frac{2m+1}{2m+2} \frac{\pi}{2} \leqq J(m) \leqq \frac{\pi}{2}$$

であるため, $\lim_{m\to\infty} J(m) = \frac{\pi}{2}$ である.

[7] 積の記号を使って書けば,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{(1-\frac{1}{4m^2})} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{4(m-1)^2})} \cdots \frac{1}{(1-\frac{1}{4})} = \Pi_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1-\frac{1}{4i^2})} \quad \text{である.}$$

例 **67.** 半径 $r > 0$ の n 次元球の体積を $V_n(r)$ とおくと

$$V_n(r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} r^n \text{である.}$$

(証.)

$$V = \{(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqq 1\}$$

とおき V の体積を α_n とおくと $V_n(r) = \alpha_n r^n$ となる.

$-1 \leqq z \leqq 1$ となる z について $x_n = z$ となる平面と V の切断でできる部分の体積 $S(z)$ は半径 $\sqrt{1-z^2}$ の $n-1$ 次元球の体積であるので, $S(z) = V_{n-1}(\sqrt{1-z^2}) = \alpha_{n-1}(1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}$ である. よって V の体積は

$$v(V) = \alpha_n = \int_{-1}^{1} \alpha_{n-1}(1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz = \alpha_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^n d\theta = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \alpha_{n-1}.$$

以上より $\alpha_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ を得る.

4 線積分とグリーンの定理

4.1 曲線と線積分の定義 (三宅先生の本, 5.3 の内容)

定義 68. • 曲線 C を次のように定義する.

$$\begin{array}{rccc} C: & [a,b] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (x(t),y(t)) \end{array}$$

C が <u>滑らかな曲線</u>とは次の 2 条件を満たすこと.

条件 1. $x(t), y(t)$ 共に $[a,b]$ 上の C^1 級関数.

条件 2. 任意の $t \in (a,b)$ について, 速度ベクトル $(x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$ である.

また<u>C の向き</u>を t が a から b へ動く方向とする.

• 曲線 C が<u>区分的に滑らかな曲線</u>とは滑らかな曲線を端点でつないだもの.

定義 69.

$$\begin{array}{rccc} C: & [a,b] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (x(t),y(t)) \end{array}$$

となる滑らかな曲線 C と C 上の連続関数 $f(x,y)$ について

$$\int_C f(x,y)dx := \int_a^b f(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}dt$$

$$\int_C f(x,y)dy := \int_a^b f(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}dt$$

を<u>C に沿った f の線積分</u>という.

線積分はパラメーターの取り方によらないことが知られている.

例 **70.**

$$\begin{array}{rccc} C: & [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (t,t^2) \end{array}$$

について $f(x,y) = x + y$ とおく. $\int_C f(x,y)dx$, $\int_C f(x,y)dy$ を求めよ.
(答.)

$$\int_C f(x,y)dx = \int_0^1 (t+t^2)\frac{dt}{dt}dt = \int_0^1 (t+t^2)dt = \frac{5}{6}.$$

$$\int_C f(x,y)dy = \int_0^1 (t+t^2)\frac{d(t^2)}{dt}dt = \int_0^1 2t(t+t^2)dt = \frac{7}{6}.$$

例 71. 線積分は C の向きによって値が変わる.

$$\begin{array}{cccc} C': & [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (1-t,(1-t)^2) \end{array}$$

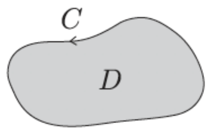
C' は上の C と向きだけが違う曲線である. このとき

$$\int_{C'} f(x,y)dx = \int_0^1 ((1-t)+(1-t)^2)\frac{d(1-t)}{dt}dt = -\frac{5}{6}\text{である.}$$

4.2 グリーンの定理 (三宅先生の本, 5.3 の内容)

定義 72. $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とする. D の境界にその向きを D の内部が進行方向の左手となるように入れる. D の境界による曲線を ∂D とかく.

「向きを D の内部が進行方向の左手となるように入れる」とは次の下図のようになることである. このとき $C = \partial D$ である.



定理 73 (グリーンの定理)**.** D を有界閉領域とし $P(x,y), Q(x,y)$ を D 上の C^1 級関数とすると

$$\int_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \text{ が成り立つ.}$$

$$\text{特に } S(D) = \iint_D dxdy = \int_C xdy = \int_C -ydx \text{ が成り立つ.}$$

例 74.

$$\begin{array}{cccc} C: & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$$

を滑らかな曲線とする. 線積分 $\int_C (x^2-y^2)dx - 2xydy$ を求めよ.

(解.) 普通に計算すると,

$$\begin{aligned} \int_C V(\vec{p})d\vec{p} &= \int_0^{2\pi} \left\{(\cos^2 t - \sin^2 t)\frac{dx}{dt} - (2\sin t\cos t)\frac{dy}{dt}\right\} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{-\cos^2 t\sin t + \sin^3 t - 2\sin t\cos^2 t\right\} dt = (\text{計算略}) = 0 \end{aligned}$$

グリーンの定理を使う方法は以下のようになる. C で囲まれた領域 D とすると, D は原点中心の半径 1 の円である. $P(x,y) = x^2 - y^2, Q(x,y) = -2xy$ とおくと, グリーンの定理の仮定を満

たす.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(-2xy)}{\partial x} = -2y, \ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y} = -2y \text{ であるため,}$$

$$\int_C (x^2-y^2)dx - 2xydy = \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (-2y+2y)\,dxdy = 0.$$

例 **75.** a, b を正の数として, 楕円 D を下で定める.

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leqq x \leqq a, -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \leqq y \leqq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right\}.$$

D の面積 $S(D)$ を求めよ.
(解.) 普通に計算すると,

$$S(D) = \int_D dxdy = \int_{-a}^{a} \left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} - (-b)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right) dx = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} dx = (\text{計算略}) = \pi ab.$$

グリーンの定理を使うと以下の通りになる.

$$\begin{array}{rccc} C: & [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & (a\cos t, b\sin t) \end{array}$$

とおくと, $C = \partial D$ となる. よってグリーンの定理が使えて, $\frac{dy}{dt} = b\cos t$ のため,

$$S(D) = \int_C xdy = \int_0^{2\pi} a\cos t \frac{dy}{dt} dt = \int_0^{2\pi} ab\cos^2 t dt = \pi ab \text{ となる.}$$

4.3 曲線の長さ (三宅先生の本, 3.4 の内容)

定義 **76.** 滑らかな曲線 C に関してその長さを

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad \text{とする.}$$

定理 **77.** $f(x)$ を $[a,b]$ 上の C^1 級関数とする. このとき $y = f(x)$ のグラフ $C = \{(x, f(x)) \mid a \leqq x \leqq b\}$ の長さは

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad \text{である.}$$

例 **78.** 放物線 $y = x^2 (0 \leqq x \leqq 1)$ のグラフの長さを求めよ.

(答.) $f(x) = x^2$ とすると $f'(x) = 2x$ のため, 曲線の長さは

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+t^2}dt \\ = \frac{1}{4}\left[t\sqrt{t^2+1} + \log\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right]_0^2 \\ = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + \log\left(2+\sqrt{5}\right)\right)\end{aligned}$$

定理 79. $[\alpha, \beta]$ 上の C^1 級関数 $f(\theta)$ を用いて, 曲線 C が

$$\begin{array}{rccc} C: & [\alpha, \beta] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \theta & \longmapsto & (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta) \end{array}$$

と表されているとき, C の長さは

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}d\theta \quad \text{である.}$$

例 80. (アルキメデスの螺旋) 正の実数 a, α について

$$\begin{array}{rccc} C: & [0, \alpha] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \theta & \longmapsto & (a\theta\cos\theta, a\theta\sin\theta) \end{array}$$

とする. 曲線 C の長さを求めよ.
(答.) $f(\theta) = a\theta$ とすると $f'(\theta) = a$ のため, 曲線の長さは

$$\int_0^\alpha \sqrt{a^2 + (a\theta)^2}d\theta = a\int_0^\alpha \sqrt{1+(\theta)^2}d\theta = \frac{a}{2}\left(\alpha\sqrt{\alpha^2+1} + \log\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}\right)\right)$$

5　演習問題

●1.2 節の問題

1. 不定積分 $\int x \log x \, dx$ を求めよ．
2. 定積分 $\int_0^1 xe^{2x} \, dx$ を求めよ．

●1.3 節の問題　不定積分 $\int \frac{x^2}{x^2-x-6} dx$ を求めよ．
●2.2 節の問題　$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq y,\ 0 \leqq x-y,\ x+y \leqq 2\}$ とする．重積分 $\iint_D (x^2 - y^2) dxdy$ の値を求めよ．
●2.3 節の問題　$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqq 1\}$ とする．重積分 $\iint_D x^2 dxdy$ の値を求めよ．
●2.4 節の問題

1. $a > 0$ とする．円柱 $x^2 + y^2 \leqq a^2$ と球 $x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2$ の共通部分の体積を求めよ．
2. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\}$ とする．重積分

$$\iiint_V x dxdydz$$

の値を求めよ．

●3.1 節の問題　p を実数とし $f(x) = x^p \log x$ とする．

1. $p < -1$ ならば広義積分 $\int_1^\infty f(x)dx$ は収束することを示せ．
2. $p \geqq -1$ ならば広義積分 $\int_1^\infty f(x)dx$ は発散することを示せ．