

OpenAI Math Digest

CATALOGUE 322

Tingleyの球面等長写像問題

カタログ案内と1篇の証明概説

独立した非公式の読解ガイド・日本語版

収録版: 2026-10-20

制作: Masataka Iwai・大阪大学

AI生成の解説には誤りや不正確な説明が含まれる可能性があります。重要な主張・証明は原論文でご確認ください。本冊子はWebサイトの解説をまとめたもので、原論文そのものではありません。専門家査読・形式検証は未実施です。

目次

カタログ案内に続き、収録論文1篇の解説を掲載しています。目次・引用はクリックできます。横長の表は紙面向けの項目一覧に組み直し、主張と参照先を保持しています。

00・カタログ322 案内	3
01・A positive solution to Tingley's problem	5

原論文の参照版: 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a

[カタログ322 ・ 案内](#)[Web版を読む](#) ↗

CATALOGUE 322

Tingleyの球面等長写像問題

Tingley's sphere-isometry problem

本カタログは、実Banach空間の単位球面間の全射等長写像について、空間全体への一意な実線形等長延長を主張する1本の原稿を収録する。概説は、異なる半径の距離欠損を極値化し、弦の整列と凸性の矛盾で消す証明を追う。

収録論文

主結果の範囲を短くまとめています。正確な仮定と定式化は併記した原典の結果を参照してください。

[カタログ 322 ・ 2026-10-20 確認の固定参照版](#)

#

01

論文 ・ 概説

A positive solution to Tingley's problem →

図中の略称: A positive solution to Tingley's problem

September 23, 2026 ・ 12 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

非零実Banach空間の単位球面間の全射等長写像は、全射実線形等長写像へ一意に延長される。次元・可分性等の制限を課さない。

[Theorem 1.1 ・ p. 1](#) ↗

議論の役割 ・ 概説

異なる半径の最大距離欠損を達成させ、共通支持とDarboの定理で弦を整列し、支持・凸性の矛盾から欠損を零にする。

[証明概説を読む](#) →

記事への案内

A positive solution to Tingley’s problemの概説では、まずTheorem 1.1の全体の証明図を示し、Proposition 4.2の不変閉凸集合と非コンパクト度の縮小、Proposition 5.3の支持汎関数・凸性による矛盾を説明する。Darboの不動点定理とMazur–Ulamの反射の議論は古典的入力であり、その適用条件と本原稿が担う構成を区別する。

原典・確認範囲

公式分野はFunctional analysis（関数解析）、公式番号範囲は322–332である。公式カタログと収録順は2026年10月20日に確認した固定版を用い、対象原稿は2026年9月23日版、全12ページである。

引用キーOpenAI26Catは、OpenAIによる OpenAI Research Catalog の固定版（commit 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a）を指す。

[OpenAI26Cat, Catalogue 322; Functional analysis, p. 35]

Theorem 1.1; §§3–6 · pp. 1, 3–9

主定理、主要な帰着、直接用いる古典的結果の記述と適用条件を照合した。全証明の独立検証や専門家査読を表すものではない。外部証明の再帰的検証と先行研究全件の照合は範囲外であり、詳しい確認範囲と版の注記は記事末尾に記す。

A positive solution to Tingley's problem

最大欠損の達成から、非コンパクト度の縮小による弦の整列へ

本原稿は、実Banach空間の単位球面間の全射等長写像が、空間全体の実線形等長写像へ一意に延長されると主張する。異なる半径の間の距離が保存されないと仮定し、その最大欠損を達成する別の空間へ移る。核心は、共通支持汎関数による極値方向の伝播とDarboの不動点定理を組み合わせ、二つの弦を整列させる点にある。

原稿の著者: OpenAI · September 23, 2026 · 12 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 球面等長写像の一意な実線形延長

X, Y を非零の実Banach空間とし、 $f: S_X \rightarrow S_Y$ を全射等長写像とする。このとき

$$T(0) = 0, \quad T(x) = \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \quad (x \neq 0)$$

は全射実線形等長写像であり、 f の唯一の線形延長である。次元、可分性、反射性、滑らかさ、狭義凸性は仮定しない。複素Banach空間に適用する場合の結論も実線形性であり、複素線形性は含まない。

Theorem 1.1 · p. 1

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [A positive solution to Tingley's problem](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [Dar55](#) Gabriele Darbo — Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto : 非コンパクト度を一様に縮める自己写像の不動点。本稿Theorem 4.1で定式化され、Appendix Aでも証明される。1955年刊、誌面pp. 84–92。NUMDAMの表紙付きスキャン。

- Nic Bogdan Nica — The Mazur-Ulam theorem：全空間の全射等長写像を中点反射で実線形化する段階。本稿 §6がこの提示を再現する。arXiv:1306.2380v1のURLから取得。欄外は2013年6月10日、本文Dateは2024年11月27日であり、不一致を保持。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 の証明 — 距離欠損を消してから線形化する

証明対象：Theorem 1.1 · p. 1

証明の道筋。 半径比 q に対する距離欠損の上限 M を考える。 $M > 0$ ならLemma 3.1により最大値が達成される状況へ移し、Proposition 4.2の整列とProposition 5.3の矛盾を適用する。したがって元の写像の M も零であり、放射状延長 T が全射距離等長写像となる。最後に中点反射の議論で実線形性を得る。

$$D_q(x, y) = \|f(x) - qf(y)\| - \|x - qy\|, \quad M = \sup_{x, y \in S_X, 0 \leq q \leq 1} |D_q(x, y)|.$$

1 全半径の距離欠損

$f : S_X \rightarrow S_Y$ は全射等長写像.

$$D_q(x, y) = \|f(x) - qf(y)\| - \|x - qy\|, \quad M = \sup |D_q|.$$

$M > 0$ と仮定する。

逆写像で符号を選び、ultrapower と完備化で上界を保つ

[Lemma 3.1; \(1\)–\(4\) · pp. 3–4](#)

2 別の空間で最大欠損を達成

$$|D_q(a, c)| \leq M \quad (\text{すべての単位対} \cdot \text{半径比}).$$

$$D_t(x_0, y) = M > 0, \quad 0 < t < 1.$$

共通支持で閉凸集合を作り、非コンパクト度を縮める

[Proposition 4.2 · pp. 4–6](#)

3 極値方向の不動点で二つの弦を整列

$$x = ty + pv, \quad z = ty - rv, \quad b = f(y),$$

$$f(x) = tb + sw, \quad f(z) = tb - uw,$$

$$s - p = r - u = M, \quad d = p + r = s + u \leq 2.$$

支持の割線評価から比率を制限し、保存距離の上下界を衝突させる

[Proposition 5.3 · pp. 8–9](#)

4 整列配置を排除して元の欠損を消す

半径摂動と凸性の矛盾

$M > 0$ は不可能; $M = 0$ (元の写像) .

距離復元の後、中点欠損の反復倍化で中点保存を得る

[§6, proof of Theorem 1.1 · p. 9](#)

[\[Nic, Theorem \(Mazur–Ulam 1932\); reflection proof, p. 1\]](#)

5 放射状延長を実線形化

$$T(0) = 0, \quad T(x) = \|x\|f(x/\|x\|) \quad (x \neq 0).$$

全半径で距離保存・全射 $\implies$ 実線形、一意.

最大欠損の達成、整列、矛盾と線形化の全体図

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 上限を達成する球面等長写像へ移す

$D_0 = D_1 = 0$ と q についての一様な 2-Lipschitz 性から、 $|D_q| \leq 2 \min(q, 1 - q)$ である。 $M > 0$ に近づく列を選び、必要なら f^{-1} へ交換して欠損の符号を正にする。半径比の部分列を $t \in [M/2, 1 - M/2]$ へ収束させ、一様 Lipschitz 評価で全項の半径比を t に固定する。

単位ベクトル列に f を項ごとに作用させると、ultrapowerの商の単位球面上に全射等長写像が定まる。代表元の独立性と全射性は、それぞれ f の距離保存と f^{-1} の項別作用から従う。完備化後にも、すべての半径比と単位ベクトル対に対する $|D_q| \leq M$ が保たれ、ある x_0, y, t で $D_t(x_0, y) = M$ となる。後の半径摂動には、この大域的上界を保った達成が必要である。新しい空間の等長写像を分類するのではなく、この達成状況が存在できないことを示す。

Lemma 3.1; (1)–(4) · pp. 3–4

2. 整列した弦を排除し、全半径の距離を復元する

Proposition 4.2は、 ty と $tf(y)$ を通る二つの弦について、端点の対応だけでなく四つの半径の差を M に揃える。Proposition 5.3はその配置を支持汎関数とノルムの凸性から排除する。この矛盾により、元の f でも $M = 0$ である。

$a = \alpha x, c = \beta y, x, y \in S_X, \alpha \geq \beta > 0$ に対し $q = \beta/\alpha$ と置けば

$$\|T(a) - T(c)\| = \alpha \|f(x) - qf(y)\| = \alpha \|x - qy\| = \|a - c\|.$$

半径の順序を交換した場合と零を含む場合も扱える。 f の全射性から、任意の $b \neq 0$ について $f(y) = b/\|b\|$ となる $y \in S_X$ があり、 $T(\|b\|y) = b$ である。

Propositions 4.2, 5.3; §6 · pp. 4, 8–9

3. 中点欠損の倍化で実線形性と一意性を得る

全射等長写像 F について、 $m = (a + c)/2, m' = (F(a) + F(c))/2$ 、中点欠損 $\delta = \|F(m) - m'\|$ と置く。 m' を中心とする反射 R を F で共役すると、 $H = F^{-1}RF$ は a, c を交換し、その中点欠損は 2δ になる。一方、どの全射等長写像でも欠損は $\|a - c\|/2$ 以下である。反復による倍化との両立には $\delta = 0$ が必要となる。

$T(0) = 0$ と中点保存から加法性、有理斉次性、連続性による実斉次性が順に従う。任意の線形延長は $x = \|x\|(x/\|x\|)$ で値が決まるため一意である。本稿§6はこのMazur–Ulamの段階をNicaの反射による提示に沿って再証明している。

§6, proof of Theorem 1.1 · p. 9

[Nic, Theorem (Mazur–Ulam 1932); reflection proof, p. 1]

3. Proposition 4.2 の証明 — 極値方向を閉凸集合へ伝播する

証明対象：Proposition 4.2 · pp. 4–6

Proposition 4.2 — 最大欠損をもつ弦の整列

$f : S_X \rightarrow S_Y$ が非零の実Banach空間間の全射球面等長写像であり、すべての $a, c \in S_X$, $q \in [0, 1]$ について $|D_q(a, c)| \leq M$ 、かつある $x_0, y \in S_X$, $0 < t < 1$ について $D_t(x_0, y) = M > 0$ とする。 $b = f(y)$ と置く。このとき $x, z \in S_X$, $v \in S_X$, $w \in S_Y$ と正数 $p, r, s, u \in [1 - t, 1 + t]$ が存在し、

$$\begin{aligned} x &= ty + pv, & z &= ty - rv, & s - p &= r - u = M, & d &:= p + r = s + u = \|x - z\| \leq 2 \\ f(x) &= tb + sw, & f(z) &= tb - uw, \end{aligned}$$

を満たす。端点 x は当初の最大点 x_0 と一致するとは限らない。

Proposition 4.2 · pp. 4–6

証明の道筋。 球面接点の連続性から反対側の端点を経由する帰還写像 g を作る。極値集合 E 全体の凸性を仮定せず、共通支持を使って E 内に不変な閉凸集合 C を構成する。 g は通常の距離について縮小するとは示さず、非コンパクト度の縮小を示して不動点を得る。

1 反対端点を経由する帰還写像

$$\begin{aligned} x(v) &= ty + p(v)v, & f(x(v)) &= tb + s(v)w, \\ f(z) &= tb - u(v)w, & g(v) &= (ty - z)/r(v). \\ E &= \{v : s(v) - p(v) = M\} \neq \emptyset, & 1 - t &\leq p, r, s, u \leq 1 + t. \end{aligned}$$

球面の距離保存と大域欠損上界で三角不等式が等号になる

[Lemmas 2.1–2.2; \(7\)–\(8\) · pp. 2–3, 5](#)

2 等号から共通支持と極値の伝播へ

$$\begin{aligned} r &= u + M, & \|pv + rg(v)\| &= p + r. \\ g(v) &\text{ と共通支持をもつ単位方向 } \ell & \text{ は } E \text{ に属する.} \end{aligned}$$

正係数で各頂点へ支持を伝播し、稠密な凸結合と連続性を使う

[Proposition 4.2, invariant convex set · p. 5](#)

3 閉凸不変集合を構成

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i, & \lambda_i &> 0, & \sum_{i=0}^n \lambda_i &= 1, & v_{n+1} &= g(a_n). \\ C &= \overline{\text{conv}}\{v_0, v_1, \dots\} \subset E \subset S_X, & g(C) &\subset C. \end{aligned}$$

p, u の幅を η に分け、誤差 $4\eta/(1-t)$ を零にする

[Theorem 4.1; \(9\), Proposition 4.2 · pp. 4–6](#)

4 半径で被覆を細分して非コンパクト度を縮める

$$\begin{aligned} \|g(v) - g(v')\| &\leq \frac{up}{rs} \|v - v'\| + \frac{2|u - u'|}{r} + \frac{2u|p - p'|}{rs}. \\ \chi(g(H)) &\leq \gamma \chi(H), & \gamma &= \left(1 - \frac{M}{1+t}\right)^2 < 1. \end{aligned}$$

非空・閉・有界・凸な C と連続自己写像に Darbo を適用

[\[Dar55, §4, Teorema \(unnumbered\), 誌面 pp. 90–91 / PDF pp. 8–9\]](#)

5 不動点が弦の整列を与える

$$\begin{aligned} g(v) = v &\implies z = ty - rv, & f(z) &= tb - uw. \\ s - p = r - u = M, & p + r = s + u = \|x - z\| \leq 2. \end{aligned}$$

共通支持による不変閉凸集合と非コンパクト度の縮小

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 反対端点を経由する帰還写像

方向 $v \in S_X$ から、 $x(v) = ty + p(v)v \in S_X$ を取り、 $f(x(v)) = tb + sw$ と書く。 tb から方向 $-w$ へ進んだ球面接点を $tb - uw = f(z)$ とし、

$$r = \|z - ty\|, \quad g(v) = \frac{ty - z}{r}$$

と定める。Lemma 2.2により接点は一意で連続に変わり、四つの半径は $[1-t, 1+t]$ に入る。

$E = \{v \in S_X : s(v) - p(v) = M\}$ は非空閉集合である。

$v \in E$ なら、球面の距離保存と逆向きの欠損上界から

$$s + u = \|x(v) - z\| \leq p + r, \quad r - u \leq M = s - p$$

となり、両方とも等号である。したがって $r = u + M$ 、 $\|pv + rg(v)\| = p + r$ であり、Lemma 2.1により $v, g(v)$ は共通支持をもつ。さらに $g(v)$ と共通支持をもつ任意の単位方向 ℓ について $p(\ell) + r \leq s(\ell) + u$ となり、 $\ell \in E$ が従う。この伝播が次の凸集合の構成を可能にする。

Lemmas 2.1–2.2; (7)–(8) · pp. 2–3, 5

2. 球面内に閉凸不変集合を構成する

$v_0 \in E$ から始め、既に得た $v_0, \dots, v_n$ のすべてに正の係数を与える凸結合 a_n を取り、 $v_{n+1} = g(a_n)$ とする。 a_n, v_{n+1} の共通支持を有限次元の線形包へ延長すると、係数の正値性から各 v_i でも値が1となる。拡大した凸包は球面上にあり、伝播則によって E に含まれる。

有理係数の有限凸結合を繰り返し近似するよう a_n を選ぶと、 a_n は $C = \overline{\text{conv}}\{v_0, v_1, \dots\}$ に稠密になる。 E の閉性と g の連続性から、 $C \subset E$ は非空・閉・有界・凸であり、 $g(C) \subset C$ である。可分なのは構成した C だけで、周囲の空間に可分性は要求しない。

Proposition 4.2, invariant convex set · p. 5

3. 半径を細分した被覆でDarboの仮定を満たす

$v, v' \in E$ について、本稿の評価は

$$\|g(v) - g(v')\| \leq \frac{up}{rs} \|v - v'\| + \frac{2|u - u'|}{r} + \frac{2u|p - p'|}{rs}.$$

$r = u + M$, $s = p + M$ より $up/(rs) \leq \gamma = (1 - M/(1+t))^2 < 1$ となる。しかし半径の差を含むため、これだけで距離縮小写像とはいえない。

$H \subset C$ の有限直径被覆を、 p, u の値が各々幅 η の区間に入るよう細分する。 $r, s \geq 1 - t$ により各像の直径は $\gamma\delta + 4\eta/(1-t)$ 以下であり、 $\eta \downarrow 0$ としてKuratowski非コンパクト度の評価 $\chi(g(H)) \leq \gamma\chi(H)$ を得る。Theorem 4.1のDarbo型定理を適用し、 $g(v) = v$ を得ると、 $z = ty - rv$ と端点の対応が同時に成立する。これが主定理に必要な整列配置である。

Theorem 4.1; (9), Proposition 4.2 · pp. 4–6

[Dar55, §4, Teorema (unnumbered), 誌面 pp. 90–91 / PDF pp. 8–9]

4. Proposition 5.3 の証明 — 支持の符号と凸性による二段階の矛盾

証明対象：Proposition 5.3 · pp. 8–9

Proposition 5.3 — 正の最大欠損は達成されない

非零の実Banach空間と全射等長写像 $f: S_X \rightarrow S_Y$ について、すべての $a, c \in S_X, q \in [0, 1]$ で $|D_q(a, c)| \leq M$ であり、ある $x_0, y \in S_X, 0 < t < 1$ で $D_t(x_0, y) = M > 0$ となる状況は存在しない。証明にはProposition 4.2の整列配置を使う。

Proposition 5.3 · pp. 8–9

証明の道筋。 $A = p/d, B = u/d, \varepsilon = 1 - t$ と置く。 $A + B = 1 - M/d < 1$ を保ちながら、まず $A > \varepsilon$ または $B > \varepsilon$ を半径摂動で排除する。残る $A, B \leq \varepsilon$ では、同一の球面距離を二つの凸関数で評価して矛盾する。

K は下で定義する割線の値、 φ は $v + \theta y$ での任意の支持を表す。図の L_v, L_w はそれぞれ v, w での任意の支持である。

1 整列配置の比率と割線評価

$$A = p/d, \quad B = u/d, \quad \varepsilon = 1 - t, \quad A + B = 1 - M/d < 1.$$

$$h = \min(t/s, \varepsilon/u), \quad \theta = hs/p.$$

$$\frac{\varepsilon}{p} \leq \varphi(v) \leq K \leq \begin{cases} 1 - B & (B \leq \varepsilon), \\ B & (B > \varepsilon). \end{cases}$$

すべての支持への評価と逆配置 $(A', B') = (B, A)$ を使う

Lemma 5.1, (11) · p. 7

Lemma 5.2, (12)–(15) · pp. 7–8

2 大きい比率を半径摂動で排除

$$A > \varepsilon \text{ または } B > \varepsilon$$

$$\implies \text{全支持が } L_v(y) < 0, L_w(b) > 0 \text{ を満たす}$$

$$\implies \|sw + \eta b\| > s, \quad \|pv + \eta y\| < p \quad (0 < \eta \ll 1)$$

$$\implies D_{t-\eta}(x, y) > M \text{ で矛盾.}$$

元と逆の割線評価により、残る場合の半径の順序を得る

Proposition 5.3, (16)–(17) · pp. 8–9

3 残る比率を二つの配置で制限

$$A, B \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \leq dA(1 - B), \quad dB(1 - A).$$

$$A + B < 1, \quad d \leq 2 \implies \varepsilon < 1/2.$$

$$p/t < r/\varepsilon, \quad s/t \geq u/\varepsilon.$$

割線勾配の単調性と凸性を、球面距離の保存と比較する

Proposition 5.3 · pp. 8–9

4 同じ球面距離の評価が衝突

$$F(\lambda) = \|y + \lambda v\|, \quad G(\lambda) = \|b + \lambda w\|.$$

$$F(0) = G(0) = 1, \quad F(p/t) = G(s/t) = 1/t.$$

$$F(r/\varepsilon) > 1/t \geq G(u/\varepsilon),$$

$$\text{しかし } \varepsilon F(r/\varepsilon) = \|y - z\| = \|b - f(z)\| = \varepsilon G(u/\varepsilon).$$

割線評価から半径摂動と凸性の矛盾へ至る図

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 端の半径まで動かして割線を評価する

$h = \min(t/s, \varepsilon/u)$ 、 $\theta = hs/p$ と置き、

$$K = \frac{\|(r/u)v + hy\| - \|(p/s)v + hy\|}{r/u - p/s}$$

を考える。 $t - sh$ と $t + uh$ は $[0, 1]$ 内にあり、一方は端点である。対応する欠損 $\Delta_x = D_{t-sh}(x, y)$ 、 $\Delta_z = -D_{t+uh}(z, y)$ の加重和では Y 側のノルムが消え、 $(u\Delta_x + s\Delta_z)/d = MK$ となる。一方の欠損が零、他方が M 以下であることから、 $K \leq 1 - B$ ($B \leq \varepsilon$)、 $K \leq B$ ($B > \varepsilon$) を得る。

$v + \theta y$ での任意の支持 φ はこの割線を下から評価する。 $v + (t/p)y$ の支持と比較すれば、Lemma 5.1の

$$\frac{\varepsilon}{p} \leq \varphi(v) \leq K$$

が得られる。次の摂動には、この評価が特定の支持だけでなくすべての支持に成り立つことが必要である。

Lemma 5.1, (11) · p. 7

2. 大きい比率を支持の符号で排除する

$B > \varepsilon$ ならLemma 5.1から $pu/(d\varepsilon) \geq 1$ となる。 v での任意の支持 L に対し $j = L(y)$ とすると、同補題の等号の場合を除くことで

$$1 - j > \frac{1 - B}{\theta} = \frac{pu}{d\varepsilon} \geq 1$$

が得られ、すべての支持が y 上で負になる。 $\|rv - ty\| = 1$ から $r < 1$ 、したがって $u < 1$ となり、 $Au \geq \varepsilon$ から $A > \varepsilon$ も従う。

f^{-1} には $(p', s', r', u') = (u, r, s, p)$ 、 $(v', w', y', b') = (-w, -v, b, y)$ の整列配置があり、 $(A', B') = (B, A)$ である。したがってどちらかが ε を超えれば、両方が超え、 w でのすべての支持は b 上で正となる。十分小さい $\eta > 0$ に対して

$$\|sw + \eta b\| > s, \quad \|pv + \eta y\| < p$$

が従い、半径 $t - \eta$ での欠損が $M = s - p$ を超える。後者の厳密な減少は、 $\text{span}\{v, y\}$ の双対単位球のコンパクト性と、すべての支持の符号から示す。

Lemma 5.2, (12)–(15) · pp. 7–8

3. 残る比率では保存される距離の上下界が衝突する

$A, B \leq \varepsilon$ のもとで、元の配置と逆配置にLemma 5.1を適用すると

$$\varepsilon \leq dA(1 - B), \quad \varepsilon \leq dB(1 - A).$$

$A + B < 1$ より右辺の二つの積の小さい方は $d/4$ 未満であり、 $d \leq 2$ から $\varepsilon < 1/2$ となる。よって $A \leq \varepsilon < t$, $1 - B \geq t$ であり、

$$\frac{p}{t} < \frac{r}{\varepsilon}, \quad \frac{s}{t} \geq \frac{u}{\varepsilon}.$$

凸関数 $F(\lambda) = \|y + \lambda v\|$, $G(\lambda) = \|b + \lambda w\|$ は $F(0) = G(0) = 1$, $F(p/t) = G(s/t) = 1/t > 1$ を満たす。割線勾配の単調性により $F(r/\varepsilon) > 1/t$ 、凸性により $G(u/\varepsilon) \leq 1/t$ となる。しかし

$$\varepsilon F(r/\varepsilon) = \|y - z\| = \|b - f(z)\| = \varepsilon G(u/\varepsilon)$$

は球面上の距離保存そのものであり、矛盾する。これで正の最大欠損の達成が排除され、Theorem 1.1 へ戻れる。

Proposition 5.3, (16)–(17) · pp. 8–9

5. どの論文が、どの段階を担うか

供給元と結果

Darboの不動点定理

利用箇所

Theorem 4.1、Proposition 4.2の末尾 (pp. 4, 6)

使用内容・必要な仮定

非空・閉・有界・凸な C 、連続な $g: C \rightarrow C$ 、一様な χ 縮小から不動点を得る。 C の構成と縮小評価は本稿が担う。

確認範囲

外部の記述と本稿の適用条件を照合。本稿Appendix Aにも証明がある。外部原典の全証明の独立検証は範囲外。

供給元と結果

NicaによるMazur–Ulam定理の反射による提示

利用箇所

§6 (p. 9)

使用内容・必要な仮定

球面からの延長ではなく、既に得た空間全体の全射等長写像の midpoint 保存と実線形化を担う。

確認範囲

中点欠損の倍化と一様上界、本稿での全射性・零固定を照合。

[Dar55, §4, Teorema (unnumbered), 誌面 pp. 90–91 / PDF pp. 8–9]

[Nic, Theorem (Mazur–Ulam 1932); reflection proof, p. 1]

有限次元の支持汎関数とその延長はLemma 2.1、半径接点の連続性はLemma 2.2、ultrapowerによる最大値の達成はLemma 3.1で本稿内に証明される。Hahn–Banachやultrapowerの歴史的引用を、未照合の外部定理への追加依存として図に描いてはいない。Appendix Aでは非コンパクト度の性質、単体不動点、コンパクト凸集合の不動点を経てTheorem 4.1を証明する。これらは本稿内の補助経路である。

6. 原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 1.1 · p. 1 — 非零実Banach空間という仮定と、全射・実線形・等長・一意の結論を確認する
- Lemma 3.1; (1)–(4) · pp. 3–4 — 逆写像への交換、別の空間での最大値達成、全半径の欠損上界の保存を読む
- Proposition 4.2 · pp. 4–6 — 共通支持による伝播、閉凸不変集合、非コンパクト度縮小の接続を読む
- Lemma 5.1, (11) · p. 7 — 二つの欠損の消去と、すべての支持に対する割線評価を読む
- Lemma 5.2, (12)–(15) · pp. 7–8 — 逆配置を使った支持の符号と、小さい半径摂動による矛盾を追う
- Proposition 5.3 · pp. 8–9 — 残る比率の範囲と、FとGが同じ球面距離を表す最終矛盾を確認する
- §6, proof of Theorem 1.1 · p. 9 — 全半径の距離復元から実線形性・一意性までを読む
- Appendix A, Lemmas A.1–A.3; proof of Theorem 4.1 · pp. 9–11 — 本稿内でTheorem 4.1を証明する補助経路を確認する

本概説では、Theorem 1.1の仮定と全結論、§§2–6の支持・最大値達成・不変集合・非コンパクト度評価・半径摂動・凸性の矛盾・実線形化を読解し、主要な接続を原典と照合した。Appendix AはTheorem 4.1への接続を確認した。これは著者の主張と証明戦略を案内するものであり、全証明の独立検証、専門家査読、形式検証を意味しない。外部定理の証明の再帰的検証と、Introductionの先行研究全件の結果照合は行っていない。

§§2–6; Appendix A · pp. 2–11