

OpenAI Math Digest

CATALOGUE 356

GigliによるAlexandrov曲率の特徴付け

総括・論文間のつながりと2篇の証明概説

独立した非公式の読解ガイド・日本語版

収録版: 2026-10-19

制作: Masataka Iwai・大阪大学

AI生成の解説には誤りや不正確な説明が含まれる可能性があります。重要な主張・証明は原論文でご確認ください。本冊子はWebサイトの解説をまとめたもので、原論文そのものではありません。専門家査読・形式検証は未実施です。

目次

総括に続き、公式カタログ順で全2篇の解説を収録しています。目次・引用はクリックできます。横長の表は紙面向けの項目一覧に組み直し、主張と参照先を保持しています。

00・カタログ356 総括	3
01・Gigli's distributional curvature characterization of Alexandrov spaces	7
02・Weak Hessian bounds along every geodesic in RCD spaces	23

原論文の参照版: 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a

[カタログ356 · 総括](#)[Web版を読む ↗](#)

CATALOGUE 356

GigliによるAlexandrov曲率の特徴付け

Gigli's characterization of Alexandrov curvature

Gigliの分布曲率下界とAlexandrovの曲率下界の同値、およびその逆向きで使う弱Hessianの全測地線定理を扱う。公式収録は2本。

全2篇の要点（公式カタログ順）

主結果の範囲を短くまとめています。正確な仮定と定式化は併記した原典の結果を参照してください。

[カタログ 356 · 2026-10-19 確認の固定参照版](#)

#

01

論文・概説

Gigli's distributional curvature characterization of Alexandrov spaces →

図中の略称: Distributional curvature characterization

September 24, 2026 · 53 ページ

[原論文（GitHub） ↗](#)

主に何を主張するか

整数 $n \geq 2$ 、 $\kappa \in \mathbb{R}$ 。 n 次元CBB(κ)を、正確な $\mathcal{H}^n$ を測度とするfull-support unreduced $\text{RCD}((n-1)\kappa, n)$ と、大域TestVに対するGigliの分布曲率下界で特徴付ける。

[Theorem 1.1 · p. 2 ↗](#)

議論の役割・概説

順向きは短いflowの積分展開と局所誤差除去。逆向きは熱index不等式、非崩壊frame、距離の弱Hessian比較を経て、companionの全測地線定理から三角形比較へ進む。

[証明概説を読む →](#)

#

02

論文・概説

Weak Hessian bounds along every geodesic in RCD spaces →

図中の略称: Weak Hessian bounds

September 24, 2026 · 11 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

full-support $\text{RCD}(K, N)$ 、 $1 < N < \infty$ 上で、有界大域 Lipschitz F の弱 Hessian が有界連続 G を上界にもてば、すべての定速最短測地線 σ で $(F \circ \sigma)' \leq \ell^2 G \circ \sigma$ が分布の意味で成立する。

[Theorem 1.1 · p. 2](#) ↗

議論の役割・概説

有界測度変更と generator domain の閉包で可変曲率 CD を得て、非分岐性と端点測度の集中により指定測地線へ局所化する。主論文の Theorem 6.1 へ直接入力。崩壊を許し、 $F \in L^2$ や L^2 -Hessian を要求しない。

[証明概説を読む](#) →

図の矢印に付した引用

- **OpenAI26a:** OpenAI, Gigli's distributional curvature characterization of Alexandrov spaces, September 24, 2026。特徴付けの両方向と、弱 Hessian 入力を使う段階。[OpenAI26a, Theorem 1.1, p. 2]
- **OpenAI26b:** OpenAI, Weak Hessian bounds along every geodesic in RCD spaces, September 24, 2026。弱 Hessian から任意測地線上の分布不等式への移行。[OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 2]

同値の両方向と companion の入力

A ⇒ B 順向き：幾何から分布曲率へ

$\text{CBB}(\kappa), \dim_H M = n \implies m = \mathcal{H}^n, \text{supp } m = M, \text{RCD}((n-1)\kappa, n), \mathcal{R} \geq \kappa$
(大域 Test/TestV)

RCD 構造を得て、積分配置・誤差除去・大域近似を行う。

[OpenAI26a, Theorem 3.1, p. 9]

B ⇒ A 逆向き：大域の分布曲率下界

$m = \mathcal{H}^n, \text{supp } m = M, \text{RCD}((n-1)\kappa, n), \mathcal{R} \geq \kappa$
整数 $n \geq 2, \kappa \in \mathbb{R}$ 。RCD は un-reduced。

曲率を Riccati 恒等式へ入れ、粘性を消す。

[OpenAI26a, Theorem 4.1, p. 24]

熱 index 不等式

$H_{\Phi_1}(Z, Z)(f) \leq \int \int (|DY|^2 - \kappa |Y \wedge v|^2)$
終点に依存する共通経路、速度の重み付き強収束

非崩壊 frame・可算 trial で Jacobi energy の上界を取る。

[OpenAI26a, Theorem 5.10, pp. 46–47]

距離二乗の弱 Hessian 比較

$H_q(Z, Z) \leq (|Z_{\parallel}|^2 + r \frac{s'_\kappa(r)}{s_\kappa(r)} |Z_{\perp}|^2) m, \quad q = r^2/2$
符号付き Radon 測度、特異部分は非正

単調 cutoff により特異部分と半径方向の符号を保つ。

[OpenAI26a, Lemma 6.2, pp. 48–49]

距離を有界大域関数へ修正

$F_p = \chi(r^2/2), \quad H_{F_p} \leq G_p m$
内側で $F_p = m_\kappa(r), \quad G_p = 1 - \kappa F_p$

companion を F_p, G_p へ適用し、任意測地線へ移す。

[OpenAI26a, Theorem 6.1, p. 48]

すべての最短測地線上のモデル ODE

$y'' + \kappa \ell^2 y \leq \ell^2, \quad y = m_\kappa(d(p, \sigma_t))$
分布の意味、短い三角形の辺上で成立

1 次元比較、局所四点条件、完備 length 空間で大域化。

[OpenAI26a, Theorem 6.3, pp. 49–50]

三角形比較と大域の特徴付け

local point-on-side $\implies$ local four-point $\implies \text{CBB}(\kappa)$
 $0 < \mathcal{H}^n(B) < \infty \implies \dim_H M = n$

OpenAI26b 弱 Hessian 定理

一般の full-support
 $\text{RCD}(K, N), 1 < N < \infty$
有界大域 Lipschitz F 、有界連続 G

[OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 2]

弱 Hessian 上界から全測地線へ。
主論文への直接入力。

特徴付けの順向き・逆向きと弱Hessian定理の入力位置

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

順向きでは $\text{CBB}(\kappa)$ から RCD 構造を得た後、積分された短い flow の展開、局所的な二乗誤差の除去、近似と exhaustion によって、元の大域 $\text{Test} / \text{TestV}$ で曲率不等式を得る。逆向きでは、曲率下界から熱正則化した index 不等式を作り、非崩壊性を使い、適切な test plan のほとんどすべての経路について全時刻で構成した frame と可算 trial を介して、距離二乗の弱 Hessian 比較へ進む。詳細は特徴付けの記事にまとめた。

2本目が入るのは、有界大域距離修正を作った後の段階である。主論文の Theorem 6.1 は companion の Theorem 1.1 そのものであり、すべての最短測地線上のモデル ODE を供給する。短い三角形の比較から局所四点条件、局所大域定理へ進み、最後に正確な $\mathcal{H}^n$ から次元 n を回収する。

[OpenAI26a, Theorem 6.1, p. 48]

[OpenAI26a, Theorem 6.3, pp. 49–50]

companion 自体は一般の full-support 有限次元 RCD 空間で成立し、崩壊を許す。 F の大域 L^2 性も L^2 -Hessian も仮定しない。有界測度変更、generator domain の閉包、端点測度の集中の役割は弱 Hessian の記事で説明する。主論文の特徴付けや frame 構成への逆向きの証明依存はない。

原典・確認範囲

公式分野は **Differential geometry** (微分幾何学、333–361)。公式一覧と両原稿は commit 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a に固定した。原稿版はいずれも 2026 年 9 月 24 日。

[OpenAICatalog, Catalogue 356, p. 38]

両論文の主要な主張、主論文の順向き・逆向きの核心帰着、companion の証明本文と主論文への適用を原典で照合した。各記事に外部入力の記述・使用箇所と未確認範囲を記録する。主論文の全評価・全補題、外部文献の全証明を独立に検証したものではない。

Gigli's distributional curvature characterization of Alexandrov spaces

4次の輸送展開から大域的曲率テンソルへ、熱正則化した指数形式から全測地線の比較へ

本原稿は、整数次元 $n \geq 2$ におけるAlexandrov下方曲率条件を、正確なHausdorff測度とGigliの分布曲率で特徴付ける。順方向では小さな配置の比較を積分して曲率を取り出し、逆方向では指数不等式、距離の弱Hessian、全測地線上のモデル方程式を経由する。

原稿の著者: OpenAI · September 24, 2026 · 53 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — Gigliの特徴付け

$n \geq 2$ を整数、 $\kappa \in \mathbb{R}$ 、 (M, d) を完備可分距離空間とする。次は同値である。

- (A) (M, d) は曲率 $\geq \kappa$ の n 次元Alexandrov空間である。
- (B) 正確に $m = \mathcal{H}_d^n$ とすると、 (M, d, m) はfull supportを持つ unrounded $\text{RCD}((n-1)\kappa, n)$ 空間であり、すべての $X, Y \in \text{TestV}(M)$ とすべての非負 $f \in \text{Test}(M)$ に対し

$$\mathcal{R}(X, Y, Y, X)(f) \geq \kappa \int_M f(|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2) dm.$$

ここで Δ は非正の L^2 生成作用素であり、

$$\text{Test}(M) = \{f \in D(\Delta) : f \text{ は有界な大域的Lipschitz代表を持ち、} \Delta f \in W^{1,2}(M)\}, \quad \text{TestV}(M) = \left\{ \sum_{j=1}^{\ell} a_j \nabla b_j : \ell < \infty, a_j, b_j \in \text{Test}(M) \right\}.$$

$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ として、符号規約を含む曲率の定義は

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(X, Y, Z, W)(f) = \int_M \big[& -\langle \nabla_X(fW), \nabla_Y Z \rangle - f\langle \nabla_Y Z, W \rangle \operatorname{div} X \\ & + \langle \nabla_Y(fW), \nabla_X Z \rangle + f\langle \nabla_X Z, W \rangle \operatorname{div} Y - f\langle \nabla_{[X,Y]} Z, W \rangle \big] dm. \end{aligned}$$

測度を $\mathcal{H}^n$ と同値な任意の測度に置き換えず、テスト場・重みをコンパクト台に制限しない。正の曲率ではAlexandrov比較を通常のモデル尺度で解釈する。

Theorem 1.1; (1.1)–(1.4) · p. 2

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Gigli’s distributional curvature characterization of Alexandrov spaces](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [KKS23](#) Vitali Kapovitch, Christian Ketterer, Karl-Theodor Sturm — On gluing Alexandrov spaces with lower Ricci curvature bounds : Alexandrov空間からunreduced RCDへの入力。arXiv:2003.06242v1 (2020); published 2023。
- [Gig19](#) Nicola Gigli — Riemann curvature tensor on RCD spaces and possible applications : 曲率の符号・対称性・テスト関数上のテンソル性。arXiv:1902.02282v1 (2019)。
- [GRS16](#) Nicola Gigli, Tapio Rajala, Karl-Theodor Sturm — Optimal maps and exponentiation on finite-dimensional spaces with Ricci curvature bounded from below : 絶対連続端点からの最適経路の一意性。arXiv:1305.4849v1 (2013); published 2016。
- [GH15](#) Nicola Gigli, Bang-Xian Han — The continuity equation on metric measure spaces : 有界圧縮のWasserstein曲線と連続の方程式・作用。arXiv:1406.6350v1 (2014); published 2015。
- [JLZ16](#) Renjin Jiang, Huaiqian Li, Huichun Zhang — Heat kernel bounds on metric measure spaces and some applications : 負のRicci下界へ弱めたGaussian熱核評価。arXiv:1407.5289v2 (2015); published 2016。
- [DPG18](#) Guido De Philippis, Nicola Gigli — Non-collapsed spaces with Ricci curvature bounded from below : 非崩壊性からEuclid接錐・次元・体積評価。arXiv:1708.02060v3 (2018)。
- [BPS21](#) Elia Bruè, Enrico Pasqualetto, Daniele Semola — Rectifiability of $\operatorname{RCD}(K, N)$ spaces via δ -splitting maps : Euclid拡大近傍の調和splitting map。arXiv:2001.07911v1 (2020); published 2021。
- [Deng25](#) Qin Deng — Hölder continuity of tangent cones in $\operatorname{RCD}(K, N)$ spaces and applications to non-branching : 全測地線上で同じ拡大列に沿う接錐の連続性。arXiv:2009.07956v2; published 2025。
- [GT21](#) Nicola Gigli, Luca Tamanini — Second order differentiation formula on $\operatorname{RCD}_*(K, N)$ spaces : 有界台最適測地線計画の2階微分公式。arXiv:1802.02463v1 (2018); published 2021。
- [AKP24](#) Stephanie Alexander, Vitali Kapovitch, Anton Petrunin — Alexandrov Geometry: Foundations : 辺上比較・局所四点条件・完備長さ空間の大域化。Updated online PDF, retrieved 2026-10-19; book published 2024. Numbering matches the manuscript’s cited 2026-09-24 online version.。
- [OpenAI26b](#) OpenAI — Weak Hessian bounds along every geodesic in RCD spaces : 有界関数の弱Hessian上界から全測地線の2階微分不等式へ。September 24, 2026。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 — 主定理の証明概略

証明対象：Theorem 1.1; (1.1)–(1.4) · p. 2

証明の道筋。 順方向の測度・RCD部分は既存のAlexandrov理論を使う。新たに得るテンソル不等式は、4次輸送展開の誤差を局所化して消し、最後に大域的テスト類へ延長する。逆方向では(B)から熱正則化した指数不等式を得て、非崩壊性を使った経路上の枠と可算試験場により距離のHessian比較を導く。別論文の弱Hessian定理を適用するために距離を有界に変形し、全測地線上の比較を局所から大域へ移す。

A Alexandrov 曲率の下界

$$\dim_H M = n, \quad \text{CBB}(\kappa), \quad n \geq 2$$

RCD を供給し、4 次展開・局所化・台の尽くしで曲率を得る
[\[KKS23, Theorem 2.9; Corollary 2.10, pp. 7–8\]](#) [Theorem 3.1 · p. 9](#)

B 正確な測度と大域テスト類

$$m = \mathcal{H}^n, \quad \text{supp } m = M, \quad \text{RCD}((n-1)\kappa, n) \quad (\text{unreduced})$$

$$\mathcal{R}(X, Y, Y, X)(f) \geq \kappa \int f |X \wedge Y|^2 dm$$

熱の Riccati 恒等式、終端評価、作用等号から強収束
[Theorem 4.1 · p. 24](#)

1 共通の校正経路上の指数不等式

$$H_{Q_1 u}(Z, Z)(f) \leq \int I_\kappa(Y) d\pi_f$$

非崩壊の経路枠と可算 Jacobi 試験で測度上界を得る
[Theorem 5.10 · pp. 46–47](#)

2 距離の Hessian 比較

$$H_{r^2/2}(Z, Z) \leq (|Z_\parallel|^2 + r s'_\kappa / s_\kappa |Z_\perp|^2) m$$

有界距離変形、全測地線のモデル ODE、局所から大域へ
[\[OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 2\]](#)
[Theorem 6.3 · pp. 49–50](#)

A 全測地線の比較から大域 Alexandrov へ

$$\text{CBB}(\kappa), \quad \dim_H M = n$$

主定理の両方向と中間結果

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. (A)から(B)へ

外部のAlexandrov-to-RCD定理は境界のない場合だけに限定されず、unreduced $\text{RCD}((n-1)\kappa, n)$ を供給する。本稿Theorem 3.1の追加部分は、弱微分だけから全 X, Y, f に対する曲率不等式を得る点にある。

[\[KKS23, Theorem 2.9; Corollary 2.10, pp. 7–8\]](#)

2. (B)から(A)へ

Theorem 4.1の指数形式は各終点から同じ校正測地線を選ぶため、終端重みを変えても経路が変わらない。これがTheorem 5.10で試験場のエネルギーの可算infimumを取る根拠になる。そこからTheorem 6.3は、すべての測地線に沿う比較と $\dim_H M = n$ の両方を得る。RCDが与えるほとんど至る所の経路情報から、特定の任意の測地線への移行はcompanion theoremが担う。

§7, proof of Theorem 1.1 · p. 50

3. Theorem 3.1 — 配置比較から大域的テスト類へ

証明対象：Theorem 3.1 · p. 9

Theorem 3.1 — 順方向

(M, d) を完備な n 次元Alexandrov空間、 $n \geq 2$ 、曲率下界を κ とし、 $m = \mathcal{H}_d^n$ とする。このときfull supportを持つunreduced $\text{RCD}((n-1)\kappa, n)$ 空間であり、すべての $X, Y \in \text{TestV}(M)$ と非負 $f \in \text{Test}(M)$ に対してTheorem 1.1の曲率不等式が成り立つ。

Theorem 3.1 · p. 9

1 小さな配置の比較

$$\liminf_{h \downarrow 0} h^{-4} (2\mathbb{E}J_{0A}^h - \mathbb{E}J_{AB}^h) \geq \frac{\kappa}{6} \int f \mathbb{E}|A \wedge B|^2 dm$$

符号平均で低次項を相殺、先に $h \downarrow 0$ 、次に加速度を補正

[Lemma 3.4 · pp. 13–15](#) [Proposition 3.7 · p. 19](#)

2 密度変分と 4 次項の同定

$$\frac{1}{6} \mathbb{E} \mathcal{R}(A, B, B, A)(f) + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int f |\nabla q_{AB} + \nabla_A(B - A)|^2 dm$$

重みの線形性で分割微分も再結合、4 方向の有限法則を使う

[Lemmas 3.8–3.9; Proposition 3.10 · pp. 19–21](#)

3 局所勾配で平方誤差を消す

$$\sum_{\ell} \alpha_{\ell} = 1, \quad \nabla q_{AB, \ell} \simeq -\nabla_A(B - A)$$

$$\mathcal{R}(U, V, V, U)(f) \geq \kappa \int f |U \wedge V|^2 dm$$

係数測度の非負性、強 L^2 場近似、最後に $f\chi_R \rightarrow f$

[Lemmas 3.11–3.12; Remark 3.13 · pp. 21–23](#)

4 元の global quantifiers を回復

$$X, Y \in \text{TestV}(M), \quad 0 \leq f \in \text{Test}(M)$$

4次展開の誤差除去と大域化

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 同じエネルギー差の幾何学的下界と解析的上界

有界Laplacianを持つコンパクト台テスト関数の勾配 A, B を、符号反転不変な有限確率法則から独立に選ぶ。短い流れの速度を $hA + h^2 t S_A$ とし、 J_{0A}^h を放射状の流れの作用、 J_{AB}^h を終端測度間の最適輸送作用とする。Alexandrovの余弦比較は

$$\liminf_{h \downarrow 0} \frac{2\mathbb{E}J_{0A}^h - \mathbb{E}J_{AB}^h}{h^4} \geq \frac{\kappa}{6} \int f \mathbb{E}|A \wedge B|^2 dm$$

を与える。一方、補間密度の差商の弱 L^2 収束と速度の重み付き強収束を使い、Sobolev双対ポテンシャルで同じ差を展開する。符号対称性が奇数次項を消す。先に $h \downarrow 0$ とし、その後 $S_A \rightarrow -\nabla_A A$ とし、放射状加速度の誤差を除くと、残る差は曲率と非負平方

$$\frac{\kappa}{6} \int f \mathbb{E}|A \wedge B|^2 dm \leq \frac{1}{6} \mathbb{E} \mathcal{R}(A, B, B, A)(f) + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int f |\nabla q_{AB} + \nabla_A(B - A)|^2 dm$$

で支配される。これは単なる点ごとの滑らかな曲率展開ではない。密度の1次変分を固定された L^2 Hessian係数と組み合わせることが4次項の正当化を担う。

Lemmas 3.3–3.6; Proposition 3.7 · pp. 12–19

2. 局所的な勾配選択で平方を消す

一般の L^2 ベクトル場は一つの勾配では近似できないが、有限分割上で別々の勾配を選べば近似できる。Lemma 3.9を $-\nabla_A(B - A)$ に適用し、重みを $f\alpha_\ell$ に分ける。曲率は重みに線形なので $\sum \alpha_\ell = 1$ により重みの微分項も正確に再結合し、分割の微分に一様評価を要求せず平方誤差を消せる。法則を $\{U, -U, V, -V\}$ の一様分布とすれば、混合項だけから所望の断面曲率不等式が残る。

Lemmas 3.8–3.9; Proposition 3.10 · pp. 19–21

3. 大域化は最後に行う

固定した有限勾配族について、定数係数の非負曲率汎関数を正Radon測度として表し、係数多項式の有理点での非負性から変数テスト係数に延長する。続いて元のテスト関数を局所的に有界Laplacianの関数で近似し、場・発散・共変微分の強 L^2 収束で曲率を通す。最後に重み $f\chi_R$ の台を増やす。元のテンソル積分は大域的に可積分であり、 $d\chi_R$ の誤差は L^1 の尾部に落ちる。この順序によりTheorem 1.1の元のglobal quantifiersを回復する。

Lemmas 3.11–3.12; Remark 3.13 · pp. 21–23

[Gig19, Definition 2.6; Proposition 2.7, pp. 5–6]

4. Theorem 4.1 — 熱正則化から指数不等式へ

証明対象：Theorem 4.1 · p. 24

Theorem 4.1 — 校正経路に沿う指数不等式

(B)を仮定する。有界大域的Lipschitz関数 u はコンパクト集合外で定数とし、
 $\Phi_t = Q_t u = \inf_y \{u(y) + d(\cdot, y)^2/(2t)\}$ とおく。 m -零集合外にBorelな経路指定 $S(x)_1 = x$ が
 あり、次の校正条件を満たす。

$$\Phi_1(S(x)_1) = u(S(x)_0) + d(S(x)_0, S(x)_1)^2/2.$$

任意の非負コンパクト台Lipschitz重み f に対し $\pi_f = S_\#(fm)$ は終端測度 fm 、有界速度、各
 $[\delta, 1]$ ($\delta > 0$) で有界圧縮を持つ。

任意のコンパクト台テスト勾配 Z 、 $0 < \delta < 1$ 、有限和 $Y_t = \sum_j a_j(t) \nabla g_j$ ($a_j \in C^\infty([\delta, 1])$ 、 g_j
 はコンパクト台テスト関数) で、大域的な場の恒等式 $Y_\delta = 0, Y_1 = Z$ を満たすものについて

$$H_{\Phi_1}(Z, Z)(f) \leq \int \int_\delta^1 (|\partial_t Y + \nabla_v Y|^2 - \kappa |Y \wedge v|^2)(\gamma_t) dt d\pi_f(\gamma).$$

S と速度代表は Z, Y, f に依存しない。弱Hessianは次の汎関数である。

$$H_F(Z, Z)(f) = - \int \operatorname{div}(fZ) \langle \nabla F, Z \rangle dm - \int f \langle \nabla F, \nabla_Z Z \rangle dm.$$

Theorem 4.1 · p. 24

1 終端密度を固定する熱因子

$$H_t^c = P_{ct}(e^{-u/(2c)}), \quad J_t^c = P_{c(1-t)}(f/H_1^c) \\ \rho^c = H^c J^c, \quad \rho_1^c = f, \quad v^c = \nabla \theta^c, \quad w^c = c \nabla \log \rho^c$$

1/c 項を相殺し、非負 Bochner 測度を下から制御
[Lemmas 4.7–4.8 · pp. 30–33](#)

2 粘性付き指数不等式

$$H_{\varphi_1^c + c \log f}(Z, Z)(f) \leq \int_\delta^1 \int \rho^c (|D_c Y|^2 - \kappa |Y \wedge v^c|^2) dm dt + \varepsilon_c$$

W_2 連続性・尾部制御の後で作用と双対の評価を等号化
[Lemma 4.12 · pp. 35–36](#)

3 作用等号から速度の強収束へ

$$\varphi_t^c \rightarrow Q_t u, \quad \iint \rho^c |v^c - V|^2 dm dt \rightarrow 0$$

絶対連続終端からの一意性、固定 ∇Y との積、最後に正の摂動を除去
[\[GRS16, Theorems 1.1, 1.3, p. 2\]](#) [Lemma 4.13 · pp. 36–37](#)

4 共通経路指定と指数不等式

$$\pi_f = S_\#(fm), \quad Y_\delta = 0, \quad Y_1 = Z \\ H_{Q_1 u}(Z, Z)(f) \leq \int \int_\delta^1 (|D_t Y|^2 - \kappa |Y \wedge v|^2) dt d\pi_f$$

終端密度を固定した熱正則化とゼロ粘性極限

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 終端密度を固定し、特異Bochner項を制御する

まず $f = f_0 + \lambda e^{-Dd(o, \cdot)} > 0$ とし、粘性 $c > 0$ に対し $H_t^c = P_{ct}(e^{-u/(2c)})$ 、 $J_t^c = P_{c(1-t)}(f/H_1^c)$ 、 $\rho_t^c = H_t^c J_t^c$ を作る。 $\varphi = -2c \log H$ 、 $\psi = 2c \log J$ 、 $\theta = (\psi + \varphi)/2$ 、 $b = c \log \rho$ とすると $v^c = \nabla \theta$ は連続の方程式の速度、 $w^c = \nabla b$ は密度の補正である。

Riccati型恒等式の曲率項に(B)を適用し平方完成すると、指数形式と加速度誤差 $H_{|w^c|^2/2 + c\Delta b^c}$ が現れる。 $w^c \rightarrow 0$ だけでは密度微分の $1/c$ を処理できない。本稿はこれらを先に正確に相殺し、残る Bochner測度を非負部分と L^2 部分に分ける。 $c\Delta b^c \geq -e_c(t)$ 、 $\|e_c\|_{L^1(\delta, 1)} \rightarrow 0$ を準連続代表に用い、特異測度も含め終端 $T \uparrow 1$ に一様な下側誤差評価を得る。

[Lemmas 4.5–4.8; Proposition 4.9 · pp. 28–33](#)

[\[JLZ16, Theorem 1.2, p. 2\]](#)

2. 作用の等号が二次エネルギーの極限を保証する

$\varphi_t^c \rightarrow Q_t u$ と密度曲線の W_2 コンパクト性だけでは指数形式を通せない。作用恒等式とHopf-Lax双対不等式の間の評価がすべて等号になり、極限がWasserstein測地線であることと

$$\int_{\delta}^1 \int \rho_t^c |v_t^c - V_t|^2 dm dt \rightarrow 0$$

を同時に与える。固定 L^2 係数を切断してこの収束を ∇Y にも適用する。絶対連続な終端から時間を逆向きに見た最適輸送の一意性が、終端重みを変えても同じ経路を選ぶことを保証する。順に $T \uparrow 1$ 、 $c \downarrow 0$ 、 $\lambda \downarrow 0$ として主張へ至る。点源である時刻0に有界圧縮を仮定していない。

Lemmas 4.10–4.13; proof of Theorem 4.1 · pp. 33–37

[GH15, Theorem 3.5, p. 11] [GRS16, Theorems 1.1, 1.3, p. 2]

5. Theorem 5.10 — 経路全体の枠とHessian比較

証明対象：Theorem 5.10 · pp. 46–47

Theorem 5.10 — 分布的Hessian比較

(B)を仮定する。 $R_\kappa > 0$ を取り、 $\kappa > 0$ では $R_\kappa \sqrt{\kappa} < \pi/2$ とする。任意の $p \in M$ に対し $r = d(p, \cdot)$ 、 $q = r^2/2$ とおく。 $s''_\kappa + \kappa s_\kappa = 0$ 、 $s_\kappa(0) = 0$ 、 $s'_\kappa(0) = 1$ とする。各コンパクト台テスト勾配 Z について、 $B(p, R_\kappa)$ 上の $H_q(Z, Z)$ は符号付きRadon測度で、特異部分は非正、かつ

$$H_q(Z, Z) \leq \left(|Z_\parallel|^2 + r \frac{s'_\kappa(r)}{s_\kappa(r)} |Z_\perp|^2 \right) m.$$

ここで $|\nabla q| = r$ a.e.、 $r > 0$ 上で $Z_\parallel = \langle Z, \nabla q \rangle \nabla q / r^2$ 、 $Z_\perp = Z - Z_\parallel$ 。 $r = 0$ では右辺係数を $|Z|^2$ と解釈する。不等式は球内のすべての非負コンパクト台Lipschitz重みに対して成り立ち、半径は p に依存しない。

Theorem 5.10 · pp. 46–47

1 非崩壊性と可算調和枠

$$m = \mathcal{H}^n, \quad \text{Cap}_2(N) = 0, \quad \mathcal{H}^{n-1}(S) = 0$$

圧縮性で例外を避け、接錐連続性と有限次元 ODE を使う
[\[Deng25, Theorems 1.1–1.2, p. 2\]](#) [\[GT21, Theorem 5.13, p. 50\]](#)
[Proposition 5.1; Lemmas 5.4–5.5 · pp. 38–42](#)

2 ほとんど全経路の全時刻で枠を得る

$$\gamma([\delta, 1]) \cap (N \cup S) = \emptyset, \quad D_t v = 0$$

共通終端経路、固定試験の正值性、可算族の経路ごとの近似
[Proposition 5.6; Lemma 5.7 · pp. 42–45](#) [Lemma 5.9 · pp. 45–46](#)

3 符号付き測度と可算 infimum

$$H_q(Z, Z) = h_Z m + \mu_s, \quad \mu_s \leq 0$$

$$h_Z(x) \leq \inf_{Y \in \mathcal{Y}_{\delta, Z}} E_Y(x), \quad v(1) = \nabla q$$

平行成分は線形、横成分は s_κ 、可算列 $\delta \downarrow 0$
[Theorem 5.10 · pp. 46–47](#)

4 Jacobi 試験のエネルギーを評価

$$H_q(Z, Z) \leq \left(|Z_\parallel|^2 + r \frac{s'_\kappa(r)}{s_\kappa(r)} |Z_\perp|^2 \right) m$$

例外時刻の除去から可算Jacobi試験へ

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. a.e.の空間的枠を経路の全時刻の枠へ移す

非崩壊性 $m = \mathcal{H}^n$ は n 次元Euclid接錐をa.e.に与える。調和splitting mapを可算に選び、Gram行列の階数欠損をSobolevエネルギーで評価すると、例外集合は2-capacity零集合 N と $\mathcal{H}^{n-1}$ 零集合 S に分けられる。有界速度・有界圧縮の経路計画は、ほとんどすべての経路全体で両者を避ける。Dengの同じ拡大列に沿う接錐のHölder連続性は、稠密な正則時刻からすべての内部時刻へ正則性を延長する。端点は圧縮性で扱う。

連続Gram行列の正定値小行列を時間区間ごとに選び、 L^2 接続係数を持つ有限次元ODEを解くと平行枠を得る。Gigli–Tamaniniの2階微分公式から経路速度は平行となる。これらは非崩壊RCD空間の結果であり、曲率テンソル下界は次の放射状適用で使う。

[Proposition 5.1; Lemmas 5.4–5.5; Proposition 5.6 · pp. 38–44](#)

[\[DPG18, Theorem 1.12; Corollary 2.14, pp. 7, 17\]](#)

[BPS21, Proposition 1.4, p. 5] [Deng25, Theorems 1.1–1.2, p. 2] [GT21, Theorem 5.13, p. 50]

2. 可算infimumとJacobi場

$u = \min\{2R_\kappa r, 2R_\kappa^2\}$ なら球内で $Q_1 u = q$ 、唯一の最小点は p である。校正経路は p からの放射状測地線となり、端点差商の L^2 評価で $v(1) = \nabla q$ を得る。

一つの試験場で $E_0 m - H_q(Z, Z) \geq 0$ を示すと、Riesz表現により $H_q(Z, Z) = h_Z m + \mu_s$ 、 $\mu_s \leq 0$ が得られる。大域的端点条件を満たす可算試験場族を使えば、共通零集合外で $h_Z(x) \leq \inf_Y E_Y(x)$ とできる。各経路では、 $Z_\parallel, Z_\perp$ を平行移動した $P_\parallel, P_\perp$ に対して

$$W_t = \frac{t - \delta}{1 - \delta} P_\parallel(t) + \frac{s_\kappa((t - \delta)r)}{s_\kappa((1 - \delta)r)} P_\perp(t)$$

を可算族で経路ごとの $W^{1,2}$ ノルムに近似する。その指数エネルギーは

$$\frac{|Z_\parallel|^2}{1 - \delta} + r \frac{s'_\kappa((1 - \delta)r)}{s_\kappa((1 - \delta)r)} |Z_\perp|^2.$$

可算列 $\delta \downarrow 0$ で目的の測度不等式になる。経路ごとの近似列を可測選択する必要も、計画全体での積分ノルムの稠密性を仮定する必要もない。

Lemmas 5.7–5.9; Theorem 5.10 · pp. 44–47

6. Theorem 6.3 — 全測地線のモデル不等式から大域比較へ

証明対象：Theorem 6.3 · pp. 49–50

Theorem 6.3 — Alexandrov比較

Theorem 1.1の(B)、すなわち整数 $n \geq 2$ 、 $m = \mathcal{H}_d^n$ 、full-support unreduced $\text{RCD}((n-1)\kappa, n)$ と全global test fields・非負global test weightsに対する曲率下界を仮定する。このとき (M, d) は曲率 $\geq \kappa$ の n 次元Alexandrov空間である。

Theorem 6.3 · pp. 49–50

1 距離を有界に変形する

$$F_p = \chi(r^2/2), \quad \chi'(q) = \theta(q) \frac{s_\kappa(\sqrt{2q})}{\sqrt{2q}}$$

$$H_{F_p} \leq G_p m, \quad G_p = \theta(r^2/2) s'_\kappa(r)$$

非増加 cutoff で余分な放射項は非正、有界性・連続性を満たす
[Theorem 6.1; Lemma 6.2 · pp. 48–49](#) [\[OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 2\]](#)

2 全測地線上のモデル不等式

$$y = m_\kappa(d(p, \sigma_t)), \quad y'' + \kappa \ell^2 y \leq \ell^2$$

$$\sigma \subset B_a(p), \text{ 分布の意味}$$

負部分を試験し、 $\kappa > 0$ では $\kappa \ell^2 < \pi^2$ を使う
[Theorem 6.3 · pp. 49–50](#)

3 モデル三角形と比較する

$$y \geq \bar{y} \implies d(p, \sigma_t) \geq d(\bar{p}, \bar{\sigma}_t)$$

完備長さ空間の局所大域定理。球の凸性は仮定しない
[\[AKP24, Theorems 8.14, 8.30, 8.31, pp. 86, 93–95\]](#)

4 局所四点比較から大域化と次元へ

$$\text{CBB}(\kappa), \quad 0 < \mathcal{H}^n(B) < \infty \implies \dim_H M = n$$

有界距離変形と局所から大域への比較

図を拡大 ↗ [TeXソース](#) ↓

1. companion theoremに入る有界関数を作る

$m_\kappa(r) = \int_0^r s_\kappa(s) ds$ とする。 $0 < a < b < R_\kappa$ を固定し、 θ は $[0, a^2/2]$ で1、 $[b^2/2, \infty)$ で0の非増加滑らかな関数とする。 $\chi(0) = 0$ 、 $\chi'(q) = \theta(q) s_\kappa(\sqrt{2q})/\sqrt{2q}$ 、 $F_p = \chi(r^2/2)$ とおけば、 F_p は有界大域的Lipschitzで、球外で定数となる。Hessianの連鎖則で放射成分に加わる $r\theta's_\kappa$ は非正であり、特異部分の符号も保たれる。したがって、有界連続な $G_p = \theta(r^2/2)s'_\kappa(r)$ に対し、すべてのコンパクト台テスト勾配 Z と非負コンパクト台Lipschitz重み h で $H_{F_p}(Z, Z)(h) \leq \int h G_p |Z|^2 dm$ 。 $B_a(p)$ 内では $F_p = m_\kappa(r)$ 、 $G_p = 1 - \kappa F_p$ である。

companion theoremはfull-support $\text{RCD}(K, N)$ 、 $1 < N < \infty$ 、この有界性・連続性・弱Hessian条件から、すべての長さ ℓ の定速最短測地線 σ 上で $(F_p \circ \sigma)'' \leq \ell^2 G_p \circ \sigma$ を $(0, 1)$ 上の分布の意味で与える。 $F_p \in L^2(m)$ や L^2 Hessianは不要であり、ここで基準測度を変える必要もない。

[Theorem 6.1; Lemma 6.2 · pp. 48–49](#)

[\[OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 2\]](#)

2. モデルODE、局所四点条件、大域化、次元

周長 $< a$ の三角形 $[pxy]$ の選んだ辺 σ は $B_a(p)$ に収まるため、 $y = m_\kappa(d(p, \sigma_t))$ は $y'' + \kappa \ell^2 y \leq \ell^2$ を満たす。モデル三角形の対応関数 $\bar{y}$ は同じ端点値を持つ等式解。 $y - \bar{y}$ の負部分を試験関数にすると、 $\kappa \leq 0$ では直接、 $\kappa > 0$ では $\kappa \ell^2 < \pi^2$ と Dirichlet Poincaré 不等式から $y \geq \bar{y}$ を得る。 m_κ の単調性で辺上の距離比較に戻る。

この短い三角形の比較を小球内の四点比較へ変換する際、すべての線分は周囲の空間の最短線分であり、球の凸性は仮定しない。局所CBB判定と完備長さ空間の大域化定理で $\text{CBB}(\kappa)$ となる。最後に各非空有界球は正で有限な $\mathcal{H}^n$ 測度を持ち、可算尽くしで $\dim_H M = n$ 。これで(B)から(A)の曲率と次元の両結論が揃う。

Theorem 6.3 · pp. 49–50

[AKP24, Theorems 8.14, 8.30, 8.31, pp. 86, 93–95]

7. どの論文が、どの段階を担うか

供給元

Kapovitch–Ketterer–Sturm

本稿の使用箇所

Theorem 3.1

役割と適用条件

n 次元Alexandrov空間と正確な $\mathcal{H}^n$ からunreduced RCDを供給

確認範囲

指定版Theorem 2.9 / Corollary 2.10と適用を照合

供給元

Bruè–Pasqualetto–Semola、Deng、Gigli–Tamanini

本稿の使用箇所

Proposition 5.1、Lemma 5.5、Proposition 5.6

役割と適用条件

Euclid拡大に近い調和枠、全測地線の接錐連続性、速度の平行性。splittingでは補助次元 $N = n + 1$ と一点残余因子を用いる

確認範囲

指定版の結果記述と本文の接続を照合。外部証明全体は対象外

供給元

Weak Hessian bounds along every geodesic in RCD spaces

本稿の使用箇所

Theorem 6.1、Lemma 6.2、Theorem 6.3

役割と適用条件

有界距離変形の弱Hessian評価を全測地線の不等式へ。非崩壊性を要求しない一般RCD定理

確認範囲

Theorem 1.1の全仮定と適用を照合。本稿からの循環入力はない

供給元

Alexander–Kapovitch–Petrunin

本稿の使用箇所

Theorem 6.3

役割と適用条件

辺上比較から局所CBB、完備長さ空間から大域CBBへ

確認範囲

取得したオンライン版のTheorems 8.14 / 8.30 / 8.31と適用を照合

[KKS23, Theorem 2.9; Corollary 2.10, pp. 7–8] [BPS21, Proposition 1.4, p. 5]

[Deng25, Theorems 1.1–1.2, p. 2] [GT21, Theorem 5.13, p. 50] [OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 2]

[AKP24, Theorems 8.14, 8.30, 8.31, pp. 86, 93–95]

8. 原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 1.1; (1.1)–(1.4) · p. 2 — 測度・大域テスト類・符号と両方向の主張
- Lemmas 3.3–3.6; Proposition 3.7 · pp. 12–19 — 幾何配置と4次輸送展開を比較する核心
- Lemmas 3.11–3.12; Remark 3.13 · pp. 21–23 — 局所化から元のglobal quantifiersへの延長
- Lemmas 4.5–4.8; Proposition 4.9 · pp. 28–33 — 特異Bochner測度を含む終端一様評価
- Lemmas 4.10–4.13; proof of Theorem 4.1 · pp. 33–37 — 作用等号・速度強収束・共通経路指定
- Proposition 5.1; Lemmas 5.4–5.5; Proposition 5.6 · pp. 38–44 — 例外集合除去と経路全時刻の枠
- Theorem 5.10 · pp. 46–47 — 可算infimum、符号付き測度、Jacobi試験
- Theorem 6.1; Lemma 6.2 · pp. 48–49 — companionの仮定を満たす有界距離変形
- Theorem 6.3 · pp. 49–50 — モデルODE、局所大域、次元の結論

主定理、§3の配置・密度変分・4次展開・局所化・大域化、§4の熱因子・特異Bochner項・作用極限、§5の例外集合・枠・可算試験・Jacobi評価、§6–7の距離変形と局所大域の証明本文を読んで接続を整理した。外部入力は上記の記述と適用を照合した範囲を示している。

確認の限界。 長い4次展開の全項、熱核評価からの全定数の導出、容量とSobolev代表の同一視を含む全解析補題について独立の再証明は行っていない。基礎RCD解析の全引用先まで再帰的に証明検証したものではない。原稿が主張する特徴付けの紹介と、編集側が確認した記述・帰着の範囲を区別する。

AKPのオンラインPDFは今回取得した版の番号・記述を照合したが、原稿が参照する2026年9月24日のスナップショットとのファイル同一性は未確認である。

Weak Hessian bounds along every geodesic in RCD spaces

重み付きBochner不等式の閉包と、指定した測地線へのエントロピー集中

本原稿は、有限次元RCD空間上の分布的Hessian上界を、すべての最短測地線上の二階微分上界へ移す。解析側では元の熱流によるresolventを使って重み付き生成作用素の試験関数を制御し、幾何側では非分岐性によって任意に指定した測地線の内部区間へ最適輸送を集中させる。

原稿の著者: OpenAI · September 24, 2026 · 11 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — すべての最短測地線上の分布不等式

(M, d, m) は完備可分、 $\text{supp } m = M$ 、有界集合上で m が有限な $\text{RCD}(K, N)$ 空間とする。 $K \in \mathbb{R}$ 、 $1 < N < \infty$ であり、原稿のRCDはunreduced $\text{CD}(K, N)$ とCheeger energyの二次性を意味する。Laplacianは非正の L^2 生成作用素とし、 $\Gamma(u, v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle$ 、 $\Gamma(u) = \Gamma(u, u)$ と書く。

$F : M \rightarrow \mathbb{R}$ は有界かつ大域的Lipschitz、 $G : M \rightarrow \mathbb{R}$ は有界連続とする。ここで

$$\text{Test}(M) = \{g \in D(\Delta) : g \text{ は有界な大域的Lipschitz代表を持ち、 } \Delta g \in W^{1,2}(M)\}.$$

コンパクト台を持つ $g \in \text{Test}(M)$ 、 $Y = \nabla g$ 、 $h \in \text{Lip}_c(M)$ に対し、

$$H_F(Y, Y)(h) = - \int_M \text{div}(hY) \langle \nabla F, Y \rangle dm - \int_M h \langle \nabla F, \nabla_Y Y \rangle dm,$$

ただし $\text{div}(hY) = \Gamma(h, g) + h\Delta g$ 、 $\nabla_Y Y = \nabla(\Gamma(g)/2)$ とする。すべてのそのような g とすべての非負 $h \in \text{Lip}_c(M)$ について

$$H_F(\nabla g, \nabla g)(h) \leq \int_M h G \Gamma(g) dm$$

を仮定する。このとき、任意の定速最短測地線 $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ (長さ ℓ) について

$$(F \circ \sigma)'' \leq \ell^2 G \circ \sigma \quad \text{in } \mathcal{D}'(0, 1).$$

すなわち、すべての $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(0, 1)$ に対し

$$\int_0^1 F(\sigma_t) \varphi''(t) dt \leq \ell^2 \int_0^1 G(\sigma_t) \varphi(t) dt.$$

$G = c$ が定数なら $F(\sigma_t) - c\ell^2 t^2/2$ は凹関数となる。 $m(M) < \infty$ や $F \in L^2(m)$ は仮定しない。
弱Hessianの定義には F の局所一階Sobolev正則性しか使わない。

Theorem 1.1; (1.1)–(1.4) · p. 2

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Weak Hessian bounds along every geodesic in RCD spaces](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [AGS15](#) Luigi Ambrosio, Nicola Gigli, Giuseppe Savaré — Bakry–Émery curvature-dimension condition and Riemannian Ricci curvature bounds : 元の熱流のreverse-Poincaré評価、intrinsic distance・定数BEとRCDの同値。arXiv:1209.5786v4。
- [BHS21](#) Mathias Braun, Karen Habermann, Karl-Theodor Sturm — Optimal transport, gradient estimates, and pathwise Brownian coupling on spaces with variable Ricci bounds : 既存RCD空間上の変動曲率BE₂とCDの同値、およびGreen核エントロピー式。arXiv:1906.09186v1。
- [Deng25](#) Qin Deng — Hölder continuity of tangent cones in RCD(K,N) spaces and applications to non-branching : 有限次元RCD空間の全測地線の非分岐性。arXiv:2009.07956v2。
- [Sav14](#) Giuseppe Savaré — Self-improvement of the Bakry–Émery condition and Wasserstein contraction of the heat flow in RCD(K,∞) metric measure spaces : 測度値Bochner不等式と容量零集合を除く乗数の評価。arXiv:1304.0643v2。
- [Gig18](#) Nicola Gigli — Nonsmooth differential geometry—an approach tailored for spaces with Ricci curvature bounded from below : 元のtest classのHessian二乗評価。arXiv:1407.0809v1。
- [GT21](#) Nicola Gigli, Luca Tamanini — Second order differentiation formula on RCD_{*}(K,N) spaces : 元の熱流の正則化、良いcutoff、Laplacian領域のHessian評価。arXiv:1802.02463v1。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 — 主定理の証明概略

証明対象 : Theorem 1.1; (1.1)–(1.4) · p. 2

証明の道筋。 $m_\lambda = e^{\lambda F} m$ に対する $\text{CD}(K - \lambda G, \infty)$ を Proposition 4.1 の節で得る。その証明が必要とする乗数の正則性は Lemma 3.1 の節に分ける。ここではその曲率下界から、一つの指定された測地線へ移る後半までを示す。 $\ell = 0$ は自明なので $\ell > 0$ とする。 $\mathbf{g}(s, t) = \min\{s, t\} - st$ を Dirichlet Green 核と書く。

1 分布的 Hessian 上界

$$H_F(\nabla g, \nabla g)(h) \leq \int h G \Gamma(g) dm$$

F は有界大域 Lipschitz、 G は有界連続。

元の resolvent で乗数を正則化し、Hessian 項を取り出す。

[Proposition 4.1 · pp. 7–8](#)

2 指数重みの曲率下界

$$m_\lambda = e^{\lambda F} m, \quad \text{CD}(K - \lambda G, \infty)$$

共通 generator domain で Bochner 不等式を閉じる。

有限次元の非分岐性と properness で全輸送経路を固定する。

[\[Deng25, Theorem 1.3, p. 2\]](#)

3 指定した内部区間へ集中

$$\mu_i^j = \frac{m|_{B_{\varepsilon_j}(\tau_i)}}{m(B_{\varepsilon_j}(\tau_i))}, \quad \pi_j \rightharpoonup \delta_\tau$$

非分岐性 $\Rightarrow$ strict subsegment τ の一意性。

有界な経路長と連続な F, G で Green 核の項を極限へ移す。

[\(5.1\)–\(5.2\) · pp. 9–10](#)

4 エントロピー誤差を消す

$$\lambda_j \geq j(1 + |E_0^j| + |E_1^j|), \quad E_t^j \geq -\log m(Q)$$

$$F(\tau_t) \geq (1-t)F(\tau_0) + tF(\tau_1) - |\dot{\tau}|^2 \int_0^1 \mathbf{g}(s, t) G(\tau_s) ds$$

すべての内部区間の弦不等式を Green 公式で読み替える。

[§5 · p. 10](#)

5 任意の測地線上の二階微分

$$a'' = \ell^2 G \circ \sigma, \quad F \circ \sigma - a \text{ は凹}$$

$$(F \circ \sigma)'' \leq \ell^2 G \circ \sigma \quad \text{in } \mathcal{D}'(0, 1)$$

弱Hessian上界から重み付き曲率と集中極限を経て全測地線へ至る全体図

図を拡大 ↗ [TeXソース](#) ↓

1. 非分岐性で内部区間を固定する

Dengの非分岐定理により、 σ のstrict interior subsegmentはその両端を結ぶ唯一の最短測地線である。別の最短曲線があれば、内部区間をそれに置換して σ の前後へつなぐことで、同じ全長を持ち非自明な初期区間を共有する二つの最短測地線が生じる。ここで必要なのは全測地線の非分岐性であり、輸送計画に関するessential nonbranchingだけではこの議論にならない。

[Deng25, Theorem 1.3, p. 2]

内部区間の定速再パラメータ化を $\tau : [0, 1] \rightarrow M$ とし、 $\varepsilon_j \downarrow 0$ に対して

$$\mu_i^j = \frac{m|_{B_{\varepsilon_j}(\tau_i)}}{m(B_{\varepsilon_j}(\tau_i))}, \quad E_i^j = \text{Ent}_m(\mu_i^j) = -\log m(B_{\varepsilon_j}(\tau_i)), \quad i = 0, 1$$

と置く。full supportと局所有限性が分母の正値・有限性を与える。 $\lambda_j \geq j(1 + |E_0^j| + |E_1^j|)$ を選び、 m_{λ_j} に対する曲率下界を適用して動的最適計画 π_j を得る。propernessと端点支持の制約により、関連する全経路は一つのコンパクト集合 Q 内にあり、長さも L 以下である。Arzelà–Ascoliと τ の一意性から、どの経路列の極限も τ となり、 $\pi_j \rightharpoonup \delta_\tau$ を得る。重み付き測度が j ごとに変化しても、この結論は距離と端点のみに依存する。

§5 · p. 9

2. エントロピー誤差を消し、変動するGを残す

$\mu_t^j = (e_t)_\# \pi_j$ 、 $A_t^j = \int F d\mu_t^j$ 、 $E_t^j = \text{Ent}_m(\mu_t^j)$ とし、

$$C_t^j = \int \int_0^1 \mathbf{g}(s, t) |\dot{\gamma}|^2 ds d\pi_j(\gamma), \quad D_t^j = \int \int_0^1 \mathbf{g}(s, t) G(\gamma_s) |\dot{\gamma}|^2 ds d\pi_j(\gamma)$$

と置く。エントロピーの恒等式 $\text{Ent}_{m_{\lambda_j}}(\mu) = \text{Ent}_m(\mu) - \lambda_j \int F d\mu$ を代入すると、曲率不等式は

$$A_t^j \geq (1-t)A_0^j + tA_1^j - D_t^j + \frac{E_t^j - (1-t)E_0^j - tE_1^j + KC_t^j}{\lambda_j}$$

となる。Jensen不等式は $E_t^j \geq -\log m(Q)$ を与え、 $0 \leq C_t^j \leq L^2/8$ である。したがって最後の項の下極限は t について一様に非負となる。 F, G の Q 上の連続性と経路の一様収束を使って

$$F(\tau_t) \geq (1-t)F(\tau_0) + tF(\tau_1) - |\dot{\tau}|^2 \int_0^1 \mathbf{g}(s, t) G(\tau_s) ds$$

を得る。単に G を $\sup G$ へ置き換えるのではなく、連続性によって経路に沿う変動を極限に保存する。

(5.1)–(5.2) · pp. 9–10

[BHS21, Definition 1.2, p. 3]

3. すべての内部区間の弦不等式から分布微分へ

$(0, 1)$ の任意のコンパクト区間で $a''(t) = \ell^2 G(\sigma_t)$ を満たす C^2 関数 a を選ぶ。すべての部分区間に先の不等式を適用し、再パラメータ化に伴う長さの二乗を戻すと、Green公式により $F \circ \sigma - a$ が各弦の上にあることと同値になる。したがってこれは凹関数であり、分布二階微分は非正である。定数 $G = c$ の場合は $a(t) = c\ell^2 t^2/2$ でよい。ここまでの議論は F の大域 L^2 可積分性を使わない。

§5 · p. 10

3. Lemma 3.1 — 生成作用素の共通領域と乗数の正則性

証明対象 : Lemma 3.1; (3.1)–(3.3) · p. 6

Lemma 3.1 — 有界Lipschitz重みによる生成作用素

主要結果と同じfull-support $\text{RCD}(K, N)$ 空間上で、 V を有界かつ大域的Lipschitzとする。

$m_V = e^V m$ 、 Δ_V を m_V のCheeger energyの非正生成作用素とすると、Sobolev空間と弱勾配は一致し、

$$D(\Delta_V) = D(\Delta), \quad \Delta_V u = \Delta u + \Gamma(V, u)$$

であり、両生成作用素のgraph normは同値である。さらに任意の $\xi \in D(\Delta_V)$ について、 $\xi, \Delta_V \xi \in L^\infty$ なら ξ は大域的Lipschitz代表を持つ。

Lemma 3.1; (3.1)–(3.3) · p. 6

1 有界な測度変更

$$V \in \text{Lip}(M) \cap L^\infty, \quad m_V = e^V m$$

$$D(\Delta_V) = D(\Delta), \quad \Delta_V u = \Delta u + \Gamma(V, u)$$

弱勾配は共通、両 graph norm は同値。

重み付き曲率を仮定せず、元の熱流の reverse-Poincaré 評価を積分。

[AGS15, Corollary 2.3, (2.34), p. 18]

2 元の resolvent の勾配評価

$$R_a = (a - \Delta)^{-1} = \int_0^\infty e^{-at} P_t dt$$

$$\|R_a h\|_p \leq a^{-1} \|h\|_p, \quad \|\nabla R_a h\|_p \leq C_p a^{-1/2} \|h\|_p \quad (p = 2, \infty)$$

有界 drift と $a^{-1/2}$ の減衰が縮小性を与える。

Lemma 3.1; (3.1)–(3.3) · p. 6

3 縮小写像で有界勾配を得る

$$E = \{z \in W^{1,2} : z, |\nabla z| \in L^\infty\}$$

$$z \mapsto R_a(h + \Gamma(V, z)), \quad (a - \Delta_V)z = h$$

a を大きくして L^2, L^∞ の両勾配を同時に制御。

重み付きエネルギーによる一意性と元の Sobolev-to-Lipschitz 性。

Lemma 3.1; (3.1)–(3.3) · p. 6

4 Bochner 乗数の Lipschitz 代表

$$\xi \in D(\Delta_V), \quad \xi, \Delta_V \xi \in L^\infty$$

$$h = (a - \Delta_V)\xi \implies z = \xi \in \text{Lip}(M)$$

元の熱流のresolventで重み付きBochner乗数をLipschitz化する図

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 測度の同値性から共通のgraph domainへ

e^V が上下から正の定数で挟まれるため、test planの圧縮条件と弱勾配は共通であり、 $W^{1,2}$ ノルムは同値になる。生成作用素の弱い定義で試験関数を $e^{\pm V}$ 倍するとdrift公式が従う。 $|\nabla V| \in L^\infty$ によりdriftは L^2 に属し、 $\|\nabla u\|_2^2 = -\int u \Delta u dm$ とその重み付き版からgraph normの同値性が出る。

Lemma 3.1; (3.1)–(3.3) · p. 6

2. 元のresolventの縮小写像を使う

$R_a = (a - \Delta)^{-1} = \int_0^\infty e^{-at} P_t dt$ と置く。元の熱半群のMarkov性・reverse Poincaré評価から、十分大きい a について $p = 2, \infty$ で

$$\|R_a h\|_p \leq a^{-1} \|h\|_p, \quad \|\nabla R_a h\|_p \leq C_p a^{-1/2} \|h\|_p$$

が得られる。 $E = \{z \in W^{1,2} : z, |\nabla z| \in L^\infty\}$ に四つのノルムの和を入れると、 $z \mapsto R_a(h + \Gamma(V, z))$ は a を大きく取って縮小写像になる。その不動点は $(a - \Delta_V)z = h$ を解く。
 $h = (a - \Delta_V)\xi \in L^2 \cap L^\infty$ とすれば、重み付きエネルギー恒等式による一意性から $z = \xi$ 。元の空間のSobolev-to-Lipschitz性を適用する。まだ重み付き空間の曲率下界を仮定していない点が循環を避ける。

[AGS15, Corollary 2.3, (2.34), p. 18]

Lemma 3.1; (3.1)–(3.3) · p. 6

4. Proposition 4.1 — 弱Hessian上界から変動曲率下界へ

証明対象：Proposition 4.1 · pp. 7–8

Proposition 4.1 — 指数重みで曲率を変更する

Theorem 1.1と同じ空間、 F, G およびすべてのコンパクト台 $g \in \text{Test}(M)$ ・非負 $h \in \text{Lip}_c(M)$ に対する弱Hessian不等式を仮定する。このときすべての $\lambda > 0$ について、距離 d を変えずに

$$(M, d, m_\lambda), \quad m_\lambda = e^{\lambda F} m,$$

は $\text{CD}(K - \lambda G, \infty)$ を満たす。

Proposition 4.1 · pp. 7–8

1 Lipschitz 乗数で元の Bochner 式を使う

$$V = \lambda F, \quad w = e^V, \quad k = K - \lambda G$$

$$B_0(g, w\xi) \geq K \int w\xi\Gamma(g) dm$$

g は元のコンパクト test 関数、 ξ は Lemma 3.1 の乗数。

容量を考慮した Bochner 測度と積の法則。弱 Hessian 上界を適用する。

[§2.2; \(2.2\) · p. 5](#)

[\[Sav14, Lemma 3.2; \(3.4\), \(3.7\)–\(3.9\), pp. 11–12\]](#) [\(4.2\)–\(4.5\) · pp. 7–8](#)

2 弱 Hessian の符号を取り出す

$$B_V(g, \xi) - B_0(g, w\xi) = -H_V(\nabla g, \nabla g)(w\xi)$$

$$B_V(g, \xi) \geq \int k\xi\Gamma(g) dm_V$$

有界な $\xi, \Delta_V \xi, |\nabla \xi|, k$ で各積分が連続。

[\(4.6\)–\(4.7\) · p. 8](#)

[Remark 4.2 · p. 9](#)

3 drift を微分せず graph 閉包

$$B_V = \frac{1}{2} \int (\Delta_V \xi) \Gamma(g) dm_V + \int (\Delta_V g) \Gamma(\xi, g) dm_V + \int \xi (\Delta_V g)^2 dm_V$$

共通 compact core から全 $D(\Delta_V)$ へ。その後に $\Delta_V g \in W^{1,2}$ 。

共通弱勾配・Sobolev-to-Lipschitz・Gaussian 体積増大を確認。

[\[AGS15, Theorem 4.17, p. 57\]](#)

4 定数曲率で基礎 RCD 構造を得る

$$K_V = \inf_M k > -\infty, \quad d_{\mathcal{E}_V} = d$$

$$\text{BE}(K_V, \infty) \implies \text{RCD}(K_V, \infty)$$

k は有界連続。BHS の weighted domain は閉包後に満たされる。

[\[BHS21, Theorem 1.1, p. 3\]](#) [\[BHS21, Definition 1.4, p. 4\]](#)

5 変動曲率のエントロピー不等式

$$\text{BE}_2(k, \infty) \implies \text{CD}(k, \infty)$$

$$k = K - \lambda G, \quad m_\lambda = e^{\lambda F} m \quad (\lambda > 0)$$

元のBochner測度、Hessian恒等式、graph閉包、曲率次元同値をつなぐ図

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. Lipschitz乗数で弱Hessianを正確に取り出す

$V = \lambda F$ 、 $w = e^V$ 、 $k = K - \lambda G$ とし、非負 $\xi \in D(\Delta_V)$ で $\xi, \Delta_V \xi \in L^\infty$ を固定する。Lemma 3.1により ξ は Lipschitz である。コンパクト台の元の test 関数 g に対し $q = \Gamma(g)/2$ と置き、

$$B_V(g, \xi) = - \int w \Gamma(\xi, q) dm + \int w [\xi \Delta_V g + \Gamma(\xi, g)] \Delta_V g dm$$

を使う。元のBochner測度は容量零集合を荷重せず、共通コンパクト台・一様Lipschitz評価を持つtest近似を通じてLipschitz乗数 $w\xi$ で積分できる。 $\text{supp } g$ の近傍で1のcutoffを挿入すれば、非コンパクトな乗数も扱える。

積の法則と弱Hessianの定義そのものから

$$B_V(g, \xi) - B_0(g, w\xi) = -H_V(\nabla g, \nabla g)(w\xi)$$

を得る。元のBochner下界と $H_V = \lambda H_F$ の上界を合わせると $B_V(g, \xi) \geq \int k\xi\Gamma(g) dm_V$ となる。右辺の符号が $K - \lambda G$ となるのは、このHessian項の負号による。

§2.2; (2.2) · p. 5; (4.2)–(4.5) · pp. 7–8

[Sav14, Lemma 3.2; (3.4), (3.7)–(3.9), pp. 11–12]

[Gig18, Theorem 3.3.8, p. 110]

2. weighted test classへ飛ばず、graph normで閉じる

$\Delta_V g = \Delta g + \Gamma(V, g)$ のdriftを微分できるとは限らない。原稿のRemark 4.2では、原点近傍で $V = -|x_1|$ 、 $g = x_1$ とすると $\Delta_V g = -\text{sign}(x_1)$ となり、局所的にも $W^{1,2}$ に属さない例を挙げる。

そこで B_V を先に

$$\frac{1}{2} \int (\Delta_V \xi) \Gamma(g) dm_V + \int (\Delta_V g) \Gamma(\xi, g) dm_V + \int \xi (\Delta_V g)^2 dm_V$$

へ書き直す。この形なら $\xi, \Delta_V \xi, |\nabla \xi|, k$ の有界性により Δ_V のgraph convergenceで連続である。元の熱流と良いcutoffから得たコンパクトtest coreを、Lemma 3.1のgraph norm同値で移し、すべての $g \in D(\Delta_V)$ へ閉包する。その後で $\Delta_V g \in W^{1,2}$ を課して部分積分すれば

$$\frac{1}{2} \int (\Delta_V \xi) \Gamma(g) dm_V - \int \xi \Gamma(g, \Delta_V g) dm_V \geq \int k \xi \Gamma(g) dm_V$$

を得る。特に $\Gamma(g) \in L^\infty$ を追加したBHSの $\text{BE}_2(k, \infty)$ の実際的な定義域で成立する。

(4.6)–(4.7) · p. 8; Remark 4.2 · p. 9

[GT21, Appendix A, (A.7), Lemma A.2, (A.13), pp. 54–56]

[BHS21, Definition 1.4, p. 4]

3. まず定数曲率のRCD構造を確保する

BHSの変動曲率同値は、基礎空間が既に何らかの定数下界を持つRCD空間であることを要求する。まず $K_V = \inf k > -\infty$ に下げる。共通の弱勾配とSobolev-to-Lipschitz性により、 $\mathcal{E}_V = 2 \text{Ch}_V$ のintrinsic distanceは元の d に一致する。AGSのTheorem 3.9でenergy measure space、Theorem 3.14でupper regularityと保存性、Definition 3.16でRiemannian energy measure spaceを確認する。Gaussian

volume growthは有界同値な測度への変更で保たれ、Theorem 4.17の仮定を満たす。これで $\mathrm{RCD}(K_V, \infty)$ を得た後、 k が有界連続、したがって下半連続かつ下から有界であることと先の BE_2 を使って $\mathrm{CD}(k, \infty)$ へ進む。

[AGS15, Theorem 3.9, p. 33; Theorem 3.14, p. 38; Definition 3.16, p. 40]

[AGS15, Theorem 4.17, p. 57]

[BHS21, Theorem 1.1, p. 3]

5. どの論文が、どの段階を担うか

供給元と結果

[Deng25, Theorem 1.3, p. 2]

利用箇所

§5、Theorem 1.1

使用内容・必要な仮定

有限次元 $1 < N < \infty$ の非分岐性からstrict subsegmentの一意性

確認範囲

原典p.2の主張と本稿pp.9–10の適用を照合

供給元と結果

[AGS15, Corollary 2.3, (2.34), p. 18] / [AGS15, Theorem 3.9, p. 33; Theorem 3.14, p. 38; Definition 3.16, p. 40] / [AGS15, Theorem 4.17, p. 57]

利用箇所

Lemma 3.1、Proposition 4.1

使用内容・必要な仮定

元の熱流の勾配正則化、および実際のintrinsic distanceを確認した上での定数 $\mathrm{BE} \rightarrow \mathrm{RCD}$

確認範囲

pp.18、33、38、40、57の入力記述と使用仮定を照合

供給元と結果

[BHS21, Definition 1.2, p. 3] / [BHS21, Definition 1.4, p. 4] / [BHS21, Theorem 1.1, p. 3]

利用箇所

Proposition 4.1、§5

使用内容・必要な仮定

既存RCD構造上の有界連続 k について $BE_2 \rightarrow CD$ とGreen核エントロピー式

確認範囲

pp.3–4の記述・定義域・符号を照合

供給元と結果

[Sav14, Lemma 3.2; (3.4), (3.7)–(3.9), pp. 11–12] / [Gig18, Theorem 3.3.8, p. 110]

利用箇所

§2.2、Proposition 4.1

使用内容・必要な仮定

Bochner測度、容量零集合、Hessian二乗項による元の不等式

確認範囲

指定版の該当記述と本稿のLipschitz乗数近似を照合

供給元と結果

[GT21, Appendix A, (A.7), Lemma A.2, (A.13), pp. 54–56]

利用箇所

Lemma 2.1、Proposition 4.1

使用内容・必要な仮定

bounded-Laplacian熱正則化、良いcutoff、graph coreとHessian近似

確認範囲

v1 pp.54–56と本稿pp.4–5を照合

この表は主証明への直接入力をもとめる。原稿導入で比較される既存のHessian-to-convexity法と、この証明に必要な外部定理は区別する。カタログ356内の別原稿との接続はカタログ案内側で整理する。

6. 原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 1.1; (1.1)–(1.4) · p. 2 — test class · 弱Hessian · すべての測地線という量化を読む。
- Lemma 2.1 · pp. 4–5 — 元の熱流からコンパクトcoreとLipschitz乗数近似を作る。
- Lemma 3.1; (3.1)–(3.3) · p. 6 — weighted generatorの共通領域とresolventによる正則性を追う。
- Proposition 4.1 · pp. 7–8 — Hessian恒等式、graph閉包、二段階の曲率同値を読む。
- (5.1)–(5.2) · pp. 9–10 — 端点エントロピーを支配する λ の選択とGreen核の極限を確認する。
- §5 · p. 10 — すべての内部区間から分布微分上界へ戻る。

本稿のTheorem 1.1、Lemma 2.1、Lemma 3.1、Proposition 4.1と§5の証明本文を読み、上表の外部入力の記事・適用仮定・版・ページを照合した。元のtest classと重み付き定義域の差、graph閉包、strict subsegmentの一意性、 λ_j と端点エントロピーの同時極限を確認対象とした。外部文献の証明全体やその依存文献を再帰的に検証したものではなく、専門家査読・形式検証も行っていない。とくに測度値Bochner計算とheat-flow評価の全基礎理論は外部入力としている。