

OpenAI Math Digest

CATALOGUE 305

円板埋め込みと Wall の多様体予想 に対する反例

総括・論文間のつながりと3篇の証明概説

独立した非公式の読解ガイド・日本語版

収録版: 2026-10-21

制作: Masataka Iwai・大阪大学

AI生成の解説には誤りや不正確な説明が含まれる可能性があります。重要な主張・証明は原論文でご確認ください。本冊子はWebサイトの解説をまとめたもので、原論文そのものではありません。専門家査読・形式検証は未実施です。

目次

総括に続き、公式カタログ順で全3篇の解説を収録しています。目次・引用はクリックできます。横長の表は紙面向けの項目一覧に組み直し、主張と参照先を保持しています。

00 · カタログ305 総括	3
01 · A boundary-only obstruction to four-dimensional disk embedding	10
02 · A marked tensor obstruction to four-dimensional disk embedding	18
03 · A PD4 group without an aspherical manifold model	28

原論文の参照版: 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a

[カタログ305 · 総括](#)[Web版を読む ↗](#)

CATALOGUE 305

円板埋め込みとWallの多様体予想に対する反例

Counterexamples to disk embedding and Wall's manifold conjecture

4次元の円板埋め込みについて、境界円周だけを固定する障害と、誘導normal framingも保持する障害を扱う。後者の標識付き幾何構成・代数的potential・有限tensor定理は、有限表示の整係数PD4群を閉aspherical位相4多様体で実現する問題へ直接使われる。以下は原稿が主張する結果とその証明の接続を案内する。

1. 公式順の記事一覧

主結果の範囲を短くまとめています。正確な仮定と定式化は併記した原典の結果を参照してください。

カタログ 305 · 2026-10-21 確認の固定参照版

#

01

論文 · 概説

A boundary-only obstruction to four-dimensional disk embedding →

図中の略称: A boundary-only obstruction to four-dimensional disk embedding

September 24, 2026 · 48 ページ

原論文 (GitHub) ↗

主に何を主張するか

framedな代数的双対球面を持つ有限円板配置について、出力framingも相対ホモトピー類も指定しない境界円周の局所平坦な互いに素な充填を排除する。 F_2 のnongoodnessと、無制限surgery・s-cobordismの両立否定を導く。

Theorem 1.1 · p. 3; Corollaries 1.2–1.3 · pp. 4–5 ↗

議論の役割 · 概説

境界充填の実像からcut dataと全defect idealを取り、代数的置換・特殊化後のFrobenius–Koszul障害へ帰着する。

証明概説を読む →

02

論文・概説

A marked tensor obstruction to four-dimensional disk embedding →

図中の略称: A marked tensor obstruction to four-dimensional disk embedding
September 24, 2026 · 53 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

所定の代数的双対条件を満たす円板配置に、境界写像と誘導normal framingを保つ局所平坦な互いに素な置換が存在しないと主張する。置換円板の相対ホモトピー類は指定しない。

[Theorem 1.1 · p. 2](#) ↗

議論の役割・概説

独立な共役を含む境界法則、非被約critical schemeの標識、代数的potential、全active triplesの有限tensor障害を結ぶ。後続PD4稿へ中間結果を供給する。

[証明概説を読む](#) →

#

03

論文・概説

A PD4 group without an aspherical manifold model →

図中の略称: A PD4 group without an aspherical manifold model

September 24, 2026 · 32 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

有限・向き付けられた4次元BGを持つ有限表示の整係数PD4群を構成し、閉aspherical位相4多様体の基本群としての実現を排除する。

[Theorem 1.1 · pp. 1–2](#) ↗

議論の役割・概説

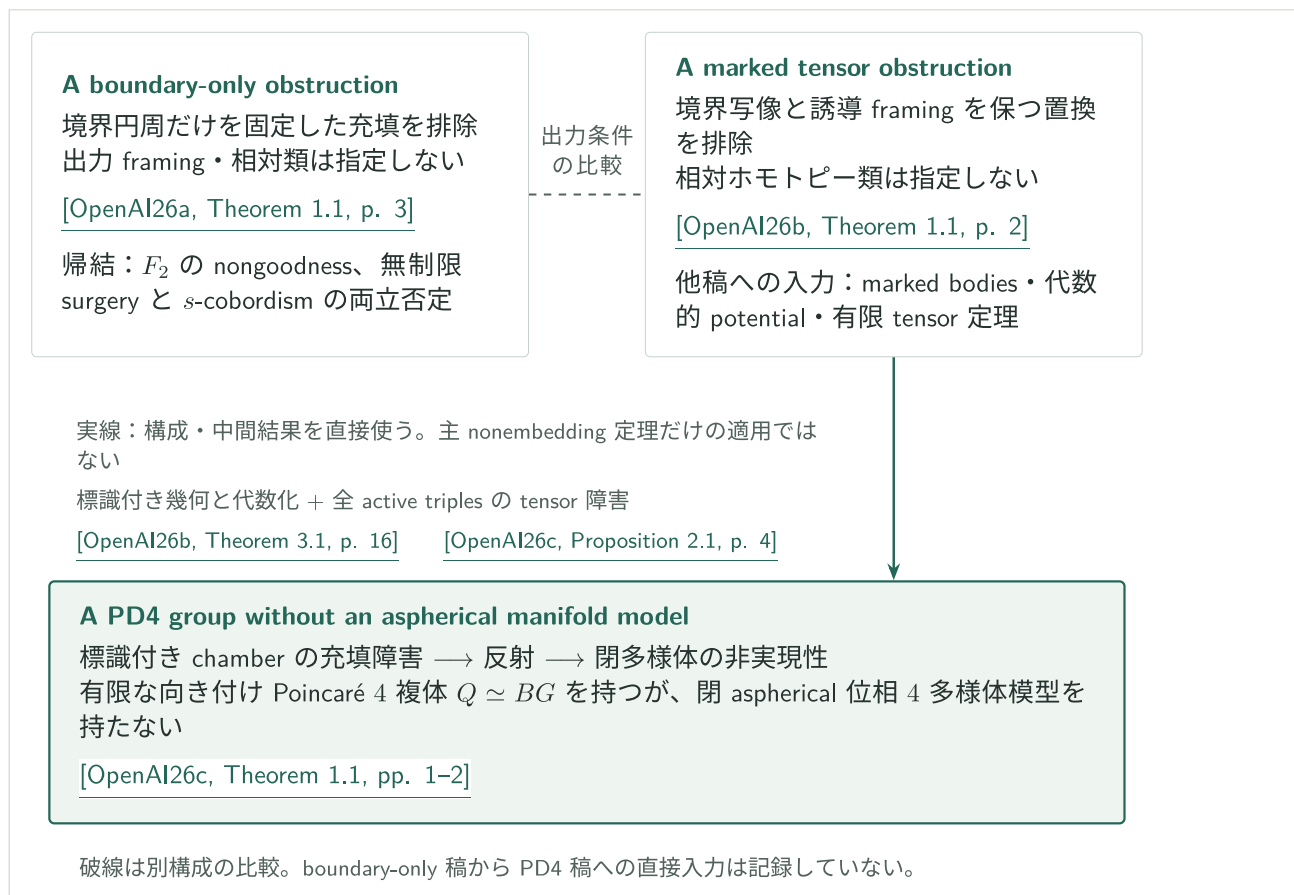
marked論文の構成とtensor入力を標識付きchamberへ移し、反射・標識を保つ安定積・方向制御付き球面除去で非実現性へ進む。

[証明概説を読む](#) →

2. 全体の見取り図

文献キーは3本ともOpenAIによる2026年9月24日版を指す。図・本文の原典引用には結果番号とページを付し、記事への導線には論文名を用いる。

- [OpenAI26a](#) — A boundary-only obstruction to four-dimensional disk embedding。境界円周への任意の局所平坦充填を排除する構成。
- [OpenAI26b](#) — A marked tensor obstruction to four-dimensional disk embedding。境界写像・誘導framingを保持する置換を排除し、後続稿へ中間結果を供給する構成。
- [OpenAI26c](#) — A PD4 group without an aspherical manifold model。標識付き相対障害を、反射と安定化後の球面除去で閉多様体の非実現性へ移す。



円板の二つの障害とPD4群の非実現性への直接入力

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 円板に課す出力条件が異なる

A boundary-only obstruction は、入力に framed algebraic dual spheres を備え、出力円板に framing・geometric dual・相対ホモトピー類を指定しない境界充填そのものを排除する。**A marked tensor obstruction** の主定理は、境界写像と入力から誘導される normal framing を保持する置換を排除する。こちらも置換円板の相対ホモトピー類は指定しない。二つの原稿の例や ambient manifold を同一と見なさず、別の構成として比較する。

[OpenAI26a, Theorem 1.1, p. 3]

[OpenAI26a, Proposition 2.8; §7, pp. 16, 47]

[OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 2]

2. PD4論文への入力はmarked論文の中間結果

A PD4 group without an aspherical manifold model が使うのは、marked論文の主 nonembedding theorem だけではない。共役路を記録した grope bodies と外部双対を使って chamber を作り、仮想充填から得た cut data に対して potential の代数化と Vertex data を適用し、有限 tensor 定理で矛盾する。PD4 稿は、穿孔した vertex の形式代数を追加して、この入力を任意の位相充填へ移す。

その後、反射によって有限・向き付けられたaspherical Poincaré 4複体を作る。仮想的多様体模型から標識付き安定積を経由して元の境界のgraph型充填を取り出し、chamber障害と矛盾させる。図の実線はこの中間結果の直接利用を表す。boundary-only稿からPD4稿への直接依存は、調べた証明箇所には記録していない。

[OpenAI26c, §2.1; Proposition 2.1; §2.4, pp. 4–5, 8–10]

[OpenAI26c, Proposition 3.2, pp. 13–14]

[OpenAI26c, Proposition 4.5; Proposition 5.5, pp. 19–20, 29–30]

3. どの結果を、どこで使うか

marked論文の入力

Lemmas 2.3–2.4

PD4論文の利用箇所

§§2.1–2.3、Proposition 2.1(1)–(2)

使う内容・接続条件

全共役付き境界法則を実現するbodyと代数的双対。tube sideの標識を保持して双曲基底を構成する

marked論文の入力

Proposition 4.5、Theorem 5.1、Propositions 5.2・6.1

PD4論文の利用箇所

§§2.1・2.4

使う内容・接続条件

非被約critical scheme上の標識と別座標blockに依存する代数的potential。位相vertexのfilled cohomologyとStokesをPD4 Lemma 2.4が補う

marked論文の入力

Theorem 3.1

PD4論文の利用箇所

Proposition 2.1(3)、§2.4末尾

使う内容・接続条件

$m \geq 5$ 、標数0、相補的接空間、全混合nilpotent項、全active triplesの真のgradient ideal所属を使って矛盾する

[OpenAI26b, Lemmas 2.3–2.4, pp. 9–12]

[OpenAI26b, Proposition 4.5; Theorem 5.1; Proposition 5.2; Proposition 6.1, pp. 29–30, 32, 37]

[OpenAI26b, Theorem 3.1, p. 16]

適用条件と段階ごとの説明はPD4記事の標識付きchamberから辿れる。入力定理の記述と使用箇所を照合したことから、入力定理の全証明を独立検証したことは別である。

4. 帰結の範囲と原典

boundary-only稿は F_2 のnongoodnessと、 F_2 を部分群に含む群のnongoodnessを帰結するが、構成した多様体の基本群を F_2 と同定するわけではない。また、無制限のtopological surgeryと s -cobordismの主張が両方は成立しないと結論し、どちらが単独で破れるかを決めない。PD4稿は有限BGを持つ群の4次元非実現性を主張する。これらの帰結を同じ論理的含意として扱わない。

[OpenAI26a, Corollaries 1.2–1.3, pp. 4–5]

[OpenAI26c, Theorem 1.1, pp. 1–2]

公式分野はTopology (304–321)。表示名は公式overviewの305見出しに合わせた。CONTENTS.mdでは Four-dimensional disk embedding and Wall's conjecture と表記される。参照版はcommit 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a、overviewの誌面・PDFとも33ページ。3原稿とも2026年9月24日版である。

OpenAI Research Catalog · Catalogue 305, Topology · p. 33

各記事は主要結果の全結論と証明の帰着を示し、直接入力記述・使用箇所と未確認範囲を記録している。PD4稿で使うQuinnの相対安定積の原典本文は未取得であり、この外部接続は未確認として残す。CAT(0)・Farrell–Jones・穿孔平滑化の外部原典の結果記述も今回は未照合である。全証明の独立検証や専門家査読の完了を意味しない。

A boundary-only obstruction to four-dimensional disk embedding

境界充填を切断面の変形データへ移し、二つの三次則をFrobenius–Koszul複体で衝突させる。

本稿は、四次元円板埋込みの代数的入力を満たす有限配置を構成し、その境界リンクには互いに素な局所平坦円板による充填が存在しないと主張する。仮想的な円板の相対ホモトピー類も出力framingも指定しない。以下は原稿の論証の概説であり、全証明の独立検証ではない。

原稿の著者: OpenAI · September 24, 2026 · 48 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 境界だけで決まる非充填

空でない境界をもつコンパクト連結有向滑らかな四次元多様体 M 、整数 $k \geq 1$ 、properな一般位置の円板はめ込み $f_i : (D^2, S^1) \rightarrow (M, \partial M)$ 、framedな球面写像 $g_i : S^2 \rightarrow M$ が存在し、境界制限の和は埋込みで、 $\mathbb{Z}[\pi_1(M)]$ 上で

$$\lambda(f_i, g_j) = \delta_{ij}1, \quad \lambda(g_i, g_j) = 0, \quad \tilde{\mu}(g_i) = 0$$

を満たすが、指定された境界円周は M 内で互いに素なproper局所平坦埋込み円板を張らない。

各 g_i は滑らかな埋込み球面を選ぶが、異なる球面同士の交差は許される。 $\tilde{\mu}$ は $\mathbb{Z}[\pi_1(M)]/\langle h - h^{-1}, \mathbb{Z} \cdot 1 \rangle_{\text{add}}$ に値をとるreduced Wall invariantである。入力円板同士の交点不変量の消滅は仮定していない。

Theorem 1.1 · p. 3

Corollary 1.2 — 自由群のnongoodness

Freedman–Quinnの意味で自由群 F_2 はgoodでない。 F_2 と同型な部分群を含むすべての群もgoodでない。これは構成した多様体の基本群が F_2 であるという主張ではない。

Corollary 1.2 · p. 4

Corollary 1.3 — 二つの無制限主張の両立不可能性

基本群に制限を設けない四次元topological surgery assertionと五次元topological s -cobordism assertionは同時には成立しない。前者は、コンパクト四次元多様体から四次元Poincaré pair $(Z, \partial Z)$ への写像について、境界で $\mathbb{Z}[\pi_1(Z)]$ -homology equivalenceでありWall障害が零のdegree-one normal mapから、境界相対のnormal bordismを経てhomotopy equivalenceを得る主張である。後者は、境界の指定product構造をもつコンパクト五次元topological s -cobordismが、その構造を延長するproductに同相であるという主張である。どちらが単独で失敗するかは結論していない。

Corollary 1.3 · p. 5

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [A boundary-only obstruction to four-dimensional disk embedding](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [PRT25](#) Mark Powell, Arunima Ray, Peter Teichner — The 4-dimensional disc embedding theorem and dual spheres : good群の円板埋込み定理と部分群・商に関する閉性をCorollary 1.2で使う。Selecta Mathematica 31 (2025), Article 80; publisher PDF。
- [KPT21](#) Min Hoon Kim, Mark Powell, Peter Teichner — The round handle problem : surgeryとs-cobordismの同時成立から円板埋込みへの帰着をCorollary 1.3で使う。Author Accepted Manuscript deposited 26 September 2022; published 2021。
- [DSGJ-v3](#) Alessandro De Stefani, Eloisa Grifo, Jack Jeffries — A Zariski–Nagata theorem for smooth $\mathbb{Z}$ -algebras : Lemma 5.3で微分作用素によるsymbolic power判定を使う。arXiv:1709.01049v3。
- [Stacks](#) The Stacks Project Authors — The Stacks Project : Lemma 5.3でTaylor tupleを完備化から降下する。タグはページ番号を持たない。Tags 00MA, 00MB, 00MC; web statements checked 2026-10-21。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 の証明 — 幾何配置から有限複体の矛盾へ

証明対象：Theorem 1.1 · p. 3

証明の道筋。 $d = 5$ 個の特殊辺をもつグラフ型四次元多様体から出発する。capped stagesを除いた外部で代数的双対を作り、仮想的な境界充填から切断面を得る。その表現変形のポテンシャルを代数化・補正して正標数へ移し、二種類の三次則が同一の有限微分形式複体で両立しないことを使う。

1 有限の幾何配置

$$\lambda(f_i, g_j) = \delta_{ij}1, \quad \lambda(g_i, g_j) = 0, \quad \tilde{\mu}(g_i) = 0$$

各 g_i は framed 埋込み球面。仮に境界円周が互いに素な円板を張るとする。

境界だけを固定してグラフ写像を動かし、端 holonomy に三次則を課す

Lemma 2.7; Proposition 2.8 · pp. 14–16

Lemmas 3.1–3.2; Proposition 3.8 · pp. 17–22

2 実像を避けた切断と変形

$$G \simeq \Gamma, \quad J_i \subset G, \quad \partial J_i = T^2, \quad n^3 = 0$$

二重被覆の制限写像が相補的接空間を与える。

双対性で勾配生成を、Stokes で二乗イデアルを得る

Propositions 4.6, 4.8; Corollary 4.11 · pp. 25–31

3 全 defect ideal を保持する

$$v = (\partial_C \Psi)(a, Y), \quad (v) = \mathfrak{r}, \quad \Psi(a, Y) \in \mathfrak{r}^2$$

$$a_{i,1}a_{j,1}a_{k,1}, \quad p_i(Y_i^-)p_j(Y_j^-)p_k(Y_k^-) \in (v)$$

代数化と可逆な勾配変換。補正グラフの幾何的実現は不要

Lemma 5.3; Theorem 5.8 · pp. 33–38

Corollary 5.10 · p. 38

4 補正した零グラフを正標数へ

$$\Psi(a, \tilde{Y}) = 0, \quad \text{char } k = \ell > 2$$

相補的接空間と両方の三次所屬、その係数を保持。

p_i 則で tensor cycle、 a_i 則で ambient primitive を作る

Theorem 6.1; §§6.3–6.6; §7 · pp. 39–47

5 単元との積による矛盾

$$B = k[s_1, s_2, s_3]/(s_1^2, s_2^2, s_3^2), \quad w = s_1 s_2 s_3 \neq 0$$

$$\delta_s \eta_s = w \alpha_s, \quad \delta_s \kappa_s = 0, \quad b_s = \text{Res}(\alpha_s \wedge \kappa_s) \in B^\times$$

$$0 = w b_s \implies w = 0$$

境界充填から二つの三次則の矛盾まで

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 双対を外部で構成し、円板の実像を保護して切断する

グラフ型多様体 G に、独立に共役された全三重交換子 $[z_a^{c_1}, [z_b^{c_2}, z_c^{c_3}]]$ を表す有限個の capped stages を入れる。基底曲面の管状近傍だけを除いて M とし、浅い cap を入力円板 f_r 、積トーラスを上段 cap で圧縮して g_r とする。 g_r の個別の埋込みと法束の自明性に加え、残された未使用 cap が交点ラベルの比較ループを $\pi_1(M)$ 内で殺すため、符号が逆の交点は群環係数ごと相殺する。この点は $\pi_1(G)$ での相殺では足りない。

Lemmas 2.4–2.5; Corollary 2.6 · pp. 12–14

仮想的な充填円板の実像上でグラフ写像を h -部分グラフへ移す。部分グラフの基本群の単射性と $\pi_2(\Gamma) = 0$ により、境界を固定したこの変更ができる。円板実像の近傍を避けて写像を滑らかにし、特殊辺の正則値逆像を取ると、各々境界トーラスを一つもつ滑らかな三次元壁 J_i が得られる。仮想的な円板自身を滑らかにする必要も、元の cap とホモトピックにする必要もない。切断後の X は非連結でもよく、閉じた壁成分も捨てない。

Lemma 2.7; Proposition 2.8 · pp. 14–16

2. イデアルそのものと二つの三次則を得る

二重被覆の Mayer–Vietoris 列は、壁への二組の制限の接空間が相補的であることを与える。 $SL_2(\mathbb{C})$ の随伴表現では、有限個の共役作用が $\text{End}(\mathfrak{sl}_2)$ を張る。三重交換子の先頭項と Nakayama の補題から、端の holonomy の偏差が生成するイデアル $\mathfrak{n}$ は変形環で $\mathfrak{n}^3 = 0$ を満たす。

Lemmas 3.1–3.2; Proposition 3.8 · pp. 17–22

壁座標を (a_i, y_i) 、制限を (a_i, Y_i^+) と $(0, Y_i^-)$ とし、境界で polarize した Chern–Simons ポテンシャルから

$$\Psi(a, C) = \sum_i (P_i(a_i, C_i^+) - P_i(0, C_i^-)), \quad v = (\partial_C \Psi)(a, Y)$$

を作る。微分は代入より先に取り。全 defect ideal $\mathfrak{r}$ について $(v) = \mathfrak{r}$ と $\Psi(a, Y) \in \mathfrak{r}^2$ を示す。前者は、取り逃した最小障害を双対性と壁制限の同型で零にし、flat lift 不可能性に矛盾させる議論である。後者は境界で接続を貼り合わせ、Stokes により曲率の二乗へ移す。さらに $p_i(y_i) = \partial_{a_{i,1}} P_i(0, y_i)$ と置くと、繰返しを含む全三つ組について

$$a_{i,1} a_{j,1} a_{k,1} \in (v), \quad p_i(Y_i^-) p_j(Y_j^-) p_k(Y_k^-) \in (v).$$

第二の所属は polarized variation の境界項から得る。両者を単なる零点集合の消滅へ弱めては後段へ渡せない。

Propositions 4.6, 4.8; Corollary 4.11 · pp. 25–31

3. 代数化・補正・特殊化で所属の係数も保持する

Lemma 5.3は、同じ滑らかな代数局所環で勾配の任意高次jetを表せる形式ポテンシャルを、任意のイデアル冪まで単一の代数的原始関数で置き換える。Taylor tuple全体の降下に完備化の忠実平坦性を使い、微分によるsymbolic power判定で埋込み成分も制御する。十分高次の置換後、二乗イデアルの式から $\tilde{Y} = Y + Bv$ を構成して $\Psi(a, \tilde{Y}) = 0$ を厳密にする。勾配生成元の可逆変換と差の因数分解により、両方の三次所属の係数も運ぶ。

[DSGJ-v3, Theorem 3.6, p. 7]

Lemma 5.3; Theorem 5.8 · pp. 33–38

ポテンシャル、補正写像、所属を示す係数、接空間行列式の逆元を一つの有限生成 $\mathbb{Z}$ -代数に収め、十分大きい標数 $\ell > 2$ の有限体へ特殊化する。補正写像は表現を幾何的に実現する必要がない。特殊化するのは代数化後のデータであり、もとの複素積分そのものではない。

Corollary 5.10 · p. 38

4. 同じFrobenius商で非零の積を零にする

$F(C) = \Psi(0, C)$ とし、 $T = k[[C]]/(C_\nu^\ell)_\nu$ の微分形式上で $\delta = dF \wedge$ を考える。相補的な零グラフは非零residue pairingをもつnormal cycles α, β を与える。 p_i の三次則とtensor-kernel計算から、 $d - 2 \geq 3$ 個の適した正側因子をもつtensorを選べる。

三つのsquare-zeroパラメータを導入した $B = k[s_1, s_2, s_3]/(s_1^2, s_2^2, s_3^2)$ 上で、そのtensorをcycle κ_s に持ち上げ、動くグラフのnormal cycle α_s を同じ座標Frobenius商で作る。混合項 $s_i s_j$ と $s_1 s_2 s_3$ も保持する。 a の三次則から、 $w = s_1 s_2 s_3$ に対して $\delta_s \eta_s = w \alpha_s$ となるambient primitiveが得られる。一方、 $b_s = \text{Res}(\alpha_s \wedge \kappa_s)$ は定数項が非零なので単元である。したがって $0 = w b_s$ は $w = 0$ を強制し、 B のsquarefree単項式基底に反する。これで仮想的な境界充填を排除し、構成済みの代数的入力と合わせて主定理を得る。

Theorem 6.1; §§6.3–6.6; §7 · pp. 39–47

3. Corollary 1.2 の証明 — 部分群と商へgoodnessを渡す

証明対象：Corollary 1.2 · p. 4

1 goodness を仮定する

F_2 good, $F_r \hookrightarrow F_2$, $F_r \twoheadrightarrow \pi_1(M)$
 M はコンパクト滑らかなので基本群は有限生成。

good 群の部分群・商は good
[\[PRT25, §1.1, p. 4\]](#)

2 構成した群へ渡す

$\pi_1(M)$ good
 Theorem 1.1 の入力円板と双対球面に埋込み定理を適用する。

代数的双対条件から境界充填を得る
[\[PRT25, Theorem A, p. 3\]](#)
[Theorem 1.1 · p. 3](#)

3 禁止された充填

互いに素な局所平坦円板が存在し、Theorem 1.1 に反する。
 したがって F_2 は nongood。これを含む群も部分群閉性で nongood。

goodnessの仮定から禁止された円板充填への矛盾

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 構成した群がgoodなら充填が存在する

M がコンパクト滑らかなので $\pi_1(M)$ は有限表示をもち、特に有限生成である。この群がgoodなら、入力の交点条件とframed双対球面に円板埋込み定理を適用でき、Theorem 1.1が禁じる境界充填を得てしまう。

[\[PRT25, Theorem A, p. 3\]](#)

2. F_2 とそれを含む群へ結論を移す

$r \geq 2$ 個の生成元を選ぶと $F_r \twoheadrightarrow \pi_1(M)$ がある。 $F_2 = \langle a, b \rangle$ の元 $a^j b a^{-j}$ ($0 \leq j < r$) は自由に F_r を生成する。goodnessの部分群・商に関する閉性から、 F_2 がgoodなら $\pi_1(M)$ もgoodとなる。さらに F_2 を含むgood群があれば部分群閉性に反する。

[\[PRT25, §1.1, p. 4\]](#)

4. Corollary 1.3 の証明 — surgeryとs-cobordismの同時仮定

証明対象：Corollary 1.3 · p. 5

1 二つの無制限主張を仮定する

四次元 topological surgery と五次元 topological s -cobordism

capped grope と link の同値を通す
[\[KPT21, §3, 誌面 pp. 7–8 / PDF pp. 8–9\]](#)

2 円板埋込みへ帰着する

基本群の制限のない円板埋込みが成立する。

構成した円板・双対球面は必要な仮定を満たす
[Theorem 1.1 · p. 3](#)

3 有限配置で矛盾する

Theorem 1.1 の境界が充填されるため、同時成立は不可能。
 どちらの主張が単独で失敗するかは決めない。

二つの無制限主張から円板埋込みへの帰着

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 同時成立から無制限の円板埋込みへ

原稿はRound handle problemの帰着を使い、二つの主張の同時成立から基本群の制限のない円板埋込みを得る。Theorem 1.1の有限配置がその代数的・境界的仮定を満たすため、禁止した充填が再び得られる。 F_2 のnongoodnessだけでこの含意を代用していない。

[\[KPT21, §3, 誌面 pp. 7–8 / PDF pp. 8–9\]](#)

5. どの論文が、どの段階を担うか

主証明の切断・変形・正標数矛盾は本稿内の連鎖であり、同じカタログのmarked tensor原稿やPD4原稿を入力として引用する連鎖ではない。外部入力を中心は、Corollary 1.2で使うgood-group円板埋込み定理、Corollary 1.3で使うsurgeryの帰着、Lemma 5.3で使う完備化と微分的symbolic power判定である。双対性や正則値定理の標準的な入力も原稿中で明示されている。

[Lemma 5.3; Theorem 5.8 · pp. 33–38](#)

6. 原典を読む入口と確認範囲

- Lemmas 2.4–2.5; Corollary 2.6 · pp. 12–14 — 外部の群環ラベルとframingを確認する
- Lemma 2.7; Proposition 2.8 · pp. 14–16 — 境界像だけを使う切断の構成を読む

- Propositions 4.6, 4.8; Corollary 4.11 · pp. 25–31 — 二つのイデアル等式と三次則を追う
- Lemma 5.3; Theorem 5.8 · pp. 33–38 — 代数化と補正による係数の保存を読む
- Theorem 6.1; §§6.3–6.6; §7 · pp. 39–47 — 同じ有限複体での矛盾と主定理への適用を読む

主要結果、§2のframing・群環ラベルの相殺と切断、§§3–4の相補性と二つのイデアル等式、§5の代数化・補正、§6のtensor選択・混合項・同一Frobenius商・residue矛盾、§7の適用を読んで接続を整理した。これは各局所構成・全恒等式・外部入力の証明までを独立に再証明したものではない。外部ではPRT25のTheorem A・§1.1、KPT21の§3、DSGJ-v3のTheorem 3.6・Lemma 2.3、StacksのTags 00MA–00MCの記述と使用条件を照合した。その他のexcellenceに関するタグ、双対性・正則値定理の原典本文は今回再照合していない。

A marked tensor obstruction to four-dimensional disk embedding

based holonomyを保つ代数化と、二つの頂点から得る三次則を有限tensor複体で比較する。

本稿は、入力円板と同じ境界写像・誘導normal framingを保つ局所平坦な円板置換の非存在を主張する。置換円板の相対ホモトピー類は指定しない。証明のmarkingは構成中のbased曲線と経路の指定であり、置換円板に追加条件を課すものではない。以下は原稿の論証の概説である。

原稿の著者: OpenAI · September 24, 2026 · 53 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 境界写像と誘導framingを保つ置換の非存在

境界をもつコンパクト連結有向滑らかな四次元多様体 M 、整数 $k \geq 1$ 、互いに素な埋込み境界円周をもつproperな一般位置の円板はめ込み $f_i : (D^2, S^1) \rightarrow (M, \partial M)$ 、一般位置のframed球面はめ込み $g_i : S^2 \rightarrow M$ が存在し、whiskerを固定した $\mathbb{Z}[\pi_1 M]$ 上で

$$\lambda(f_i, g_j) = \delta_{ij}, \quad \lambda(g_i, g_j) = 0, \quad \tilde{\mu}(g_i) = 0$$

を満たすが、 f_i と同じ境界写像および f_i が誘導する境界normal framingをもつ、互いに素なproper局所平坦埋込み円板は存在しない。対角式 $\lambda(g_i, g_i) = 0$ も含まれる。 $\tilde{\mu}$ の値域は加法商 $\mathbb{Z}[\pi_1 M] / \langle h - h^{-1}, \mathbb{Z} \cdot 1 \rangle_{\text{add}}$ である。出力円板の相対ホモトピー類の保持も、出力双対球面の存在も要求していない。

Theorem 1.1 · p. 2

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [A marked tensor obstruction to four-dimensional disk embedding](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [PTVV13](#) Tony Pantev, Bertrand Toën, Michel Vaquié, Gabriele Vezzosi — Shifted symplectic structures : 球面へのBetti transgressionと二つのLagrangianの導来交叉。番号付きarXiv版を照合。arXiv:1111.3209v4, 22 April 2013。
- [Cal](#) Damien Calaque — Lagrangian structures on mapping stacks and semi-classical TFTs : 相対orientationから境界restrictionのLagrangian構造を供給。arXiv:1306.3235v2, 7 November 2014。
- [BBJ](#) Christopher Brav, Vittoria Bussi, Dominic Joyce — A Darboux theorem for derived schemes with shifted symplectic structure : shift -1 の最小代数的Darboux chartを供給。arXiv:1305.6302v4, 29 August 2018。
- [Artin69](#) Michael Artin — Algebraic approximation of structures over complete local rings : 最終のグラフ・所属係数の有限多項式系を一次jetを保って近似。Publications Mathématiques de l’IHÉS 36 (1969), 23–58; Numdam scan。
- [Getzler09](#) Ezra Getzler — Lie theory for nilpotent L_∞ -algebras : Appendix Aのnilpotent Maurer–Cartan比較の入力。導来係数への拡張は本稿の論証。Annals of Mathematics 170 (2009), 271–301; publisher PDF。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 の証明 — 固定した円板問題から二つの頂点へ

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · p. 2

証明の道筋。 仮想的な解を選ぶ前に有限個のgrobe関係と双対球面を備えた外部 E を作る。framingを保つ解があれば、底面の圧縮と滑らかな切断によって二つの頂点 A, B と $2m$ 個の辺 Y_i を得る。辺ごとの代数的ポテンシャルとmarkingを作る段階を次節、得られたデータの不可能性を第4節で説明する。

1 解を選ぶ前に円板問題を固定

$$E = X \setminus \bigcup_j \text{int } \nu(S_j), \quad \lambda(f_i, g_j) = \delta_{ij}, \quad \lambda(g_i, g_j) = \tilde{\mu}(g_i) = 0$$

仮定：同じ境界写像と誘導 normal framing をもつ disjoint replacements。

未使用 cap で群環相殺を確認し、実像を避けて切断する

[Lemma 2.4 · pp. 11–13](#)

[Proposition 2.2; Lemmas 2.5–2.6 · pp. 7, 13–15](#)

2 二つの頂点と active 辺

$$A, B, Y_1, \dots, Y_{2m}, \quad m \geq 5$$

framed 圧縮から滑らかな切断へ。内部接空間は相補的。

Chern–Simons と full relative trace 比較を接続する

[Proposition 4.5 · pp. 28–29](#)

[Theorem 5.1 · p. 30](#)

3 marked な代数的辺モデル

$$f_i = F_i \circ \phi_i, \quad F_i \text{ algebraic}$$

based holonomy を非被約 critical scheme 全体で保つ。

残差を固定する補正と Brunnian laws から有限 tensor 障害へ

[Proposition 6.1 · p. 37](#)

[Lemmas 6.5–6.7; Corollary 6.8 · pp. 44–47](#)

[Theorem 3.1 · p. 16](#)

4 両側の三次則が両立しない

$$S_t(H_L) = S_0(H_R) = 0, \quad t_i t_j t_k \in J_L, \quad (b_i b_j b_k)(H_R) \in J_R$$

J_L, J_R は制限した全 gradient ideal。混合 parameter 項も保持。

固定した円板問題からmarked tensor障害への全体図

図を拡大 ↗ [TeXソース](#) ↓

1. 入力配置を先に固定し、framedな充填から切断を作る

$m \geq 5, p \geq 9$ とし、三つの異なるportに対する三重交換子型のgrope wordを、独立な共役・符号のすべての有限選択について設置する。各wordは一つのslotを消すと自明となるBrunnian性と、三次先頭項 $[Z_1, [Z_2, Z_3]]$ をもつ。底面の管状近傍を除いた E で、浅いcapが f_j 、圧縮したrim torusが g_j を与える。未使用の上段capが群環ラベルの比較ループを $\pi_1(E)$ 内で殺し、同一の外側copy内で二枚の内側capを相殺する。個々の球面の埋込みとproduct framingが対角式と $\tilde{\mu} = 0$ も与える。

[Lemma 2.4 · pp. 11–13](#)

仮想的な置換capを使って底面を圧縮する。指定framingはこの圧縮の局所平坦性とproduct collarを保証する箇所で必要となる。得た円板の実像を避けて木への写像を正則化し、連結な切断面・頂点領域を作る。parity二重被覆の商では、 A, B を結ぶ $2m$ 本の辺のうち m 本がactiveとなる。元の二つの座標方向の一方が各境界トラスで消え、他方が残ることと、Mayer–Vietorisの制限同型が内部接空間の相補性を供給する。

[Proposition 2.2; Lemmas 2.5–2.6 · pp. 7, 13–15](#)

2. 残差イデアルを固定して頂点グラフを補正する

各辺のbased接続スライスには、central potential f_i と square-zero境界変分 $f_i + t_i b_i^{\text{form}}$ がある。その内部Jacobian idealは曲率idealそのものである。頂点の残差リスト r_P と $I_P = (r_P)$ ($P = A, B$) を固定すると、Stokesと双対性が

$$S_P(H_P) \in I_P^2, \quad (\partial_h S_P)(H_P) = M_P r_P$$

を与え、 M_P は単元となる最大列minorをもつ。 I_P の倍数による補正で値を厳密に零にし、残差商と markingを保つ。辺ごとにTheorem 5.1を適用してcentral potentialを代数化し、背景をrecenterしてから $K = \mathbb{C}((\sigma))$ へ移る。

Lemmas 6.3–6.4 · pp. 41–43

3. 非被約商上の三次則を最終データへ渡す

九つの随伴行列が $\text{End}(\mathfrak{sl}_2 \otimes K)$ を張るため、独立共役されたBrunnian lawsの三次項からすべての異なるactive三つ組の係数を取り出せる。高次項は対象三次idealの最大ideal倍に入り、Nakayamaにより、 A 側では $t_i t_j t_k \in I_A$ 、 B 側では三つの異なる辺のholonomy偏差の積が I_B に入る。

holonomy logarithm自体を代数的と呼ばず、代数的な行列lift G_i を使って

$$b_i = -\epsilon_i \text{tr}(T_i ((G_i - 1) - \frac{1}{2}(G_i - 1)^2))$$

へ置き換える。差は偏差の三次以上であり、 $G_i(H_A) - 1 \in (I_A, t_i)$ と $t_i^2 = 0$ により、新たな値誤差・勾配誤差を制御できる。全parameter idealの冪を一段ずつ増やす有限補正で零グラフを回復する。 $(t_1, \dots, t_m)^2 = 0$ とはせず、混合squarefree単項式を残す。こうしてProposition 6.1はTheorem 3.1の全仮定を満たし、矛盾から固定した E の円板問題が解けないことを得る。

Proposition 6.1 · p. 37; Lemmas 6.5–6.7; Corollary 6.8 · pp. 44–47

3. Theorem 5.1 の証明 — critical schemeのmarkingを保つ代数化

証明対象：Theorem 5.1 · p. 30

Theorem 5.1 — Algebraic edge potential with markings

Y を連結トーラス境界をもつコンパクト連結有向滑らかな三次元多様体とし、based座標円周 α, β は $H^1(Y) \rightarrow H^1(\partial Y)$ の像が α に値をもち β に零となるように選ぶ。Proposition 4.5の central potential f と境界複体 C に対し、 $N = \dim(H^1(C) \otimes \mathfrak{sl}_2)$ 、 $R = \mathbb{C}[[h_1, \dots, h_N]]$ 、 $J = \text{Jac}(f)$ と置く。可逆形式座標変換 $x = \phi(h)$ と代数的冪級数 $F \in (x)^3$ が存在して $f = F \circ \phi$ となる。固定した任意の有限個のbased loopsのholonomy行列成分は、 x 座標の代数的冪級数を $\text{Spf}(R/J)$ へ引き戻したものと表せる。このmarkingの同一視は非被約成分も含むcritical scheme全体で成り立ち、とくに β -holonomyを保つ。

Theorem 5.1 · p. 30

1 球面境界をもつ充填

$Z = Y \cup_{T^2}$ (punctured solid torus), $\partial Z = S^2$
 $\mathcal{X} = \text{Loc}_{SL_2}(Z)^{\text{fr}}$

transgression · 相対 orientation · Lagrangian 交叉 · 最小 chart
[\[PTVV13, Theorem 2.5; Corollary 2.6\(4\), pp. 33, 37\]](#)
[\[Cal, Definition 2.6; Claim 2.7; Theorem 2.9, pp. 11–12\]](#)
[\[PTVV13, Theorem 2.9, p. 39\]](#)
[\[BBJ, Example 5.15; Theorem 5.18\(i\), pp. 34, 36\]](#)

2 代数的 Darboux chart

$\mathcal{X} : (-1)$ -shifted, $F \in (x)^3$
 based holonomy の行列成分は critical quotient から代数的に lift できる。

接空間 pairing だけでなく全 relative trace を運ぶ
[Proposition 5.2; Lemma 5.3; Appendix A · pp. 32, 35, 48–52](#)

3 全 closed-form class を比較

$f' = F \circ x$, $J = \text{Jac}(f)$, $f' - f \in J^2$
 相対積分の homotopy も比較し、completed Cartan 計算を使う。

J に値をもつ vector field の形式 flow を使う
[Lemma 5.4; proof of Theorem 5.1 · pp. 35–36](#)

4 marking を固定して誤差を除く

$\Phi \equiv \text{id} \pmod{J}$, $(f + e) \circ \Phi = f$, $f = F \circ \phi$
 全 critical scheme 上で holonomy を保持する。

shifted symplectic chartとChern–Simonsポテンシャルの比較

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. punctured fillingから代数的critical chartを得る

α をmeridianとして、開球を除いたsolid torusを Y に貼り、 $\partial Z = S^2$ とする。 BG のtrace pairingの 2-shifted formを球面へtransgressして0-shifted formを得る。相対orientationとPoincaré–Lefschetz双対性により $\mathrm{Loc}_G(Z) \rightarrow \mathrm{Loc}_G(S^2)$ はLagrangianとなる。based sphere側のLagrangianとの導来交叉は $\mathrm{Loc}_G(Z)^{\mathrm{fr}}$ に (-1) -shifted formを与える。有限CW型・perfect coefficient上の双対性・有限表示という適用条件を§5.1で確認し、Darboux定理の最小chartから $F \in (x)^3$ を得る。正則なbased holonomyはそのcritical quotientから滑らかなchartへliftできる。

[PTVV13, Theorem 2.5; Corollary 2.6(4), pp. 33, 37]

[Cal, Definition 2.6; Claim 2.7; Theorem 2.9, pp. 11–12]

[PTVV13, Theorem 2.9, p. 39]

[BBJ, Example 5.15; Theorem 5.18(i), pp. 34, 36]

2. full relative closed formを比較して二乗誤差を得る

critical schemeの同型や接空間pairingの一致だけでは、与えられた f との一致は出ない。Proposition 5.2とAppendix Aは、formal group nerveのtrace cocycle $\frac{1}{2}\kappa(\delta a, \delta a)$ を導来係数・source restriction・相対積分まで運び、全closed-form classと境界のisotropic homotopyを比較する。Getzlerの通常のnilpotent比較をそのまま導来係数へ読み替えず、Appendix Aはその拡張を別に構成する。

その結果、移したDarboux potential f' と f のHamiltonian formsはfull closed formsとしてホモトピックになる。completed Cartan計算では j 回の縮約が J^j に入り、剰余の次数が無限に上がるため、定数を正規化して $f - f' \in J^2$ が従う。

[Getzler09, Theorem 5.4, 誌面 p. 295 / PDF p. 27]

[Getzler09, Corollary 5.11, 誌面 p. 299 / PDF p. 31]

Proposition 5.2; Lemma 5.3; Appendix A · pp. 32, 35, 48–52

3. critical quotientで恒等なflowを使う

$e = f' - f \in J^2$ を $e = \sum v_i \partial_i f$ 、 $v_i \in J$ と書く。 $f \in (h)^3$ なので $\nabla e = D\nabla f$ の D は最大idealに入り、 $f_t = f + te$ に対するvector field $X_t = -(1 + tD)^{-T}v$ の形式flowが誤差を消す。係数が J に属するためflowは R/J 上で恒等であり、先に同一視したholonomy markingも変えない。これが関数の一致と全critical scheme上のmarking保存を同時に与える。

Lemma 5.4; proof of Theorem 5.1 · pp. 35–36

4. Theorem 3.1 の証明 — 二種類の三次則の有限tensor障害

証明対象：Theorem 3.1 · p. 16

Theorem 3.1 — Finite tensor obstruction

K を標数零の体、 $h = (h_1, \dots, h_n)$ を総次元 N の座標block、 $I \subset \{1, \dots, n\}$ を $|I| = m \geq 5$ のactive集合とする。各blockだけに依存する代数的冪級数 $F_i(h_i)$ ($1 \leq i \leq n$)、 $b_i(h_i)$ ($i \in I$) と

$$T = K[t_i : i \in I]/(t_i^2 : i \in I), \quad S_0 = \sum_i F_i, \quad S_t = S_0 + \sum_{i \in I} t_i b_i$$

を考える。 x が a 座標、 y が $N - a$ 座標のとき、 $H_L \in (x, t)T[[x]]^N$ 、 $H_R \in (y)K[[y]]^N$ が、中央接写像の単射性・相補性、 $S_t(H_L) = S_0(H_R) = 0$ 、およびすべての異なる $i, j, k \in I$ について

$$t_i t_j t_k \in ((\partial_{h_\nu} S_t)(H_L))_\nu, \quad (b_i b_j b_k)(H_R) \in ((\partial_{h_\nu} S_0)(H_R))_\nu$$

を満たすことはない。微分は外部parameterを固定して代入より前に行い、idealはradicalを取らない実際のgradient idealである。

Theorem 3.1 · p. 16

1 分離した代数的関数と零グラフ

$$S_t = \sum_i F_i + \sum_{i \in I} t_i b_i, \quad t_i^2 = 0, \quad |I| \geq 5$$

$$S_t(H_L) = S_0(H_R) = 0, \quad T_0 H_L \oplus T_0 H_R = K^N$$

最終方程式を Artin 近似し、有限係数環から特殊化
[\[Artin69, Theorem 1.10, 誌面 p. 26 / PDF p. 5\]](#)
[Lemma 3.2; Remark 3.3 · pp. 17–18](#)

2 有限 Frobenius 複体の非零 pairing

$$\Omega_p = \Omega_{k[z]/(z^p)}^\bullet, \quad D = dS_0 \wedge, \quad \int U_0 \wedge V \neq 0$$

target 三次則と kernel を保つ chain projection
[Lemmas 3.7–3.8 · pp. 21–22](#)

3 三つ以上の適した active 因子

$$[V'] \in \bigotimes_i H_i, \quad B_i v_i = \delta_i v_i = 0 \text{ in at least } m - 2 \geq 3 \text{ slots}$$

$$\int U_0 \wedge V' = \int U_0 \wedge V$$

source 三次則の実 boundary と lift を同じ複体で pairing
[§3.4; proof of Theorem 3.1 · pp. 22–23](#)

4 各 tensor の pairing が零

$$(D_i + t_i db_i \wedge)(a_i + t_i w_i) = 0$$

$$t_i t_j t_k P(t) = 0 \implies P(0) = 0$$

全 tensor について加えると非零 pairing に矛盾。

相補的グラフの非零pairingと三parameter liftの矛盾

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 最終の方程式だけを近似・特殊化する

F_i, b_i を固定し、グラフ座標と ideal 所属を示す係数を squarefree parameter 基底で展開する。Artin 近似を左右別々の有限多項式系へ適用し、一次 jet を保持する。未知グラフ関数を微分する方程式や nested approximation は不要である。有限の étale 表示と逆元を一つの有限生成係数環へ降下し、大きな正標数へ特殊化する。 $K = \mathbb{C}((\sigma))$ の場合も有限表示に出る係数を一個の元として扱い、Laurent 級数を項別に還元しない。

[\[Artin69, Theorem 1.10, 誌面 p. 26 / PDF p. 5\]](#)

[Lemma 3.2; Remark 3.3 · pp. 17–18](#)

2. 二段階のhomologyで三つの適した因子を得る

標数 $p > 2$ で Ω_p を座標Frobenius商 $k[z]/(z_v^p)$ 上の微分形式とし、 $D = dS_0 \wedge$ を考える。横断する二つのグラフのnormal cycles U_0, V は非零pairingをもつ。block分離により $H(\Omega_p, D) = \bigotimes_i H_i$ と分解し、通常の外微分が誘導する微分を δ_i, b_i の乗法を B_i とする。

右側の三次則から $[V]$ は、active因子のうち高々二つを除いて $\ker B_i$ に入るtensorの和である。 δ に関するchain projectionを施すと、pairingを変えずに少なくとも $m - 2 \geq 3$ 因子が $\ker B_i \cap \ker \delta_i$ に入るtensorの和へ移せる。代表微分形式そのものの d -closed性を仮定していない。

Lemmas 3.7–3.8 · pp. 21–22

3. 各tensorを三parameterで持ち上げ、定数pairingを零にする

選んだ三因子では $[\delta_i, B_i] = [db_i \wedge]$ が零に作用するので、 $D_i w_i = -db_i \wedge a_i$ を解ける。各 $a_i + t_i w_i$ をtensor積にして、 $k[t_i, t_j, t_k]/(t_i^2, t_j^2, t_k^2)$ 上の実際のcycleを得る。積には混合項も含まれる。

左側の三次則は同じ複体の実際のboundary identityを与え、pairingすると $t_i t_j t_k P(t) = 0$ となる。squarefree基底から $P(0) = 0$ 。tensorごとに適した三つ組を選んで足すと、元の非零pairingが零となり矛盾する。非平坦な係数特殊化とhomologyの交換は使わない。

§3.4; proof of Theorem 3.1 · pp. 22–23

5. どの論文が、どの段階を担うか

PTVVのtransgression・Lagrangian intersection、Calaqueのrelative orientation、BBJのDarboux chartはTheorem 5.1の代数的モデルの供給に使われる。そのモデルと本稿のポテンシャルを結ぶfull relative trace比較、二乗Jacobian誤差、markingを固定するflowは本稿が担う。Artin近似はこの代数化と頂点補正を終えた後のTheorem 3.1で使う。

同じカタログのboundary-only原稿は出力framingも指定しない境界像の非充填を述べる。本稿の結論は境界写像と誘導framingを指定した置換の否定であり、相対ホモトピー類はやはり不指定である。二稿の幾何配置・代数化は異なり、ここでは一方を他方の証明入力と扱わない。本稿はordinary/simple surgeryや五次元s-cobordismの個別反例を別途主張していない。

Remark 7.1 · p. 48

6. 原典を読む入口と確認範囲

- Lemma 2.4 · pp. 11–13 — 外部での群環ラベルとframingを読む
- Theorem 5.1 · p. 30 — 代数化の主張と保存するmarkingを確認する

- Proposition 5.2; Lemma 5.3; Appendix A · pp. 32, 35, 48–52 — full relative closed-form比較の範囲を追う
- Proposition 6.1 · p. 37; Lemmas 6.5–6.7; Corollary 6.8 · pp. 44–47 — 二つの頂点で三次所属を作る箇所を読む
- Theorem 3.1 · p. 16 — 最終障害のすべての仮定を確認する
- Remark 7.1 · p. 48 — 出力に課す条件と surgery への主張の範囲を確認する

主定理、§2のframingと群環ラベル・切断、§3の近似と二段階homology・lift、§§4–5の全gradient idealと代数化、Appendix Aのrelative trace比較、§6の残差補正と三次則、§7の結論を読んだ。外部のPTVV（番号付きarXiv v4）・Calaque・BBJ、ArtinのTheorem 1.10、GetzlerのTheorem 5.4・Corollary 5.11は記述と適用条件を照合した。Dupontの原典およびGetzlerの他の入力箇所は今回再照合していない。全cochain transfer、導来比較の全符号、局所plumbing操作を独立に再検証したのではなく、外部結果の証明全体も対象外である。

A PD4 group without an aspherical manifold model

標識付き充填の障害を、反射と安定化後の球面除去で閉多様体の非実現性へ移す

本原稿は、有限な4次元分類空間を持つ向き付け可能な整係数Poincaré双対群を構成し、その群を基本群とする閉aspherical位相4多様体が存在しないと主張する。出発点は、自由群のグラフをホモトピー型に持つPoincaré対であり、その境界写像を保持する多様体充填が不可能であるという相対的障害である。

原稿の著者: OpenAI · September 24, 2026 · 32 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 有限分類空間を持つPD4群の多様体非実現性

有限表示群 G と、有限・向き付けられた・4次元のaspherical Poincaré複体 Q が存在し、 $\pi_1 Q = G$ および

$$H^i(G; \mathbb{Z}G) = 0 \quad (i \neq 4), \quad H^4(G; \mathbb{Z}G) \cong \mathbb{Z}$$

を満たす。最後の群への右 G 作用は自明である。しかし、基本群が G である閉aspherical位相4多様体は存在しない。特に、自明な左 $\mathbb{Z}G$ 加群 $\mathbb{Z}$ は有限生成自由加群による有限分解を持つ。

Theorem 1.1 · pp. 1-2

これは4次元における存在主張であり、各次元で反例を与える主張ではない。原稿の結論と、以下に記す編集上の確認範囲を区別する。

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [A PD4 group without an aspherical manifold model](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [OpenAI26b](#) OpenAI — A marked tensor obstruction to four-dimensional disk embedding : 標識付き幾何構成・potentialの代数化・有限tensor障害。September 24, 2026。
- [KL22](#) Daniel Kasprowski and Markus Land — Topological 4-manifolds with 4-dimensional fundamental group : normal invariantの除去とs-cobordism。arXiv:2007.03399v3。
- [PRT25](#) Mark Powell, Arunima Ray, and Peter Teichner — The 4-dimensional disc embedding theorem and dual spheres : null-loop条件を得た後のtowerと双対球面。Selecta Mathematica 31 (2025), article 80; published PDF。
- [FQ13](#) Michael H. Freedman and Frank Quinn — Topology of 4-manifolds : 小さいcapped gropesの二段階分離。January 2013 reformatted, unrevised edition。
- [Qui83](#) Frank Quinn — The stable topology of 4-manifolds : 相対的安定積 ; 原典本文未照合。Topology and its Applications 15 (1983), 71–77; full text not acquired。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 の証明 — 有限BGと仮想的多様体からの逆帰着

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · pp. 1–2

証明の道筋。 標識付きchamberを反射して $Q \simeq BG$ を作る。仮に多様体模型 M が存在すると、指定した全双曲対を保持する安定積から、有限個のchamberの球面問題を構成できる。方向制御と球面手術がその中間ホモロジーを除き、禁止されている境界充填を与える。

1 標識付き chamber

$(D, S) \longrightarrow (P, S), \quad P \simeq BH \quad (H \text{ 自由群})$
 $S \rightarrow BH$ を延長するグラフ型多様体充填は存在しない

descent panel の球で可縮性を保ち、中間双曲加群を消す
 Proposition 3.2; §3.2 · pp. 12–14

2 反射して有限分類空間を作る

$N = \Delta \backslash U(C, D) \longrightarrow Q = \Delta \backslash U(C, P) \simeq BG$
 $H^i(G; \mathbb{Z}G) = 0 \quad (i \neq 4), \quad H^4(G; \mathbb{Z}G) = \mathbb{Z}$
 有限な向き付け Poincaré 4 複体；普遍被覆の鎖は有限自由分解

別の CAT(0) 模型から組立；指定同値と相対安定積
 Lemma 3.3; assembly consequences · pp. 14–15
 Proposition 4.3; Lemma 4.4; Proposition 4.5 · pp. 18–20

3 多様体模型があると仮定

$M \simeq Q, \quad N \# k(S^2 \times S^2) \cong M \# (b+k)(S^2 \times S^2)$
 指定された全双曲対が、標識を保って同時に標準化される

有限 chamber 和を塞ぐ；内側の対を除き、外側を方向制御で手術
 Proposition 5.5 · pp. 29–30

4 禁止された充填へ帰着

$\partial V = S, \quad \pi_1 V = H, \quad \tilde{V} \simeq *, \quad V \simeq BH$
 境界標識を保持するため Proposition 2.1 と矛盾

有限分類空間と多様体非実現性の論証

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 反射は有限性・asphericity・整係数双対性を別々に与える

$S = \partial D$ の有限flag三角形分割から直角Coxeter群 C を作り、 $\Delta = \ker(C \rightarrow (\mathbb{Z}/2)^V)$ による有限 chamber 商を取る。 $N = \Delta \backslash U(C, D)$ は閉向き付け4多様体、 $Q = \Delta \backslash U(C, P)$ は有限複体となる。 P の普遍被覆を使った反射developmentでは、新しいchamberはdescent panelの球に沿って接着されるため、普遍被覆が可縮である。

一方、 Q は N の指定された中間球面の基底すべてに3-cellを付けた空間である。双曲型の非退化交叉形式を使い、ホモロジーの中間直和因子の商と、コホモロジーのそのannihilator上へcap積を降ろす。これが4次元Poincaré双対性を与え、向きを保つ作用が $H^4(G; \mathbb{Z}G)$ の右作用の自明性を与える。有限 $K(G, 1)$ のcellular鎖複体は所要の有限自由分解であり、有限表示性もこの有限複体から従う。

Proposition 3.2; §3.2 · pp. 12–14

2. 安定化では指定した球面の標識を保持する

仮想的な $M \simeq Q$ は双対化加群により向き付け可能である。 $L = M \# b(S^2 \times S^2)$ と置くと、 N と L の π_2 は指定した同じ双曲形式を持つ。原稿は共通の第2 Postnikov段階 $EG \times_G K(A, 2)$ において、整係数のcup積検査で基本類を比較し、この指定された加群同型を誘導するホモトピー同値を得る。

別途、support tree上のCAT(0)模型がFarrell–Jonesの組立写像を供給する。これは4次元の円板埋め込みを直接与えるものではない。Kasprowski–Landのnormal invariant計算による s -cobordismと、Quinnの相対的な安定積を経由し、追加された対も含むすべての球面对を幾何学的標準対へ移す。単に安定同相な両端があるだけでは、後段で除くchamberごとの標識を保証できない。

Lemma 3.3; assembly consequences · pp. 14–15

[KL22, Lemma 2.3; Theorem 3.1; Lemma 3.3, pp. 5–7]

Proposition 4.3; Lemma 4.4; Proposition 4.5 · pp. 18–20

3. 仮想模型から禁止された充填へ戻る

周期的に持ち上げた標準対のうち中心付近のものを除き、非中心chamberの境界を単連結な補完充填で塞ぐ。残る球面問題を方向制御によって処理すると、 $\partial V = S$ 、 $\pi_1 V = H$ 、 $\tilde{V}$ 可縮で、境界写像も元の $S \rightarrow BH$ と一致する V が得られる。これはProposition 2.1(3)と矛盾する。非実現性を担うのは、この標識を保持した帰着である。

Proposition 5.5 · pp. 29–30

3. Proposition 2.1 の証明 — 境界の標識を保った充填を排除する

証明対象：Proposition 2.1 · p. 4

Proposition 2.1 — 標識付きchamber

連結境界 S を持つコンパクト連結向き付け滑らかな4多様体 D 、有限生成自由群 H 、 π_1 上の同型を誘導する $c: D \rightarrow BH$ が存在する。 D は有限グラフに $2k$ 個の2球面を付けたホモトピー型を持ち、 $\pi_2 D$ は $\mathbb{Z}H$ 上の指定された双曲基底を持つ。その基底はframed immersed spheresで表され、Wallの自己交叉障害は消える。全基底球面に3-cellを付けた P は BH とホモトピー同値で、 (P, S) は向き付けられた形式次元4のPoincaré対である。しかし、境界を S と同定し、境界上で $c|_S$ とホモトピックなホモトピー同値 $D' \rightarrow BH$ を持つコンパクト向き付け位相4多様体 D' は存在しない。

Proposition 2.1 · p. 4

1 共役路を記録した幾何入力

marked grope bodies、外部の円板 f_j と双対球面 g_j
 $\lambda(f_i, g_j) = \delta_{ij}, \quad \lambda(g_i, g_j) = 0$

tube side の homotopy pushout と交叉形式の計算
[\[OpenAI26b, Lemmas 2.3–2.4, pp. 9–12\]](#)
[Lemma 2.2; §§2.2–2.3 · pp. 6–8](#)

2 圧縮 body を貼り、基底を cell で消す

$D = E \cup \coprod_{F_j \times S^1} \coprod (V_j \times S^1), \quad P \simeq BH$
 $\pi_2 D$ の指定双曲基底； (P, S) の Poincaré 双対性

標識が逆手術の cocore と全境界法則を保持する
[§2.4; Lemma 2.4 · pp. 8–10](#)

3 仮想的な位相充填を切断

$D' \simeq BH \implies W \implies A, B, Y_i$
 穿孔平滑化；filled cohomology を計算する形式代数

全共役付き法則から Vertex data を作り、有限 tensor 定理へ
[\[OpenAI26b, Proposition 6.1, p. 37\]](#)
[\[OpenAI26b, Theorem 3.1, p. 16\]](#)

4 tensor 入力の不可能性

$T = K[t_i]/(t_i^2), \quad S_t(H_L) = S_0(H_R) = 0$
 $t_i t_j t_k \in (\partial S_t)(H_L), \quad (b_i b_j b_k)(H_R) \in (\partial S_0)(H_R)$
 相補的接空間、代数的 potential、 $m \geq 5$ ；radical には移らない

標識付きchamberの構成とtensor obstruction

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. companionから取り出すのは非埋め込み定理だけではない

入力、独立な共役路を備える有限個のgrope bodyと、その外部の代数的双対球面である。下段の punctured tori F_j の管を除いた E に、 F_j を円板へ圧縮する V_j の積 $V_j \times S^1$ を貼る。tube sideを含むhomotopy pushoutの同定により、一つの F_j ごとに自由生成元1個と2球面2個が加わる。双対球面の交叉計算から双曲基底を作り、全基底を3-cellで消すと $P \simeq BH$ となる。この段階は埋め込まれた球面手術を使わない。

[\[OpenAI26b, Lemmas 2.3–2.4, pp. 9–12\]](#)

[Lemma 2.2; §§2.2–2.3 · pp. 6–8](#)

2. 位相充填から切断データを作る

仮に D' があれば、境界手術を逆にする2-handlesを付けて、元のgraph型と境界写像を持つ W を作る。handleのcocoreは必要な境界語を埋め込まれた円板で殺す。Quinnの穿孔平滑化を用い、円板と穿孔を避けてtree値写像のregular levelsを取り、連結なvertex piecesとtorus境界を持つcutsを得る。

位相的vertexをそのまま滑らかと見なすことはできない。Lemma 2.4は、穿孔近傍で正次数形式が消え、0次関数が各穿孔近傍で別々に定数となる微分形式代数を使う。これが**穿孔を埋めた空間**のコホモロジーを計算し、係数ごとのStokes計算とbased holonomyの計算を維持する。この追加段階が、companionの滑らかなvertex計算を任意の位相充填へ移す。

§2.4; Lemma 2.4 · pp. 8–10

3. 混合nilpotent項と真のgradient idealが矛盾を担う

構成で $m \geq 5$ 、 $p \geq 9$ を選ぶ。parity coverのMayer–Vietoris計算から、degree 2の差制限写像は同型となり、degree 1でもextra-loop評価をゼロに制限すれば同型になる。生き残る周辺方向を選ぶと $m \geq 5$ 本のactive edgesを得る。全共役付き境界法則を使い、companionのVertex dataを適用して

$$T = K[t_i : i \in I]/(t_i^2), \quad S_0 = \sum F_i, \quad S_t = S_0 + \sum_{i \in I} t_i b_i$$

と相補的接空間を持つ形式グラフ H_L, H_R を得る。満たすのは $S_t(H_L) = S_0(H_R) = 0$ と、すべての相異なるactive triplesについて

$$t_i t_j t_k \in ((\partial_{h_\nu} S_t)(H_L))_\nu, \quad (b_i b_j b_k)(H_R) \in ((\partial_{h_\nu} S_0)(H_R))_\nu.$$

K は標数0の体 ($\mathbb{C}((\sigma))$ と取れる) であり、各 $F_i(h_i), b_i(h_i)$ は辺 i ごとの別々の座標blockにだけ依存する。この分離された代数性、混合square-free項を残した T 、radicalではないgradient idealへの所属が、Finite tensor obstructionの仮定そのものである。したがって、このデータは存在しない。marked論文の主定理を直接引用して充填を排除するのではなく、その構成・potential・代数化・tensor定理を取り出して適用する。

[OpenAI26b, Proposition 6.1, p. 37]

[OpenAI26b, Theorem 3.1, p. 16]

4. Proposition 5.5 の証明 — 方向制御の後に球面を手術する

証明対象 : Proposition 5.5 · pp. 29–30

Proposition 5.5 — 残る双曲平面の除去

§5で構成されたコンパクト多様体 $Z = Z_{R,L}$ は、 $\partial Z = S$ 、 $\pi_1 Z = H$ を満たし、普遍被覆の被約ホモロジーは次数2だけにあり、 $R < |v| \leq L$ のchamberの指定双曲対で自由に生成される。この Z に内部手術を施して、境界 S 、基本群 H 、可縮な普遍被覆を持つコンパクト向き付け位相4多様体 V を得る。その境界写像 $S \rightarrow BH$ は元の中心chamberの標識である。

Proposition 5.5 · pp. 29–30

1 外側に残る双曲平面

$\partial Z = S$, $\pi_1 Z = H$, $H_2(\tilde{Z}) = \bigoplus_{R < |v| \leq L} \text{標識付き双曲平面}$
中心の境界標識を保持；他の被約ホモロジーは消える

元の対の標識と chamber 内の群環交叉計算を用いる
§5.1, Equation (20) · pp. 21–23
Lemma 5.2 · pp. 23–26

2 準備の伝播を一様に抑える

geometric duals、高さ 8 の Whitney gropes、保護した Clifford 双対
有限 template により R に独立な距離 bound

遠方の radial directions と、中心因子への写像の同定
Lemmas 5.3–5.4 · pp. 26–28
[FQ13, Lemma 2.10.1; §2.10.2, 誌面 pp. 39–40 / PDF pp. 53–54]

3 全 loop system を一つの patch へ

有限個の collection を分離し、その近傍内で upper components を分離
全方向像が可縮 patch に入る $\Rightarrow$ cap loops は null

goodness 使用後の null-loop 入力へ接続；以後の径制御は不要
[PRT25, Lemma 4.2, proof, pp. 17–18]
Proposition 5.5 · pp. 29–30

4 tower から球面手術へ

$\pi_1(M') \cong \pi_1 Z$; $H_i(V; \mathbb{Z}H) = 0$ ($i > 0$)
双対が基本群を保存し、acyclic な普遍被覆は可縮となる
 $V \simeq BH$ は元の境界標識を延長する

方向制御から標識付きaspherical充填への帰着

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 取り除いた対の標識が残存ホモロジーを特定する

有限chamber和の非中心境界を補完充填で塞ぐと、基本群はchamber群の自由積から中心因子 H への射影となる。次に $|v| \leq R$ の標準 $S^2 \times S^2$ 近傍を4-ballに置き換える。元のchamber対とのbased homotopiesを有限領域に含めることで、消えた加群因子が正確に中心近傍の標識と一致する。これが式(20)の残存双曲基底を与える。

§5.1, Equation (20) · pp. 21–23

2. 一つのdirection patchに全loop systemを収める

Lemma 5.2は、外側のsphere systemをgeometric dualsと高いWhitney gropesへ準備し、その伝播距離を R に独立に抑える。Davis complexの遠方では有界径の集合のradial directionsが一様に小さくなる。Lemma 5.3では、方向写像と $S \rightarrow BH$ の合成が中心因子への写像を誘導すると確認するため、全像が一つの可縮patchに入るloop systemは Z 内でnullhomotopicとなる。

Lemma 5.4は最初に有限個のpatchごとのcollectionを分離し、次に各collectionの近傍内で個々のupper componentsを分離する。第2段階の個々のcapには一様なgallery径を要求しない。保つのは全像が同じ可縮patchに留まることであり、多数の交点を巡るloopにもnullityが従う。

Lemma 5.2 · pp. 23–26

[FQ13, Lemma 2.10.1; §2.10.2, 誌面 pp. 39–40 / PDF pp. 53–54]

Lemmas 5.3–5.4 · pp. 26–28

3. goodnessの代用箇所を限定してtowerを作る

geometric dualsがmeridiansを殺すので、 a_i のplumbed neighborhoodsの補空間 M' から Z への写像は π_1 同型を誘導する。従ってcapのdouble-point loopsは M' 内でもnullhomotopicである。原稿はここからPowell–Ray–TeichnerのLemma 4.2の証明のうちgoodnessを使った後のtower構成へ接続する。保護したClifford capped surfacesを幾何学的双対として保持することも必要である。自由群 H 全体についてgoodnessを仮定したり証明したりする議論ではない。

これ以降のnull homotopies · tower caps · 最終Whitney discsは Z 全体を動いてよい。得られたframed embedded Lagrangian spheresを手術すると、双対球面により基本群が保存される。手術traceの相対鎖複体を両側から計算すれば、 $H_i(V; \mathbb{Z}H) = 0$ ($i > 0$)。単連結かつacyclicな普遍被覆はCWホモトピー型を持つので可縮となり、 $V \simeq BH$ が従う。手術は内部だけであり、境界標識も保存される。

[PRT25, Lemma 4.2, proof, pp. 17–18]

§5.5, Equation (22) · pp. 28–29

Proposition 5.5 · pp. 29–30

5. どの論文が、どの段階を担うか

供給元と結果

A marked tensor obstruction : Lemmas 2.3–2.4、Proposition 4.5、Theorem 5.1、Propositions 5.2・6.1、Theorem 3.1

利用箇所

標識付きchamber

使用内容・必要な仮定

marked bodiesと外部双対、非被約critical scheme上の標識、代数性、全active triplesのgradient-ideal所属

確認範囲

入力の記述と本稿§2.1・§2.4の使用を照合。companionの全証明を再検証していない

供給元と結果

Kasprowski–Land、Quinn

利用箇所

安定した標識の実現

使用内容・必要な仮定

almost-spin、Farrell–Jones、指定したnormal invariantと相対積

確認範囲

本稿の条件確認と利用の範囲を読解。外部原典の確認状況は末尾に記載

供給元と結果

Freedman–Quinn、Powell–Ray–Teichner

利用箇所

方向制御とtower

使用内容・必要な仮定

小さいupper gropeの分離、null double-point loops、保護されたgeometric duals

確認範囲

本稿の代替null-loop段階と、その後の入力条件を読解。外部証明全体の検証ではない

カタログ内で直接使うのはmarked tensor論文の構成・中間結果である。boundary-only論文から本稿への直接入力、ここで読んだ原稿の引用・証明箇所には見当たらない。

6. 原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 1.1 · pp. 1–2 — 仮定・量化と全結論
- Lemma 2.2; §§2.2–2.3 · pp. 6–8 — tube sideと双対性を保持する構成
- §2.4; Lemma 2.4 · pp. 8–10 — 位相充填からtensor入力への移行
- Proposition 3.2; §3.2 · pp. 12–14 — 有限BGと整係数双対性
- Proposition 4.3; Lemma 4.4; Proposition 4.5 · pp. 18–20 — 指定球面のmarkingを保持する安定化
- Lemmas 5.3–5.4 · pp. 26–28 — 全loop systemの方向制御
- §5.5, Equation (22) · pp. 28–29 — null loopsからtowerへ進む接続
- Proposition 5.5 · pp. 29–30 — 手術traceと可縮性の結論

本稿のTheorem 1.1、Proposition 2.1、反射と双対性の§3、標識を保持する§4、§5の充填・準備・方向制御・tower・手術の該当本文を読んだ。marked tensor論文では、直接入力の結果の記述と本稿での使用を照合した。とくに、位相vertexへの移行、整係数の標識、capの全loop system、最終手術の正則係数計算を確認箇所とした。

Kasprowski–LandのLemmas 2.3 · 3.3とTheorem 3.1、Powell–Ray–TeichnerのLemma 4.2の記述と証明の接続箇所、Freedman–QuinnのLemma 2.10.1と§2.10.2は外部原典でも照合した。Quinnの安定積定理は原典本文を取得できておらず、本稿§4.2による紹介・適用の確認に留まる。この接続は未確認として残す。

CAT(0) · Farrell–Jones · 穿孔平滑化の外部原典については、本稿での記述と使用箇所を読んだが、引用先の結果の記述自体は今回照合していない。

外部のCAT(0) · 組立 · 平滑化 · 安定積 · disk embedding各定理の全証明、marked tensor論文の代数化と有限tensor定理の全証明は独立検証していない。有限局所templateによる一様制御や、標識付き安定積から最終sphere surgeryまでの全幾何学的操作について、独立した完全検証を行ったという意味ではない。これは原稿の証明構成と入力・適用関係の概説であり、Wallの問題の解決を編集側が認定するものではない。