

第1回. 多変数の連続写像 (川平先生の本, 第16章の内容)

岩井雅崇, 2020/10/06

1 いくつかの準備

以下の用語に関して興味のない人は読み飛ばして良い.

1. xy 平面上の点 (a, b) と正の数 $r > 0$ について, 点 (a, b) 中心の半径 r の (閉) 円板を

$$B_{(a,b)}(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq r\} \text{ とする.}$$

2. $a < b$ かつ $c < d$ について,

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ かつ } c \leq y \leq d\} \text{ とする.}$$

以下 $E \subset \mathbb{R}^2$ を集合とする.

3. $(a, b) \in E$ が E の 内点 とは, ある正の数 $r > 0$ があって $B_{(a,b)}(r) \subset E$ となること.
4. E が 開集合 とは, 任意の (全ての) $(a, b) \in E$ について (a, b) は E の内点となること.
5. E が 閉集合 とは, $\mathbb{R}^2 \setminus E$ が開集合であること.
6. E が 有界 とは, ある正の数 $M > 0$ があって, $E \subset [-M, M] \times [-M, M]$ となること.
7. E が 連結 とは, E の任意の 2 点が E 内の折れ線で結べること.
8. E が 領域 とは, E が連結な開集合であること.

例 1. • $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}$ は開集合, 有界, 連結, 領域. でも閉集合ではない.

• $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ は閉集合, 有界, 連結. でも開集合ではない.

• \mathbb{R}^2 は開集合, 閉集合, 連結, 領域. でも有界ではない.

9. 関数 $f(x, y)$ の値が定まる集合を f の 定義域 といひ,

$$\{k \in \mathbb{R} : f(x, y) = k \text{ となる } (x, y) \text{ が定義域内に存在}\}$$

を f の 値域 という.

10. f が 領域 E 上の関数 とは, E が f の定義域に含まれることである. このとき

$$f: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ とかく.} \\ (x, y) \mapsto f(x, y)$$

例 2. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ の定義域は $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$. 値域は $[0, 1]$.

¹ $\mathbb{R}^2 \setminus E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \notin E\}$ と定義する.

2 極限と連続性

定義 3. (x, y) が (a, b) に限りなく近づくとは $(x, y) \neq (a, b)$ かつ

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \rightarrow 0$$

となるように変化すること. 以後, $(x, y) \rightarrow (a, b)$ とかく.

定義 4. $f(x, y)$ を領域 D 上の関数とする. $f(x, y)$ が $(x, y) \rightarrow (a, b)$ のとき実数 A に収束するとは (x, y) が (a, b) に近づくとき, $f(x, y)$ が A に限りなく近づくことである. このとき

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = A \quad \text{または} \quad f(x, y) \rightarrow A \quad ((x, y) \rightarrow (a, b)) \quad \text{とかく.}$$

定義 5. $f(x, y)$ を領域 D 上の関数とする. f が $(a, b) \in D$ で連続とは

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b) \quad \text{となること.}$$

f が D 上で連続とは f が任意の点 $(a, b) \in D$ で連続となること.

例 6. • $f(x, y) = x + y$, $f(x, y) = e^{x+y^2}$. これらは \mathbb{R}^2 上の連続関数. (みんながよく知っている関数は連続関数.)

• $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ は定理 8 より $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上の連続関数.

• \mathbb{R}^2 上の関数 $f(x, y)$ を次で定義する.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 1 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

f は $(0, 0)$ で連続ではない.

なぜなら $(0, y) \rightarrow (0, 0)$ という近づけ方をすると, $f(0, y) = -1 \rightarrow -1$ であるため,

$\lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} f(0, y) \neq f(0, 0)$ より連続ではない.

定理 7. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = A$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = B$ とする. このとき以下が成り立つ.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \{f(x, y) + g(x, y)\} = A + B.$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)g(x, y) = AB.$$

$$B \neq 0 \text{ のとき, } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{A}{B}.$$

定理 8. 関数 f, g が点 (a, b) で連続であるとする. このとき以下が成り立つ.

- $f(x, y) + g(x, y)$ や $f(x, y)g(x, y)$ は (a, b) で連続.
- $g(a, b) \neq 0$ のとき, $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ は (a, b) で連続.

3 最大最小の存在

定理 9. 有界な閉集合 D 上で連続な関数 f は最大値・最小値を持つ.

例 10. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ とすると D は有界閉集合. $f(x, y) = x$ とすると f は連続. 実際, D 上で f は最大値 1, 最小値 -1 を持つ.

第2回. 多変数関数の微分 (川平先生の本, 第17・18章の内容)

岩井雅崇, 2020/10/13

4 全微分

定義 11. 関数 $f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能とは, ある定数 A, B があって

$$E(x, y) = f(x, y) - \{f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)\} \text{ とするとき,}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{|E(x, y)|}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0 \text{ となること.}$$

$z = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)$ を $f(x, y)$ の点 (a, b) での接平面の方程式といい, その3次元グラフを接平面という.

f が領域 D の任意の点で全微分可能であるとき, f は D 上で全微分可能であるという.

例 12. $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$ は点 $(0, 0)$ で全微分可能.

(証.) $A = B = 0$ とする. $E(x, y) = -(x^2 + y^2) - \{0 + 0(x - 0) + 0(y - 0)\} = -(x^2 + y^2)$ より,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|E(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0.$$

よって全微分可能.

接平面の方程式は

$$z = 0 + 0(x - 0) + 0(y - 0) = 0$$

5 偏微分

定義 13. 関数 $f(x, y)$ が (a, b) で偏微分可能とは, 2つの極限

$$A = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}, \quad B = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} \text{ が存在すること.}$$

A, B を $f(x, y)$ の (a, b) での偏微分係数と呼び,

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \text{ とかく.}$$

f が領域 D の任意の点で偏微分可能であるとき, f は D 上で偏微分可能であるという.

$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ は $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x,y)=(a,b)}$ とかくこともある.

定義 14. D 上で偏微分可能な関数 f について

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} : D &\rightarrow \mathbb{R} & \frac{\partial f}{\partial y} : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & (x, y) &\mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

を $f(x, y)$ の偏導関数という.

例 15. • $f(x, y) = x^2y^3$ は \mathbb{R}^2 で偏微分可能. 偏導関数は $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3, \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2$ である.

• $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ は $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}$ 上で偏微分可能. 偏導関数は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \text{ である.}$$

定義 16. f を領域 D 上の関数とする. f が D 上で偏微分可能であり, その偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ が D 上で連続であるとき, f は C^1 級であるという.

例 17. $f(x, y) = x^2y^3$ は C^1 級である. (みんながよく知っている関数は C^1 級関数.)

6 全微分, 偏微分, C^1 級の関係

定理 18. f を領域 D 上の関数とする. f が D 上で C^1 級ならば全微分可能である.

特に D 上で C^1 級な関数 f と $(a, b) \in D$ において, $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ とするとき,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{|E(x, y)|}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0.$$

ここで $E(x, y) = f(x, y) - \{f(a, b) + A(x - a) + B(y - b)\}$ とする.(定義 11 と同様.)

定理 19. f を領域 D 上の関数とする. f が D 上で全微分可能なら, 偏微分可能である.

特に定義 11 の状況下において, $(a, b) \in D$ について, $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ である.

定理 20. f を領域 D 上の関数とする. f が D 上で全微分可能なら, 連続である.

例 21. $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$ は C^1 級関数. よって全微分可能. 点 $(0, 0)$ での偏微分係数は $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, B = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. 接平面の方程式は $z = 0 + A(x - 0) + B(y - 0) = 0$.

注意 22. 「全微分可能だが C^1 級でない関数」, 「偏微分可能だが全微分可能でない関数」, 「連続だが全微分可能でない関数」, 「連続だが偏微分可能でない関数」. 「偏微分可能だが連続でない関数」などなど, いろいろな例がある.

例 23. 偏微分可能だが全微分可能でない関数の例.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \text{ かつ } y \neq 0 \\ 1 & x = 0 \text{ または } y = 0 \end{cases}$$

f は $(0, 0)$ で偏微分可能. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{x} = 0$ より定義 13 の極限が存在するから.

しかし f は $(0, 0)$ で全微分可能ではない. もし全微分可能ならば

$$E(x, y) = f(x, y) - \{f(0, 0) + 0(x - 0) + 0(y - 0)\} = f(x, y) - 1$$

とすると, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|E(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ となる. よって $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 1$ となるが, これは $(t, t) \rightarrow (0, 0)$ の f の極限を考えると矛盾である.²

² f は $(0, 0)$ で連続ではないからでも言える. (もし全微分可能ならば定理 20 より f は $(0, 0)$ で連続でないといけない.)

第3回. 合成関数の微分と連鎖律 (川平先生の本, 第19・20・21章の内容)

岩井雅崇, 2020/10/20

定理 24. $f(x, y)$ を領域 D 上の C^1 級関数とする. $x = x(t)$, $y = y(t)$ を t に関する C^1 級関数とし, $z(t) = f(x(t), y(t))$ とするとき,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

例 25. $f(x, y) = 2x^3y$, $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = f(x(t), y(t))$ とする. このとき

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y, \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3, \frac{dx}{dt} = -\sin t, \frac{dy}{dt} = \cos t, \text{ より}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 6 \cos^2 t \sin t (-\sin t) + 2 \cos^3 t \cos t = -6 \cos^2 t \sin^2 t + 2 \cos^4 t.$$

定義 26. 領域 D 上の C^1 級関数を $x(u, v)$, $y(u, v)$ とする.

$$\begin{aligned} \Phi: D &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

を C^1 級変数変換という.

例 27. • a, b, c, d を定数とする. $\Phi(u, v) = (au + bv, cu + dv)$ は C^1 級変数変換である. これを 1 次変換という.

• $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v)$ も C^1 級変数変換である. これを極座標変換という.

定理 28. 領域 D 上の C^1 級変数変換を

$$\begin{aligned} \Phi: D &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

とし, 領域 $E(\supset \Phi(D))$ 上の C^1 級関数を $f(x, y)$ とする.

領域 D 上の C^1 級 $g(u, v)$ を

$$\begin{aligned} g = f \circ \Phi: D &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto f(x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

で定めるとき, 各偏導関数は以下の通りになる.

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}.$$

行列の記法を用いると以下のようにかける.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

例 29. $f(x, y)$ を C^1 級関数とし, C^1 級変数変換を $(x(u, v), y(u, v)) = (u \cos v, u \sin v)$ とする. $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ とするとき, $\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}$ を $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を用いてあらわせ.

(解.)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -u \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u \cos v, \quad \text{より}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \cos v \frac{\partial f}{\partial x} + \sin v \frac{\partial f}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = -u \sin v \frac{\partial f}{\partial x} + u \cos v \frac{\partial f}{\partial y}.$$

第4回. ヤコビ行列・微分演算子・ラプラスアン
(川平先生の本, 第20・22章の内容)

岩井雅崇, 2020/10/27

7 ヤコビ行列

定義 30. 領域 D 上の C^1 級変数変換

$$\begin{aligned} \Phi: D &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

について, Φ のヤコビ行列 $D\Phi$ を次で定める.

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

例 31.

- a, b, c, d を定数とする. 1 次変換 $\Phi(u, v) = (au + bv, cu + dv)$ について, $D\Phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
- 極座標変換 $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v)$ について, $D\Phi = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{pmatrix}$.

定義 32. C^1 級変数変換を $(x, y) = \Phi(u, v)$, $(z, w) = \Psi(x, y)$ とする.

1. 合成変換 $\Psi \circ \Phi$ を $(z, w) = \Psi \circ \Phi(u, v) = \Psi(x(u, v), y(u, v))$ とする.
2. C^1 級変数変換を $(x, y) = \Phi(u, v)$ が 1 対 1 であるとき, ある C^1 級変数変換 $(u, v) = \Omega(x, y)$ があって $(u, v) = \Omega \circ \Phi(u, v)$ となる. この Ω を Φ の逆変換といい Φ^{-1} とかく.

3

定理 33. C^1 級変数変換を $(x, y) = \Phi(u, v)$, $(z, w) = \Psi(x, y)$ についてその合成変換を $(z, w) = \Psi \circ \Phi(u, v)$ とするとき,

$$D(\Psi \circ \Phi) = D\Psi D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

³ C^1 級変数変換を Φ が 1 対 1 とは $\Phi(u_1, v_1) = \Phi(u_2, v_2)$ ならば $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$ となること. この定義においての逆関数の存在は逆関数定理 (第 7 回) によりわかる.

特に Φ の逆関数が存在するとき, $\det D\Phi \neq 0$ ならば

$$D\Phi^{-1} = (D\Phi)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1}.$$

例 34. 極座標変換 $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v)$ について, $D\Phi = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{pmatrix}$ より,

$$D\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ -\frac{\sin v}{u} & \frac{\cos v}{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

8 n 階偏導関数・ C^n 級

定義 35. $f(x, y)$ を C^1 級関数とする.

- $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を f の 1 階偏導関数という.
- $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ が C^1 級であるとき, これらの導関数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

を f の 2 階偏導関数という.

- 同様に, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)$ や $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y \partial x} \right)$ などが考えられるが, これらを f の 3 階偏導関数という. n 階偏導関数も同様である.
- n を正の自然数とする. $f(x, y)$ が C^n 級であるとは f の n 階偏導関数が存在し連続であること.
- $f(x, y)$ が C^∞ 級とは, 全ての正の自然数 n について $f(x, y)$ が C^n 級であること.

みんながよく知っている関数は C^∞ 級関数. ($x^2 + 1, \sin x, \log x, e^x$ などなど...)

例 36. $f(x, y) = x^2 y^3$. C^∞ 級関数. 偏導関数は以下の通り.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = 6xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y \partial x} = 6xy^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2 y.$$

定理 37. $f(x, y)$ が C^2 級関数ならば

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}.$$

特に, $f(x, y)$ が C^∞ 級関数ならば, 自由に偏微分の順序交換ができる.

9 微分演算子・ラプラシアン

定義 38 (この授業だけの定義). m を正の自然数とし $a_{ij}(x, y)$ を関数として

$$D = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^{m-j} a_{ij}(x, y) \left(\frac{\partial^i}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial^j}{\partial y^j} \right)$$

と書ける作用素を微分演算子という.

D は C^∞ 関数 f に対して次のように作用する.

$$Df = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^{m-j} a_{ij}(x, y) \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}$$

例 39. $D_1 = \frac{\partial}{\partial x}, D_2 = x \frac{\partial}{\partial x}$ とおく. これらは微分演算子. $D_1 D_2 = x \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)$ だが $D_2 D_1 = \frac{\partial}{\partial x} + x \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)$ である. 特に $D_1 D_2 \neq D_2 D_1$.

定義 40.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

と書ける微分演算子をラプラシアンという.

例 41. 極座標変換 $(x(u, v), y(u, v)) = (u \cos v, u \sin v)$ とする. このとき,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

第5回. テイラー展開 (川平先生の本, 第22章の内容)

岩井雅崇, 2020/11/10

定理 42. f を領域 D 上の C^2 級関数とし, $(a, b) \in D$ とする. 点 (a, b) 中心の半径 $r > 0$ の円板 $B \subset D$ を一つとる.

任意の $(x, y) \in B$ について (a, b) と (x, y) を結ぶ線分上の点 (a', b') があって,

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a', b')(x - a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a', b')(x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a', b')(y - b)^2 \right\}.$$

定理 43. f を領域 D 上の C^∞ 級関数とし, $(a, b) \in D$ とする. 点 (a, b) 中心の半径 $r > 0$ の円板 $B \subset D$ を一つとる.

任意の $(x, y) \in B$ について (a, b) と (x, y) を結ぶ線分上の点 (a', b') があって,

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x - a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y - b)^2 \right\} + \dots + \frac{1}{n!} \left\{ \sum_{i=0}^n {}_n C_r \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(a', b')(x - a)^i (y - b)^{n-i} \right\}.$$

$R_n = \frac{1}{n!} \left\{ \sum_{i=0}^n {}_n C_r \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(a', b')(x - a)^i (y - b)^{n-i} \right\}$ を剰余項という.

特に剰余項について, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ のとき,

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x - a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y - b)^2 \right\} + \dots + \frac{1}{n!} \left\{ \sum_{i=0}^n {}_n C_r \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(a, b)(x - a)^i (y - b)^{n-i} \right\} + \dots.$$

例 44. $f(x, y) = e^{x+y}$ とする. $\frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}(0, 0) = 1$ であり $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ より

$$e^{x+y} = 1 + x + y + \frac{1}{2} (x^2 + 2xy + y^2) + \dots + \frac{1}{n!} (x + y)^n + \dots.$$

第6回. 極値問題 (川平先生の本, 第23章の内容)

岩井雅崇, 2020/11/17

10 極値の定義

定義 45. $f(x, y)$ を領域 D 上の関数とする.

- $f(x, y)$ が点 $(a, b) \in D$ で極大であるとは, (a, b) 中心の十分小さな半径の円板上で $(x, y) \neq (a, b)$ ならば $f(x, y) < f(a, b)$ となること. このときの $f(a, b)$ の値を極大値という.
- $f(x, y)$ が点 $(a, b) \in D$ で極小であるとは, (a, b) 中心の十分小さな半径の円板上で $(x, y) \neq (a, b)$ ならば $f(x, y) > f(a, b)$ となること. このときの $f(a, b)$ の値を極小値という.
- 極大値, 極小値の二つ合わせて極値という. 極値をとる点 (a, b) を極値点という.
- 点 $(a, b) \in D$ が $f(x, y)$ の鞍点 (あんてん, saddle point) であるとは, ある方向で点 (a, b) が極大となり, 違うある方向で点 (a, b) が極小となること.

例 46. 1. $f(x, y) = x^2 + y^2$. 極値点 $(0, 0)$, 極値 0, 極小値.

2. $f(x, y) = -x^2 - y^2$. 極値点 $(0, 0)$, 極値 0, 極大値.

3. $f(x, y) = x^2 - y^2$. $f(t, 0) = t^2$ より, $(t, 0)$ の方向で見れば $(0, 0)$ は極小. $f(0, t) = -t^2$ より, $(0, t)$ の方向で見れば $(0, 0)$ は極大. よって $(0, 0)$ は鞍点.

4. $f(x, y) = -x^2$. $f(0, t) = 0$ であるから $(0, 0)$ は極大ではない.

定理 47. $f(x, y)$ を C^1 級関数とする. f が (a, b) で極値を取るならば,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

11 ヘッシアンを使った極値判定法

定義 48. $f(x, y)$ を C^2 級関数とする.

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

を f のヘッセ行列と呼び

$$D_f = \det H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2$$

を ヘッシアン (Hessian) と呼ぶ. (判別式とも呼ばれる).

定理 49. C^2 級関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) で $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ であるとする.

1. $D_f(a, b) > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ のとき, f は点 (a, b) で極小.
2. $D_f(a, b) > 0$ かつ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ のとき, f は点 (a, b) で極大.
3. $D_f(a, b) < 0$ の時, 点 (a, b) は f の鞍点.

例 50. 1. $f(x, y) = x^2 + y^2$. $H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $D_f = 4$. f は $(0, 0)$ で極小.

2. $f(x, y) = -x^2 - y^2$. $H(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. $D_f = 4$. f は $(0, 0)$ で極大.

3. $f(x, y) = x^2 - y^2$. $H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. $D_f = -4$. $(0, 0)$ は f の鞍点.

12 ヘッシアンを使った極値判定法のやり方

C^2 級関数 f に関して極値を求める方法は以下の通りである.

[手順 1.] $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ となる点 (a, b) を求める.

[手順 2.] $D_f(a, b)$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$ を求める. そして定理 49 を適応する.

例 51. $f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x + 12y$ について極大点・極小点を持つ点があれば, その座標と極値を求めよ. またその極値が極小値か極大値のどちらであるか示せ.

(解.) 上の手順に基づいて極値を求める.

[手順 1.]

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 12$$

より, $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ となる点 (a, b) は $(1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)$.

[手順 2.]

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}, \quad D_f = -36xy.$$

よって上の4点に対し $D_f(a, b)$ と $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$ を計算する.

1. $D_f(1, 2) = -72 < 0$ より定理 49 から $(1, 2)$ は f の鞍点.
2. $D_f(1, -2) = 72 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -2) = 6 > 0$ より定理 49 から $(1, -2)$ は f の極小点. $f(1, -2) = -18$.
3. $D_f(-1, 2) = 72 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 2) = -6 < 0$ より定理 49 から $(-1, 2)$ は f の極大点. $f(-1, 2) = 18$.
4. $D_f(-1, -2) = -72$ より定理 49 から $(-1, -2)$ は f の鞍点.

以上より, f は $(1, -2)$ で極小値 -18 をもち, f は $(-1, 2)$ で極大値 18 をもつ.

13 陰関数定理

定理 52. $f(x, y)$ を C^1 級関数とし, 点 (a, b) で $f(a, b) = 0$ かつ $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$ とする. この時 a を含む開区間 I と I 上の C^1 級関数 $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ があって次の3つを満たす.

1. $b = \phi(a)$.
2. 任意の $x \in I$ について, $f(x, \phi(x)) = 0$.
3. $\frac{d\phi}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}$. 特に $\frac{d\phi}{dx}(a) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}$.

$f(x, \phi(x)) = 0$ となる関数 $y = \phi(x)$ を $f(x, y) = 0$ の陰関数という.

この定理によって, 陰関数が分からなくとも $\frac{d\phi}{dx}(a)$ が計算できる.

例 53. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 - 1$ とする. 曲線 $f(x, y) = 0$ の $(1, 0)$ での接線の方程式を求めよ. (解.)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 3y^2 \text{ である.}$$

よって $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) \neq 0$ より, 陰関数 $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ があって,

$$\phi(1) = 0, f(x, \phi(x)) = 0, \frac{d\phi}{dx}(1) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)} = 1.$$

よって $y = \phi(x)$ の $(1, 0)$ での接線の方程式は

$$y = \frac{d\phi}{dx}(1)(x - 1) = x - 1 \text{ である.}$$

14 逆関数定理

定理 54. Φ を領域 D 上の C^1 級変数変換とし $D\Phi$ を Φ のヤコビ行列とする. $(a, b) \in D$ で $\det(D\Phi(a, b)) \neq 0$ ならば, (a, b) を含む小さな円板上で Φ は逆変換 Φ^{-1} をもち $D\Phi^{-1} = (D\Phi)^{-1}$ となる.

逆関数定理から陰関数定理が導かれる.

第8回. ラグランジュ未定乗数法 (川平先生の本, 第24章の内容)

岩井雅崇, 2020/12/01

15 ラグランジュ未定乗数法

定理 55. $f(x, y), g(x, y)$ を領域 D 上の C^1 級関数とする. $g(x, y) = 0$ のもとで $f(x, y)$ が点 (a, b) で極値を持つとし, $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(a, b), \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)\right) \neq (0, 0)$ とする.
このとき, ある定数 λ があって

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \text{ となる.}$$

上の定理 57 から $F(x, y, t) = f(x, y) - tg(x, y)$ とするとき, $g(x, y) = 0$ のもとでの $f(x, y)$ の極値の候補は以下の2つである.

1. $g(a, b) = \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) = 0$ となる点 (a, b) .
2. ある λ があって $\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial t}(a, b, \lambda) = 0$ となる点 (a, b) .

16 ラグランジュ未定乗数法の使い方

$g(x, y) = 0$ のもとで $f(x, y)$ の極値を求める手順は以下の通りである.

[手順 1.] $g(a, b) = \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) = 0$ となる点 (a, b) を求める.

[手順 2.] $F(x, y, t) = f(x, y) - tg(x, y)$ において, $\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial t}(a, b, \lambda) = 0$ となる点 (a, b, λ) を求める.

[手順 3.] 手順 1, 手順 2 で求めた点 (a, b) について, その値が極値であるかどうか調べる. 一般的な方法はないが, 例 56 のように「最大値の存在」と「最大値, 最小値であれば極値である」ことを用いる方法もある.

例 56. $f(x, y) = xy, g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ とする. $g(x, y) = 0$ のもとでの $f(x, y)$ の極値を求めよ. つまり $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ とするとき, f の S 上での極値を求めよ.

(解.) 上の手順通りに求める.

[手順 1.] $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x, \frac{\partial g}{\partial y} = 2y$ より, $g(a, b) = \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) = 0$ となる点は存在しない.

[手順 2.] $F(x, y, t) = f(x, y) - tg(x, y) = xy - t(x^2 + y^2 - 1)$ とおく. 以下の方程式を解く.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y - 2xt = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = x - 2yt = 0, \frac{\partial F}{\partial t} = -(x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

すると $(x, y) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の4点が極値の候補となる.

[手順3.] S は有界閉集合より, f は S 上で連続であるため, 第1回でやった定理より, f は S 上で最大値・最小値を持つ. よって $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の中に最大値をとる点や最小値をとる点がある.

実際計算すると,

$$f\left(\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{2}, f\left(\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = -\frac{1}{2},$$

であるため, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で f は極大値 (最大値) $\frac{1}{2}$ をとり, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で f は極小値 (最小値) $-\frac{1}{2}$ をとる.

17 ラグランジュ未定乗数法 3変数の場合

定理 57. $f(x, y, z), g(x, y, z)$ を領域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上の C^1 級関数とし, $F(x, y, t) = f(x, y, z) - tg(x, y, z)$ とおく. $g(x, y, z) = 0$ のもとで $f(x, y, z)$ が点 (a, b, c) で極値を持つとし, $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(a, b, c), \frac{\partial g}{\partial y}(a, b, c), \frac{\partial g}{\partial z}(a, b, c)\right) \neq (0, 0, 0)$ とする.

このとき, ある定数 λ があって,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c, \lambda) = \frac{\partial F}{\partial t}(a, b, c, \lambda) = 0 \text{ となる.}$$

例 58. $0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z$ なる実数 x, y, z について, $f(x, y, z) = xyz, g(x, y, z) = x + y + z - 170$ とする. $g(x, y, z) = 0$ のもとで f の最大値を求めよ. つまり $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$ とするとき, f の S 上での最大値を求めよ. ただし f が S 上で最大値を持つことは認めて良い.

(解.) 手順通りに求める.

[手順1.] $\frac{\partial g}{\partial x} = 1$ より $g(a, b, c) = \frac{\partial g}{\partial x}(a, b, c) = \frac{\partial g}{\partial y}(a, b, c) = \frac{\partial g}{\partial z}(a, b, c) = 0$ となる点 (a, b, c) は存在しない.

[手順2.] $F(x, y, t) = f(x, y, z) - tg(x, y, z) = xyz - t(x + y + z - 170)$ とする. 以下の方程式を解く.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz - t = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = xz - t = 0, \frac{\partial F}{\partial z} = xy - t = 0, \frac{\partial F}{\partial t} = -(x + y + z - 170) = 0.$$

すると $(x, y, z) = (170, 0, 0), (0, 170, 0), (0, 170, 0), \left(\frac{170}{3}, \frac{170}{3}, \frac{170}{3}\right)$ の4点が極値の候補となる.

[手順3.] 最大値が存在し, 最大値は極値であるため, 上の4点の中に最大値をとる点が存在する. 実際計算すると,

$$f(170, 0, 0) = 0, f(0, 170, 0) = 0, f(0, 170, 0) = 0, f\left(\frac{170}{3}, \frac{170}{3}, \frac{170}{3}\right) = \left(\frac{170}{3}\right)^3$$

であるため, $\left(\frac{170}{3}, \frac{170}{3}, \frac{170}{3}\right)$ で f は最大値 $\left(\frac{170}{3}\right)^3$ をとる.

第9回. 可測性と可積分性 (川平先生の本, 第25章の内容)

岩井雅崇, 2020/12/08

18 はじめに

この回の内容はかなり難しいので, 積分の理論を気にせず計算だけしたい人はこの回の内容を読み飛ばして, 次の回の内容に移って良い. (最後の誤差評価は使えるかもしれませんが...)

また証明等を少々省略するので, 詳しくリーマン積分を理解したい人は次の文献を見てほしい.

- 杉浦光夫 解析入門 1 (東京大学出版会)

動画冒頭に述べたルベグ積分を理解したい人は次の文献を見てほしい. (めちゃくちゃ難しいですが...)

- 伊藤清三 ルベグ積分入門 (裳華房)
- Terence Tao *An introduction to measure theory* available at <https://terrytao.files.wordpress.com/2011/01/measure-book1.pdf>

リーマン積分もルベグ積分もどちらも計算上は違いはないので, 積分の理論を気にせず, 計算だけしたい場合は気にしなくて良いです.

19 リーマン積分の定義

この節では $D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ とする.

- 関数 $f(x, y)$ が D 上で有界であるとは, ある正の数 $M > 0$ があって, 任意の $(x, y) \in D$ について $|f(x, y)| < M$ となること.

以下, 関数 $f(x, y)$ が D 上で有界であるとする.

- Δ が D の分割とは, ある正の自然数 m, n と

$$a = x_0 < x_1 < \dots, x_{m-1} < x_m = b, \quad c = y_0 < y_1 < \dots, y_{n-1} < y_n = d, \quad \text{となる}$$

数の組 $(a, x_1, \dots, x_{m-1}, b), (c, y_1, \dots, y_{n-1}, d)$ のこと.

以下 $\Delta = \{(a, x_1, \dots, x_{m-1}, b), (c, y_1, \dots, y_{n-1}, d)\}$ とかく. (この授業だけの記号である.)

- Δ を D の分割として, Δ の長さを

$$|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \{|x_i - x_{i-1}|, |y_j - y_{j-1}|\} \quad \text{とする.}$$

- Δ を D の分割とする. $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ となる自然数 i, j について

$$M_{ij} = \max\{f(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\},$$

$m_{ij} = \min\{f(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$ とし,⁴

$$S_\Delta = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \quad T_\Delta = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \text{ とおく.}$$

定義から $T_\Delta \leq S_\Delta$ となる.

定理 59 (ダルブーの定理). ある実数 S, T があって,

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S_\Delta = S, \quad \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} T_\Delta = T.$$

5

定義 60. $D = [a, b] \times [c, d]$ かつ $f(x, y)$ を D 上の有界関数とする.

f が D 上でリーマン積分可能 (リーマン可積分) とは $S = T$ となること. このとき,

$$S = \iint_D f(x, y) dx dy \text{ と表す.}$$

S を $f(x, y)$ の D 上での重積分といい, D を積分領域, f を被積分関数という.

以下, リーマン積分可能を単に積分可能ということにする.

例 61. • $D = [a, b] \times [c, d]$ とし, f を D 上での連続関数とする. このとき f は D 上で積分可能.(みんながよく知っている関数は積分可能.)

• $D = [0, 1] \times [0, 1]$ とし, D 上の有界関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \text{ も } y \text{ も 共に有理数} \\ 0 & \text{上以外} \end{cases}$$

とおくとき, 任意の D の分割 Δ について, $S_\Delta = 1$ であり, $T_\Delta = 0$ である. よって $S = 1$ かつ $T = 0$ より, f は D 上で積分可能ではない.⁶

⁴最大値最小値の存在は自明ではないので実は間違い. 本当は上限 (sup) と下限 (inf) を用いて

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}, \quad m_{ij} = \inf\{f(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

と書く. (おそらく上限や下限を習ってないと思うので, 今回は max, min で定義します.)

⁵ $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S_\Delta = S$ の意味は, Δ の長さが 0 になるように分割をとっていくと, S_Δ は S に限りなく近くという意味である.

⁶ルベーク積分は可能になる. 積分値は 0 となる. ルベーク積分はいい感じにリーマン積分を包含する概念である.

20 一般集合上での積分

定義 62. $D \subset \mathbb{R}^2$ を有界集合とし, ある正の数 $M > 0$ を $D \subset [-M, M] \times [-M, M]$ となるようにとる. $\tilde{D} = [-M, M] \times [-M, M]$ とおく.

$f(x, y)$ を D 上の有界関数として, f が D 上リーマン積分可能 (リーマン可積分) とは

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

とおくとき, \tilde{f} が \tilde{D} 上で積分可能であること. このとき

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(x, y) dx dy \text{ と定義する.}$$

定義 63. $D \subset \mathbb{R}^2$ を有界集合とする. D が面積確定 (ジョルダン可測) とは D 上の定数関数 $f(x, y) = 1$ が D 上で (リーマン) 積分可能であること. このとき

$$\text{Area}(D) = \iint_D dx dy = \iint_D 1 dx dy \text{ と表す.}$$

例 64. • $D = [a, b] \times [c, d]$ とすると D は面積確定である. 面積 $\text{Area}(D) = (b - a)(d - c)$ である.

- $\phi_1(x), \phi_2(x)$ を $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ となる $[a, b]$ 上の連続関数とする.
 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$ とおくととき, D は面積確定で,

$$\text{Area}(D) = \int_a^b \{\phi_2(x) - \phi_1(x)\} dx \text{ となる.}^7$$

特に半径 1 の円は $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$ と書けるので, $\text{Area}(D) = \pi$ となる.⁸ (みんながよく知っている図形は面積確定.)

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \text{ も } y \text{ も 共に有理数}\}$ とおくととき, 例 61 から D は面積確定ではない.

定理 65. D を面積確定な有界閉集合とし, f を D 上で連続とするととき, f は D 上で積分可能である.

以上から, みんながよく知っている図形の上での, みんながよく知っている関数の積分は可能である.

⁷第 10 回の資料によりわかる.

⁸これも第 10 回の資料によりわかる.

21 重積分の性質.

命題 66. D, D_1, D_2 を面積確定な有界閉集合とし, $f(x, y), g(x, y)$ を連続関数とする.

1. $\text{Area}(D_1 \cap D_2) = 0$ ならば

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f dx dy = \iint_{D_1} f dx dy + \iint_{D_2} f dx dy.$$

2. D 上 $f(x, y) \leq g(x, y)$ のとき,

$$\iint_D f dx dy \leq \iint_D g dx dy.$$

3. α を実数とすると,

$$\iint_D \{f + g\} dx dy = \iint_D f dx dy + \iint_D g dx dy, \quad \iint_D \alpha f dx dy = \alpha \iint_D f dx dy.$$

4. ある実数 $M > 0$ があって, D 上で $|f(x, y)| \leq M$ のとき,

$$\iint_D f dx dy \leq M \text{Area}(D).$$

22 数値積分の精度

定理 67. $D = [a, b] \times [c, d]$ とし, f を D 上の C^1 級関数とする.

$\max_{(x,y) \in D} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \right\} \leq K_1$ となる実数 K_1 をとる.

Δ を D の分割とすると,

$$(S_\Delta - T_\Delta) \leq 2K_1 \text{Area}(D) |\Delta| = 2K_1(b-a)(d-c) |\Delta| \text{ となる.}$$

定理 68 (区分求積法). $D = [a, b] \times [c, d]$ とし, f を D 上の C^1 級関数, $N > 0$ を正の自然

数とする. $\max_{(x,y) \in D} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \right\} \leq K_1$ となる実数 K_1 をとる.

$$I = \iint_D f dx dy, \quad \Sigma_N = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N f \left(a + i \frac{(b-a)}{N}, c + j \frac{(d-c)}{N} \right) \frac{(b-a)(d-c)}{N^2} \text{ とおくと,$$

$$|I - \Sigma_N| \leq \frac{K_1(b-a)(d-c)\{b-a+d-c\}}{N}.$$

とくに $\lim_{N \rightarrow \infty} \Sigma_N = I$ となる.

例 69. $D = [0, 1] \times [0, 1]$ とし, $f(x, y) = x^2 + y^2$ とする.

$$\max_{(x,y) \in D} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \right\} = \max_{(x,y) \in D} \{ |2x|, |2y| \} = 2$$

より, $K_1 = 2$ と取れる.

$$N \text{ を正の自然数とすると, } I = \iint_D f dx dy = \frac{2}{3}, \frac{K_1(b-a)(d-c)\{b-a+d-c\}}{N} = \frac{4}{N},$$

$$\Sigma_N = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N f\left(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}\right) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{i^2 + j^2}{N^4} \text{ であるので. } |I - \Sigma_N| = \left| \frac{2}{3} - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{i^2 + j^2}{N^4} \right| \leq \frac{4}{N}.$$

第10回. 累次積分 (川平先生の本, 第26章の内容)

岩井雅崇, 2020/12/15

23 縦線領域と累次積分

定義 70. $\phi_1(x), \phi_2(x)$ を $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ となる $[a, b]$ 上の連続関数とする.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

で表せられる領域を縦線領域という.

例 71. • $D = [a, b] \times [c, d]$ は縦線領域. $\phi_1(x) = c, \phi_2(x) = d$ とすれば良い.

• 縦線領域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ とおくと D は原点中心の半径1の円.

定理 72. 縦線領域を $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$ とし, $f(x, y)$ を D 上の連続関数とする. このとき, $f(x, y)$ は D 上で積分可能であり,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \text{ となる.}$$

これを $f(x, y)$ の累次積分という.

特に D は面積確定で

$$\text{Area}(D) = \iint_D dx dy = \int_a^b \{\phi_2(x) - \phi_1(x)\} dx.$$

例 73. $D = [0, 1] \times [0, 1], f(x, y) = x^2 + y^2$ とする. $\iint_D f(x, y) dx dy$ を求めよ.

(解.) $\phi_1(x) = 0, \phi_2(x) = 1$ とすると上の定理より,

$$\iint_D x^2 + y^2 dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 + y^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx = \int_0^1 x^2 + \frac{1}{3} dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

例 74. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ とする. $\text{Area}(D) = \iint_D dx dy$ を求めよ.

(解.) $\phi_1(x) = -\sqrt{1-x^2}, \phi_2(x) = \sqrt{1-x^2}$ とすると上の定理より,

$$\iint_D dx dy = \int_{-1}^1 \left\{ \sqrt{1-x^2} - \left(-\sqrt{1-x^2} \right) \right\} dx = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi.$$

つまり半径1の円の面積は π .

例 75. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$ とし, $f(x, y) = xe^{-y^2}$ とするとき, $\iint_D f(x, y) dx dy$ を求めよ.

(解.) 普通に定理を適用すると,

$$\iint_D xe^{-y^2} dx dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 xe^{-y^2} dy \right) dx$$

となるが, e^{-y^2} の不定積分がわからないため, ここで手詰まりとなる.

そこで $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$ に注意すると,

$$\begin{aligned} \iint_D xe^{-y^2} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} xe^{-y^2} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^2 e^{-y^2}}{2} \right]_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \frac{y e^{-y^2}}{2} dy = \left[\frac{-e^{-y^2}}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

24 変数変換公式

定義 76. $E \subset \mathbb{R}^2$ を集合とする. 点 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ が E の境界であるとは, 任意の正の数 $r > 0$ について $B_{(a,b)}(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq r\}$ とするとき, $B_{(a,b)}(r) \cap E \neq \phi$ かつ $B_{(a,b)}(r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus E) \neq \phi$ となること. E の境界の点からなる集合を ∂E とする.

9

例 77. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ とする. このとき E の境界の点の集合は

$$\partial E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} = 1\} \text{ となる.}$$

定義 78. $E \subset \mathbb{R}^2$ を面積確定な有界閉集合とし, 変数変換 Φ を次の通りとする.

$$\begin{aligned} \Phi: E &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

Φ が重積分の変数変換の条件を満たすとは, 次の条件 (1)-(3) を満たすこと.

[条件 (1).] $x(u, v), y(u, v)$ は C^1 級である.

[条件 (2).] $D = \Phi(E)$ とするとき, E の境界以外で Φ は 1 対 1 写像.

[条件 (3).] Φ のヤコビ行列

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

とし, ヤコビアンを $\det D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ とするとき, $\det D\Phi$ は E の境界以外で 0 にならない.

例 79. • $E = [0, 1] \times [0, 1]$ とし,

$$\begin{aligned} \Phi: E &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (u + v, v) \end{aligned}$$

とすると, 条件 (1)-(3) を満たす. 特に $D\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ かつ $\det D\Phi = 1 \neq 0$ である.

• $E = [0, 1] \times [0, 1]$ とし,

$$\begin{aligned} \Phi: E &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (u + v, u + v) \end{aligned}$$

⁹ $B_{(a,b)}(r) \cap E \neq \phi$ とは $B_{(a,b)}(r) \cap E$ が空集合でないこと. つまり, ある元 $(c, d) \in B_{(a,b)}(r) \cap E$ が存在すること.

とすると, 条件 (3) を満たさない. 実際 $D\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ かつ $\det D\Phi = 0$ である.

- $E = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ とし,

$$\begin{aligned} \Phi: E &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

とすると, 条件 (1)-(3) を満たし. $D = \Phi(E) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ となる. 特に

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \text{ かつ } \det D\Phi = r \text{ である.}^{10}$$

- $E = [0, 1] \times [0, 4\pi]$ とし,

$$\begin{aligned} \Phi: E &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

とすると, 条件 (2) を満たさない.¹¹

定理 80 (多重積分の変数変換公式). $E \subset \mathbb{R}^2$ を面積確定な有界閉集合とし, 変数変換 Φ を次の通りとする.

$$\begin{aligned} \Phi: E &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

Φ は重積分の変数変換の条件 (条件 (1)-(3)) を満たすとする.

関数 $f(x, y)$ が $D = \Phi(E)$ 上で積分可能であるとき

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_E f(x(u, v), y(u, v)) |\det D\Phi| du dv \text{ となる.}$$

例 81. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ とする. $\iint_D e^{-x^2 - y^2} dx dy$ を求めよ.

(解.) $E = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ とし,

$$\begin{aligned} \Phi: E &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

とすると, 条件 (1)-(3) を満たし. $D = \Phi(E)$ かつ $\det D\Phi = r$ である.

¹⁰この例では $E \setminus \partial E = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$ であるため, E の境界以外の集合である $E \setminus \partial E$ 上で $\det D\Phi = r$ は 0 ではない.

¹¹ $\Phi(\frac{1}{2}, \pi) = \Phi(\frac{1}{2}, 3\pi) = (-\frac{1}{2}, 0)$ であるため 1 対 1 ではない. 1 対 1 に関しては第 4 回授業を参照のこと.

以上より多重積分の変数変換の公式から

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy &= \iint_E e^{-(r \cos \theta)^2 - (r \sin \theta)^2} |r| dr d\theta \\ &= \iint_E e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 e^{-r^2} r dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - e^{-1}}{2} d\theta = \pi \left(1 - \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

例 82. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + 2y| \leq 1, |x - y| \leq 1\}$ とする. $\iint_D (x - y)^2 dx dy$ を求めよ.

(解.) $E = [-1, 1] \times [-1, 1]$ とし,

$$\begin{aligned} \Phi: E &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto \left(\frac{u+2v}{3}, \frac{u-v}{3} \right) \end{aligned}$$

とすると, 条件 (1)-(3) を満たし, $D = \Phi(E)$ かつ $D\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ かつ $\det D\Phi = -\frac{1}{3} \neq 0$ である. 以上より多重積分の変数変換の公式から,

$$\begin{aligned} \iint_D (x - y)^2 dx dy &= \iint_E \left(\frac{u + 2v}{3} - \frac{u - v}{3} \right)^2 \left| -\frac{1}{3} \right| du dv \\ &= \iint_E \frac{v^2}{3} du dv = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{v^2}{3} dv \right) du = \int_{-1}^1 \left[\frac{v^3}{9} \right]_{-1}^1 du = \int_{-1}^1 \frac{2}{9} du = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

第12回. 広義積分とガンマ関数 (川平先生の本, 第12・27章の内容)

岩井雅崇, 2021/01/12

25 広義積分

この回は1変数の積分に関しても取り扱う。(ガウス積分以外は1変数の積分の話である.)

定義 83. $f(x)$ を $[a, b)$ 上の連続関数とする. ($b = +\infty$ も許す.) 左極限 $\lim_{z \rightarrow b-0} \int_a^z f(x) dx$ が存在するとき, 広義積分 $\int_a^b f(x) dx$ は収束する とい

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{z \rightarrow b-0} \int_a^z f(x) dx \text{ とする.}$$

この積分を広義積分という. 極限が存在しないときは, $\int_a^b f(x) dx$ は発散する という.

例 84. • $\int_1^\infty x^p dx$ は $p < -1$ のとき収束し, $p \geq -1$ のとき発散する.

• $\int_0^1 x^p dx$ は $p > -1$ のとき収束し, $p \leq -1$ のとき発散する.

定理 85. $f(x)$ を $[a, b)$ 上の連続関数とする.

1. $b = +\infty$ のとき, ある $\lambda > 1$ があって, $f(x)x^\lambda$ が $[a, +\infty)$ 上で有界ならば, 広義積分 $\int_a^\infty f(x) dx$ は収束する.
2. b が実数のとき ($b < +\infty$ のとき), ある $\mu < 1$ があって, $f(x)(x-b)^\mu$ が $[a, b)$ 上で有界ならば, 広義積分 $\int_a^b f(x) dx$ は収束する.

12

例 86. 広義積分 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ は収束する. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} x^2 = 0$ から, $e^{-x^2} x^2$ は $[0, +\infty)$ 上で有界のため, $\lambda = 2$ として定理 85 を適応すれば良い.

例 87. 実数 $s > 0$ について, 広義積分 $\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ は収束する.

(証.) $\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx = \int_1^\infty e^{-x} x^{s-1} dx + \int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$ より両方の広義積分が収束することを示す.

(1). $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} x^{s-1}) x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^{s+1} = 0$ より定理 85 から広義積分 $\int_1^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ は収束する.

(2). $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x} x^{s-1}) x^{1-s} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1$ であり, $1-s < 1$ のため, 定理 85 から広義積分 $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$ は収束する.

定理 88 (ガウス積分).

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

¹²関数 $g(x)$ が $[a, b)$ 上で有界とは, ある正の数 $M > 0$ があって, 任意の $x \in [a, b)$ について $|g(x)| < M$ となること.

26 ガンマ関数とベータ関数

定義 89.

- $s > 0$ なる実数 s について, ガンマ関数 $\Gamma(s)$ を

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \text{ と定義する.}$$

- $p > 0, q > 0$ なる実数 p, q について, ベータ関数 $B(p, q)$ を

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \text{ と定義する.}$$

ガンマ関数, ベータ関数における広義積分が収束することは定理 85 から分かる. ガンマ関数は階乗の概念の一般化と思って良い.

定理 90. ガンマ関数 $\Gamma(s)$, ベータ関数 $B(p, q)$ について次が成り立つ.

1. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \Gamma(1) = 1$. 特に正の自然数 n について $\Gamma(n+1) = n!$.
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. 特に正の自然数 n について $\Gamma(\frac{1}{2} + n) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$.
3. $B(p, q) = B(q, p)$.
4. $B(p, q) = B(p+1, q) + B(p, q+1)$, $B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q)$, $B(p, q+1) = \frac{q}{p+q} B(p, q)$.
5. $B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2p-1} (\sin t)^{2q-1} dt$.
6. $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.
7. $B(1, 1) = 1, B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$. 特に l, m を正の自然数として, $B(l, m) = \frac{(l-1)!(m-1)!}{(l+m-1)!}$.

13

例 91. n を自然数として,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt \text{ の値を求めよ.}$$

(解.) 定理 90 から

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2(\frac{n+1}{2})-1} (\sin t)^{2(\frac{1}{2})-1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ となる.}$$

¹³ $n!!$ は二重階乗と呼ばれる. n を正の自然数として, $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$, $(2n)!! = (2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2$ である. 便宜上 $0!! = 1$ とする. ($0! = 1$ であるので.)

(1). n が偶数のとき. $n = 2m$ とおくと, 定理 90 から

$$I_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(2m-1)!!\sqrt{\pi}}{2^m(m!)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ である.}$$

(2). n が奇数のとき. $n = 2m+1$ とおくと, 定理 90 から

$$I_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{2^{m+1}(m!)}{(2m+1)!!\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{(n-1)!!}{n!!} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \text{ である.}$$

例 92 (ウォリスの公式).

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m-1)} \cdot \frac{(2(m-1))^2}{(2m-1)(2m-3)} \cdots \frac{2^2}{3 \cdot 1} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - \frac{1}{4m^2})} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{4(m-1)^2})} \cdots \frac{1}{(1 - \frac{1}{4})} \text{ となる.} \end{aligned}$$

¹⁴ つまり

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdots \text{ である.}$$

(証.) $J(m) = \frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m-1)} \cdot \frac{(2(m-1))^2}{(2m-1)(2m-3)} \cdots \frac{2^2}{3 \cdot 1}$ とおく. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$ とおくと, $I_{2m+2} \leq I_{2m+1} \leq I_{2m}$ より, 例 91 から

$$\frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!} \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \leq \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2} \text{ である.}$$

この不等式の両辺に $\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}$ をかけると

$$\frac{2m+1}{2m+2} \frac{\pi}{2} \leq J(m) \leq \frac{\pi}{2}$$

であるため, $\lim_{m \rightarrow \infty} J(m) = \frac{\pi}{2}$ である.

27 他の資料・動画について

以下に示す資料や動画の数学的な厳密性に関しては保証しない. (おそらく大丈夫だと思うが, 詳しく見ていないので保証はできない. 直感的なわかりやすさを第一にすると, 厳密性は二の次になるし... あと広告が出てくるリンクもあるので注意すること.)

ガウス積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ は正規分布 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ と関わりが深い. 正規分布に関しては統計でよく使うことになる. (今回その話をしようとしたが意外とまとめるのが難しかったのでやめた.)

¹⁴積の記号を使って書けば,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - \frac{1}{4m^2})} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{4(m-1)^2})} \cdots \frac{1}{(1 - \frac{1}{4})} = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - \frac{1}{4i^2})} \text{ である.}$$

- 株式会社 Albert の記事 https://www.albert2005.co.jp/knowledge/statistics_analysis/probability_distribution/normal_distribution
- マイナビニュース 正規分布の基本的な考え方 <https://news.mynavi.jp/article/excelanalytics-57/>

とか参考になるかもしれません。(偏差値・標準偏差も正規分布から来ているので調べるといいかもしれません。)

ガンマ関数に関しては YouTube にいっぱい動画があるのでそちらを参考にするといいかもしれません。例えば

- 予備校のノリで学ぶ「大学の数学・物理」【大学数学】ガンマ関数①(定義と性質)【解析学】
<https://www.youtube.com/watch?v=K-HwL3N4P5Q>
- 予備校のノリで学ぶ「大学の数学・物理」【大学数学】ガンマ関数②(収束性の証明)【解析学】
<https://www.youtube.com/watch?v=dy40up4jnc0>
- 予備校のノリで学ぶ「大学の数学・物理」【大学数学】ガンマ関数③(n 次元球の体積)【解析学】
<https://www.youtube.com/watch?v=AEj6M0oAgL4&t=1001s>

などが参考になるかもしれません。特に n 次元球の体積はこの授業でやらなかったののためになるかもしれません。¹⁵

¹⁵サムネイルにある $(1.5)!$ の値は定理 90 の 1 と 2 から $\Gamma(\frac{3}{2} + 1) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ と思えます。

第12回追加資料. 広義積分の収束性の判定方法 (川平先生の本, 第12章の内容)

岩井雅崇, 2021/01/12

広義積分の収束の判定法に関して, 少々説明が不足していると感じたため, 追加の資料を作りました. 期末レポートの第6問を解答する際のヒントになればと思います.

28 広義積分の判定法のおさらい

定理 93. $f(x)$ を $[a, b)$ 上の連続関数とする.

1. $b = +\infty$ のとき, ある $\lambda > 1$ があって, $f(x)x^\lambda$ が $[a, +\infty)$ 上で有界ならば, 広義積分 $\int_a^\infty f(x)dx$ は収束する.
2. b が実数のとき ($b < +\infty$ のとき), ある $\mu < 1$ があって, $f(x)(x-b)^\mu$ が $[a, b)$ 上で有界ならば, 広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は収束する.

関数 $f(x)$ が $[a, b)$ 上で有界とは, ある正の数 $M > 0$ があって, 任意の $x \in [a, b)$ について $|f(x)| < M$ となること.

定理 93(広義積分の収束判定法) を使うにあたって, 「 $f(x)x^\lambda$ が $[a, +\infty)$ 上で有界であること」や「 $f(x)(x-b)^\mu$ が $[a, b)$ 上で有界であること」を示さないといけません. これに関しては次の主張が成り立ちます.

主張 94. a, b を実数とする.

1. $f(x)$ を $[a, +\infty)$ 上の連続関数とする. ある実数 C があって, $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = C$ ならば $f(x)$ は $[a, +\infty)$ 上で有界.
2. $f(x)$ を $[a, b)$ 上の連続関数とする. ある実数 C があって, $\lim_{x \rightarrow b} |f(x)| = C$ ならば $f(x)$ は $[a, b)$ 上で有界.

(主張 94 の証明.) (2) のみ証明します. (1) も同様です.

$\lim_{x \rightarrow b} |f(x)| = C$ より, $\delta < \frac{b-a}{2}$ となる正の数 $\delta > 0$ があって, 任意の $x \in (b-\delta, b)$ について $|f(x)| < C+1$ となる. (x が b の近くにあれば $|f(x)|$ は C に近いからです). 一方 $[a, b-\frac{\delta}{2}]$ 上で $f(x)$ は連続であるので, $[a, b-\frac{\delta}{2}]$ 上で $f(x)$ は最大値 A , 最小値 B を持つ.¹⁶

よって $M = \max\{|A|+1, |B|+1, C+1\}$ とおけば, 任意の $x \in [a, b)$ について $|f(x)| < M$ となり, $f(x)$ は有界です.

29 広義積分の判定法の使い方.

実際に授業でやった例で見えていきます.

¹⁶講義第一回目で行いました. 最大最小の存在に関する定理です.

例 95. 実数 $s > 0$ について, 広義積分 $\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$ は収束する.

(証.) $f(x) = e^{-x} x^{s-1}$, $\mu = 1 - s$ とおくと, $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)x^\mu| = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1$ である. よって, 主張 94 から $f(x)x^\mu$ は $(0, 1]$ 上で有界である. $\mu = 1 - s < 1$ のため, 定理 93 から広義積分 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx$ は収束する.

例 96. 実数 $s > 0$ について, 広義積分 $\int_1^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ は収束する.

(証.) $f(x) = e^{-x} x^{s-1}$, $\lambda = 2$ とおくと, $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)x^\lambda| = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} x^{s+1} = 0$ である. よって, 主張 94 から $f(x)x^\lambda$ は $[1, +\infty)$ 上で有界である. $\lambda = 2 > 1$ のため, 定理 93 から広義積分 $\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ は収束する.

以上から実数 $s > 0$ について, 広義積分 $\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ は収束する.

例 97. $p > 0, q > 0$ なる実数 p, q について, 広義積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ は収束する.

(証.) $f(x) = x^{p-1} (1-x)^{q-1}$, $\mu = 1 - p$ とおくと, $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)x^\mu| = \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{q-1} = 1$ である. よって, 主張 94 から $f(x)(x-0)^\mu$ は $(0, \frac{1}{2}]$ 上で有界である. $\mu = 1 - p < 1$ のため, 定理 93 から広義積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ は収束する.

例 98. $p > 0, q > 0$ なる実数 p, q について, 広義積分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ は収束する.

(証.) $f(x) = x^{p-1} (1-x)^{q-1}$, $\mu = 1 - q$ とおくと, $\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)(1-x)^\mu| = \lim_{x \rightarrow 1} x^{p-1} = 1$ である. よって, 主張 94 から $f(x)(1-x)^\mu$ は $[\frac{1}{2}, 1)$ 上で有界である. $|f(x)(1-x)^\mu| = |f(x)(x-1)^\mu|$ であるので, $f(x)(x-1)^\mu$ は $[\frac{1}{2}, 1)$ 上で有界である. 以上より, $\mu = 1 - q < 1$ のため, 定理 93 から広義積分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ は収束する.

以上から $p > 0, q > 0$ なる実数 p, q について, 広義積分 $\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ は収束する.

まとめると次のようになります.

1. $f(x)$ を $[a, \infty)$ 上の連続関数とする. 「広義積分 $\int_a^\infty f(x)dx$ は収束する」ことを示すには, ある $\lambda > 1$ で $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)x^\lambda| = C$ (C は実数) となるものを探せば良い. (ただし解答の書き方は上の例のようにすること.)
2. $f(x)$ を $[a, b)$ 上の連続関数とする. 「広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は収束する」ことを示すには, ある $\mu < 1$ で $\lim_{x \rightarrow b} |f(x)(x-b)^\mu| = C$ (C は実数) となるものを探せば良い. (ただし解答の書き方は上の例のようにすること.)

第13回. 線積分とグリーンの定理 (川平先生の本, 第11・29章の内容)

岩井雅崇, 2021/01/19

30 はじめに

第13回と第14回はベクトル解析の初歩 (イントロ) に関する授業を行う. 授業準備のために, 以下の文献も参考した.

- 川平友規先生 解析学概論第三第四 (ベクトル解析) available at <http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira/courses/17W-kaiseki.html>

時々この文献を引用する.(引用する際は”川平先生の pdf”と呼ぶことにする.)

他にも第14回の資料の最後に参考文献を書きおいたので, 必要であれば見てほしい.

31 線積分

定義 99. $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とする. $u(x, y), v(x, y)$ を D 上の C^n 級関数として,

$$\begin{aligned} V: D &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (u(x, y), v(x, y)) \end{aligned}$$

となる (ベクトル値の) 関数 V を D 上の C^n 級ベクトル場という.

例 100. \mathbb{R}^2 上のベクトル場 $V(x, y) = (-y, x)$ を考えると, これは反時計回りの渦まきの形になっている.

定義 101.

- 関数 $\vec{p}(t)$ を次で定める.

$$\begin{aligned} \vec{p}: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \vec{p}(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

関数 $\vec{p}(t)$ が滑らかな曲線とは次の2条件を満たすこと.

条件 1. $x(t), y(t)$ が C^1 級.

条件 2. 任意の $c \in (a, b)$ について, 速度ベクトル $\frac{d\vec{p}}{dt}(c) = \left(\frac{dx}{dt}(c), \frac{dy}{dt}(c) \right)$ がゼロベクトル $\vec{0} = (0, 0)$ ではない.

- 曲線 $C: \vec{p}(t) (a \leq t \leq b)$ が区分的に滑らかな曲線とは滑らかな曲線を端点でつないだもの.

例 102. 円周は滑らかな曲線であり、長方形の周は区分的に滑らかな曲線である。

定義 103. $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とし、 D 上の C^1 級ベクトル場を $V(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ とする。 D 内の滑らかな曲線 $C: \vec{p}(t)(a \leq t \leq b)$ について V の曲線 C に沿った線積分を

$$\begin{aligned} \int_C V(\vec{p}) d\vec{p} &= \int_a^b \left(V(\vec{p}(t)) \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \left(u(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + v(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt} \right) dt \text{ とする.} \end{aligned}$$

この線積分 $\int_C V(\vec{p}) d\vec{p}$ を $\int_C u dx + v dy$ と書くこともある。

例 104. C^1 級ベクトル場 $V(x, y) = (2x, 2y)$ とし、滑らかな曲線 $C: \vec{p}(t) = (t, t^2)(0 \leq t \leq 1)$ とする。 V の C に沿った線積分 $\int_C V(\vec{p}) d\vec{p} = \int_C 2x dx + 2y dy$ の値を求めよ。

(解.) $V(\vec{p}(t)) = (2t, 2t^2)$ かつ $\frac{d\vec{p}}{dt} = (1, 2t)$ より、

$$\int_C 2x dx + 2y dy = \int_C \left(V(\vec{p}(t)) \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \right) dt = \int_0^1 (2t \cdot 1 + 2t^2 \cdot 2t) dt = \int_0^1 (2t + 4t^3) dt = 2.$$

例 105 (ハイキングの原理). $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とし、 $F(x, y): D \rightarrow \mathbb{R}$ を C^1 級関数とする。勾配ベクトル場を $\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)$ と定める。 D 内の滑らかな曲線 $C: \vec{p}(t)(a \leq t \leq b)$ とするとき

$$\int_C \nabla F(\vec{p}) d\vec{p} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_a^b \frac{dF}{dt}(\vec{p}(t)) dt = F(\vec{p}(b)) - F(\vec{p}(a)).$$

つまり、 $\vec{\alpha} = \vec{p}(a)$, $\vec{\beta} = \vec{p}(b)$ とおくと、 $\int_C \nabla F(\vec{p}) d\vec{p} = F(\vec{\beta}) - F(\vec{\alpha})$ である。

32 グリーンの定理

定義 106. \mathbb{R}^2 内の区分的に滑らかな曲線 $C: \vec{p}(t)(a \leq t \leq b)$ が単純閉曲線とは次の二つの条件を満たすこと。

条件 1. 始点と終点一致する。(つまり $\vec{p}(a) = \vec{p}(b)$.)

条件 2. 自己交差しない。(つまり $a < s < t < b$ なる s, t について $\vec{p}(s) \neq \vec{p}(t)$.)

¹⁷⁾ 曲線 $C: \vec{p}(t)(a \leq t \leq b)$ が区分的に滑らかな曲線”という定義を厳密にいうなら、「有限個の $c \in (a, b)$ を除いて、 $x(t), y(t)$ が C^1 級であり、速度ベクトル $\frac{d\vec{p}}{dt}(t) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t) \right)$ がゼロベクトル $\vec{0}$ ではない」。

¹⁸⁾ 線積分 $\int_C V(\vec{p}) d\vec{p}$ を $\int_C u dx + v dy$ と書くのは、(向きを込めた場合) この積分がパラメータの取り方に寄らないからである。詳しくは川平先生の pdf の命題 4.2 を参照せよ。(連鎖律からすぐに分かるのだが...)

定理 107 (グリーンの定理). \mathbb{R}^2 内の単純閉曲線 $C: \vec{p}(t) = (x(t), y(t)) (a \leq t \leq b)$ について $D \subset \mathbb{R}^2$ を C で囲まれる有界な閉集合とする. C の進行方向の左側に D があると仮定する. D を含む開集合上で定義された C^1 級ベクトル場 $V(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ について以下が成り立つ.

$$\int_C V(\vec{p}) d\vec{p} = \int_C u dx + v dy = \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\text{特に Area}(D) = \int_C x dy = \int_C -y dx \text{ が成り立つ.}$$

$D \subset \mathbb{R}^2$ を C で囲まれる有界閉集合および, C の進行方向の左側に D があるとは右の図のようなことが成り立つことである

例 108. $C: \vec{p}(t) = (\cos t, \sin t) (0 \leq t \leq 2\pi)$ とし, \mathbb{R}^2 上のベクトル場 $V(x, y) = (x^2 - y^2, -2xy)$ とする.

線積分 $\int_C V(\vec{p}) d\vec{p} = \int_C (x^2 - y^2) dx - 2xy dy$ を求めよ.

(解.) 普通に計算すると,

$$\begin{aligned} \int_C V(\vec{p}) d\vec{p} &= \int_0^{2\pi} \left\{ (\cos^2 t - \sin^2 t) \frac{dx}{dt} - (2 \sin t \cos t) \frac{dy}{dt} \right\} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \{-\cos^2 t \sin t + \sin^3 t - 2 \sin t \cos^2 t\} dt = (\text{計算略}) = 0 \end{aligned}$$

グリーンの定理を使う方法は以下のようになる.

C で囲まれた領域 D とすると, D は原点中心の半径 1 の円である. $V(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x^2 - y^2, -2xy)$ は D を含む開集合上で定義された C^1 級ベクトル場である.¹⁹ よってグリーンの定理の仮定を満たす.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(-2xy)}{\partial x} = -2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} = -2y \text{ であるため,}$$

$$\int_C (x^2 - y^2) dx - 2xy dy = \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (-2y + 2y) dx dy = 0.$$

例 109. a, b を正の数として, 楕円 D を下で定める.

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a, -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right\}.$$

D の面積 $\text{Area}(D)$ を求めよ.

(解.) 普通に計算すると,

$$\text{Area}(D) = \int_D dx dy = \int_{-a}^a \left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - (-b)\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) dx = \int_{-a}^a 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = (\text{計算略}) = \pi ab.$$

¹⁹今回は D を含む開集合として \mathbb{R}^2 が取れる.

グリーンの定理を使うと以下の通りになる. $C : \vec{p}(t) = (a \cos t, b \sin t)(0 \leq t \leq 2\pi)$ と置けば, 楕円 D は C で囲まれた領域となる. よってグリーンの定理が使えて, $\frac{dy}{dt} = b \cos t$ のため,

$$\text{Area}(D) = \int_C x dy = \int_0^{2\pi} a \cos t \frac{dy}{dt} dt = \int_0^{2\pi} ab \cos^2 t dt = \pi ab.$$

となる. (どちらが楽かは皆さんに委ねます.)

第14回. 面積分と体積分, 表面積と体積 (川平先生の本, 第11・28章の内容)

岩井雅崇, 2021/01/26

33 はじめに

第13回と第14回はベクトル解析の初歩(イントロ)に関する授業を行う。授業準備のために, 以下の文献も参考した。

- 川平友規先生 解析学概論第三第四(ベクトル解析) available at <http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira/courses/17W-kaiseki.html>

時々この文献を引用する。(引用する際は”川平先生の pdf”と呼ぶことにする。)

34 曲線の長さ(復習)

定義 110. \mathbb{R}^2 内の滑らかな曲線 $C: \vec{p}(t) = (x(t), y(t)) (a \leq t \leq b)$ について. 曲線 C の長さ $l(C)$ を

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{p}(t)}{dt} \right\| dt \text{ と定義する.}$$

35 面積分

定義 111. $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ とする.

- ベクトル \vec{a} の長さ $\|\vec{a}\|$ を $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ とする.
- 外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ を

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \text{ とする.}$$

例 112. $\vec{a} = (1, 0, 0), \vec{b} = (1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ とする.

$\|\vec{a}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$ かつ, $\|\vec{b}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}$ である.

また, $\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, 2)$ かつ, $\vec{b} \times \vec{a} = (0, 0, -2)$ である.

定義 113 (川平先生の pdf 6 章(プリント 06) 参照).

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ が閉領域とは, ある領域 D があって, $\Omega = D \cup \partial D$ となること. (つまり Ω が D と D の境界の和集合となること.)
- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を閉領域とし, $x(s, t), y(s, t), z(s, t)$ を Ω 上の連続関数とする.

$$\begin{aligned} \vec{p}: \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\mapsto (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \end{aligned}$$

という関数 $\vec{p}(s, t)$ を考える.

$$S = \{\vec{p}(s, t) : (s, t) \in \Omega\} = \{(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) : (s, t) \in \Omega\}$$

を \mathbb{R}^3 内の曲面という.

- \mathbb{R}^3 内の曲面 $S : \vec{p}(s, t) ((s, t) \in \Omega)$ について, S が \mathbb{R}^3 内の滑らかな曲面であるとは, 次の二つの条件を満たすこと.

条件 1. $x(s, t), y(s, t), z(s, t)$ は C^1 級.

条件 2. $\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} = \left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s} \right)$ と $\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right)$ が一次独立となる. (つまり $\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \neq \vec{0}$ となること.)

- \mathbb{R}^3 内の滑らかな曲面 $S : \vec{p}(s, t) ((s, t) \in \Omega)$ について

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}}{\left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right\|} \text{ を単位法線ベクトルという.}$$

例 114. $\Omega = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{s^2 + t^2} \leq 1\}$ とする. これは閉領域である.²⁰

$$\begin{aligned} \vec{p}: \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\mapsto (s, t, \sqrt{1 - s^2 - t^2}) \end{aligned} \quad \text{とすると,}$$

$$S = \{\vec{p}(s, t) : (s, t) \in \Omega\} = \{(x, y, z) : 0 \leq z, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

つまり S は原点中心半径 1 の球の上半分の表面である.

また $\frac{\partial \vec{p}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$ を計算すると,

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} = \left(1, 0, \frac{-s}{\sqrt{1 - s^2 - t^2}} \right), \quad \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \left(0, 1, \frac{-t}{\sqrt{1 - s^2 - t^2}} \right) \text{ であるため,}$$

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \left(\frac{s}{\sqrt{1 - s^2 - t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1 - s^2 - t^2}}, 1 \right).$$

よって Ω 上で $\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \neq \vec{0}$ より S は滑らかな曲面である.

$$\left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right\| = \sqrt{\frac{s^2}{1 - s^2 - t^2} + \frac{t^2}{1 - s^2 - t^2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2 - t^2}} \text{ であるため,}$$

$$\text{単位法線ベクトルは } \vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}}{\left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right\|} = (s, t, \sqrt{1 - s^2 - t^2}) \text{ となる.}$$

²⁰ $D = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{s^2 + t^2} < 1\}$ とすれば $\Omega = D \cup \partial D$ となる.

定義 115 (川平先生の pdf 6 章 (プリント 06) 参照).

\mathbb{R}^3 内の滑らかな曲面 $S : \vec{p}(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) ((s, t) \in \Omega)$ とし, $F(x, y, z)$ を S を含む開集合上で定義された C^1 級関数とする. 関数 F の曲面 S 上での面積分を

$$\begin{aligned} \iint_S F(\vec{p}) dA &= \iint_{\Omega} F(\vec{p}(s, t)) \left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right\| ds dt \\ &= \iint_{\Omega} F(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) \left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right\| ds dt \text{ と定義する.} \end{aligned}$$

特に S の表面積 $\text{Area}(S)$ を

$$\text{Area}(S) = \iint_S 1 dA = \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right\| ds dt \text{ と定義する.}$$

例 116. $S = \{\vec{p}(s, t) : (s, t) \in \Omega\} = \{(x, y, z) : 0 \leq z, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とするとき, S の表面積 $\text{Area}(S) = \iint_S dA$ を求めよ.

(解.) 例 114 から, $\Omega = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{s^2 + t^2} \leq 1\}$, $\vec{p}(s, t) = (s, t, \sqrt{1 - s^2 - t^2})$ とすると, $S = \{\vec{p}(s, t) : (s, t) \in \Omega\}$ かつ $\left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right\| = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2 - t^2}}$ である.

以上より,

$$\iint_S dA = \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \right\| ds dt = \iint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{1 - s^2 - t^2}} ds dt = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} dr d\theta = 2\pi.$$

よって, S (原点中心の半径 1 の球の表面の上半分) の表面積は 2π である.

これにより原点中心の半径 1 の球の表面積は $2\pi \times 2 = 4\pi$ である.

より一般に原点中心の半径 $r > 0$ の球の表面積は $4\pi r^2$ である.²¹

定理 117. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を閉領域とし, $f(s, t)$ を Ω 上の非負の C^1 級関数とする.

このとき $S = \{(s, t, f(s, t)) : (s, t) \in \Omega\}$ は滑らかな曲面となり, 曲面積 $\text{Area}(S)$ は

$$\text{Area}(S) = \iint_{\Omega} \left(\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + 1} \right) ds dt \text{ で与えられる.}$$

36 体積分

定義 118 (川平先生の pdf 11 章 (プリント 11) 参照).

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ が閉領域とし, ϕ_1, ϕ_2 を $\phi_1(x, y) \leq \phi_2(x, y)$ となる Ω 上の連続関数とする.

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$$

²¹厳密にやるなら $\Omega = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{s^2 + t^2} \leq r\}$, $\vec{p}(s, t) = (s, t, \sqrt{r^2 - s^2 - t^2})$ として同じ計算をする.

となる有界閉集合 K を z 方向の線領域という.

- K を z 方向の線領域とし, $F(x, y, z)$ を K を含むある開集合上で定義された C^1 級関数とする. $F(x, y, z)$ の K 上での体積分を

$$\iiint_K F(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega} \left(\int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} F(x, y, z) dz \right) dx dy \text{ と定義する.}$$

特に K の体積 $\text{Vol}(K)$ を

$$\text{Vol}(K) = \iiint_K 1 dx dy dz = \iint_{\Omega} \{ \phi_2(x, y) - \phi_1(x, y) \} dx dy \text{ と定義する.}$$

例 119. $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ とする. K の体積 $\text{Vol}(K) = \iiint_K 1 dx dy dz$ を求めよ.

(解.) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$ とし, $\phi_1(x, y) = 0, \phi_2(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ とすると, $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$ となる. よって,

$$\iiint_K 1 dx dy dz = \iint_{\Omega} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\sqrt{1 - r^2}) r dr d\theta = \frac{2\pi}{3}.$$

よって, K (原点中心の半径 1 の球の上半分) の体積は $\frac{2\pi}{3}$ である.

これにより原点中心の半径 1 の球の体積は $\frac{2\pi}{3} \times 2 = \frac{4\pi}{3}$ である.

より一般に原点中心の半径 $r > 0$ の球の表面積は $\frac{4\pi r^3}{3}$ である.²²

例 120. 底面の半径 $R > 0$, 高さが $h > 0$ の円錐の体積を求めよ.

(解.) 小学校でやった知識を用いると, (円錐の体積) = (底面積) \times (高さ) $\times \frac{1}{3}$ により, 体積は $\pi R^2 \times h \times \frac{1}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}$.

体積分を使うと次の通りである. $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq R\}$ とすると, 円錐は

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, 0 \leq z \leq h \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \right) \right\}$$

という z 方向の線領域 K で表せられる. 以上より,

$$\text{Vol}(K) = \iint_{\Omega} h \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \right) dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R h \left(1 - \frac{r}{R} \right) r dr \right) d\theta = (\text{計算略}) = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

よって 底面の半径 $R > 0$, 高さが $h > 0$ の円錐の体積は $\frac{\pi R^2 h}{3}$ である.²³

²² 厳密にやるなら $\Omega = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{s^2 + t^2} \leq r\}$, $\phi_1(x, y) = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, $\phi_2(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ とし て同じ計算をする.

²³ 小学校以来, なぜ $\frac{1}{3}$ が出てくるのだらうと思った人も多いかもしれないが, これは積分による結果で出たものである. あともっと簡単な求め方もある.

37 最後に

第13回と第14回はベクトル解析の初歩(イントロ)に関する授業を行った。ベクトル解析は電磁気学などいろいろなところでお世話になる。(もしかしたら電磁気学や他の授業で詳しく学ぶかもしれませんが。)

ベクトル解析に関して、より詳しいことを学びたい人は

- 川平友規先生 解析学概論第三第四(ベクトル解析) available at <http://www.math.titech.ac.jp/~kawahira/courses/17W-kaiseki.html>

を参考にすると良い。図などが綺麗に揃っててものすごく分かり易かった。

空間内の曲線や曲面に関しては

- 小林昭七 曲線と曲面の微分幾何(裳華房)

が数学的に厳密で良いかもしれない。

私が10年前にベクトル解析を学んだときに使った本は

- 渡辺正 ベクトル解析の基礎と応用 新数理ライブラリM5(サイエンス社)

である。結構ラフに書いていて、数学的な厳密性抜きで学べた気がする。もっともこの本に限らず、ネットで調べれば色々な本が見つかるので、各自調べてみて吟味してください。²⁴

他にも”予備校のノリで学ぶ「大学の数学・物理」”チャンネルに再生リスト”ベクトル解析”や”電磁気学”があるので、ベクトル解析につまづいたらこちらで補うのもいいかもしれません。(直感的にもものすごくわかりやすかったです)。

²⁴ 「スバラシク実力がつく」と評判のベクトル解析キャンパス・ゼミー大学の数学がこんなに分かる!単位なんて楽に取れる!(マセマ出版社)」という本もありますし...

もしかしたら私の授業の内容を「スバラシク実力がつく」と評判の微分積分キャンパス・ゼミー大学の数学がこんなに分かる!単位なんて楽に取れる!(マセマ出版社)」という本で勉強している人がいるかもしれません。もしこの本読んで私の授業の単位を楽に取れた場合はご一報ください。以後の授業の参考にいたします。