

OpenAI Math Digest

CATALOGUE 287

すべての非可換自由群因子は同型である

カタログ案内と1篇の証明概説

独立した非公式の読解ガイド・日本語版

収録版: 2026-10-15

制作: Masataka Iwai・大阪大学

AI生成の解説には誤りや不正確な説明が含まれる可能性があります。重要な主張・証明は原論文でご確認ください。本冊子はWebサイトの解説をまとめたもので、原論文そのものではありません。専門家査読・形式検証は未実施です。

目次

カタログ案内に続き、収録論文1篇の解説を掲載しています。目次・引用はクリックできます。横長の表は紙面向けの項目一覧に組み直し、主張と参照先を保持しています。

00・カタログ287 案内	3
---------------	---

01・An isomorphism of the free group factors	5
---	---

原論文の参照版: 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a

[カタログ287 · 案内](#)[Web版を読む ↗](#)

CATALOGUE 287

すべての非可換自由群因子は同型である

All nonabelian free group factors are isomorphic

自由Haar生成組の小さい摂動と生成する極限を構成し、補間自由群因子の増幅公式によって $L(\mathbb{F}_2) \cong L(\mathbb{F}_3)$ へ至る1篇を収録する。さらに可算無限階数を含む同型、基本群、自由エントロピー次元の生成組依存性を扱う。

1. 収録論文

主結果の範囲を短くまとめています。正確な仮定と定式化は併記した原典の結果を参照してください。

カタログ 287 · 2026-10-15 確認の固定参照版

#

01

論文・概説

An isomorphism of the free group factors →

図中の略称: An isomorphism of the free group factors

September 23, 2026 · 23 ページ

[原論文 \(GitHub\) ↗](#)

主に何を主張するか

$n \geq 3$ の隣接階数、階数2と3、 $1 < r \leq \infty$ の補間族が同型。基本群は $R > 0$ 。四つの自由エントロピー次元は生成組に依存する。

[Theorems 1.1–1.2 · pp. 1–2; Corollaries 6.1, 7.1 · pp. 21–22 ↗](#)

議論の役割・概説

小cocycle → トレース保存flow → 適応誤差予算による生成極限。増幅・二分法・生成組移送を後続で使用する。日英概説と自己点検を用意。

[証明概説を読む →](#)

2. 外部入力への案内

階数2への帰着はDykemaの増幅公式に依存し、補間族の無限パラメータには古典的二分法を用いる。自由エントロピー次元の帰結では、半円生成組と群環の代数的生成組を別々に移送する。個別記事の入力結果と使用箇所、原典の記述・適用の確認範囲を示す。

3. 原典・確認範囲

公式overviewの見出しは All nonabelian free group factors are isomorphic、CONTENTSの見出しは Isomorphism of the free group factors。Operator algebrasに属する287であり、overviewの誌面/PDF p.31に掲載される。参照commitは1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a、収録原稿は OpenAI、2026年9月23日版、23ページである。

OpenAI Research Catalog · Catalogue 287, Operator algebras · p. 31

原稿§§2-7の核心を読んだ執筆担当の自己点検であり、独立査読ではない。外部入力の全証明とその先の依存文献は検証していない。Rădulescuの二分法はGoldbring-Piの明示的再掲で確認し、Brannanほかの入力は著者プレプリントv2の§5で確認した。原典への入口と保留範囲を参照。

An isomorphism of the free group factors

小さいcocycleから余分な自由生成元を吸収し、正規化増幅で階数2へ戻す。

本原稿は、 $n \geq 3$ に対して $L(\mathbb{F}_{n+1})$ 内に自由に生成するHaar n 組を構成する。局所的な自己同型の反復で組の分布と生成性を別々に確保し、その後に補間自由群因子の増幅公式を使う。以下は原稿の論証と直接入力 of 照合に基づく概説であり、独立した査読による正しさの認定ではない。

原稿の著者: OpenAI · September 23, 2026 · 23 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 隣接階数の同型

すべての整数 $n \geq 3$ について、単位的・トレース保存・normalな*同型

$$L(\mathbb{F}_n) \cong L(\mathbb{F}_{n+1})$$

が存在する。各因子のトレースは標準の正規化トレースである。

[Theorem 1.1 · p. 1](#)

Theorem 1.2 — 階数2と3

単位的・normal・トレース保存な*同型

$$\Phi : L(\mathbb{F}_2) \longrightarrow L(\mathbb{F}_3)$$

が存在する。

[Theorem 1.2 · p. 2](#)

Corollary 6.1 — 補間族全体と基本群

$1 < r, s \leq \infty$ のすべてについて、単位的・normal・トレース保存な*同型 $L(\mathbb{F}_r) \cong L(\mathbb{F}_s)$ が存在する。さらに

$$\mathcal{F}(L(\mathbb{F}_r)) = \mathbb{R}_{>0} \quad (1 < r \leq \infty).$$

有限非整数の r では補間自由群因子を意味し、 ∞ は可算無限階数である。 $r = 1$ は含まない。

Corollary 6.1 · p. 21

Corollary 7.1 — 自由エントロピー次元の生成組依存性

$M = L(\mathbb{F}_2)$ に標準トレースを入れる。すべての整数 $n \geq 2$ について、自己共役 n 組 $X^{(n)}$ と自己共役 $2n$ 組 $Y^{(n)}$ が存在し、

$$\begin{aligned} W^*(X^{(n)}) &= W^*(Y^{(n)}) = M, \\ \delta(X^{(n)}) &= \delta_0(X^{(n)}) = n, \quad \delta^*(Y^{(n)}) = \delta^*(Y^{(n)}) = n. \end{aligned}$$

したがって四つの次元はいずれも有限自己共役 W^* 生成組の変更に対して不変でなく、この一つの因子の生成組上で非有界となる。二つの組が同一であるとは主張しない。

Corollary 7.1 · pp. 21–22

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [An isomorphism of the free group factors](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [Dyk94](#) Ken Dykema — Interpolated free group factors : 正規化された増幅公式。Theorem 1.2で使用。。Pacific Journal of Mathematics 163 (1994), 123–135; publisher PDF with cover.
- [GP25](#) Isaac Goldbring and Jennifer Pi — On the first-order free group factor alternative : 無限パラメータを含む古典的同型二分法の明示的再掲。Corollary 6.1で使用。。arXiv:2305.08168v2, 2 January 2025.
- [V90](#) Dan Voiculescu — Circular and semicircular systems and free product factors : 半円族による自由群因子の実現。Corollary 7.1で使用。。Progress in Mathematics 92 (1990), 45–60; author-hosted two-page scan.
- [V01](#) Dan Voiculescu — Free entropy : 自由な半円族のmicrostates次元 $\delta = n$ 。。arXiv:math/0103168v1, 26 March 2001.
- [BEHY23](#) Michael Brannan, Floris Elzinga, Samuel J. Harris, and Makoto Yamashita — Crossed product equivalence of quantum automorphism groups of finite dimensional C_* -algebras : §5冒頭の自由半円族についての $\delta_0 = n$ の記述。誌面版に代え著者プレプリントv2を照合。。arXiv:2202.04714v2, 21 February 2023; §5 corresponding to the cited published article.
- [MS05](#) Igor Mineyev and Dimitri Shlyakhtenko — Non-microstates free entropy dimension for groups : 群環を代数的に生成する自己共役組の δ^* 、 $\delta \cdot$ を L^2 -Betti数で計算。。Geometric and Functional Analysis 15 (2005), 476–490; published PDF.

- CS03 Alain Connes and Dimitri Shlyakhtenko — L2-homology for von Neumann algebras : 自由群の L^2 -Betti 数 $\beta_0=0$ 、 $\beta_1=n-1$ 。。 arXiv:math/0309343v1, 20 September 2003。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 の証明 — 小さい摂動と生成する極限

証明対象 : Theorem 1.1 · p. 1

証明の道筋。 $M = L(\mathbb{F}_{n+1})$ の自由に生成するHaar組 $(A_1, \dots, A_n, C)$ から出発する。 $S = \arg C$ とその共役を係数とするflowが、小さい群cocycleを小さい自己同型へ変換する。これにより、ほとんど動かない n 組の語で旧生成元 C を近似できる。最後に、各近似を将来の摂動から守る誤差予算を設ける。以下の図はこの定理の全経路であり、補間理論はまだ使わない。

1 有限台実係数を選ぶ

$D_{x_1} = h, D_{x_j} = 0 \ (j \geq 2), \ \|h\|_{\ell^2}, \|D_w - \delta_e\|_{\ell^2} < \eta$
 自由 prefix の Catalan 極限 $\rightarrow$ 低スペクトルの切断逆作用素

形式 trace 恒等式と実解析性、関係式の降下と normal 延長
[Lemmas 3.2–3.4 · pp. 7–10](#)
[Section 3.3 · pp. 10–11](#)

2 モーメントを保つ自己同型

$\beta_t(S) = S, \ \beta_t \in \text{Aut}(M)$
 $\|\beta_1(A_j) - A_j\| \leq 3\pi\|h_j\|_{\ell^2}, \ \|\beta_1(A_w) - CA_w\| \leq 3\pi\|D_w - \delta_e\|_{\ell^2}$

小 cocycle と自由群の基底変換を組み合わせる
[Lemma 4.1; Sections 4.1–4.3 · pp. 11–16](#)
[Proposition 5.1 · pp. 16–17](#)

3 旧補完生成元を吸収する

$\gamma(A_j) = A_j, \ \gamma(C) = CA_w, \ \alpha = \gamma^{-1}\beta_1$
 $\max_j \|\alpha(A_j) - A_j\| < \varepsilon, \ \|\alpha(A_w) - C\| < \varepsilon$

現在の $F_{j,k}$ は旧 $C^{(k-1)}$ を使う。語長は将来予算へ反映
[Section 5.2; equations \(5.3\)–\(5.9\) · pp. 17–19](#)

4 語を得てから将来予算を決める

$F_{j,k} \rightarrow \varepsilon_k \rightarrow w_k \rightarrow G_{j,k}(X) = F_{j,k}(X, X_{w_k})$
 $L_k \rightarrow r_k \leq \min\{r_{k-1}/2, 2^{-k}/(1 + L_k)\}$

尾和制御、条件付き期待値、Haar 組の空間的同定
[Section 5.2; equations \(5.3\)–\(5.9\) · pp. 17–19](#)
[Lemma 2.2 · p. 4](#)

5 Haar 分布と生成性を別々に確保

$A_j^{(k)} \xrightarrow{\|\cdot\|} A_j^{(\infty)}, \ \|G_{j,k}(A^{(\infty)}) - y_j\|_2 \leq 3 \cdot 2^{-k}$
 $W^*(A^{(\infty)}) = M, \ L(\mathbb{F}_n) \cong L(\mathbb{F}_{n+1})$

小さい係数からHaar分布と生成性を両立する極限へ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 形式的flowを実際のnormal自己同型へ降ろす

$\Gamma = \mathbb{F}_n, S_g = A_g S A_g^*, s(h) = \sum_g h(g) S_g$ とおく。 S は有界Borel汎関数計算による対数で、 $e^{iS} = C, \tau(S) = 0, \|S\| \leq \pi$ を満たす。有限台の実係数 h_j から cocycle を

$$D_{x_j} = h_j, \quad D_{gb} = D_g + \lambda(g) D_b$$

で定め、 $B = C^*(A_1, \dots, A_n, S)$ 内の多項式ODE

$$A_j'(t) = i \sum_g h_j(g) A_g(t) S A_g(t)^* A_j(t)$$

を解く。有限トレースの忠実性により解はunitaryであり続け、有界導関数と完備性が両時間方向の大域解を与える。

ここで自由性を時刻 t へ先取りしない。形式的なunitaryと自己共役元の代数上で $\tau \circ \text{ev}_0 \circ \partial = 0$ を証明し、すべての反復微分にも適用する。群ラベルが非自明ならトレースはゼロであり、ラベルが自明なら自由な共役成分 S_g の一つだけを他成分のunitaryで共役する第一変分に帰着する。実際の解の微分を多項式次数と係数和で評価してモーメントの実解析性を得るため、初期時刻の全導関数消失から全時刻のモーメント不変性が従う。

Lemmas 3.2–3.4 · pp. 7–10

$\varphi_t(\text{ev}_0 p) = \text{ev}_t p$ は、 $p^* p$ のトレースと忠実性により評価核を保ち、well-definedとなる。さらに

$$\|b\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau((b^* b)^k)^{1/(2k)}$$

が等長性と単射性を与える。 $B_t = C^*(A_1(t), \dots, A_n(t), S)$ 内で同じODEを逆時間へ解くことで $B_t = B$ 、したがって全射性を得る。トレース保存等長写像を $L^2(M, \tau)$ 上のunitaryへ延長し、左表現を共役するとnormal自己同型 β_t となる。point-norm連続性は B 上の主張であり、 M 全体上には要求しない。この B は $S = \arg C$ を含み、標準の被約群 C^* 環と同一視していない。

自由和の生成・消滅・対角成分の評価 $\|s(h)\| \leq 3\pi \|h\|_{\ell^2}$ を、自己同型の構成後に使う。積の順序を保って $e^{-itS} A_w(t)$ を微分すれば、

$$\|\beta_1(A_j) - A_j\| \leq 3\pi \|h_j\|_{\ell^2}, \quad \|\beta_1(A_w) - CA_w\| \leq 3\pi \|D_w - \delta_e\|_{\ell^2}$$

を得る。これが係数空間の問題と作用素ノルムの問題をつなぐ。

Lemmas 2.3–2.5 · pp. 4–6

Section 3.3 · pp. 10–11

2. スペクトルの打切りで小さいcocycleを作る

$n \geq 3$ の仮定は、 $a = x_1$ と $b_j = x_2^j x_3 x_2^{-j}$ を分離して使うところに入る。 $p_j = (ab_1) \cdots (ab_j)$ は自由な族をなし、 $w_m = p_m a$ 、 $T_m = 1 + \sum_{j=1}^m \lambda(p_j)$ とすると、 $h_1 = h$ 、 $h_j = 0$ ($j \geq 2$)に対して $D_{w_m} = T_m h$ となる。

$Q_m = T_m T_m^*$ として Q_m/m のスペクトル測度は、自由語の非交差対合を数えるCatalanモーメント計算により

$$d\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4-x}{x}} 1_{(0,4)}(x) dx$$

へ弱収束する。必要なのは $\nu(\{0\}) = 0$ であって、各 Q_m の可逆性ではない。小さい $d > 0$ を先に選び、次に m を大きくして

$$E_m = 1_{(dm, \infty)}(Q_m), \quad R_m = Q_m^{-1} E_m, \quad h^{(0)} = T_m^* R_m \delta_e$$

とする。ここで R_m はゼロ側を切り落とした有界汎関数計算である。 $T_m h^{(0)} = E_m \delta_e$ 、 $\|h^{(0)}\|_{\ell^2}^2 \leq (dm)^{-1}$ 、 $\|T_m h^{(0)} - \delta_e\|_{\ell^2}^2 = \tau_\Gamma(1 - E_m)$ がそれぞれ小さくなる。実係数共役との可換性を確認してから有限台実ベクトルへ近似する。 m を固定した後の $\|T_m\| \leq m + 1$ が最後の近似誤差を制御する。

Lemma 4.1; Sections 4.1–4.3 · pp. 11–16

3. 旧補完生成元を近似し、選択順序を固定する

flowだけでは CA_w を近似している。自由群の基底変換 $\gamma(A_j) = A_j$ 、 $\gamma(C) = CA_w$ を使い、 $\alpha = \gamma^{-1} \circ \beta_1$ と置くと

$$\max_j \|\alpha(A_j) - A_j\| < \varepsilon, \quad \|\alpha(A_w) - C\| < \varepsilon.$$

新しい補完生成元は $C' = \alpha(C) = CA_w^*$ であり、近似対象の旧 C とは異なる。 $(\alpha(A), C')$ は再び自由に生成するHaar組なので、同じ操作を反復できる。

Proposition 5.1 · pp. 16–17

$L^2(M)$ に稠密な可算族 (y_j) を固定する。段階 k では現在の組 $(A^{(k-1)}, C^{(k-1)})$ による語多項式 $F_{j,k}$ で $y_1, \dots, y_k$ を 2^{-k} 以内に近似し、その共通Lipschitz定数 H_k から

$$0 < \varepsilon_k < \min\{r_{k-1}/2, 2^{-k}/(1 + H_k)\}$$

を選ぶ。摂動が語 w_k を返した後に $G_{j,k}(X) = F_{j,k}(X, X_{w_k})$ と、その共通定数 L_k を定め、

$$0 < r_k \leq \min\{r_{k-1}/2, 2^{-k}/(1 + L_k)\}$$

を選ぶ。最初の評価では X_{w_k} は $F_{j,k}$ の一つのunitary slotであり、まだ未知の語長を ε_k へ入れていない。語長の増大は将来予算 r_k だけに反映される。

Section 5.2; equations (5.3)–(5.9) · pp. 17–19

4. 分布の保存と生成性を別に閉じる

$\sum_{\ell > k} \varepsilon_\ell \leq r_k$ により $A_j^{(k)}$ は作用素ノルムでunitary $A_j^{(\infty)}$ へ収束する。固定した語の評価とトレースのノルム連続性から、極限でも非自明語のトレースはゼロである。一方、生成性はそれだけでは従わない。予算の選び方から

$$\|G_{j,k}(A^{(\infty)}) - y_j\|_2 \leq L_k r_k + 2 \cdot 2^{-k} \leq 3 \cdot 2^{-k} \quad (j \leq k)$$

を得る。 $N = W^*(A^{(\infty)})$ へのトレース保存条件付き期待値 E_N は L^2 上の直交射影であり、この稠密族を固定するので $N = M$ となる。近似多項式の作用素ノルムの一様有界性や、 $C^{(k)}$ の収束は不要である。

最後に $V\delta_g = A_g^{(\infty)}$ は $\ell^2(\mathbb{F}_n) \rightarrow L^2(M)$ のunitaryとなる。群左正則表現と $A_g^{(\infty)}$ による左乗法を絡めるため、二重可換子の空間的同型が $L(\mathbb{F}_n) \rightarrow M$ を与える。全射性は $N = M$ 、トレース保存は $V\delta_e = 1$ 、normal性と単射性はこの空間的実現から従う。有限段階の自己同型列全体を極限へ延長して同型を作る議論ではない。

3. Theorem 1.2 の証明 — 増幅パラメータを揃える

証明対象：Theorem 1.2 · p. 2

$N_s = L(\mathbb{F}_s)$ と書く。 $Q^t = p(Q \otimes B(\ell^2))p$ では $(\tau_Q \otimes \text{Tr})(p) = t$ 、corner のトレースは $t^{-1}(\tau_Q \otimes \text{Tr})$ 、 Tr は階数 1 射影に値 1 を取る。これが以下の t^{-2} の正規化である。

1 構成が適用できる階数を使う

$$N_3 \cong N_4 \cong N_5, \quad \Theta : N_3 \longrightarrow N_5$$

$n = 3, 4$ の同型を合成し、 $\Theta \otimes \text{id}$ を corner に制限

[Theorem 1.1 · p. 1](#)

[Section 6; equation \(6.1\) · p. 20](#)

2 同じトレースの corner へ増幅

$$\Theta^{\sqrt{2}} : N_3^{\sqrt{2}} \longrightarrow N_5^{\sqrt{2}}$$

$$\tau(p) = \sqrt{2}, \quad \tau_{Q^{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_Q \otimes \text{Tr})$$

正規化公式 $N_s^t \cong N_{1+(s-1)t^{-2}}$ を適用

[\[Dyk94, Theorem 2.4, 誌面 p. 128 / PDF p. 7\]](#)

3 階数 2 と 3 へ同定する

$$N_3^{\sqrt{2}} \cong N_{1+2/2} = N_2, \quad N_5^{\sqrt{2}} \cong N_{1+4/2} = N_3$$

$$\Phi : N_2 \xrightarrow{\cong} N_3 \quad \text{単位的} \cdot \text{normal} \cdot \text{トレース保存}$$

階数 3 と 5 の同型を $\sqrt{2}$ 増幅して階数 2 と 3 を得る

図を拡大 ↗ TeX ソース ↓

1. 階数 3 から 5 を経由する理由

Theorem 1.1 を $n = 3, 4$ に適用して $\Theta : N_3 \rightarrow N_5$ を作る。外部増幅公式

$$N_s^t \cong N_{1+(s-1)t^{-2}} \quad (s > 1, t > 0)$$

に $t = \sqrt{2}$ を代入すると、 $N_3^{\sqrt{2}} \cong N_2$ 、 $N_5^{\sqrt{2}} \cong N_3$ となる。従ってこの二つの同型と $\Theta^{\sqrt{2}}$ の合成が Φ である。 $\Theta \otimes \text{id}$ は同じ有限トレースの射影を送り、正規化 corner へ制限されるため、単位・normal 性・トレース保存・全単射性が合成に保たれる。 $n = 2$ に小cocycle構成を直接適用してはいない。

[Dyk94, Theorem 2.4, 誌面 p. 128 / PDF p. 7]

Section 6; equation (6.1) · p. 20

4. Corollary 6.1 の証明 — 無限パラメータと基本群

証明対象：Corollary 6.1 · p. 21

1 非同型の選択肢を排除する

$$N_2 \cong N_3$$

 $1 < r \leq \infty$ の二分法：全て同型、または相異なる全てが非同型

異なる有限階数の同型が二分法の第二選択肢を否定

Theorem 1.2 · p. 2

[GP25, Theorem 1.1, p. 2]

2 可算無限階数を含む同型

$$N_r \cong N_s \quad (1 < r, s \leq \infty)$$

有限パラメータには増幅公式、無限パラメータには $N_\infty \cong N_2$

[Dyk94, Theorem 2.4, 誌面 p. 128 / PDF p. 7]

Corollary 6.1 · p. 21

3 全ての正の増幅を吸収する

$$N_r^t \cong N_{1+(r-1)t^{-2}} \cong N_r \quad (1 < r < \infty)$$

$$N_\infty^t \cong N_2^t \cong N_2 \cong N_\infty$$

$$\mathcal{F}(N_r) = \mathbb{R}_{>0} \quad (1 < r \leq \infty)$$

全パラメータの二分法から同型と基本群を得る

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 無限階数は二分法から入る

古典的二分法は $1 < r \leq \infty$ 全体について「すべて同型」または「異なるパラメータはすべて非同型」と述べる。Theorem 1.2が後者を排除する。この無限パラメータを含む記述はGoldbring–PiのTheorem 1.1で照合したもので、そこではRădulescuのCorollary 4.7の再掲と明示される。有限階数の同型列を単に帰納極限に取る説明は用いない。

[GP25, Theorem 1.1, p. 2]

2. すべての正の増幅を吸収する

有限 $r > 1$ と $t > 0$ では $1 + (r - 1)t^{-2} > 1$ なので、増幅公式と前段の同型から $N_r^t \cong N_r$ を得る。

$r = \infty$ では $N_\infty \cong N_2$ を増幅し、 $N_\infty^t \cong N_2^t \cong N_2 \cong N_\infty$ とつなぐ。これで各基本群が $\mathbb{R}_{>0}$ になる。 ∞ を有限パラメータ用公式へ形式代入する必要はない。

5. Corollary 7.1 の証明 — 二種類の生成組を移送する

証明対象：Corollary 7.1 · pp. 21–22

$\theta_n : L(\mathbb{F}_n) \rightarrow M = L(\mathbb{F}_2)$ を Theorems 1.1–1.2 から得る ($n = 2$ は恒等写像)。トレース保存により、各自己共役組 Z と $\theta_n(Z)$ の同時*分布は一致する。normal 性と全射性から $W^*(\theta_n(Z)) = \theta_n(W^*(Z))$ である。



半円族と群環生成組を同じ因子へ移送する

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. Microstates次元は半円族で計算する

自由な分散1の半円 n 組 $S^{(n)}$ は $L(\mathbb{F}_n)$ を生成する。Voiculescuの半円実現の記述を照合した。参照版の半円則のスケールは分散1にスカラー倍して合わせられ、生成する代数は変わらない。非原子的分布についての一変数公式と自由加法性から $\delta(S^{(n)}) = n$ 、外部文献§5冒頭から $\delta_0(S^{(n)}) = n$ を得る。 $X^{(n)} = \theta_n(S^{(n)})$ は生成性と両方の値を保つ。

[V90, Remarks 1.10–1.11, 誌面 p. 49 / PDF p. 3]

[V01, Section 2.4(c),(d), p. 11]

[BEHY23, Section 5, opening paragraph, p. 15]

2. Nonmicrostates次元は群環生成組で計算する

標準群unitary u_j から $a_j = (u_j + u_j^*)/2$ 、 $b_j = (u_j - u_j^*)/(2i)$ 、 $G^{(n)} = (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ を作る。 $u_j = a_j + ib_j$ なので、この組は $\mathbb{C}F_n$ を代数的に生成する。従ってMineyev–Shlyakhtenkoの入力仮定を満たし、

$$\delta^*(G^{(n)}) = \delta^*(G^{(n)}) = \beta_1^{(2)}(\mathbb{F}_n) - \beta_0^{(2)}(\mathbb{F}_n) + 1 = n$$

を得る。この計算を移送前に行い、 $Y^{(n)} = \theta_n(G^{(n)})$ と置く。一般の W^* 生成組へ群環の定理を直接適用していない。

[MS05, Theorem 4.1, 誌面 p. 489 / PDF p. 14]

[CS03, Section 2.1.1, p. 4]

3. 非不変性と非有界性

四つの次元はいずれも同時トレース分布に依存するので、対応する組を移送しても値は変わらない。 $n = 2, 3$ を比較すれば同一因子の生成組で異なる値となり、 $n \rightarrow \infty$ で非有界となる。 n を変えたとき移送された組の代数的*環は固定していないため、群環定理の代数的生成組不変性とは矛盾しない。

Section 7 · pp. 21–22

6. 直接入力と使用箇所

供給する結果

Dykemaの増幅公式

利用箇所

Theorem 1.2、Corollary 6.1

適用条件・照合範囲

有限実パラメータ $s > 1$ と $t > 0$ 。Theorem 2.4の記述と原稿p.20の正規化を照合。

供給する結果

Goldbring–Piに再掲されたRădulescuの二分法

利用箇所

Corollary 6.1

適用条件・照合範囲

$1 < r \leq \infty$ の範囲を確認。Rădulescu原典の証明は未読。

供給する結果

半円実現と δ, δ_0 の計算

利用箇所

Corollary 7.1の $X^{(n)}$

適用条件・照合範囲

自由な半円族の記述と値を外部原典で確認。入力 of 証明全体は再検証しない。

供給する結果

Mineyev–Shlyakhtenkoと自由群のBetti数

利用箇所

Corollary 7.1の $Y^{(n)}$

適用条件・照合範囲

有限生成群の群環を代数的に生成する自己共役組。移送前の適用を確認。

§§2–5の自由和評価・flow・Catalan計算は原稿内で証明される。Foxの微分、cyclomorphy、free monotone transport、Ricard–Xuの評価への言及は方法上の背景であり、この概説で外部定理を代入した直接依存としては扱わない。原稿が明記するとおり、ShlyakhtenkoのFuchsian群因子のプレプリントの結果も使用しない。

7. 原典を読む入口と確認範囲

- Lemmas 3.2–3.4 · pp. 7–10 — 形式的微分から実際のモーメント不変性へ。
- Section 3.3 · pp. 10–11 — 関係式の降下・全射性・normal延長を区別する。

- Lemma 4.1; Sections 4.1–4.3 · pp. 11–16 — 自由なprefix、スペクトル極限、打ち切り逆作用素を読む。
- Section 5.2; equations (5.3)–(5.9) · pp. 17–19 — 語を得た後に将来誤差を固定する順序と生成性。
- Section 6; equation (6.1) · p. 20 — 正規化と $\sqrt{2}$ 増幅によるrank 2への帰着。
- Corollary 6.1 · p. 21 — 無限パラメータと基本群への二分法の適用。
- Section 7 · pp. 21–22 — 異なる二種類の生成組と分布の移送。

本文§§2–7の上記接続を読み、主張の全結論、写像の定義と延長、階数条件、近似位相、誤差選択順序、増幅正規化、二種類の生成組を自己点検した。入力の記述と利用条件の照合は、入力定理そのものの全証明検証とは区別する。

保留は、Rădulescuの原典Corollary 4.7の直接読解（ここでは明示的な再掲を使用）、Brannan–Elzinga–Harris–Yamashitaの誌面版とのページ対応（§5の著者プレプリントv2で照合）、各外部入力の証明とその先の依存文献の検証である。専門家による独立査読・形式検証は行っていない。