

# 第1回. 実数の定義と性質 (三宅先生の本, 1.1 と 1.4 の内容)

岩井雅崇 2021/04/13

## 1 記法に関して

以下この授業を通してよく使う記号や用語をまとめる。(興味がなければ飛ばして良い)

### 1.1 よく使う記号

- $\mathbb{N} = \{ \text{自然数全体} \} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- $\mathbb{Z} = \{ \text{整数全体} \} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q} = \{ \text{有理数全体} \} = \{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \}$
- $\mathbb{R} = \{ \text{実数全体} \}$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q} \} = \{ \text{無理数全体} \}$

### 1.2 区間

- $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$  ( $a, b$  共に実数)
- $[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$  ( $a$  は実数,  $b$  は実数または  $+\infty$ )<sup>1</sup>
- $(a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$  ( $a$  は実数または  $-\infty$ ,  $b$  は実数)
- $(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$  ( $a$  は実数または  $-\infty$ ,  $b$  は実数または  $+\infty$ )

特に  $(a, b)$  を開区間といい,  $[a, b]$  を閉区間という. この記法により,  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$  である.

例 1.  $A = [-1, 1], B = [-2, -1), C = [2, +\infty)$  とする.  $A \cap B$  は空集合である.  $A$  のみ閉区間であり, 開区間はこの中にはない.

### 1.3 有界集合

定義 2.  $A$  を  $\mathbb{R}$  の部分集合とする.

- $A$  が上に有界であるとは, ある実数  $a$  があって, 任意の (すべての)  $x \in A$  について  $x \leq a$  となること. ( $A \subset (-\infty, a]$  に同じ.)
- $A$  が下に有界であるとは, ある実数  $a$  があって, 任意の  $x \in A$  について  $a \leq x$  となること. ( $A \subset [a, +\infty)$  に同じ.)
- $A$  が有界であるとは, 上にも下にも有界であること. (ある正の実数  $a$  があって,  $A \subset [-a, a]$  となることと同じ.)

<sup>1</sup> $+\infty$  は実数ではないが限りなく大きなものとして扱います. 一種の記法です.  $-\infty$  も同様に限りなく小さいものとして扱います.

例 3.  $A = [-1, 1], B = [-2, -1], C = [2, +\infty)$  とする.  $A, B$  は有界集合である.  $C$  は下に有界であるが, 上に有界ではない.

#### 1.4 数列と数列の極限

定義 4. 各自然数  $n$  について, 実数  $a_n$  を対応させたものを  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  と書き, 数列 と呼ぶ.

- 常に  $a_n \in \mathbb{Q}$  であるとき, 有理数列 という.
- $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  が有界であるとき, 有界数列 という.
- $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$  であるとき, 単調増加数列 という.
- $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$  であるとき, 単調減少数列 という.

例 5. •  $a_n = \frac{1}{n}$  からなる数列は有理数列, 有界数列, 単調減少数列である.

- $a_n = n$  からなる数列は有理数列, 単調増加数列である.
- $a_n = (-1)^n \sqrt{2}$  からなる数列は有界数列である.

定義 6 (数列の極限の感覚的な定義). 数列が  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が極限  $\alpha \in \mathbb{R}$  を持つとは,  $n$  を大きくしていくと  $a_n$  が  $\alpha$  に限りなく近づくこと. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{ または } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$$

とかき,  $a_n$  は  $\alpha$  に収束する という.  $a_n$  が収束しないとき,  $a_n$  は発散する という.

$n$  を大きくしていくと,  $a_n$  が限りなく大きくなるとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  と書く. 限りなく小さくなるとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  と書く.

これでも良いのだが, 万が一のため数列の極限の厳密な定義も書いておく.<sup>2</sup>

定義 7 ( $\epsilon$ - $N$  論法を用いた厳密な極限の定義). 数列が  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が極限  $\alpha \in \mathbb{R}$  を持つとは, 任意の正の実数  $\epsilon$  について, ある  $N \in \mathbb{N}$  があって,  $N < n$  ならば  $|a_n - \alpha| < \epsilon$  となること.

定理 8 (実数の存在).  $\mathbb{Q}$  を有理数の集合とする. このとき  $\mathbb{Q}$  を含む集合  $X$  があって, 次を満たす.

1. 任意の  $x \in X$  に関して, ある有理数列  $\{a_n\}$  があり,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$  となる.
2.  $X$  上の数列  $\{a_n\}$  がコーシー列ならば, ある  $\alpha \in X$  があり,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  となる. (コーシー列は収束する.)

<sup>2</sup>この授業では  $\epsilon$ - $N$  論法を用いた厳密な証明はしないつもりだが, 念のため定義をします. 詳しいことは追加資料で書きます. 後期の担当の先生によっては  $\epsilon$ - $N$  論法や  $\epsilon$ - $\delta$  論法を使うかもしれないので, 後期で分からなくなった場合, 適宜利用してください.

この  $X$  を  $\mathbb{R}$  と書き, 実数の集合と呼ぶ.

ここで数列  $\{a_n\}$  がコーシー列とは任意の正の実数  $\epsilon$  について, ある  $N \in \mathbb{N}$  があって,  $N < m, n$  ならば  $|a_n - a_m| < \epsilon$  となる数列のこととする.

**定理 9 (実数の連続性).**  $\mathbb{R}$  上の上に有界な単調増加数列は収束する.

同様に  $\mathbb{R}$  上の下に有界な単調減少数列は収束する.

**例 10.**  $a_n = \frac{1}{n}$  は下に有界な単調減少数列である. よって定理 9 から数列  $\{a_n\}$  は収束する. 実際  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  である.

**命題 11 (極限の性質).**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta, c \in \mathbb{R}$  とするとき, 以下が成り立つ.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c\alpha$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \alpha\beta$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$  ( $\beta \neq 0$  のとき.)

## 1.5 最大・最小・上限・下限

**定義 12.**  $A$  を  $\mathbb{R}$  の部分集合とする.

- $m \in A$  が  $A$  の最大とは, 任意の  $a \in A$  について  $a \leq m$  となること. このとき  $m = \max(A)$  と書く.
- $m \in A$  が  $A$  の最小とは, 任意の  $a \in A$  について  $m \leq a$  となること. このとき  $m = \min(A)$  と書く.
- $A$  が上に有界であるとき,

$$\sup A = \min\{x \in \mathbb{R} \mid \text{任意の } a \in A \text{ について } a \leq x \text{ となる}\}$$

を  $A$  の上限とする.  $A$  が上に有界でないとき,  $\sup A = +\infty$  とする.

- $A$  が下に有界であるとき,

$$\inf A = \max\{x \in \mathbb{R} \mid \text{任意の } a \in A \text{ について } x \leq a \text{ となる}\}$$

を  $A$  の下限とする.  $A$  が下に有界でないとき,  $\inf A = -\infty$  とする.

注意点として, 最大・最小はいつも存在するとは限らないが, 上限・下限はいつも存在する.( $\pm\infty$ を含めてですが.)

例 13.  $A = (0, 1]$  のとき,  $\max(A) = \sup(A) = 1$ ,  $\inf(A) = 0$ ,  $\min(A)$  は存在しない.

## 2 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

1.  $A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  とする.  $A$  の最大・最小・上限・下限を求めよ. また  $A$  が有界であることを示せ.
2.  $a_1 = 10$ ,  $a_{n+1} = 10\sqrt{a_n}$  として, 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  を定める. 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  は有界な単調増加数列であることを示せ. またこの数列の収束値を求めよ.

## 第1回追加資料. 極限に関する厳密な定義 (三宅先生の本, 1.4の内容)

岩井雅崇 2021/04/13

### 3 はじめに

この追加資料は第2回の内容を含みます. またかなり難しい部分もあるので理解できなくても構いません. (この内容を飛ばしてもらっても構いません.) 私はこの授業において追加資料の内容 ( $\epsilon$ - $\delta$ 論法等) はほぼ使いません. 後期の先生によってはこの回の内容を使う可能性もあるので, その場合にはこの資料を見ていただければ幸いです.

#### 3.1 数列の極限と $\epsilon$ - $N$ 論法

**定義 14** ( $\epsilon$ - $N$  論法を用いた厳密な極限の定義). 数列が  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が極限  $\alpha \in \mathbb{R}$  を持つとは, 任意の正の実数  $\epsilon$  について, ある  $N \in \mathbb{N}$  があって,  $N < n$  ならば  $|a_n - \alpha| < \epsilon$  となること. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{ と書く.}$$

**例 15.**  $a_n = \frac{1}{n}$  とする. 数列  $\{a_n\}$  は 0 に収束する.

(証.) 任意の  $\epsilon > 0$  について  $N = \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil + 1$  をおくと  $\frac{1}{N} = \frac{1}{\lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil + 1} \leq \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$  であるため,

$$N < n \text{ ならば } |a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \frac{1}{N} \leq \epsilon \text{ となる.}$$

以上より, 任意の  $\epsilon > 0$  について, ある  $N$  (具体的には  $\lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil + 1$ ) があって,  $N < n$  ならば  $|a_n - 0| < \epsilon$  となるので, 数列  $\{a_n\}$  は 0 に収束する.

**命題 16.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  とするとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$  となる.

(証.) 任意の  $\epsilon > 0$  についてある  $N_1, N_2$  があって

$$N_1 < n \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$N_2 < n \text{ ならば } |b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{2}$$

となる. 以上より  $N = \max(N_1, N_2)$  とおくと  $N < n$  ならば

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

である. 以上より, 任意の  $\epsilon > 0$  について, ある  $N$  (具体的には  $\max(N_1, N_2)$ ) があって,  $N < n$  ならば  $|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \epsilon$  となるので, 数列  $\{a_n + b_n\}$  は  $\alpha + \beta$  に収束する.

授業で紹介した収束の極限の性質の証明は上のようによれば良い.

命題 17 (極限の一意性).  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta$  ならば  $\alpha = \beta$  である.

(証.)  $\alpha \neq \beta$  として矛盾を示す.  $\epsilon = \frac{|\alpha - \beta|}{3}$  とおくと, ある  $N_1, N_2$  があって

$$N_1 < n \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{3} \text{ かつ } N_2 < n \text{ ならば } |a_n - \beta| < \frac{\epsilon}{3} \text{ となる.}$$

以上より  $m = \max(N_1, N_2) + 1$  とおくと  $N_1 < m$  かつ  $N_2 < m$  より

$$|\alpha - \beta| \leq |a_m - \alpha| + |a_m - \beta| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2}{3}|\alpha - \beta|$$

である. しかし  $|\alpha - \beta| > 0$  より矛盾である.

定理 18 (はさみうちの原理).  $a_n \leq b_n \leq c_n$  となる数列  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  に関して  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$  ならば  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$  である.

(証.) 任意の  $\epsilon > 0$  についてある  $N_1, N_2$  があって

$$N_1 < n \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \epsilon \text{ かつ } N_2 < n \text{ ならば } |c_n - \alpha| < \epsilon \text{ となる.}$$

以上より  $N = \max(N_1, N_2)$  とおくと  $N < n$  ならば  $a_n - \alpha \leq b_n - \alpha \leq c_n - \alpha$  であるので

$$|b_n - \alpha| \leq \max(|a_n - \alpha|, |c_n - \alpha|) < \epsilon$$

である. 以上より, 任意の  $\epsilon > 0$  について, ある  $N$  (具体的には  $\max(N_1, N_2)$ ) があって,  $N < n$  ならば  $|b_n - \alpha| < \epsilon$  となるので, 数列  $\{b_n\}$  は  $\alpha$  に収束する.

授業でちょっとだけ触れたコーシー列や実数の構成についても触れておきます.

定義 19 (コーシー列). 数列  $\{a_n\}$  がコーシー列とは, 任意の  $\epsilon > 0$  について, ある  $N \in \mathbb{N}$  があって,  $N < m, n$  ならば  $|a_n - a_m| < \epsilon$  となること.

命題 20 (収束するならばコーシー列).  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  ならば  $\{a_n\}$  はコーシー列.

(証.) 任意の  $\epsilon > 0$  についてある  $N$  があって

$$N < n \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$$

となる. 以上より  $N < n, m$  ならば

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \alpha| + |a_m - \alpha| < \epsilon$$

となるので, 数列  $\{a_n\}$  はコーシー列である.

例 21. 逆に「コーシー列は収束するのか?」と思うがこれはどの世界で数列を考えているかによる. 有理数列  $a_n$  がコーシー列であっても, 数列  $\{a_n\}$  が有理数には収束しないこともあります.

例として数列  $\{a_n\}$  を

$$a_n = \sqrt{2} \text{ の小数第 } n \text{ 位まで}$$

とおく. 具体的には

$$a_1 = 1.4, a_2 = 1.41, a_3 = 1.414, a_4 = 1.4142, \dots$$

である. このとき  $a_n$  は有理数列でありコーシー列だが  $a_n$  は  $\sqrt{2}$  に収束するため,  $a_n$  は有理数には収束しない. (もちろん実数には収束してます)

よって有理数の世界だけ考えても解析をするには少々不便である.(極限操作をするから.) したがってどんなコーシー列でも収束し, 有理数を含む最小の世界があれば良いと思われる. その思いからできたのが実数である.

**定理 22 (実数の存在).**  $\mathbb{Q}$  を有理数の集合とする. このとき  $\mathbb{Q}$  を含む集合  $X$  があって, 次を満たす.

1. 任意の  $x \in X$  に関して, ある有理数列  $\{a_n\}$  があり,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$  となる.
2.  $X$  上の数列  $\{a_n\}$  がコーシー列ならば, ある  $\alpha \in X$  があり,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  となる. (コーシー列は収束する.)

この  $X$  を  $\mathbb{R}$  と書き, 実数の集合 と呼ぶ.

3

**定理 23 (実数の連続性).** 上に有界な単調増加数列  $\{a_n\}$  は収束する.

(証.)  $a_n$  がコーシー列であることを示す.  $\{a_n\}$  は上に有界なので,  $a_n < 0$  として良い. もしコーシー列でないとすると, ある  $\epsilon > 0$  があり, 任意の  $N$  について  $N < n < m$  となる  $n, m$  があって  $|a_n - a_m| \geq \epsilon$  となる.

そこで新たに数列  $\{b_l\}$  を次のように定義する. まず  $1 < n_1 < m_1$  となる  $n_1, m_1$  があって  $|a_{n_1} - a_{m_1}| \geq \epsilon$  である. よって,  $b_1 = a_{n_1}, b_2 = a_{m_1}$  とおく. 次に  $k_2 = m_1 + 1$  とおくと,  $k_2 < n_2 < m_2$  となる  $n_2, m_2$  があって  $|a_{n_2} - a_{m_2}| \geq \epsilon$  である. よって,  $b_3 = a_{n_2}, b_4 = a_{m_2}$  とおく. これを繰り返し行うことで帰納的に数列  $\{b_l\}$  を定める.

構成方法から  $\{b_l\}$  は単調増加で,  $b_l < 0$  である. さらに任意の自然数  $l$  について,  $b_{2l} - b_{2l-1} \geq \epsilon$  かつ  $b_{2l+1} - b_{2l} \geq 0$  である. 以上より任意の自然数  $l$  について

$$b_{2l} = (b_{2l} - b_{2l-1}) + (b_{2l-1} - b_{2l-2}) + \dots + (b_2 - b_1) + b_1 \geq b_1 + l\epsilon$$

である.  $b_{2l} < 0$  のため, 任意の自然数  $l$  について  $b_1 + l\epsilon < 0$  である. しかし,  $\epsilon > 0$  であったため, これは矛盾である.

<sup>3</sup>この証明は集合と位相という数学科の2年くらいで学ぶ内容です. 証明は難しいです.

## 4 関数の極限

**定義 24** ( $\epsilon$ - $\delta$  論法を用いた厳密な極限の定義).  $f(x)$  を  $x = a$  の周りで定義された関数とする.  $f(x)$  が  $x = a$  で  $\alpha \in \mathbb{R}$  に収束するとは任意の正の実数  $\epsilon$  について, ある正の実数  $\delta$  があって,  $|x - a| < \delta$  ならば  $|f(x) - \alpha| < \epsilon$  となること. このとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \text{ と書く.}$$

**例 25.**  $f(x) = x^2$  は  $x = 0$  で 0 に収束する.

(証.) 任意の  $\epsilon > 0$  について  $\delta = \sqrt{\epsilon}$  をおくと  $|x - 0| < \delta$  ならば

$$|f(x) - 0| = |x^2| < \delta^2 = \epsilon \text{ となる.}$$

以上より, 任意の  $\epsilon > 0$  について, ある  $\delta$  (具体的には  $\sqrt{\epsilon}$ ) があって,  $|x - 0| < \delta$  ならば  $|f(x) - 0| < \epsilon$  となるので, 関数  $f(x) = x^2$  は  $x = 0$  で 0 に収束する.

**命題 26.**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$  とするとき  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$  となる.

(証.) 任意の  $\epsilon > 0$  についてある  $\delta_1, \delta_2 > 0$  があって

$$|x - a| < \delta_1 \text{ ならば } |f(x) - \alpha| < \frac{\epsilon}{2} \text{ かつ } |x - a| < \delta_2 \text{ ならば } |g(x) - \beta| < \frac{\epsilon}{2} \text{ となる.}$$

以上より  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$  とおくと,  $|x - a| < \delta$  ならば

$$|(f(x) + g(x)) - (\alpha + \beta)| \leq |f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

である. 以上より, 任意の  $\epsilon > 0$  について, ある  $\delta$  (具体的には  $\min(\delta_1, \delta_2)$ ) があって,  $|x - a| < \delta$  ならば  $|(f(x) + g(x)) - (\alpha + \beta)| < \epsilon$  となるので,  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$  となる.

授業で紹介した収束の極限の性質の証明は上のようにやれば良い.

## 5 最後に

少々書きすぎてしまったが, この内容は理解する必要はないです. この内容が必要になることはあまりないと思います.<sup>4</sup>

<sup>4</sup> まあ一種の無駄知識とさせていただければ幸いです. 私はこの内容が一番面白いですが...



## 第2回. 連続関数 (三宅先生の本, 1.2 の内容)

岩井雅崇 2021/04/20

### 6 関数の定義と性質

定義 27.  $A$  を  $\mathbb{R}$  の部分集合とする. 任意の  $x \in A$  について, 実数  $f(x)$  がただ一つ定まるとき,  $f(x)$  を  $A$  上の関数といい

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \quad \text{と書く.}$$

以下  $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$  とする. 数列のときと同様に, 関数についても有界などが定義できる.

- $f$  が有界関数であるとは,  $f(A)$  が有界集合であること. つまりある  $M > 0$  があって, 任意の  $x \in A$  について  $|f(x)| \leq M$  であること.
- $\max_{x \in A}(f(x)) = \max(f(A))$  を  $f(x)$  の  $A$  での最大値という.
- $\min_{x \in A}(f(x)) = \min(f(A))$  を  $f(x)$  の  $A$  での最小値という.
- $\sup_{x \in A}(f(x)) = \sup(f(A))$  を  $f(x)$  の  $A$  での上限という.
- $\inf_{x \in A}(f(x)) = \inf(f(A))$  を  $f(x)$  の  $A$  での下限という.

例 28.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \pm x^2$$

は  $\mathbb{R}$  上の関数ではない.  $f(2)$  がただ一つに定まらないからである.

例 29.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

は  $\mathbb{R}$  上の関数.  $\max_{x \in \mathbb{R}}(f(x))$  は存在しない.  $\sup_{x \in \mathbb{R}}(f(x)) = +\infty$ ,  $\min_{x \in \mathbb{R}}(f(x)) = \inf_{x \in \mathbb{R}}(f(x)) = 0$  である. 有界関数ではない.

例 30.

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

は  $[-1, 1]$  上の関数.  $\max_{x \in [-1, 1]}(f(x)) = \sup_{x \in [-1, 1]}(f(x)) = 1$ ,  $\min_{x \in [-1, 1]}(f(x)) = \inf_{x \in [-1, 1]}(f(x)) = 0$  である. 有界関数である.

## 7 関数の極限と連続性

**定義 31** (関数の極限).  $a \in \mathbb{R}$  とし  $f(x)$  を  $a$  の周りで定義された関数とする.  $x \rightarrow a$  のとき,  $f(x)$  が  $\alpha \in \mathbb{R}$  に収束するとは  $x \neq a$  を満たしながら  $x$  を  $a$  に近づけるとき,  $f(x)$  が限りなく  $\alpha$  に近づくこと. このとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \text{ または } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \alpha \text{ と書く.}$$

数列のときと同様にして,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  や  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  も定める.<sup>5</sup>

**定義 32** (関数の極限).  $a \in \mathbb{R}$  とし  $f(x)$  を  $a$  の周りで定義された関数とする.  $\alpha \in \mathbb{R}$  が  $f(x)$  の点  $a$  における右極限とは,  $x$  を  $a$  の右側から  $a$  に近づけるとき,  $f(x)$  が限りなく  $\alpha$  に近づくこと. このとき

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha \text{ と書く.}$$

同様に  $a$  の左側から近づけた極限を左極限といい,

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha \text{ と書く.}$$

例 33.

$$\begin{aligned} f: [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

について,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

例 34.

$$\begin{aligned} f: (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

について,  $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = +\infty$  であり  $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -\infty$  である.<sup>6</sup>

**命題 35** (極限の性質).  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ ,  $c \in \mathbb{R}$  とするとき, 以下が成り立つ.

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$
- $\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c\alpha$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \alpha\beta$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$  ( $\beta \neq 0$  のとき.)

<sup>5</sup>関数の極限に関する  $\epsilon$ - $\delta$  論法を用いて厳密に定義できる. 追加資料で詳しく説明した.

<sup>6</sup> $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x)$  を  $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)$  と書きます. + のときも同じです.

**定義 36** (連続の定義).  $a \in \mathbb{R}$  とし  $f(x)$  を  $a$  の周りで定義された関数とする.

$f(x)$  が  $x = a$  で連続とは,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ となること.}$$

$f(x)$  を区間  $I$  上の関数とする.  $f(x)$  が  $I$  上で連続とは, 任意の  $a \in I$  に関して  $f(x)$  が  $a$  で連続となること.

**例 37.** みんながよく知っている関数は (だいたい) 連続関数. つまり  $x^2, \sin x, \cos x, e^x$  などは連続関数である.

**例 38.**  $[-1, 1]$  上の関数  $f(x)$  を以下で定める.

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

このとき,  $f(x)$  は  $x = 0$  で連続ではない.

**命題 39.**  $f(x), g(x)$  共に  $x = a$  で連続ならば,  $f(x) \pm g(x), cf(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$  (ただし  $g(a) \neq 0$ ) などは  $x = a$  で連続.

**定理 40.**  $y = f(x)$  が  $x = a$  で連続であり,  $z = g(y)$  が  $y = f(a)$  で連続ならば,  $z = g(f(x))$  は  $x = a$  で連続.

## 8 連続関数に関する定理

**定理 41** (最大最小の存在定理).  $f(x)$  が閉区間  $[a, b]$  上で連続ならば,  $f(x)$  は  $[a, b]$  上で最大値, 最小値を持つ.

**例 42.**

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

は  $[-1, 1]$  上の連続関数. 最大値は 1, 最小値は 0.

**例 43.**

$$f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

は  $(-1, 1)$  上の連続関数. しかし, 最大値は存在しない.

例 44.  $[-1, 1]$  上の関数  $f(x)$  を以下で定める.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

このとき,  $f(x)$  は  $x = 0$  で連続ではない. 最大値は存在しない.

定理 45 (中間値の定理).  $f(x)$  を閉区間  $[a, b]$  上の連続関数とする.  $f(a) < f(b)$  ならば, 任意の  $\alpha \in [f(a), f(b)]$  について, ある  $c \in [a, b]$  があって  $f(c) = \alpha$  となる.

## 9 逆関数

定義 46 (単調増加・単調減少).  $f(x)$  を区間  $I$  上の関数とする.  $x < y$  ならば  $f(x) < f(y)$  であるとき,  $f$  は  $I$  上で単調増加という. (単調減少に関しても同様に定める.)

命題 47 (単調増加の判定法).  $f(x)$  を  $[a, b]$  上で連続,  $(a, b)$  上で微分可能な関数とする.  $(a, b)$  上  $f'(x) > 0$  ならば  $f(x)$  は  $[a, b]$  上で単調増加である. (単調減少に関しても同様.)

7

定義 48 (逆関数).  $f(x)$  を区間  $I$  上の関数とし,  $g(x)$  を区間  $J$  上の関数とする.  $f(I) = J, g(J) = I$  であり,  $y = f(x)$  であることが  $x = g(y)$  であることと同値であるとき,  $g$  を  $f$  の逆関数といい,  $g = f^{-1}$  と書く. このとき

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ かつ } f(f^{-1}(y)) = y \text{ である.}$$

例 49.

$$\begin{array}{lcl} f: [0, +\infty) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \begin{array}{lcl} g: [0, +\infty) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \sqrt{y} \end{array}$$

とすると  $f^{-1} = g$  である.

定理 50 (逆関数定理).  $f(x)$  を閉区間  $[a, b]$  上の連続な単調増加関数とする. このとき  $[f(a), f(b)]$  上連続な  $f$  の逆関数が存在する.

## 10 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

<sup>7</sup>微分可能に関しては第 3 回授業で, この命題の証明は第 4 回の授業で行います.

1.  $[-1, 1]$  上の関数  $f(x)$  を以下で定める.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$f(x)$  は  $[-1, 1]$  上で連続であることを示せ.

2. 厚さが均一なお好み焼きは、包丁を真っ直ぐに一回入れることで二等分にできることを示せ.  
(ただし具材等に関して細かいことは考えなくてよく、ある種の連続性を仮定して良い.)

### 第3回. 微分法と初等関数の性質 (三宅先生の本, 1.3 と 2.1 の内容)

岩井雅崇 2021/04/27

## 11 微分法

定義 51.  $f(x)$  を点  $a$  を含む開区間上の関数とする.  $f(x)$  が  $x = a$  で微分可能とは

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ が存在すること.}$$

この値を  $f'(a)$  と書く.  $f'(a)$  は  $\frac{df}{dx}|_{x=a}$  や  $\frac{df(a)}{dx}$  と書く.

$f(x)$  が  $I$  上で微分可能とは, 任意の  $a \in I$  に関して  $f(x)$  が  $x = a$  で微分可能であること.  
このとき

$$\begin{aligned} f' : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

を  $f(x)$  の導関数という.  $f'(x)$  は  $\frac{df}{dx}$  と書く.

例 52. みんながよく知っている関数は (だいたい) 微分可能関数. つまり  $x^2, \sin x, \cos x, e^x$  などは微分可能な関数である.

例 53. 微分可能な関数  $f(x)$  について, 点  $(a, f(a))$  での接線の方程式は  $y - f(a) = f'(a)(x - a)$  である.

定理 54.  $f(x)$  が  $x = a$  で微分可能ならば  $x = a$  で連続である.

命題 55 (微分の性質).  $f, g$  を区間  $I$  上の微分可能な関数とするとき, 以下が成り立つ. ( $c$  は定数.)

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(cf)' = cf'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$  ( $g'(x) \neq 0$  なる点において.)

定理 56 (合成関数の微分法).  $y = f(x)$  が  $x = a$  で微分可能であり,  $z = g(y)$  が  $y = f(a)$  で微分可能であるとき,  $z = g(f(x))$  は  $x = a$  で微分可能であり,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \text{ である.}$$

より詳しく書くと,

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{dz}{dy} \right|_{y=f(a)} \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} \text{ である.}$$

例 57.  $z = \cos(x^2)$  を普通に微分すると,  $\frac{dz}{dx} = -2x \sin(x^2)$ . 一方  $y = x^2, z = \cos y$  とすると  $\frac{dy}{dx} = 2x, \frac{dz}{dy} = -\sin(y)$  より,

$$\frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = (-\sin(x^2))2x = -2x \sin(x^2) \text{ である.}$$

定理 58 (合成関数の微分法). 関数  $f(x)$  は区間  $I$  で微分可能かつ単調増加であるとする. 任意の  $x \in I$  で  $f'(x) \neq 0$  であると仮定する. このとき逆関数  $f^{-1}(y)$  は  $f^{-1}(I)$  上で微分可能であり

$$\frac{dx}{dy} = \left( \frac{dy}{dx} \right)^{-1} = \frac{1}{\left( \frac{dy}{dx} \right)} \text{ である.}$$

同じことだが,

$$\frac{df^{-1}}{dy} = \left( \frac{df}{dx} \right)^{-1} = \frac{1}{\left( \frac{df}{dx} \right)} \text{ である.}$$

## 12 初等関数の性質

### 12.1 三角関数

命題 59 (三角関数の微分).

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$

### 12.2 逆三角関数

$\sin x$  は  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上で単調増加,  $\cos x$  は  $[0, \pi]$  上で単調増加,  $\tan x$  は  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上で単調増加であるのでそれぞれ微分可能な逆関数が存在する.

定義 60 (逆三角関数).

•

$$\begin{aligned} \text{Sin}^{-1} : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto \text{Sin}^{-1}y \end{aligned}$$

を  $\sin$  の逆関数とする. これをアークサインと呼ぶ.  $\text{Sin}^{-1}([-1, 1]) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  である.

•

$$\begin{aligned} \text{Cos}^{-1} : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto \text{Cos}^{-1}y \end{aligned}$$

を  $\cos$  の逆関数とする. これをアークコサインと呼ぶ.  $\text{Cos}^{-1}([-1, 1]) = [0, \pi]$  である.

•

$$\begin{aligned} \text{Tan}^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto \text{Tan}^{-1}y \end{aligned}$$

を  $\tan$  の逆関数とする. これをアークタンジェントと呼ぶ.  $\text{Tan}^{-1}(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  である.

例 61.  $\text{Sin}^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ ,  $\text{Cos}^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$ ,  $\text{Tan}^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$  である.

命題 62 (逆三角関数の微分).

- $(\text{Sin}^{-1}y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
- $(\text{Cos}^{-1}y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
- $(\text{Tan}^{-1}y)' = \frac{1}{1+y^2}$

### 12.3 指数関数

定理 63 (ネピアの定数).  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$  は収束する. この値を  $e$  と書きネピアの定数という.

定義 64 (指数関数・対数関数).

- $a > 0$  かつ  $a \neq 1$  なる実数  $a$  について, 関数

$$\begin{aligned} a^x : \mathbb{R} &\rightarrow (0, +\infty) \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

を指数関数と呼ぶ.  $a = e$  のとき,  $e^x$  を  $\exp x$  ともかく.

- $a > 0$  かつ  $a \neq 1$  なる実数  $a$  について, 指数関数  $a^x$  の逆関数

$$\begin{aligned} \log_a y : (0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto \log_a y \end{aligned}$$

を対数関数と呼ぶ.  $a = e$  のとき,  $\log y$  と書く.



命題 65 (指数関数・対数関数の微分).

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$
- $(a^x)' = (\log a)a^x.$  特に  $(e^x)' = e^x.$
- $(\log_a y)' = \frac{1}{(\log a)y}.$  特に  $(\log y)' = \frac{1}{y}.$

## 12.4 双曲線関数

定義 66 (双曲線関数).

•

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

とし、これをハイパボリックサインと呼ぶ.

•

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

とし、これをハイパボリックコサインと呼ぶ.

•

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

とし、これをハイパボリックタンジェントと呼ぶ.

命題 67 (双曲線関数の微分).

- $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$
- $(\sinh x)' = \cosh x$
- $(\cosh x)' = \sinh x$
- $(\tanh x)' = \frac{1}{(\cosh x)^2}$

## 13 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

1.  $\sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2}), \cos^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2}), \tan^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{3})$  の値を求めよ.
2.  $f(x) = \log(\log(x))$  とする.  $f'(x)$  を求めよ.

## 第4回. 平均値の定理と関数の極限值計算 (三宅先生の本, 2.2の内容)

岩井雅崇 2021/05/11

### 14 関数の極値

定義 68 (極値).  $f(x)$  を区間  $I$  上の関数とする.

- $f(x)$  が  $c \in I$  で極大であるとは,  $c$  を含む開区間  $J$  があって,  $x \in J$  かつ  $x \neq c$  ならば  $f(x) < f(c)$  となること. このとき,  $f(x)$  は  $c$  で極大であるといい,  $f(c)$  の値を極大値という.
- $f(x)$  が  $c \in I$  で極小であるとは,  $c$  を含む開区間  $J$  があって,  $x \in J$  かつ  $x \neq c$  ならば  $f(x) > f(c)$  となること. このとき,  $f(x)$  は  $c$  で極小であるといい,  $f(c)$  の値を極小値という.
- 極大値, 極小値の二つ合わせて極値という.

定理 69.  $f(x)$  を  $[a, b]$  上で連続,  $(a, b)$  上で微分可能な関数とする.  $f(x)$  が  $c \in (a, b)$  で極値を持てば,  $f'(c) = 0$  である.

### 15 平均値の定理とその応用

定理 70.  $f(x), g(x)$  を  $[a, b]$  上で連続,  $(a, b)$  上で微分可能な関数とする.

- (ロルの定理)  $f(a) = f(b)$  ならば,  $f'(c) = 0$  となる  $c \in (a, b)$  がある.
- (平均値の定理)

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

となる  $c \in (a, b)$  が存在する.

- (コーシーの平均値の定理)  $g(a) \neq g(b)$  かつ任意の  $x \in (a, b)$  について  $g'(x) \neq 0$  ならば

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

となる  $c \in (a, b)$  が存在する.

定理 71.  $f(x)$  を  $[a, b]$  上で連続,  $(a, b)$  上で微分可能な関数とする.

- 任意の  $x \in (a, b)$  について  $f'(x) = 0$  ならば  $f$  は  $[a, b]$  上で定数関数.
- 任意の  $x \in (a, b)$  について  $f'(x) > 0$  ならば  $f$  は  $[a, b]$  上で単調増加関数.

例 72.  $(\sin x)' = \cos x$  より,  $\sin x$  は  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上単調増加.

定理 73 (ロピタルの定理).  $f(x), g(x)$  を点  $a$  の近くで定義された微分可能な関数とする.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  かつ  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  が存在するならば,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  も存在して

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例 74.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{x} \text{ を求めよ.}$$

(答.)  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{2x} - \cos x = 1 - 1 = 0$  かつ  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  であり

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - \cos x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - \sin x}{1} = 2$$

であるため, ロピタルの定理から

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - \cos x)'}{(x)'} = 2$$

## 16 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \text{ を求めよ.}$$

## 第5回. 高次導関数とテイラーの定理 (三宅先生の本, 2.3 と 2.4 の内容)

岩井雅崇 2021/05/18

### 17 高次導関数

定義 75 (高次導関数の定義).  $f(x)$  を区間  $I$  上の微分可能な関数とする.  $f'(x)$  が  $I$  上で微分可能であるとき,  $f$  は 2回微分可能 であるといい,

$$f''(x) = (f'(x))'$$

としてこれを 2次の導関数 と呼ぶ.  $f''(x)$  は  $f^{(2)}(x)$  とも書く.

同様に  $f^{(n-1)}(x)$  が微分可能であるとき,  $f$  は  $n$ 回微分可能 であるといい,  $n$ 次導関数  $f^{(n)}(x)$  を  $(f^{(n-1)}(x))'$  として定める.  $f^{(n)}(x)$  は  $\frac{d^n f}{dx^n}$  とも書く.

例 76. •  $f(x) = e^x$  とすると,  $f^{(n)}(x) = e^x$  である.

•  $f(x) = \sin x$  とすると,

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \sin x & (n = 2m) \\ (-1)^m \cos x & (n = 2m + 1) \end{cases} \quad \text{である.}$$

定義 77 ( $C^n$  級関数).  $f(x)$  を区間  $I$  上の関数とする.

- $f(x)$  が  $n$  回微分可能であり,  $f^{(n)}(x)$  が連続であるとき,  $f$  は  $C^n$  級関数 であるという.
- 任意の  $n \in \mathbb{N}$  について  $f$  が  $C^n$  級であるとき,  $f$  を  $C^\infty$  級関数 であるという.

例 78. みんながよく知っている関数は (だいたい)  $C^\infty$  級関数. つまり  $x^2, \sin x, \cos x, e^x$  などは  $C^\infty$  級関数である.

### 18 テイラーの定理とその応用

定理 79 (テイラーの定理 1).  $f(x)$  が开区間  $I$  上の  $C^2$  級関数とする.  $a < b$  なる  $a, b \in I$  について

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2$$

となる  $c \in (a, b)$  が存在する.

例 80.  $f(x) = e^x$  とし  $a = 0$  かつ  $b$  を正の実数とする. このときある  $c \in (0, b)$  があって

$$e^b = f(0) + f'(0)b + \frac{f''(c)}{2}b^2 = 1 + b + \frac{e^c}{2}b^2$$

となる.  $e^c \geq 1$  であるため,

$$e^b \geq 1 + b + \frac{1}{2}b^2 \text{ となる.}$$

定理 81 (極値判定法).  $f(x)$  が点  $a$  の周りで定義された  $C^2$  級関数とする.

- $f'(a) = 0$  かつ  $f''(a) > 0$  なら  $f(x)$  は  $x = a$  で極小.
- $f'(a) = 0$  かつ  $f''(a) < 0$  なら  $f(x)$  は  $x = a$  で極大.

定理 82 (テイラーの定理 2).  $f(x)$  が開区間  $I$  上の  $C^n$  級関数とする.  $a < b$  なる  $a, b \in I$  について

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

となる  $c \in (a, b)$  が存在する.

例 83.  $f(x) = e^x$  とし  $a = 0$  かつ  $b$  を正の実数とする. このときある  $c \in (0, b)$  があって

$$\begin{aligned} e^b &= f(0) + f'(0)b + \frac{f''(0)}{2!}b^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}b^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}b^n \\ &= 1 + b + \frac{1}{2!}b^2 + \frac{1}{3!}b^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}b^{n-1} + \frac{e^c}{n!}b^n \end{aligned}$$

となる.  $e^c \geq 1$  であるため,

$$e^b \geq 1 + b + \frac{1}{2!}b^2 + \frac{1}{3!}b^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}b^{n-1} + \frac{1}{n!}b^n \text{ となる.}$$

定理 84 (有限テイラー展開).  $f(x)$  が開区間  $I$  上の  $C^n$  級関数とする.  $a \in I$  を固定する. 任意の  $x \in I$  について, ある  $\theta \in (0, 1)$  があって

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

となる. 右辺を  $x = a$  における有限テイラー展開と呼び,  $R_n = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$  を

剰余項と呼ぶ。特に  $a = 0$  のとき、有限マクローリン展開と呼ぶ。

## 19 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります。

1. 任意の  $x \in \mathbb{R}$  についてある  $\theta \in (0, 1)$  があって

$$\sin x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^n x^{2n} \sin(\theta x)}{2n!}$$

となることを示せ。

## 第6回. 漸近展開とべき級数展開 (三宅先生の本, 2.4の内容)

岩井雅崇 2021/05/25

### 20 漸近展開とべき級数展開

定理 85 (有限テイラー展開).  $f(x)$  が开区間  $I$  上の  $C^n$  級関数とする.  $a \in I$  を固定する. 任意の  $x \in I$  について, ある  $\theta \in (0, 1)$  があって

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

となる. 右辺を  $x = a$  における有限テイラー展開と呼び,  $R_n = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$  を剰余項と呼ぶ. 特に  $a = 0$  のとき, 有限マクローリン展開と呼ぶ.

定義 86 (ランダウの記号).  $a$  を実数または  $\pm\infty$  とし,  $f(x)$  と  $g(x)$  を  $a$  の周りで定義された関数とする.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$  であるとき

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow a) \text{ と書く.}$$

例 87. •  $x^5 = o(x^3) \quad (x \rightarrow 0)$

•  $\sin x = x + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0)$

• 任意の正の実数  $\alpha$  について,  $\log x = o(x^\alpha) \quad (x \rightarrow +\infty)$  であり,  $x = o(e^{\alpha x}) \quad (x \rightarrow +\infty)$  である.

命題 88 (ランダウの記号の性質).  $m, n \in \mathbb{N}$  とする.

•  $x^m o(x^n) = o(x^{m+n}) \quad (x \rightarrow 0)$

•  $o(x^m) o(x^n) = o(x^{m+n}) \quad (x \rightarrow 0)$

•  $m \leq n$  ならば  $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m) \quad (x \rightarrow 0)$

定理 89 (漸近展開).  $f(x)$  を  $a$  を含む开区間上の  $C^n$  級関数ならば

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n) \quad (x \rightarrow a)$$

となる. 特に  $a = 0$  の場合は下のようになる.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

例 90.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}) \quad (x \rightarrow 0)$$

定理 91 (べき級数展開).  $f(x)$  を  $a$  を含む開区間上の  $C^\infty$  級関数とする. テイラーの定理

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!} (x-a)^n$$

において, 剰余項  $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{n!} (x-a)^n$  とする.  $b \in I$  において  $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(b)| = 0$  となるならば,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \quad \text{となる.}$$

例 92.  $f(x) = e^x$  とし,  $a = 0$  かつ  $b \in \mathbb{R}$  とする. このとき剰余項は

$$R_n(b) = \frac{e^{b\theta} b^n}{n!}$$

である.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(b)| = 0$  であるので, べき級数展開ができ,

$$e^b = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} b^k = 1 + b + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^3}{3!} + \frac{b^4}{4!} + \cdots$$

例 93.  $f(x) = \sin x$  とし,  $a = 0$  かつ  $b \in \mathbb{R}$  とする. このとき剰余項は

$$R_{2n}(b) = \frac{(-1)^n b^{2n} \sin(b\theta)}{(2n)!}$$

である.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(b)| = 0$  であるので, べき級数展開ができ,

$$\sin b = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} b^k = b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \frac{b^7}{7!} + \cdots$$



## 21 初等関数の漸近展開

初等関数の  $a = 0$  の周りでの漸近展開の具体例を紹介する.<sup>8</sup>

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}) \quad (x \rightarrow 0) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \quad (x \rightarrow 0) \\ \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n!} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0) \\ \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}) \quad (x \rightarrow 0)\end{aligned}$$

## 22 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

1.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

となることを示せ.

---

<sup>8</sup>なんでもかんでも綺麗に漸近展開できるとは限らない. 例えば  $\tan x$  などの漸近展開の一般項は非常に難しい.

## 第8回. リーマン積分の定義と微分積分学の基本定理 (三宅先生の本, 3.1 と 3.4 の内容)

岩井雅崇 2021/06/08

### 23 はじめに

この回の内容はかなり難しいので、積分の理論を気にせず計算だけしたい人はこの回の内容を読み飛ばして、次の回の内容に移って良い。また証明等を少々省略するので、詳しくリーマン積分を理解したい人は「杉浦光夫 解析入門 1 (東京大学出版会)」を見てほしい。

### 24 リーマン積分の定義

この節では  $I = [a, b]$  とし、関数  $f(x)$  は  $I$  上で有界であるとする。

- $\Delta$  が  $I$  の分割とは、正の自然数  $m$  と  $a = x_0 < x_1 < \dots, x_{m-1} < x_m = b$  となる数の組  $(a, x_1, \dots, x_{m-1}, b)$  のこと。以下  $\Delta = (a, x_1, \dots, x_{m-1}, b)$  とかく。(この授業だけの記号である。)
- $\Delta$  を  $I$  の分割として、 $\Delta$  の長さを  $|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq m} \{x_i - x_{i-1}\}$  とする。
- $\Delta$  を  $I$  の分割とする。  $1 \leq i \leq m$  となる自然数  $i$  について

$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ ,  $m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$  とし、

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^m M_i(x_i - x_{i-1}), \quad T_\Delta = \sum_{i=1}^m m_i(x_i - x_{i-1}) \text{ とおく.}$$

定義から  $T_\Delta \leq S_\Delta$  となる。

定理 94 (ダルブーの定理). ある実数  $S, T$  があって、

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S_\Delta = S, \quad \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} T_\Delta = T.$$

9

定義 95 (リーマン積分の定義).  $I = [a, b]$  かつ  $f(x)$  を  $I$  上の有界関数とする。 $f$  が  $I$  上でリーマン積分可能 (リーマン可積分) とは  $S = T$  となること。このとき、

$$S = \int_a^b f(x) dx \text{ と表す.}$$

$\int_a^b f(x) dx$  を  $f(x)$  の  $[a, b]$  における定積分という。

<sup>9</sup> $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S_\Delta = S$  の意味は、 $\Delta$  の長さが 0 になるように分割をとっていくと、 $S_\Delta$  は  $S$  に限りなく近くなるという意味である。

また

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \text{ とする.}$$

以下, リーマン積分可能を単に積分可能ということにする.

例 96. •  $I = [a, b]$  とし,  $f$  を  $I$  上での連続関数とする. このとき  $f$  は  $I$  上で積分可能.(みんながよく知っている関数は積分可能.)

•  $I = [0, 1]$  とし,  $I$  上の有界関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ は有理数} \\ 0 & x \text{ は無理数} \end{cases}$$

とおくとき, 任意の  $I$  の分割  $\Delta$  について,  $S_\Delta = 1$  であり,  $T_\Delta = 0$  である. よって  $S = 1$  かつ  $T = 0$  より,  $f$  は  $I$  上で積分可能ではない.

定理 97 (区分求積法).  $I = [a, b]$  とし,  $f(x)$  を  $I$  上の積分可能な関数とする. 任意の  $n \in \mathbb{N}$  について,  $x_i = a + \frac{(b-a)i}{n}$  ( $i$  は  $1 \leq i \leq n$  なる自然数) とおき,  $D_n = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{n}$  とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \int_a^b f(x)dx \text{ となる.}$$

例 98.  $I = [0, 1]$  とし,  $f(x) = x^2$  を  $I$  上の関数とする. 任意の  $n \in \mathbb{N}$  について,  $x_i = 0 + \frac{(1-0)i}{n} = \frac{i}{n}$  ( $i$  は  $1 \leq i \leq n$  なる自然数) であるので,

$$D_n = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

以上より区分求積法から

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \frac{1}{3} \text{ である.}$$

## 25 微分積分学の基本定理

定義 99.  $f(x)$  を区間  $I$  上の連続関数とする.  $a \in I$  を一つ固定する.

$$\begin{aligned} F: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(x)dx \end{aligned}$$

を  $f(x)$  の不定積分と呼ぶ.  $F(x)$  を  $\int f(x)dx$  とも表す. 不定積分は定数を除いてただ一つに定まる.

定理 100 (微分積分学の基本定理).  $f(x)$  を区間  $I$  上の連続関数とする. 不定積分  $F(x) = \int_a^x f(t)dx$  は  $I$  上で微分可能で  $F'(x) = f(x)$  である. 特に

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) \text{ である.}$$

命題 101.  $f(x)$  を区間  $I$  上の連続関数とし,  $G(x)$  を  $I$  上の関数とする.  $G'(x) = f(x)$  ならばある定数  $c$  があって,

$$G(x) = \int f(x)dx + c \text{ となる.}$$

例 102.  $f(x) = x^2, G(x) = \frac{x^3}{3}$  とすると  $G'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x)$  よりある定数  $c$  があって  $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$  となる.

定理 103.  $f(x)$  を  $[a, b]$  上の連続関数とし,  $G(x)$  を  $G'(x) = f(x)$  となる  $[a, b]$  上の関数とする. このとき

$$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a) \text{ となる.}$$

例 104.

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

である. (区分求積法を用いるよりもずっとずっと簡単である.)

## 26 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

$n, x \in \mathbb{N}$  について

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} \text{ とする.}$$

次の問いに答えよ.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(1)$  は発散することを示せ.
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(2)$  は収束することを示せ.

ちなみに

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{6} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots \\ \frac{\pi^4}{90} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \\ \frac{\pi^6}{945} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(6) = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \dots \end{aligned}$$

であることが知られている.

## 第9回. 積分の性質 (三宅先生の本, 3.1 と 3.2 の内容)

岩井雅崇 2021/06/15

### 27 積分の性質

定理 105.  $f(x)$  を  $[a, b]$  上の連続関数とし,  $F(x)$  を  $F'(x) = f(x)$  となる  $[a, b]$  上の関数とする. このとき

$$\int_a^b f(x)dx = \left[ F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a) \text{ となる.}$$

命題 106 (積分の性質).  $f(x), g(x)$  共に  $[a, b]$  上の連続関数とし,  $G(x) = \int g(x)dx$  とする.

1.  $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
2.  $k$  を定数とするとき,  $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
3. (置換積分法)

$$\begin{array}{ccc} x(t) : [\alpha, \beta] & \rightarrow & [a, b] \\ t & \mapsto & x(t) \end{array}$$

を  $C^1$  級関数とし,  $a = x(\alpha), b = x(\beta)$  とするとき

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t)) \frac{dx(t)}{dt} dt \text{ となる.}$$

4. (部分積分法)  $f(x)$  が  $C^1$  級であるとき,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left[ f(x)G(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx \text{ となる.}$$

## 28 不定積分の例

簡単な積分に関してまとめておく。積分定数に関しては省略する。また  $a$  を実数とする。

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1 \text{ のとき})$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x|$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \text{Sin}^{-1} \frac{x}{|a|} \quad (a \neq 0 \text{ のとき})$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \text{Tan}^{-1} \frac{x}{a} \quad (a \neq 0 \text{ のとき})$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\log a} a^x \quad (a > 0 \text{ かつ } a \neq 1 \text{ のとき})$$

$$\int \log x dx = x \log x - x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x$$

## 29 ウォリスの公式

定理 107.  $n$  を自然数として,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt \text{ とする.}$$

$n$  が偶数のとき,

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ であり.}$$

$n$  が奇数のとき,

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \text{ である.}$$

<sup>10</sup> $n!!$  は二重階乗と呼ばれる。 $n$  を正の自然数として、 $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$ 、 $(2n)!! = (2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2$  である。便宜上  $0!! = 1$  とする。 $(0! = 1$  であるので.)

定理 108 (ウォリスの公式).

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m-1)} \cdot \frac{(2(m-1))^2}{(2(m-1))(2(m-1)-1)} \cdots \frac{2^2}{3 \cdot 1} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - \frac{1}{4m^2})} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{4(m-1)^2})} \cdots \frac{1}{(1 - \frac{1}{4})} \text{ となる.}\end{aligned}$$

つまり

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdots \text{ である.}$$

11

### 30 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

1. 不定積分  $\int x \log x \, dx$  を求めよ.

---

<sup>11</sup>積の記号を使って書けば,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - \frac{1}{4m^2})} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{4(m-1)^2})} \cdots \frac{1}{(1 - \frac{1}{4})} = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - \frac{1}{4i^2})} \text{ である.}$$



## 第10回. 不定積分の計算方法 (三宅先生の本, 3.2の内容)

岩井雅崇 2021/06/22

### 31 不定積分の計算方法・テクニック

#### 31.1 有理式の場合

定義 109 (有理式).  $f(x)$  と  $g(x)$  を実数係数多項式とすると、 $\frac{f(x)}{g(x)}$  を有理式という。

以下  $f(x)$  と  $g(x)$  を同時に割り切る多項式はないものと仮定する。(つまり  $f(x)$  と  $g(x)$  は互いに素とする.)

定理 110 (有理式). 有理式  $\frac{f(x)}{g(x)}$  は次の3つの式の和に分解できる。

1. 多項式
2.  $\frac{a}{(x+b)^m}$  ( $a, b \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$ )
3.  $\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^m}$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$ )

特に  $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{R}$  と  $m_1, \dots, m_l \in \mathbb{N}$  を用いて  $g(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_l)^{m_l}$  と書けるとき、有理式  $\frac{f(x)}{g(x)}$  は多項式と  $\frac{\beta_i}{(x - \alpha_i)^m}$  ( $\beta_i \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq m_i$ ) の和で表せられる。

例 111.  $\frac{5x-4}{2x^2+x-6}$  に関して上の定理より、

$$\frac{5x-4}{2x^2+x-6} = \frac{a}{2x-3} + \frac{b}{x+2}$$

となる実数  $a, b \in \mathbb{R}$  が存在する。通分して計算すると  $a=1, b=2$  をえる。

例 112.

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}$$

定理 113. 有理式の不定積分は計算できる。

例 114.

$$\int \frac{5x-4}{2x^2+x-6} dx = \int \frac{1}{2x-3} dx + \int \frac{2}{x+2} dx = \frac{1}{2} \log |2x-3| + 2 \log |x+2|$$

$$\int \frac{2}{(x-1)(x^2+1)} dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{x+1}{x^2+1} dx = \log |x-1| - \frac{1}{2} \log |x^2+1| - \text{Tan}^{-1} x$$

### 31.2 無理関数がある場合

テクニックだけまとめておく.

- $\sqrt[n]{ax+b}$  に関して,  $t = \sqrt[n]{ax+b}$  とおくと

$$x = \frac{t^n - b}{a}, dx = \frac{nt^{n-1}dt}{a}$$

より有理式に帰着できる.

- $\sqrt{ax^2+bx+c}$  に関して,  $a > 0$  ならば  $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{ax}$  とおく.
- $\sqrt{ax^2+bx+c}$  に関して,  $ax^2+bx+c = (x-\alpha)(x-\beta)$  となる実数  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  があるとき,  $t = \sqrt{\frac{a(x-\beta)}{(x-\alpha)}}$  とおく.

例 115. 不定積分  $\int \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}$  を求めよ.

(答.)  $t = \sqrt{x-1}$  とおくと,  $x = t^2 + 1, dx = 2tdt$  より

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}} &= \int \frac{2t}{t^2+1+2t} dt = \int \frac{2t+2-2}{(t+1)^2} dt \\ &= \int \frac{2}{t+1} dt - \int \frac{2}{(t+1)^2} dt \\ &= 2 \log|t+1| + \frac{2}{t+1} \\ &= 2 \log(1+\sqrt{x-1}) + \frac{2}{1+\sqrt{x-1}} \end{aligned}$$

### 31.3 三角関数の有理式の積分

定理 116. 三角関数に関する有理式の不定積分は計算できる. 具体的には  $t = \tan \frac{x}{2}$  とおけば,  $\sin x$  などは次のように表される.

- $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$
- $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

例 117. 不定積分  $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx$  を求めよ.

(答.)  $t = \tan \frac{x}{2}$  とおくと,

$$\begin{aligned} \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx &= \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2+2t+1}{1+t^2} dt = \int 1 + \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= t + \log(1+t^2) = \tan \frac{x}{2} + \log \left| 1 + \left( \tan \frac{x}{2} \right)^2 \right| \end{aligned}$$

## 32 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります。

1. 不定積分  $\int \frac{x^2}{x^2-x-6} dx$  を求めよ.

## 第 11 回. 広義積分 (三宅先生の本, 3.3 の内容)

岩井雅崇 2021/06/29

### 33 広義積分

定義 118 (広義積分).  $a$  を実数とし,  $b$  は実数または  $b = +\infty$  とする.  $f(x)$  を  $[a, b)$  上の連続関数とする. 左極限  $\lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^\beta f(x) dx$  が存在するとき, 広義積分  $\int_a^b f(x) dx$  は収束する とい

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b-0} \int_a^\beta f(x) dx \text{ とする.}$$

この積分を広義積分という. 極限が存在しないときは, 広義積分  $\int_a^b f(x) dx$  は発散する という.

例 119. •  $\int_1^\infty x^p dx$  は  $p < -1$  のとき収束し,  $p \geq -1$  のとき発散する.

•  $\int_0^1 x^p dx$  は  $p > -1$  のとき収束し,  $p \leq -1$  のとき発散する.

定理 120.  $f(x)$  を  $[a, b)$  上の連続関数とする.  $[a, b)$  上の連続関数  $g(x)$  があって,  $[a, b)$  上で  $|f(x)| \leq g(x)$  かつ広義積分  $\int_a^b g(x) dx$  が収束すると仮定する. このとき広義積分  $\int_a^b f(x) dx$  もまた収束する.

定理 121.  $f(x)$  を  $[a, b)$  上の連続関数とする.  $[a, b)$  上の連続関数  $g(x)$  があって,  $[a, b)$  上で  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  かつ広義積分  $\int_a^b g(x) dx$  が発散すると仮定する. このとき広義積分  $\int_a^b f(x) dx$  もまた発散する.

例 122. 広義積分  $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}} dx$  は収束する. これは  $[0, 1)$  上で  $|\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$  かつ広義積分  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$  が収束するからである.

例 123. 広義積分  $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}} dx$  は発散する. これは  $[2, \infty)$  上で  $0 \leq x^{-\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}}$  かつ広義積分  $\int_2^\infty x^{-\frac{2}{3}} dx$  が発散するからである.

例 124. 実数  $s > 0$  について, 広義積分  $\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$  は収束する.

(証.)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} x^{s-1}) x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^{s+1} = 0$  より, ある  $c > 0$  があって,  $[c, \infty)$  上で  $e^{-x} x^{s-1} \leq x^{-2}$  である. 広義積分  $\int_c^\infty x^{-2} dx$  は収束するため, 広義積分  $\int_c^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$  も収束する.

一方  $(0, c]$  上で  $e^{-x} x^{s-1} \leq x^{s-1}$  であり,  $s-1 > -1$  から広義積分  $\int_0^c x^{s-1} dx$  は収束するため広義積分  $\int_0^c e^{-x} x^{s-1} dx$  も収束する.

以上より広義積分  $\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx = \int_0^c e^{-x} x^{s-1} dx + \int_c^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$  は収束する.

### 34 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります。

$p$  を実数とし  $f(x) = x^p \log x$  とする。

1.  $p < -1$  ならば広義積分  $\int_1^\infty f(x)dx$  は収束することを示せ。
2.  $p \geq -1$  ならば広義積分  $\int_1^\infty f(x)dx$  は発散することを示せ。

## 第12回. 曲線の長さ (三宅先生の本, 3.4の内容)

岩井雅崇 2021/07/06

### 35 曲線の定義と曲線の長さ

定義 125.

$$\begin{aligned} C : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

が 滑らかな曲線 とは次の2条件を満たすこと.

- $x(t), y(t)$  共に  $[a, b]$  上の  $C^1$  級関数.
- 任意の  $t \in (a, b)$  について, 速度ベクトル  $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$  である.

滑らかな曲線  $C$  に関してその長さを

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad \text{とする.}$$

定理 126.  $f(x)$  を  $[a, b]$  上の  $C^1$  級関数とする. このとき  $y = f(x)$  のグラフ  $C = \{(x, f(x)) \mid a \leq x \leq b\}$  の長さは

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad \text{である.}$$

例 127. 放物線  $y = x^2 (0 \leq x \leq 1)$  のグラフの長さを求めよ.

(答.)  $f(x) = x^2$  とすると  $f'(x) = 2x$  のため, 曲線の長さは

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{1 + t^2} dt \\ &= \frac{1}{4} \left[ t\sqrt{t^2 + 1} + \log \left| t + \sqrt{t^2 + 1} \right| \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( 2\sqrt{5} + \log(2 + \sqrt{5}) \right) \end{aligned}$$

定理 128.  $[\alpha, \beta]$  上の  $C^1$  級関数  $f(\theta)$  を用いて, 曲線  $C$  が

$$\begin{aligned} C : [\alpha, \beta] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\mapsto (f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \sin \theta) \end{aligned}$$

と表されているとき,  $C$  の長さは

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta \quad \text{である.}$$

例 129. (アルキメデスの螺旋) 正の実数  $a, \alpha$  について

$$\begin{aligned} C: [0, \alpha] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\mapsto (a\theta \cos \theta, a\theta \sin \theta) \end{aligned}$$

とする. 曲線  $C$  の長さを求めよ.

(答.)  $f(\theta) = a\theta$  とすると  $f'(\theta) = a$  のため, 曲線の長さは

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{a^2 + (a\theta)^2} d\theta = a \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + (\theta)^2} d\theta = \frac{a}{2} \left( \alpha \sqrt{\alpha^2 + 1} + \log \left( \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1} \right) \right)$$

### 36 演習問題

演習問題の解答は授業の黒板にあります.

1. 正の実数  $a, b$  について  $f(x) = a \cosh \frac{x}{a} - a$  とする. グラフ  $C = \{(x, f(x)) \mid 0 \leq x \leq b\}$  の長さを  $a, b$  を用いて表せ.