

OpenAI Math Digest

CATALOGUE 285

Baum–Connes予想とKadison–Kaplansky予想の反例

総括・論文間のつながりと3篇の証明概説

独立した非公式の読解ガイド・日本語版

収録版: 2026-10-15

制作: Masataka Iwai・大阪大学

AI生成の解説には誤りや不正確な説明が含まれる可能性があります。重要な主張・証明は原論文でご確認ください。本冊子はWebサイトの解説をまとめたもので、原論文そのものではありません。専門家査読・形式検証は未実施です。

目次

総括に続き、公式カタログ順で全3篇の解説を収録しています。目次・引用はクリックできます。横長の表は紙面向けの項目一覧に組み直し、主張と参照先を保持しています。

00 · カタログ285 総括	3
01 · A torsion-free counterexample to reduced Baum–Connes injectivity	8
02 · A torsion-free counterexample to the Kadison–Kaplansky projection conjecture	18
03 · An irrational-trace counterexample to reduced Baum–Connes	29

原論文の参照版: 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a

カタログ285 · 総括

Web版を読む 

CATALOGUE 285

Baum–Connes予想とKadison–Kaplansky予想の反例

Counterexamples to Baum–Connes and Kadison–Kaplansky

公式カタログ285、Counterexamples to Baum–Connes and Kadison–Kaplansky。3本の原稿は、係数なし被約Baum–Connes assemblyの単射性・全射性と、torsion-free群の被約群 C^* 環における射影予想への反例を主張する。各記事では原稿の主張と、編集側が照合した帰着・外部入力の範囲を区別する。

公式順の記事一覧

主結果の範囲を短くまとめています。正確な仮定と定式化は併記した原典の結果を参照してください。

カタログ 285 · 2026-10-15 確認の固定参照版

#

01

論文・概説

A torsion-free counterexample to reduced Baum–Connes injectivity →

図中の略称: A torsion-free counterexample to reduced Baum–Connes injectivity

September 23, 2026 · 85 ページ

原論文 (GitHub) ↗

主に何を主張するか

有限生成torsion-free群で係数なし被約assemblyの無限位数の核類を構成し、有理単射性の失敗を主張する。

Theorem 1.1 · p. 1 ↗

議論の役割・概説

トーラスのコホモロジー検出とBott類の被約像消滅を別々に構成し、有限生成の証人へまとめる。

証明概説を読む →

#

02

論文・概説

A torsion-free counterexample to the Kadison–Kaplansky projection conjecture

→

図中の略称: A torsion-free counterexample to the Kadison–Kaplansky projection conjecture

September 23, 2026 · 76 ページ

原論文 (GitHub) ↗

主に何を主張するか

有限生成torsion-free群のscalar被約群 C^* 環に $0 < \tau(p) < 1/2$ の射影を構成し、Kadison–Kaplansky射影予想の反例を主張する。

Theorem 1.1 · p. 2 ↗

議論の役割・概説

torsionを排除した群で行列射影の小さな正トレースを得て、自由積内の行圧縮でscalar射影へ移す。

証明概説を読む →

#

03

論文・概説

An irrational-trace counterexample to reduced Baum–Connes →

図中の略称: An irrational-trace counterexample to reduced Baum–Connes

September 23, 2026 · 23 ページ

原論文 (GitHub) ↗

主に何を主張するか

有限生成群の被約群C*環に無理数トレースの射影を構成し、係数なし被約assemblyの全射性の失敗を主張する。torsion-freeは仮定しない。

Theorem 1.1 · p. 2 ↗

議論の役割・概説

符号から正確な局所確率を作り、全体のspectral gapで射影をC*環内へ置く。トレースを有理なassembly像と比較する。

証明概説を読む →

Assemblyの核と像を分けて読む

単射性の記事では、torsion-free群 G_{inj} に対する

$$\mu_r : K_0(BG_{\text{inj}}) \longrightarrow K_0(C_r^*(G_{\text{inj}}))$$

の核を扱う。埋め込まれたトーラスのDirac類 h を二次コホモロジーで検出して無限位数を保ちつつ、そのBott像を被約群C*環で消す。ここで $K_0(BG)$ は有限部分複体上の直極限で定めるcompact support付きK-homologyである。原稿は同じ h のmaximal assembly像は有理的に非零と説明しており、maximal版や古典的Novikov予想への反例とは区別する。[OpenAI26a, Theorem 1.1, p. 1]
[OpenAI26a, Section 1.2, p. 2]

射影の記事は、まずtorsion-free群 Γ_{proj} の行列環内に小さな正トレースの射影を作り、自由積 $G_{\text{proj}} = \Gamma_{\text{proj}} * F_N$ 内でscalar射影へ圧縮する。結論は $p \in C_r^*(G_{\text{proj}})$ 、 $0 < \tau(p) < 1/2$ であり、行列環内の射影の存在だけで終わらない。[OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 2]

無理数トレースの記事は、torsion-freeを仮定しない有限生成群 G_{sur} に対する

$$\mu_0^{G_{\text{sur}}} : K_0^{G_{\text{sur}}}(\underline{E}G_{\text{sur}}) \longrightarrow K_0(C_r^*(G_{\text{sur}}))$$

の像を扱う。定義域はproper actionの分類空間上のequivariant K-homology (G -compact support付き) である。符号の局所分布と全体のspectral gapから実際の射影 $b_0 \in C_r^*(G_{\text{sur}})$ を得て、その無理数トレースをassembly像の有理数トレースと比較する。原稿は有理化後の非全射性も導く。[OpenAI26c, Theorems 1.1–1.2, p. 2] [OpenAI26c, Proposition 6.1 and proof of Theorem 1.1, pp. 21–22]

二つのトレース障害と構成手法の比較

射影原稿の§11は、torsion-free群 Γ_{proj} のassembly像のトレースが整数になることを使い、行列射影からtrivial-coefficient reduced assemblyの非全射性も記す。これは別原稿の無理数トレース構成への依存ではない。また、非整数という情報だけでは、有理化後の像から外れることまでは従わない。無理数トレース原稿は、一般の可算群について像のトレースが有理数になることを使うため、群の仮定も障害の強さも異なる。[OpenAI26b, Section 11, p. 73] [OpenAI26c, Proposition 6.1 and proof of Theorem 1.1, pp. 21–22]

構成手法には、射影原稿から単射性原稿への明示的な参照がある。単射性原稿の§2 (p.7) は、射影原稿の§§4,6のpadded-stream構成とrecovery schemeを適応し、現在のinterfaceに必要な指数・cutoff・gated correctionは再び確立すると述べる。また§7.4 (p.64) は、射影原稿§7.6のcone-chainとprime-order obstructionの手法に従い、現在のsheetに対するexact-chainの接続を再証明する。射影主定理を存在定理として使う関係ではなく、整数係数の検出類の延長とBott realizationは単射性原稿の別の議論である。[OpenAI26a, Section 2, p. 7] [OpenAI26a, Section 7.4, p. 64] [OpenAI26b, Section 7.6, pp. 36–38]

この有向関係は方法の適応・再証明として記録し、主定理の直接適用とは区別する。expanderやgraphicalな構成の一般的な共通性だけから、他の依存矢印は加えない。外部入力とその使用箇所、各帰着の証明図は個別記事にまとめた。

原典・確認範囲

引用キーはすべてOpenAI著、September 23, 2026版を指す。OpenAI26aは A torsion-free counterexample to reduced Baum–Connes injectivity (85頁)、OpenAI26bは A torsion-free counterexample to the Kadison–Kaplansky projection conjecture (76頁)、OpenAI26cは An irrational-trace counterexample to reduced Baum–Connes (23頁)。

公式目次と公式overviewの31頁のOperator algebras (285–303) に従った。固定commitは1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a。この案内は主張の対象・仮定・結論と、記事間の直接引用の有無を照合したもので、3本の全証明を独立検証したものではない。詳細な読解箇所と未確認部分は各記事の末尾に記録する。

A torsion-free counterexample to reduced Baum–Connes injectivity

整数検出を保ったトーラスと、被約群C*環におけるBott消去

原稿は、有限生成ねじれなし群に対する係数なしの被約Baum–Connes assemblyに、無限位数の核元を構成すると主張する。Heisenberg部分群のトーラス上で整数コホモロジーを検出し、一方では局所化したBott代表を高さ方向へ移して解析的像を消す。二つの性質を同じ有限生成部分群へ残すのが最後の接続である。

原稿の著者: OpenAI · September 23, 2026 · 85 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 係数なしの被約assemblyの有理単射性の失敗

有限生成ねじれなし離散群 G_{inj} 、単射準同型 $i : \mathbb{Z}^2 \hookrightarrow G_{\text{inj}}$ 、整数類 $c \in H^2(BG_{\text{inj}}; \mathbb{Z})$ が存在し、

$$\langle (Bi)^*c, [T^2] \rangle = 1, \quad i_*(\beta) = 0 \quad \text{in } K_0(C_r^*(G_{\text{inj}})).$$

ここで $\beta \in K_0(C_r^*(\mathbb{Z}^2)) \cong K^0(T^2)$ はrank-zero Bott生成元、 i_* は被約群C*環の包含から誘導される写像である。向き付けたトーラスのspin Dirac類を $[D_{T^2}]$ とすると、

$$h = (Bi)_*[D_{T^2}] \in K_0(BG_{\text{inj}})$$

は無限位数であり、 $\mu_r^{G_{\text{inj}}}(h) = 0$ である。対象の写像は

$$\mu_r^{G_{\text{inj}}} : K_*(BG_{\text{inj}}) \longrightarrow K_*(C_r^*(G_{\text{inj}})),$$

係数代数は自明作用付き $\mathbb{C}$ 、K理論は複素K理論、左辺は有限部分複体に関する極限としてのコンパクト台Kホモロジーである。したがって $h \otimes 1 \neq 0$ かつ $(\mu_r^{G_{\text{inj}}} \otimes \mathbb{Q})(h \otimes 1) = 0$ であり、有理化後も単射でない。有限表示は結論に含まれない。

Theorem 1.1 · p. 1

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [A torsion-free counterexample to reduced Baum–Connes injectivity](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [EH20](#) Heath Emerson; Dan Hudson — Baum–Connes and the Fourier–Mukai transform : トーラスDirac類のassembly像。Theorem 1.3の全トーラスの場合を使用。arXiv:2001.06124v2, 27 July 2020。
- [KP20](#) Jens Kaad; Valerio Proietti — Index theory on the Miščenko bundle : Miščenko指数と被約assemblyの比較。コンパクトなトーラスサイクルへ適用。arXiv:1807.05757v2, 5 March 2020。
- [BvE16](#) Paul F. Baum; Erik van Erp — K-homology and Fredholm operators I: Dirac Operators : 閉じた偶数次元Spin^c多様体の振れDirac指数。トーラス上の線束の次数を検出。arXiv:1604.03502v1, 12 April 2016。
- [HS07](#) Bernhard Hanke; Thomas Schick — The strong Novikov conjecture for low degree cohomology : 比較・帰結のみ。次数2の検出により最大assembly像は有理的に非零。arXiv:0705.2578v1, 17 May 2007。
- [OpenAI26b](#) OpenAI — A torsion-free counterexample to the Kadison–Kaplansky projection conjecture : 方法上の先行原稿。cone-chainと有限位数排除は本稿で再証明する。主定理の直接入力ではない。September 23, 2026。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 — 主定理の証明概略

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · p. 1

証明の道筋。 整数検出の構成とBott消滅の構成を同じ精度列の群 Γ_ν で行う。一つの十分遅い座標を選び、K理論の有限な等式の証拠を含む部分群へ移る。その後、指数ペアリングとMiščenko指数の自然性が、位相的非消滅と被約assemblyの消滅を結び付ける。

1 同じ構成列の二つの出力

$H \hookrightarrow \Gamma_\nu$, Γ_ν はねじれなし.

$$\langle c_{\Gamma_\nu}|_{T^2}, [T^2] \rangle = -1, \quad \beta \mapsto 0 \in K_0(C_r^* \Gamma_\nu) \quad (\nu \gg 0).$$

整数検出と Bott 消滅を選び、有限多項式の台を残す

[Proposition 7.11 · p. 69](#) [Proposition 8.8 · p. 80](#)

[Lemmas 8.7, 8.9 · pp. 80–81](#)

2 有限生成部分群へ証拠を回収

$H \leq G_{\text{inj}} \leq \Gamma_\nu$, $i: \mathbb{Z}^2 \hookrightarrow G_{\text{inj}}$.

$$c = -c_{\Gamma_\nu}|_{BG_{\text{inj}}}, \quad \langle (Bi)^* c, [T^2] \rangle = 1, \quad i_*(\beta) = 0.$$

振れ Dirac 指数とペアリングの自然性

[\[BvE16, Theorem 1, p. 2\]](#) [§9.2 · pp. 82–83](#)

3 整数指数で非消滅を検出

$$h = (Bi)_*[D_{T^2}], \quad c_1(L) = c.$$

$$\langle [L] - [1], h \rangle = \langle (Bi)^* c, [T^2] \rangle = 1 \implies h \otimes 1 \neq 0.$$

トーラスの Bott 像と、Miščenko 束の係数拡大

[\[EH20, Theorem 1.3, p. 2\]](#)

[\[KP20, Corollary 1.4; \(1.6\), pp. 5–7\]](#)

4 同じ類の被約 assembly 像は零

$$\mu_r^{G_{\text{inj}}}(h) = i_* \mu_r^{\mathbb{Z}^2}([D_{T^2}]) = \pm i_*(\beta) = 0.$$

$$\mu_r^{G_{\text{inj}}} \otimes \mathbb{Q}: K_0(BG_{\text{inj}}) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow K_0(C_r^* G_{\text{inj}}) \otimes \mathbb{Q}$$

は単射でない。係数代数は自明作用付き $\mathbb{C}$ 。

整数検出とBott消滅を有限生成群で合流させる

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 二つの構成を有限生成部分群へ残す

整数Heisenberg群 $H = \langle x, y, z \mid [x, y] = z, [x, z] = [y, z] = 1 \rangle$ を Γ_ν に埋め込む。Proposition 7.11 は Γ_ν のねじれなし性と、順序付きトーラス (z, x) 上で -1 を与える類 c_{Γ_ν} を供給する。Proposition 8.8は、十分大きい ν でそのトーラスのBott像が整数係数のK理論で零になると主張する。

Lemma 8.9では、安定化射影と部分等長作用素の有限行列による証拠を群環の多項式で近似し、その有限個の台と H の生成元で G_{inj} を生成する。部分群の被約 C^* 環の包含は等長なので、小さな欠陥の評価はこの部分群内でも成立する。スペクトル切断と極分解により正確な証拠を回復する。ねじれなし性とトーラスの単射性は部分群へ継承され、 $c = -c_{\Gamma_\nu}|_{BG_{\text{inj}}}$ とすれば評価は 1 になる。精度列の極限群を取る議論ではない。

Proposition 7.11 · p. 69 Proposition 8.8 · p. 80 Lemmas 8.7, 8.9 · pp. 80–81

2. 整数指数で位相的類を検出する

$c_1(L) = c$ となる線束 L を取る。コンパクトなトーラスサイクル上で指数ペアリングの自然性を用いると、

$$\langle [L] - [1], h \rangle = \text{index}(D_{T^2} \otimes (Bi)^* L) - \text{index}(D_{T^2}) = \langle (Bi)^* c, [T^2] \rangle = 1.$$

接束が自明なため指数公式の特性類は 1、捩れなしのDirac指数は零である。整数値準同型で 1 に写るので h は無限位数である。この議論は BG_{inj} のコンパクト性を要求しない。

[BvE16, Theorem 1, p. 2] §9.2 · pp. 82–83

3. 同じ類の被約assembly像を同定する

Emerson–Hudsonの全トーラスの場合では、双対部分トーラスは一点であり、 $\mu_r^{\mathbb{Z}^2}([D_{T^2}]) = \pm\beta$ となる。符号は向きの規約によるが消滅には影響しない。 $A = C_r^*(\mathbb{Z}^2)$ 、 $B = C_r^*(G_{\text{inj}})$ 、包含 $j: A \rightarrow B$ に対し、Miščenko束は $E_A \otimes_j B$ へ変わる。係数拡大と指数Kasparov積が可換であることを原稿はこのトーラスサイクル上で確認し、比較定理を用いて

$$\mu_r^{G_{\text{inj}}}(h) = j_* \mu_r^{\mathbb{Z}^2}([D_{T^2}]) = \pm j_*(\beta) = 0$$

を得る。これは自明係数での単射性への反例であり、非自明係数の全射性への既知の反例や、スカラー代数内の非自明射影の存在とは異なる主張である。

[EH20, Theorem 1.3, p. 2] [KP20, Corollary 1.4; (1.6), pp. 5–7] §9.2 · pp. 82–83

3. Proposition 7.11 — ねじれ排除と整数検出

証明対象：Proposition 7.11 · p. 69

Proposition 7.11 — 埋め込まれたHeisenbergトーラスの検出

§§2–6の構成から得るgraphical group Γ はねじれなしである。順序付き基底を (z, x) に送る $i_\Gamma: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \Gamma$ は単射であり、ある $c_\Gamma \in H^2(B\Gamma; \mathbb{Z})$ が

$$\langle (Bi_\Gamma)^* c_\Gamma, [T^2] \rangle = -1$$

を満たす。これは任意のHeisenberg群を含む群に対する主張ではなく、以下のsheetとcone-chain構造を備える Γ に対する結論である。

Proposition 7.11 · p. 69

1 被覆の埋込みと sheet の cycle 座標

$$\tilde{X} \hookrightarrow \text{Cay}(\Gamma, S), \quad H \hookrightarrow \Gamma, \quad Q \in \Gamma/H.$$

$$\bigoplus_Q Z_1(Q; R) \cong Z_1(\text{Cay}(\Gamma, S); R).$$

有限台 cycle の直和分解を cone の境界へ移す

[Proposition 6.4 · p. 57](#) [Lemma 7.6; \(7.12\) · p. 65](#)

2 cone 鎖の完全性

$$0 \rightarrow C_2(Z) \rightarrow C_1(Z) \rightarrow C_0(Z) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

$$C_1, C_2 \text{ は自由 } \mathbb{Z}\Gamma \text{ 加群, } C_0 \cong \mathbb{Z}\Gamma \oplus \mathbb{Z}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}.$$

周期分解との矛盾／長さ 1 の自由分解と制限写像の同定

[Lemma 7.8 · p. 66](#) [Lemma 7.10 · pp. 68–69](#)

3 ねじれを排除し、次数 2 を延長

$$C_p \leq \Gamma \implies \text{Tor}_n^{\mathbb{F}_p[C_p]}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) = 0 \quad (n > 2) \text{ は矛盾.}$$

$$K = \ker(C_0 \rightarrow \mathbb{Z}), \quad \text{Ext}_{\mathbb{Z}\Gamma}^2(K, \mathbb{Z}) = 0$$

$$\implies H^2(B\Gamma; \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H^2(BH; \mathbb{Z}).$$

Heisenberg cocycle を延長し、bar cycle の評価を保つ

[Lemma 7.9 · pp. 67–68](#) [Proposition 7.11 · p. 69](#)

4 整数トーラス検出

$$\omega(g, g') = \alpha\gamma' + \binom{\alpha}{2}\beta', \quad \omega(z, x) - \omega(x, z) = -1.$$

$$\Gamma \text{ はねじれなし, } i_\Gamma: \mathbb{Z}^2 \hookrightarrow \Gamma, \quad \langle (Bi_\Gamma)^* c_\Gamma, [T^2] \rangle = -1.$$

同じcone-chain構造からねじれなし性と整数検出を得る

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 被覆を埋め込み、有限台の鎖を制御する

長い語の一意回復と短い閉路の排除から、原稿はnull-labeled source pathの両端が一致することを平面図式で示す。ここから電圧被覆 $\tilde{X}$ とdeck群 H がCayleyグラフに埋め込まれ、その平行移動であるsheetが Γ/H で添字付けられる。sheetのcycle座標の直和分解を使い、各sheet上へconeを付けた二次元複体 Z の鎖複体が任意の可換係数環で完全となる。

$$0 \longrightarrow C_2(Z) \longrightarrow C_1(Z) \longrightarrow C_0(Z) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \quad C_0(Z) \cong \mathbb{Z}\Gamma \oplus \mathbb{Z}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}.$$

ここで C_1, C_2 は自由 $\mathbb{Z}\Gamma$ 加群である。使う鎖とcycle分解はいずれも有限台であり、無限和の独立性を仮定しない。

[Proposition 6.4 · p. 57](#) [Lemmas 6.3, 7.3; Proposition 7.4 · pp. 55–57, 62–64](#) [Lemma 7.6; \(7.12\) · p. 65](#)

2. 素数位数部分群と短い自由分解を両立させない

H はねじれなしで、cone頂点の安定化群は H の共役である。他のセルの安定化群は自明である。もし $C_p \leq \Gamma$ があれば、 C_p はセル上自由に作用し、 $\mathbb{F}_p$ 係数の鎖複体が自明 $\mathbb{F}_p[C_p]$ 加群の長さ2の自由分解になる。一方、 $\mathbb{F}_p[C_p] \cong \mathbb{F}_p[t]/(t^p)$ の周期分解を自明加群とテンソルすると、全次数で $\mathbb{F}_p$ のホモロジーが残る。分解比較と矛盾するため素数位数部分群はなく、 Γ はねじれなしとなる。

Lemma 7.8 · p. 66

3. 明示的cocycleをambient groupへ延長する

Heisenberg座標の積は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta, \gamma)(\alpha', \beta', \gamma') \\ = (\alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma' + \alpha\beta'). \end{aligned}$$

整数2-cocycle

$$\omega(g, g') = \alpha\gamma' + \binom{\alpha}{2}\beta'$$

はbar cycle $[z|x] - [x|z]$ に -1 を与える。 $K = \ker(C_0(Z) \rightarrow \mathbb{Z})$ は長さ1の自由分解を持つので $\text{Ext}_{\mathbb{Z}\Gamma}^2(K, \mathbb{Z}) = 0$ 。これにより $H^2(B\Gamma; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(BH; \mathbb{Z})$ が全射となる。原稿は誘導分解とbar分解のchain mapを比較し、この写像が実際の部分群制限であることも確認する。したがって $[\omega]$ を延長した類が必要な評価を保つ。

Lemma 7.9 · pp. 67–68 Lemma 7.10 · pp. 68–69

4. Proposition 8.8 — 被約代数でのBott消滅

証明対象：Proposition 8.8 · p. 80

Proposition 8.8 — 精度列の十分遅い座標での整数消滅

§9.1の順序でパラメータを選んだ両立する構成列 Γ_ν を考える。十分大きいすべての ν について、 $\langle z, x \rangle \cong \mathbb{Z}^2$ のrank-zero Bott生成元の像は

$$K_0(C_r^*(\Gamma_\nu))$$

で零である。有理化は不要である。高さ $i \geq 0$ は一つの塔の内部添字、精度 ν は別々の構成を走る添字であり、行列サイズは精度列に沿って固定する。

Proposition 8.8 · p. 80

1 局所化 Bott 族を有限 Cayley 式で近似

$$a_i = p_i - e, \quad \|b_f - UDI f^{\text{mod}} I^* DU^*\| < \eta.$$

全正則ノルム、全高さで一樣。固定行列サイズ。

同時 sampling ・ 定数抽出 ・ forest 評価から一樣 mesh 近似

Lemmas 8.1–8.4 · pp. 72–76 Lemma 8.5; (8.17)–(8.18) · pp. 76–77

2 商で正確な準同型と道を得る

$$Q_r = \prod_{\nu} C_r^*(\Gamma_{\nu}) / \oplus_{\nu} C_r^*(\Gamma_{\nu}), \quad \Theta : \mathcal{B} \rightarrow Q_r.$$

$\mathcal{B}$ は有界 model 族と二つの連続な道から生成。

互いに素な隣接対の回転・再スケールと有限加法性

(8.19)–(8.20) · pp. 77–78

3 偶数から奇数、正の偶数へ移す

$$b_I = [e + A_I] - [e] \in K_0(\mathcal{B}),$$

$$b_{\text{ev}} = b_{\text{od}} = b_{\text{ev},+}, \quad b_{\text{ev}} = b_0 + b_{\text{ev},+} \implies b_0 = 0.$$

台上の等長性だけを使う固定サイズの射影道

Lemma 8.6; (8.23)–(8.25) · pp. 79–80

4 初項を物理的トーラス Bott 類に戻す

$$v^* v a^{\text{phys}} = a^{\text{phys}}, \quad \Theta(A_0) = v a^{\text{phys}} v^*.$$

$$[e + a^{\text{phys}}] - [e] = \Theta_*(b_0) = 0 \quad \text{in } K_0(Q_r).$$

商の証拠を持ち上げ、スペクトル切断・極分解で補正

Lemmas 8.7, 8.9 · pp. 80–81 Proposition 8.8 · p. 80

5 十分遅い一つの座標で整数消滅

$$\beta \mapsto 0 \quad \text{in } K_0(C_r^*(\Gamma_{\nu})) \quad (\nu \gg 0).$$

高さ i と精度 ν を区別し、有限証拠のサイズを固定する。

有限Cayley式から商代数内のBott消去と座標への回収へ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 全正則ノルムで有限Cayley式を実現する

局所化した差 $a_i = p_i - e$ と隣接高さ間の回転・再スケールを有限個のprofileとして扱う。Proposition 5.2は、同じ電圧選択に短閉路排除と全正則作用素ノルムでの近似を同時に課す。sheetごとの互いに素な領域へ制限した際の誤差は、小さいspectral carrierのトレースと除外座標数で抑える。正規化された定数モードをincidenceの積で抽出し、補空間は固定gap $\rho < 1$ により減衰させる。残りのCayley辺はforestとなり、その作用素ノルム誤差は $O(\sqrt{|S_{\text{wt}}|}/q)$ で抑える。

Lemma 8.4が得るのは、任意に小さい誤差での有限行列群環元である。高さを選ぶ物理的射影やBorel carrierの被約C*環への所属を仮定しない。有限profile、mesh、重みnetを選んでから次数パラメータ、最後に初期高さを増す順序が不可欠である。

Proposition 5.2; §5.8 · pp. 41–42, 49–50 Lemmas 8.1–8.4 · pp. 72–76 §9.1 · pp. 81–82

2. 二つのホモトピーと有限加法性で初項を消す

$A_\nu = C_r^*(\Gamma_\nu)$ の正則表現を固定し、 $Q_r = \prod_\nu A_\nu / \bigoplus_\nu A_\nu$ と置く。直積は有界列、直和はノルム零列である。model上の四つの有界作用素族と二つの道から生成したC*代数 $\mathcal{B}$ に対し、ほぼ等長な写像の圧縮が商で正確な *-準同型 Θ を与える。有限meshの一樣近似により $\Theta(\mathcal{B}) \subset Q_r$ を証明する。

偶数、奇数、正の偶数、初期高さの差を $A_{\text{ev}}, A_{\text{od}}, A_{\text{ev},+}, A_0$ とし、外部単位化を用いて $b_I = [e + A_I] - [e] \in K_0(\mathcal{B})$ と置く。互いに素な隣接対の回転と再スケールにより

$$b_{\text{ev}} = b_{\text{od}} = b_{\text{ev},+}, \quad b_{\text{ev}} = b_0 + b_{\text{ev},+}, \quad b_0 = 0.$$

二番目の等式は台の直交性から作る有限サイズの射影ホモトピーである。高さ全体の作用素族は有界作用素として先に構成されており、この式は無数個のK理論類の和を用いない。

Lemma 8.5; (8.17)–(8.18) · pp. 76–77 (8.19)–(8.20) · pp. 77–78

3. 物理的Bott類を同定し、商の等式を一つの群へ戻す

初期profileの像と部分群のBott代表 a^{phys} は、 $v^*va^{\text{phys}} = a^{\text{phys}}$ 、 $\Theta(A_0) = va^{\text{phys}}v^*$ を満たす有界 v で結ばれる。Lemma 8.6のsupported transportは、この関係だけから固定サイズの射影道を作る。したがって物理的Bott類は $K_0(Q_r)$ で零になる。

Lemma 8.7は商内の安定化射影と部分等長作用素を有界列へ持ち上げ、十分遅い座標でスペクトル切断と極分解を行う。固定有限サイズの証拠を保ったまま $K_0(A_\nu)$ の等式を回復する。右正則表現から通常の左正則表現へのユニタリ同値は各群元を同じ群元へ送るので、これがProposition 8.8の消滅である。

Lemma 8.6; (8.23)–(8.25) · pp. 79–80 Lemmas 8.7, 8.9 · pp. 80–81

5. どの論文が、どの段階を担うか

供給元

[BvE16, Theorem 1, p. 2]

利用箇所

§9.2、上の指数検出

内容と照合範囲

閉じたspinトーラスと引戻し線束は指数公式の仮定を満たす。定理記述と適用を照合。

供給元

[EH20, Theorem 1.3, p. 2]

利用箇所

§9.2、assembly像

内容と照合範囲

全トーラスの双対は一点。符号を除いたrank-zero Bott像の同定を照合。

供給元

[KP20, Corollary 1.4; (1.6), pp. 5–7]

利用箇所

§9.2、部分群自然性

内容と照合範囲

可算群の主束とコンパクトなトーラス基底で比較を適用。係数拡大の計算は本稿で行う。

供給元

[OpenAI26b, §7.6, pp. 36–38]

利用箇所

§7.4、cone-chain

内容と照合範囲

方法上の参照。今回のsheetに対する完全性とねじれ排除は再証明される。

§2; §7.4 · pp. 7, 64

最大assemblyとの比較では、 c による次数2の検出がHanke-Schickの仮定を満たすため、同じ h の最大assembly像は有理的に非零である。その像が正則商 $C_{\max}^*(G_{\text{inj}}) \rightarrow C_r^*(G_{\text{inj}})$ で消えるという位置付けになる。原稿は最大assemblyの有理単射性や古典的Novikov予想の反例を主張しない。

[HS07, Theorem 1.2, pp. 1–2] §§1.1–1.2 · pp. 1–3

同じカタログの射影反例原稿からはstream/recoveryとcone-chainの方法を適応するが、射影の存在定理を本稿の核元の入力として使わない。irrational-trace原稿への直接の定理依存は、今回読んだ証明経路と参考文献では確認していない。

6. 原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 1.1 · p. 1 — 群・係数・二つの結論を確認する。
- Proposition 5.2; §5.8 · pp. 41–42, 49–50 — 幾何条件と全正則ノルム近似を同時に課す箇所。
- Proposition 7.11 · p. 69 — ねじれ排除と整数検出を合流させる。
- Lemma 8.5; (8.17)–(8.18) · pp. 76–77 — 有界作用素族から正確な商代数内ホモトピーへ進む。
- Lemmas 8.7, 8.9 · pp. 80–81 — 一つの群、その有限生成部分群へ等式を降ろす。
- §9.2 · pp. 82–83 — 指数の非消滅とassemblyの消滅を照合する。

原典の主張、§5.8の同時選択の接続、§§6.3–6.4、§7のcycle/coneと整数検出、§8の有限式・商代数・Bott消去・有限証拠、§9の結論を読んだ。外部3入力と最大assemblyの比較結果は、固定版の定理記述・適用条件を照合した。

§§2–4の逐次確率・回復・pruningの全評価、§§5.4–5.7のFourier envelope・有限正則ノルムtest・centered momentの全計算は独立に検証していない。この部分は後続の解析的実現が依存する重要な未確認範囲である。85頁全体の正しさの認定、外部定理の全証明の検証、専門家査読または形式検証を行ったという意味ではない。

A torsion-free counterexample to the Kadison–Kaplansky projection conjecture

小トレースの分離スペクトル帯を構成し、自由積でスカラー射影へ圧縮する

本稿は、torsion-free群の被約群C*環に非自明な射影を構成すると主張する。中心となるのは、有限行列の正則表現にスペクトルの隙間を保ちながら、その上側射影の非正規化トレースを小さくする構成である。行列射影からスカラー射影への移行には、別の自由積の評価を用いる。

原稿の著者: OpenAI · September 23, 2026 · 76 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 被約群C*環の非自明なスカラー射影

有限生成torsion-free離散群 G_{proj} と射影 $e = e^* = e^2 \in C_r^*(G_{\text{proj}})$ が存在し、標準トレースについて

$$0 < \tau_{G_{\text{proj}}}(e) < \frac{1}{2}$$

が成り立つ。特に $e \neq 0, 1$ である。対象はスカラーの被約群C環であり、群環・最大群C環・行列環における主張へ読み替えない。有限表示は結論に含まれない。

Theorem 1.1 · p. 2

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 A torsion-free counterexample to the Kadison–Kaplansky projection conjecture を指します。外部入力には次の略号を使います。

- MT10 Robin A. Moser and Gábor Tardos — A constructive proof of the general Lovász Local Lemma : 展開性を持つ有限ブロックを選ぶ非対称局所補題。arXiv:0903.0544v3, 20 May 2009; published 2010。

- [BGW16](#) Paul Baum, Erik Guentner and Rufus Willett — Exactness and the Kadison–Kaplansky Conjecture : 構成後の帰結 : trivial-coefficient assembly像のトレース整数性。Author-hosted 40-page manuscript, retrieved 2026-10-15; published 2016。
- [OpenAI26a](#) OpenAI — A torsion-free counterexample to reduced Baum–Connes injectivity : 比較対象 : assemblyの非単射。構成への直接入力ではない。September 23, 2026。
- [OpenAI26c](#) OpenAI — An irrational-trace counterexample to reduced Baum–Connes : 比較対象 : irrational-traceによる非全射。構成への直接入力ではない。September 23, 2026。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 の証明 — 行列構成と自由積の接続

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · p. 2

証明の道筋。 有限アルファベットのtowerから作る電圧被覆をCayleyグラフへ埋め込み、torsion-free 群 Γ_{proj} と有限行列 T を得る。局所モデルの上側スペクトル帯を T へ移し、全ての被覆コピーへの同変な制限写像で射影のトレースを抑える。最後に $\Gamma_{\text{proj}} * F_N$ へ移り、行列射影を一つの行に圧縮する。行列構成は次節、最後の圧縮は第4節で説明する。

1 有限アルファベットと電圧被覆

$$Y \leftarrow P, \quad \Gamma_{\text{proj}} = \langle S \mid \text{closed-walk labels in } P \rangle$$

長語回復 · girth · nilpotent torsion-free 電圧群 F

コピーの幾何 · 分離 band · 同変な trace 上界

[Theorem 7.1 · pp. 26–27](#); [Theorem 10.11 · p. 72](#)

2 幾何と解析を合わせて行列構成

$$T = T^* \in M_N(\mathbb{C}[\Gamma_{\text{proj}}]), \quad p_0 \in M_N(C_r^*(\Gamma_{\text{proj}}))$$

$$0 < a = \sum_{j=1}^N \tau_{\Gamma}((p_0)_{jj}) < \frac{1}{2}$$

Γ_{proj} は有限生成 · torsion-free

非正規化 trace $a < 1/2$ を正規形評価へ

[Proposition 2.2 · pp. 4–6](#)

3 自由積と行の下界

$$G_{\text{proj}} = \Gamma_{\text{proj}} * F_N, \quad U = (\lambda(t_1), \dots, \lambda(t_N))$$

$$p_0 U^* U p_0 \geq (\sqrt{1-a} - \sqrt{a})^2 p_0$$

隅の逆元 · 部分等長作用素 · trace の保存

[Section 11 · p. 73](#)

4 スカラー射影と全結論

$$e = (U p_0)(p_0 U^* U p_0)^{-1} (U p_0)^* \in C_r^*(G_{\text{proj}})$$

$$e = e^* = e^2, \quad 0 < \tau_{G_{\text{proj}}}(e) = a < \frac{1}{2}, \quad e \neq 0, 1$$

有限生成 · torsion-free 性も自由積で保存

主定理へ至る幾何 · 解析 · 自由積の接続

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 群の仮定と解析的出力を別々に確保する

電圧群 F は整数座標を持つ nilpotent torsion-free 群である。これは二つの整数 affine 群の中心を逆符号で同一視した central product であり、同一視する部分群が中心の $\mathbb{Z}^2$ で primitive なため、残る中心座標は整数座標のままである。重みが最小の非零座標は正の冪でその整数倍になるので torsion は生じない。ただし、その性質だけから表示群 Γ_{proj} の torsion-free 性が従うわけではない。Theorem 7.1 は長語回復と被覆の girth 条件からコピーの埋込み、先行コピーとの交わりを含む一つの有限球、残余辺の forest を得る。Proposition 7.14 はコピーの安定化群が F に埋め込まれることと cone 複体の非輪状性を

用いる。位数 p の部分群が存在すれば、 $\mathbb{F}_p[C_p]$ 上の自明加群に長さ2の自由分解が生じ、任意の次数に非零homologyを持つ周期分解と矛盾する。有限生成は最終アルファベットが有限であることから得る。

Lemma 8.3; equation (8.5) · pp. 40–42 Theorem 7.1 · pp. 26–27 Proposition 7.14 · pp. 36–38

2. 射影そのものを得てから自由積へ移す

Theorem 10.11の出力は K_0 の抽象的な類だけではなく、 $p_0 \in M_N(C_r^*(\Gamma_{\text{proj}}))$ という実際の射影である。行列トレースは

$$\tau_{\Gamma, N}(p_0) = \sum_{j=1}^N \tau_{\Gamma}((p_0)_{jj})$$

であり、 N では割らない。この量が $(0, 1/2)$ に入るためProposition 2.2を適用できる。自由積 $G_{\text{proj}} = \Gamma_{\text{proj}} * F_N$ は有限生成とtorsion-free性を保ち、構成されるスカラー射影は同じトレースを持つ。

Theorem 10.11 · p. 72 Section 11 · p. 73

3. Theorem 3.1 の証明 — 隙間の保存とトレースの制御

証明対象：Theorem 3.1 · p. 6

Theorem 3.1 — 小トレースの行列射影

有限生成torsion-free離散群 Γ_{proj} 、有限整数 $N \geq 1$ 、自己共役元 $T \in M_N(\mathbb{C}[\Gamma_{\text{proj}}])$ が存在する。その正則表現のスペクトルは非空の分離された部分集合を持ち、対応するスペクトル射影 p_0 は

$$p_0 \in M_N(C_r^*(\Gamma_{\text{proj}})), \quad 0 < \tau_{\Gamma_{\text{proj}}, N}(p_0) < \frac{1}{2}$$

を満たす。分離は残りのスペクトルとの距離が正であることを意味する。

Theorem 3.1 · p. 6

1 両端で小さくなる fiber projection

$$p(t) = p_t \otimes p_{t-\delta}[V_t], \quad 0 < t < \delta$$

$$0 < s_p(t) \leq CNt^{n_f}(\delta - t)^{n_f}, \quad N = q^{n_f}$$

展開性と隣接二層の窓を組み合わせる

[Proposition 6.3 · pp. 24–25](#); [Lemma 9.1 · pp. 50–51](#)

2 定数ベクトルで上側 band を作る

$$O(t)E_*(t) = E_*(t), \quad O(t)|_{1-E_*(t)} \leq 1 - \chi$$

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{id}} E_*(t) = s_p(t), \quad |J(t)| \leq 2$$

有限テスト・同時 sampling、重み付き trace を局在化

[Theorem 9.2 · pp. 52–63](#); [Propositions 10.3–10.4 · pp. 65–67](#)

3 girth と完全な正則ノルム近似を同時実現

$$\|T_P - \Pi O \Pi\| \leq \eta, \quad |S| = o(dD)$$

$$S = \sum_i 2^{C \cdot H_i} \sum_{v \text{ in layer } i} e_v = o(1)$$

一球 overlap と小摂動。分離 band へ連続 functional calculus

[Theorem 7.1 · pp. 26–27](#); [Proposition 10.7 · pp. 68–69](#)

4 領域の切取りと残余 forest で gap を保存

$$\|1_{B(Q)} E_Q\| \leq \sqrt{S}, \quad \|T - T_D\| = o(1)$$

$$0 \neq p_0 = 1_{[1-\chi/4, \infty)}(T) \in M_N(C_r^*(\Gamma_{\mathrm{proj}}))$$

非同変な領域割当てとは別に、全 incidence を数える

[Lemmas 10.8–10.10 · pp. 70–72](#)

5 全コピーへの同変写像で trace を比較

$$\mathcal{A}\xi = (E_Q(\xi|_Q))_Q, \quad K = \ker \mathcal{A}$$

$$p_0 \mathcal{H} \hookrightarrow K^\perp, \quad 0 < \tau_{\Gamma, N}(p_0) \leq S_0 \leq S < \frac{1}{2}$$

小トレースの局所モデルから被約群C*環の行列射影へ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 展開性と両端のトレース減衰を組み合わせる

Proposition 6.3のpruning前のtower Y^0 は、各二部incidenceの正規化定数ベクトルを保ち、その直交補空間を一様に $1 - \chi$ 以下へ縮める。pruning後の Y にこの定数保存をそのまま仮定せず、後続の $\Pi O \Pi$ の圧縮評価へ接続する。ラベル回復のためのpruningで失う頂点割合 β_ℓ は一様に0へ向かう。展開性を持つ有限ブロックの選択では、bad-cut事象の依存近傍と確率を評価して非対称Lovász局所補題を適用する。無限個の層ごとに別の最終パラメータを選ぶ議論ではない。

Proposition 6.3 · pp. 24–25 Proposition 5.4 · pp. 18–20 [MT10, Theorem 1.1, p. 1]

解析側では、 F の中心Fourier変数 t に対し、twisted convolutionの射影 p_t と有限磁気表現によってずらした $p_{t-\delta}$ を組み合わせる。 $n_f = m(m-1)/2$ は構成に使う厳密上三角座標の個数である。

$\delta = q^{-1}$ 、 $N = q^{n_f}$ とし、 $0 < t < \delta$ で

$$p(t) = p_t \otimes p_{t-\delta}[V_t], \quad 0 < s_p(t) = N \operatorname{tr}_t(p_t) \operatorname{tr}_{t-\delta}(p_{t-\delta}) \leq CNt^{n_f}(\delta - t)^{n_f}.$$

有限磁気表現の吸収はトレースに因子 N を生む。その因子を含めても両端で減衰することが重要である。 $\sum_i h_i(t)^2 = 1$ を満たす窓は高々二つの隣接層に支持を持ち、 t が端点へ近づくと支持層はtowerの両端へ逃げる。正規化定数ベクトル上の対称和がモデル $O(t)$ の固有値 $+1$ を与え、残りの正のスペクトルは展開性により $1 - \chi$ 以下になる。

Proposition 8.7 · pp. 45–46 Lemma 8.9; equations (8.20)–(8.21) · pp. 47–48 Lemma 9.1 · pp. 50–51

2. 同じ電圧選択でgirthと正則ノルム近似を満たす

Theorem 9.2は各辺の電圧 $z_e \in F$ と有限種類の行列重み W_e を同時に選び、被覆の必要なgirthと

$$\|T_P - \Pi O \Pi\| \leq \eta, \quad |\mathcal{S}| = o(dD)$$

を満たす。 Π はpruning後の頂点への圧縮、 $\mathcal{S}$ は重みを付した有限アルファベットである。nilpotent群の座標箱への圧縮を平均するLemma 9.3により、有限行列のテストを完全な正則表現のノルムへ戻す。中心化moment評価と短い閉路のholonomyが自明になる確率の評価を合わせ、全層にわたる失敗確率の和を1未満にする。有限次元表現の一部だけを調べてgapを宣言する手順ではない。

Theorem 9.2 · pp. 52–63

3. 非同変な領域分割でスペクトルの隙間を保つ

被覆の上側射影 E_P はモデルからの圧縮と小摂動で得る。各base頂点のidentity diagonalを e_v 、幾何的な球サイズの重みを $w_i = 2^{C \cdot H_i}$ とすると、両端減衰とresolventの層方向減衰により

$$S := \sum_i w_i \sum_{v \text{ in layer } i} e_v \leq 96\mu_\ell \longrightarrow 0.$$

この S は層の頂点数や行列サイズを余分に掛けた量ではない。コピー Q の先行部分を除いた互いに素な領域 D_Q では、失う上側射影のノルムが $\sqrt{S}$ 以下となる。残余辺はforestなので、その重み付きadjacencyのノルムは $4C_\eta \sqrt{|\mathcal{S}|/(dD)} = o(1)$ である。二つの小誤差により、 $\alpha = \chi/1000$ として

$$\operatorname{spec}(T) \subset (-\infty, 1 - \chi + 4\alpha] \cup [1 - 3\alpha, 1 + 3\alpha]$$

を得る。上側は非空で、閾値 $1 - \chi/4$ はgap内にある。したがって $p_0 = 1_{[1-\chi/4, \infty)}(T)$ は連続 functional calculusにより被約C*環内に属する。von Neumann環内のスペクトル射影の存在だけでは、この所属は結論できない。

Proposition 8.11 · pp. 49–50 Propositions 10.3–10.4 · pp. 65–67 Proposition 10.7 · pp. 68–69

4. 全コピーへの同変写像でトレースを抑える

領域 D_Q の割当ては同変である必要がないため、前段の通常の部分等長同値だけでは標準トレースを比較できない。そこで $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma_{\text{proj}}) \otimes \mathbb{C}^N$ と置き、全indexed copiesを使い、 $\mathcal{A}\xi = (E_Q(\xi|_Q))_Q$ を定義する。incidenceの同変な全単射 $(Q, x) \leftrightarrow (x, v) \in \Gamma_{\text{proj}} \times V(Y)$ により、標的上側空間のidentity traceは $S_0 = \sum_v e_v \leq S$ となる。

重なりの損失評価は $\mathcal{A}$ の有界性を与える。 $K = \ker \mathcal{A}$ 上では $\langle T\xi, \xi \rangle \leq (1 - \chi + 3\alpha)\|\xi\|^2$ だが、 p_0 の像では下界が $1 - 3\alpha$ である。従って $P_{K^\perp} : p_0\mathcal{H} \rightarrow K^\perp$ は単射となり、同変polar decomposition から

$$0 < \tau_{\Gamma, N}(p_0) \leq \operatorname{Tr}_\Gamma(P_{K^\perp}) \leq S_0 \leq S < \frac{1}{2}$$

が従う。厳密な正値は $p_0 \neq 0$ とトレースの忠実性による。幾何、磁気表現、近似精度を順に固定し、一つの十分大きい有限 ℓ を選ぶ。最終段階で極限群や極限射影を取ってはいない。

Lemmas 10.8–10.10 · pp. 70–72 Theorem 10.11 · p. 72

4. Proposition 2.2 の証明 — 正規形からC*環内の圧縮へ

証明対象：Proposition 2.2 · pp. 4–6

Proposition 2.2 — 自由積を取った後のスカラー圧縮

離散群 Λ と射影 $p \in M_N(C_r^*(\Lambda))$ が $0 < a := \tau_{\Lambda, N}(p) < 1/2$ を満たすとする。 $K = \Lambda * F_N$ とし、自由生成元 $t_1, \dots, t_N$ に対して $U = (\lambda_K(t_1), \dots, \lambda_K(t_N))$ 、 $A = pU^*Up$ と置く。 A は隅 $pM_N(C_r^*(K))p$ で可逆であり、

$$e = (Up)A^{-1}(Up)^* \in C_r^*(K)$$

は射影で $\tau_K(e) = a$ を満たす。 Λ が有限生成かつtorsion-freeなら K もそうである。

Proposition 2.2 · pp. 4–6

1 射影と小さい非正規化 trace

$$p \in M_N(C_r^*(\Lambda)), \quad a = \tau_{\Lambda, N}(p) \in (0, \frac{1}{2})$$

$$K = \Lambda * F_N, \quad U = (\lambda_K(t_1), \dots, \lambda_K(t_N))$$

部分群包含は trace を保存。bad 入力是对角 trace で制御

Lemma 2.1 · p. 4; equations (2.3)–(2.7) · p. 5

2 正規形で good 入力と bad 入力を分ける

$$\xi = p\xi: \quad \|U\xi_g\| \geq \sqrt{1-a}\|\xi\|, \quad \|U\xi_b\| \leq \sqrt{a}\|\xi\|$$

$$\|U\xi\| \geq c_a\|\xi\|, \quad c_a = \sqrt{1-a} - \sqrt{a} > 0$$

正の下界により隅の functional calculus を適用

equation (2.2) and proof · pp. 5–6

3 C* 環の隅で逆元を取る

$$A = pU^*Up, \quad c_a^2 p \leq A \leq Np$$

$$A^{-1/2} \in pM_N(C_r^*(K))p, \quad V = UpA^{-1/2}, \quad V^*V = p$$

trace 性と自由積の巡回既約正規形

Proposition 2.2 · pp. 4–6

4 スカラー射影・trace・群の条件

$$e = VV^* = (Up)A^{-1}(Up)^* \in C_r^*(K), \quad \tau_K(e) = a$$

$$0 < a < \frac{1}{2} \implies e \neq 0, 1$$

Λ が有限生成・torsion-free なら K もそうである

正規形の下界から逆元とスカラー射影を構成する

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 取り消しができる入力をトレースで抑える

部分群包含は被約ノルムとトレースを保つ。 $\xi = p\xi$ の第 j 成分を、正規形が t_j^{-1} で始まるbad部分と残りのgood部分に分ける。good出力は先頭文字 t_j により互いに素である。一方bad入力の各位置は一意のbad座標に属し、射影の対角係数を用いたCauchy–Schwarz評価から

$$\|U\xi_g\| \geq \sqrt{1-a}\|\xi\|, \quad \|U\xi_b\| \leq \sqrt{a}\|\xi\|$$

を得る。従って $\|U\xi\| \geq c_a\|\xi\|$ 、 $c_a = \sqrt{1-a} - \sqrt{a} > 0$ となる。正規化トレースではこの評価の a を置き換えられない。

Lemma 2.1 · p. 4 equations (2.3)–(2.7) · p. 5

2. 隅の逆元を使って実際の射影を作る

$c_a^2 p \leq A \leq Np$ なので A^{-1} と $A^{-1/2}$ は同じ C^* 環の隅に属する。 $V = UpA^{-1/2} \in M_{1,N}(C_r^*(K))$ は $V^*V = p$ を満たし、 $e = VV^*$ はスカラー代数内の射影である。トレース性から

$$\tau_K(e) = \sum_j \tau_K(V_j V_j^*) = \sum_j \tau_K(V_j^* V_j) = a.$$

$0 < a < 1/2$ は $e \neq 0, 1$ を同時に保証する。これは K_0 類の比較を射影の存在と読み替える議論ではなく、同じ隅のfunctional calculusと有限行による構成である。

equation (2.2) and proof · pp. 5–6

3. 群の条件を保って主定理へ戻る

$\Lambda = \Gamma_{\text{proj}}$ 、 $p = p_0$ とする。有限個の自由生成元の追加は有限生成性を保つ。自由積の非自明元は因子内の元または長さ2以上の巡回既約語に共役であり、後者の正の冪の長さは増大する。両因子がtorsion-freeなので自由積にもtorsionはない。これでTheorem 1.1の群の条件と射影の全結論が揃う。

Proposition 2.2 · pp. 4–6 Section 11 · p. 73

5. どの論文が、どの段階を担うか

供給元と結果

MT10, Theorem 1.1

利用箇所

Proposition 5.4, pp.18–20

使用内容・必要な仮定

有限bad-cut事象の依存近傍と非対称確率条件から同時回避

確認範囲

定理記述・適用箇所を照合。全確率計数の再計算は未実施

供給元と結果

BGW16, Proposition 10.3

利用箇所

§11, p.73

使用内容・必要な仮定

countable torsion-free群のtrivial-coefficient reduced assembly像のトレースは整数

確認範囲

定理記述・適用仮定を照合。指数定理の証明は対象外

[MT10, Theorem 1.1, p. 1] [BGW16, Proposition 10.3, p. 36]

後者は射影構成への入力ではなく、その帰結である。 $[p_0]$ の非整数トレースは

$$\mu_{\Gamma,0}^r : K_0(B\Gamma) \longrightarrow K_0(C_r^*(\Gamma))$$

の像に入らないことを示す。係数は自明作用の $\mathbb{C}$ 、 $\Gamma = \Gamma_{\text{proj}}$ はtorsion-freeであり、失敗するのは全射性である。この議論はassemblyの核を作らない。

Section 11 · p. 73 [BGW16, Proposition 10.3, p. 36]

カタログ内の A torsion-free counterexample to reduced Baum–Connes injectivity は無限位数の核類を主張する別の構成であり、An irrational-trace counterexample to reduced Baum–Connes はtorsion-free性を主張せず、非有理トレースのスカラー射影を構成する。本稿の小さい非整数トレースを非有理トレースと同一視しない。比較した主結果・導入・本稿の構成と参考文献の範囲では、これら2本を本稿の直接入力とする接続は確認できなかった。

[OpenAI26a, Theorem 1.1, p. 1] [OpenAI26c, Theorem 1.1, p. 2]

6. 原典を読む入口と確認範囲

- Proposition 2.2 · pp. 4–6 — 行列からスカラーへの独立した帰着。
- Theorem 7.1 · pp. 26–27 — coverをCayleyグラフへ移すための仮定と幾何的出力。
- Lemma 8.9; equations (8.20)–(8.21) · pp. 47–48 — 両端で小さくなるfiber traceとNの因子。
- Theorem 9.2 · pp. 52–63 — girthとregular norm近似の同時実現。
- Lemmas 10.8–10.10 · pp. 70–72 — 全indexed copiesを用いた同変なtrace上界。
- Section 11 · p. 73 — 主定理とassemblyへの帰結。

編集側では、§2の圧縮、§7.5–7.6のincidence · torsion排除、§8のtwisted射影と両端トレース、§9のモデルと同時実現の帰着、§10–11のgap · trace · 主定理への接続を証明本文で読解した。局所補題とassembly像のトレース整数性は外部原典の記述 · 適用を照合した。

一方、§§4–6の全ラベル表と確率計数、§7.2–7.4の全diagram変形と一球overlap評価、Lemma 8.5の核同定、§§9.4–9.6の全template · rounding誤差は独立検証していない。これらの内部構成に依存するTheorem 7.1とTheorem 9.2を紹介する範囲を越えて、主定理全体の正しさを認定するものではない。本稿が別稿へ引用する群環のidempotent不存在も今回の照合対象外である。外部結果の全証明とその先の文献の再帰検証は行っていない。

An irrational-trace counterexample to reduced Baum–Connes

符号による厳密な局所分布と、全成分を覆うスペクトルギャップ

本稿は、有限体上のlamp加群をグラフ上の符号関係で割り、その半直積群の被約群C環に無理数トレースの射影を構成すると主張する。要点は、von Neumann環に核射影を得るだけでなく、一様なスペクトルギャップによって射影を被約群C環そのものに置くことである。これをassembly像のトレース制約と比較して、係数なし被約Baum–Connes写像の全射性を否定する。

原稿の著者: OpenAI · September 23, 2026 · 23 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 無理数トレースと係数なしassemblyの非全射性

有限生成離散群 G_{sur} と射影 $b_0 \in C_r^*(G_{\text{sur}})$ が存在し、標準トレース $\tau_{G_{\text{sur}}}(1) = 1$ に関して

$$\tau_{G_{\text{sur}}}(b_0) \notin \mathbb{Q}, \quad [b_0] \notin \text{im}\left(\mu_0^{G_{\text{sur}}} : K_0^{G_{\text{sur}}}(\underline{E}G_{\text{sur}}) \longrightarrow K_0(C_r^*(G_{\text{sur}}))\right).$$

したがって、可算離散群に対する係数なし被約Baum–Connes予想は成り立たない、というのが原稿の主張である。ここでは整係数の複素K理論を用い、係数代数は自明作用を持つ $\mathbb{C}$ である。 $\underline{E}G$ は有限部分群の固定点集合が可縮、無限部分群の固定点集合が空となるproper作用の分類空間であり、有限次元性や余コンパクト性は仮定しない。定義域は G -compact supportsを持つ同変Kホモロジーで、proper G -CWモデルの閉不変な G -compact部分空間 Z にわたる $KK_0^G(C_0(Z), \mathbb{C})$ の直接極限である。 G_{sur} にtorsion-freeという条件は付されていない。

Theorem 1.1 · p. 2

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [An irrational-trace counterexample to reduced Baum–Connes](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [LU02](#) Wolfgang Lück — The relation between the Baum–Connes Conjecture and the Trace Conjecture : assembly像のトレース制約。全射性を仮定せず局所化後の像を用いる。2002 author-hosted typeset PDF, numbered 1–30 (not final journal pagination 123–152)。
- [Osa20](#) Damian Osajda — Small cancellation labellings of some infinite graphs and applications : expander族の有限ラベル付けとCayleyグラフへの等長埋込み。Acta Mathematica 225 (2020), 159–191。
- [BH99](#) Martin R. Bridson, André Haefliger — Metric Spaces of Non-Positive Curvature : 粗い線形充填評価から一様双曲性への移行。Springer, 1999; scanned book, print/PDF offset +23。
- [LPS88](#) Alexander Lubotzky, Ralph Phillips, Peter Sarnak — Ramanujan graphs : 固定次数・大きなgirthを持つexpander族。Combinatorica 8 (1988), 261–277; published scan with visible folios。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 の証明 — 局所分布とスペクトル評価をトレースで結ぶ

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · [p. 2](#)

証明の道筋。 等長に埋め込まれたexpanderコピー上の符号から、有限生成群 $G_{\text{sur}} = V \rtimes \Gamma$ を作る。双対符号の距離が局所パターンの厳密な確率を保証し、符号自身の距離とコピーの交わりの幾何が一様ギャップを与える。後者から得た射影のトレースを前者で計算し、Lückの定理が与えるassembly像の有理性と比較する。ギャップの核心は次節で説明する。

1 同時交差を制御する

$P = g\Theta_i \subset \text{Cay}(\Gamma, S), \quad n_i = |\Theta_i|, \quad k_i = \lfloor n_i/2 \rfloor$
 $c_P \neq R$: 中心の根からの距離が以下の全コピーとの交差 $\subset B_P$

双対距離が球外の相殺を排除: 局所関係は増えない
Lemma 4.2; Definition 4.3 · pp. 13-14

2 符号関係で有限生成群を作る

$W_0 = \sum_P C_P^\perp, \quad V = \mathbb{F}_p^{(\Gamma)}/W_0, \quad G_{\text{sur}} = V \rtimes \Gamma$
 $W_0 \cap \mathbb{F}_p^P = C_P^\perp, \quad \Omega = \hat{V}$

Haar 測度を有限符号へ押し出す
Lemma 4.4 · pp. 14-15

全体の不足評価と連続汎関数計算
Lemma 5.4 · pp. 20-21;
Proposition 5.5 · p. 21

3a 正しいパターンの確率

$\text{res}_P(\Omega) = C_P$
 $m_\Omega(P \text{ valid}) = p^{-k_i}$

単位元を含む n_i 個の事象は排反
Proposition 6.1 · pp. 21-22

3b 全体のスペクトルギャップ

$\text{spec}(T) \subset \{0\} \cup [\varepsilon, 2d]$
 $b_0 = 1_{\{0\}}(T) \in C_r^*(G_{\text{sur}})$

定数関数への射影の対角は $1/n_i$
Proposition 5.5 · p. 21

4 確率と核の対角成分を積分する

$\tau(b_0) = \sum_i n_i \cdot \frac{1}{n_i} \cdot p^{-k_i} = \sum_i p^{-k_i} \notin \mathbb{Q}$
 $k_{i+1} - k_i \rightarrow \infty$: 基数 p の桁は最終的周期的でない

局所化したトレース定理を $1 \otimes x$ に適用する
[LU02, Theorem 0.3, p. 2]; Proof of Theorem 1.1 and rationalization · p. 22

5 係数なし assembly の像から除外する

$\tau_*(\text{im } \mu_0^{G_{\text{sur}}}) \subset \Lambda_{G_{\text{sur}}} \subset \mathbb{Q}$
 $[b_0] \notin \text{im } \mu_0^{G_{\text{sur}}}, \quad [b_0] \otimes 1 \notin \text{im}(\mu_0^{G_{\text{sur}}} \otimes \mathbb{Q})$

局所符号と一様ギャップが無理数トレースの射影へ合流する

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 同時交差の制御から群と局所分布を作る

固定次数 d 、一様なLaplacianギャップ $\rho > 0$ 、増大するgirth σ_i を持つexpander Θ_i を選ぶ。

$n_i = |\Theta_i|$ 、 $k_i = \lfloor n_i/2 \rfloor$ とし、部分列によって k_i は狭義増加かつ $k_{i+1} - k_i \rightarrow \infty$ とする。LPSの族を用い、Osajdaの定理に必要な次数上界・girthの増大・diameter/girthの有界性を満たして、有限アルファベット S 上のラベルを付ける。そのgraphical presentationの群を Γ とすると、各 Θ_i は $X = \text{Cay}(\Gamma, S)$ に等長に入る。

[LPS88, Theorems 3.4 and 4.1, 誌面 pp. 267, 269 / PDF pp. 7, 9]

[Osa20, Theorem 2.7, 誌面 p. 173 / PDF p. 15] [Osa20, Lemma 3.1; Theorem 3.2, 誌面 p. 176 / PDF p. 18]
Proposition 3.1 · pp. 9–10

コピー $P = g\Theta_i$ ごとに中心 c_P を加えてcone-offする。原稿は圧縮diagramの弧数評価から一様な粗い線形充填不等式を導き、Bridson–Haefligerの定理で、ラベルや λ に依存しない双曲性定数を得る。その後で λ を小さく選ぶ。この順序により、任意の根 R と $c_P \neq R$ を満たすコピーに対し、 $d(c_Q, R) \leq d(c_P, R)$ を満たす（同距離も含む）すべての別コピーとの交わりが、一つのintrinsic induced tree ball B_P に入る。半径は $\sigma(P)/16$ 以下、頂点数は $\eta|P|$ 未満（ $\eta = 1/100$ ）である。単なる二つずつの小交差では、この同時包含を代用できない。

[BH99, III.H.2.1; III.H.2.9, 誌面 pp. 414, 419 / PDF pp. 437, 442] Proposition 2.3; Lemma 2.4 · pp. 7–9

一つの素数 $p > 2$ を十分大きく選び、各頂点で許す d 個の出辺ラベルを非零の $\mathbb{F}_p$ 元で符号化する。コピーの正しい局所ラベルを表す語を w_P とする。Lemma 4.1は $w_P \in C_P \subset \mathbb{F}_p^P$ 、 $\dim C_P = k_i$ 、さらに C_P と $C_P^\perp$ の非零語のsupportがともに $\eta|P|$ より大きい符号を与える。この存在は、 w_P を含む k_i 次元部分空間を無作為に選ぶ数え上げで示す。低weight語の個数を $p^{n_i/4}$ 未満で抑え、primal・dual双方に低weight語が入る確率の和を1未満にする。全コピーの双対関係を課して

$$W_0 = \sum_P C_P^\perp \subset \mathbb{F}_p^{(\Gamma)}, \quad V = \mathbb{F}_p^{(\Gamma)} / W_0, \quad G_{\text{sur}} = V \rtimes \Gamma$$

と置く。 W_0 は Γ -不変で、 V は $v_* = [e_1]$ の Γ -軌道で生成されるため、 G_{sur} は S のliftと $(v_*, 1)$ で有限生成される。

Lemma 4.1 · pp. 12–13 Lemma 4.2; Definition 4.3 · pp. 13–14

鍵は $W_0 \cap \mathbb{F}_p^P = C_P^\perp$ という等式である。 P 上にsupportを持つ有限和に別コピーの関係が含まれたら、根 c_P から最遠のコピー Q を取る。ほかの全supportとの交わりは B_Q に入るが、双対語のsupportはその球より大きい。したがって外側に消去できない座標が残り、矛盾する。コンパクト双対 $\Omega = \text{Hom}_{\mathbb{F}_p}(V, \mathbb{F}_p)$ への双対化で、制限 $\omega \mapsto X_\omega|_P$ の像は正確に C_P となり、Haar測度はその一様分布へ移る。よってコピーが正しいパターンを取る確率は p^{-k_i} である。

Lemma 4.2; Definition 4.3 · pp. 13–14 Lemma 4.4 · pp. 14–15

次節の作用素 T の一様ギャップにより $b_0 = 1_{\{0\}}(T) \in C_r^*(G_{\text{sur}})$ を得る。これは行列環内の類だけでも、von Neumann環内だけの射影でもない。

Proposition 5.5 · p. 21

2. コピー数と対角成分の相殺でトレースを得る

正しいパターンを持つコピーをvalidと呼ぶ。validコピーは有効辺グラフの互いに素な孤立成分で、 $\pi_\omega(b_0)$ は各コピー上の定数関数への射影、残りでは零となる。型 i のコピー上の対角成分は $1/n_i$ である。単位元を含む型 i のコピーは、埋込みの頂点 v ごとの移動 $g = \varphi_i(v)^{-1}$ に対応して正確に n_i 個ある。これらがvalidである事象は、異なる型も含め互いに排反である。

$$\tau_{G_{\text{sur}}}(b_0) = \int_{\Omega} \langle \pi_\omega(b_0) \delta_1, \delta_1 \rangle dm_\Omega = \sum_i n_i \frac{1}{n_i} p^{-k_i} = \sum_i p^{-k_i}.$$

この計算にコピー間の独立性は不要である。 $p > 2$ なので基数 p 展開の非零桁は位置 k_i の1だけであり、無限個の1の間隔が発散するため最終的周期性がない。したがってトレースは無理数で、 $0 < \tau(b_0) < 1$ でもある。

Section 5.1, (17)–(21) · pp. 15–16 Proposition 6.1 · pp. 21–22

3. proper作用のassembly像から除外する

任意の可算離散群 G に対して $\Lambda_G = \mathbb{Z}[1/|F| : F \leq G \text{ finite}] \subset \mathbb{Q}$ とする。LückのTheorem 0.3は、 Λ_G で局所化したassemblyと標準トレースの合成の像が Λ_G に等しいと述べる。整係数クラス x に対して $1 \otimes x$ に評価すれば

$$\tau_{G*}(\mu_0^G(x)) \in \Lambda_G \subset \mathbb{Q}$$

を得る。ここにはassemblyの全射性も、局所化写像の単射性も必要ない。本稿のTheorem 1.2はこの帰結である。Lückの§4の定義域はproper空間の余コンパクト部分複体にわたる同変KK群の直接極限、§5の写像はその解析的指数であり、本稿は同じproper作用のassemblyを用いている。

[LU02, Theorem 0.3, p. 2] [LU02, Sections 4–5, pp. 23, 25] Theorem 1.2 · p. 2

$[b_0]$ のトレースは無理数なので、この像には属さない。用いた同型 $C_r^*(V \rtimes \Gamma) \cong C(\Omega) \rtimes_r \Gamma$ は作用素を解析する表示であり、否定する写像は群 G_{sur} 自身の係数なしassemblyである。また有限個のassemblyクラスの有理係数線形結合のトレースも有理数なので、 $[b_0] \otimes 1$ は有理化したassemblyの像にも属さない（原稿p.22の番号なしの帰結）。

Proof of Theorem 1.1 and rationalization · p. 22

3. Proposition 5.5 の証明 — 局所的な不足を全体のギャップへ移す

証明対象：Proposition 5.5 · p. 21

Proposition 5.5 — 被約群C*環に属する核射影

Proposition 3.1と§4で選んだグラフ・符号・群に対し、 $\Omega = \widehat{V}$ とする。 $f_s \in C(\Omega)$ を「座標 $\omega(v_*)$ が出辺ラベル s を許す」というclopen条件の射影、 u_s を Γ の標準ユニタリとし、

$$T = dI - \sum_{s \in S^{\pm 1}} f_s u_s f_{s^{-1}} \in C(\Omega) \rtimes_r \Gamma \cong C_r^*(G_{\text{sur}})$$

と置く。各 ω で両端が許す辺だけを残したグラフを $\mathcal{G}_\omega$ 、validコピーの補集合を U_ω とすると、 $\pi_\omega(T) = dI - \text{Adj}(\mathcal{G}_\omega)$ である。このとき射影 $b_0 \in C_r^*(G_{\text{sur}})$ が存在し、すべての ω について $\pi_\omega(b_0)$ は $\ker \pi_\omega(T)$ への直交射影となる。各validコピー上では定数関数への射影、 $\ell^2(U_\omega)$ では零であり、単位元での対角成分は、そこを含む唯一のvalidコピーが型 i なら $1/n_i$ 、validコピーに属さなければ零である。

Section 5.1, (17)–(21) · pp. 15–16 Proposition 5.5 · p. 21

図では有限集合 $Y \subset U_\omega$ 上の全有効辺グラフを A とし、 L_j は $Z_1(A; \mathbb{F}_2)$ のうち先に消去したコピー座標が零である部分空間を表す。

1 invalid コピーで辺が不足する

$$X_\omega|_P - w_P \in C_P \setminus \{0\}, \quad |\text{supp}(X_\omega|_P - w_P)| > \eta|P| \\ d|B| - 2e_{\omega,P}(B) \geq c|B| \quad (B \subset P)$$

相殺で生じる追加の辺は同時交差球 B_P 内に入る
[Lemma 3.2 · p. 11](#); [Lemmas 5.2–5.3 · pp. 16–19](#)

2 cycle 座標を遠いコピーから消去する

$$Z_1(X; \mathbb{F}_2) = \bigoplus_P Z_1(P; \mathbb{F}_2) \\ \text{pr}_P(L_j) \subset Z_1(D_P; \mathbb{F}_2), \quad D_P = B_P \cup (A \cap P)$$

girth で付着の余分な cycle を抑え、消去順で重複を避ける
[Lemmas 5.2–5.3 · pp. 16–19](#)

3 互いに素な外側頂点へ階数を配分する

$$b_1(D_P) \leq (d/2 - 1 - c/4)|(Y \cap P) \setminus B_P| \\ d|Y| - 2|E(A)| \geq (c/2)|Y| \quad (Y \subset U_\omega \text{ finite})$$

level set 積分と Cauchy–Schwarz : $q(x) = d - \deg_\omega(x)$ を含める
[Lemma 5.4 · pp. 20–21](#)

4 有効成分と残りの双方に一樣 gap を得る

$$\pi_\omega(T)|_{\ell^2(U_\omega)} \geq c^2/(8d), \quad \varepsilon = \min\{\rho, c^2/(8d)\} > 0 \\ \ker \pi_\omega(T) = \bigoplus_{P \text{ valid}} \mathbb{C}1_P, \quad \text{spec}(\pi_\omega(T)) \subset \{0\} \cup [\varepsilon, 2d]$$

共通 gap を忠実な直和へ移し、連続汎関数計算を使う
[Section 5.1, \(17\)–\(21\) · pp. 15–16](#); [Proposition 5.5 · p. 21](#)

5 被約群 C^* 環内で核射影を作る

$$\bigoplus_\omega \pi_\omega \text{ faithful}, \quad b_0 = \chi(T) \in C_r^*(G_{\text{sur}}) \\ \chi(0) = 1, \quad \chi|_{[\varepsilon, 2d]} = 0, \quad b_0^2 = b_0 = b_0^*$$

cycle座標の消去から一樣ギャップと連続汎関数計算へ進む

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 局所不足を重複なしに数える

invalidコピーでは $X_\omega|_P - w_P \in C_P \setminus \{0\}$ のsupportが $\eta|P|$ を超え、各不一致頂点で少なくとも一つの所定の辺のincidenceが欠ける。この欠損と expander の境界評価を合わせ、任意の $B \subset P$ に対し $d|B| - 2e_{\omega,P}(B) \geq c|B|$ を得る。ここで $c = (\eta/2) \min\{\kappa, 1\} > 0$ 、 κ は辺拡大定数である。しかしコピーは重なるため、この評価をそのまま加算できない。

Lemmas 5.2–5.3 · pp. 16–19

有限supportのcycle空間は $Z_1(X; \mathbb{F}_2) = \bigoplus_P Z_1(P; \mathbb{F}_2)$ と分解する。有限 $Y \subset U_\omega$ 上の有効辺グラフ A のcycle空間について、根から遠い順にコピー座標を消去する。座標射影は辺の単なる制限ではないが、残りのコピーとの相殺で生まれる辺はすべて B_P 内にある。したがってその座標は $D_P = B_P \cup (A \cap P)$ のcycle空間に入る。

Lemma 3.2 · p. 11 Lemmas 5.2–5.3 · pp. 16–19

B_P を除いた連結成分 C が球へ l_C 本の辺で付着すると、その寄与は $b_1(C) + \max(0, l_C - 1)$ となる。girthと球の半径上界により異なる付着点間の距離が $\sigma(P)/2$ より大きくなり、付着による余分な階数を $4|C|/\sigma(P)$ で抑えられる。 $\sigma(P) > 20/c$ と局所不足を使うと

$$b_1(D_P) \leq (d/2 - 1 - c/4)|(Y \cap P) \setminus B_P|.$$

消去順に対して外側集合 $(Y \cap P) \setminus B_P$ は互いに素である。そのため階数を加算でき、Eulerの公式から全体の不足

$$d|Y| - 2|E(A)| \geq (c/2)|Y|$$

が従う。この外側頂点への配分が、個別expanderの評価を全体へ移す核心である。

Lemmas 5.2–5.3 · pp. 16–19

2. 残りの成分にも一様な下界を置く

U_ω 上では $q(x) = d - \deg_\omega(x) \geq 0$ という頂点ポテンシャルを残す必要がある。有限集合の不足を $|\xi|^2$ のlevel setで積分し、辺項とポテンシャル項と一緒にCauchy–Schwarzを適用すると

$$\langle \pi_\omega(T)\xi, \xi \rangle = \sum_{\{x,y\} \in E} |\xi(x) - \xi(y)|^2 + \sum_x q(x) |\xi(x)|^2 \geq \frac{c^2}{8d} \|\xi\|^2$$

となる。validコピー上では定数関数以外に ρ のgapがあり、コピー同士および残りとの間に有効辺はない。従ってすべての ω に共通して

$$\text{spec}(\pi_\omega(T)) \subset \{0\} \cup [\varepsilon, 2d], \quad \varepsilon = \min\{\rho, c^2/(8d)\} > 0, \quad \ker \pi_\omega(T) = \bigoplus_{P \text{ valid}} \mathbb{C}1_P.$$

Lemma 5.4 · pp. 20–21

3. 忠実な表示から連続汎関数計算へ戻す

評価表現から誘導した正則表現の直和 $\bigoplus_{\omega} \pi_{\omega}$ は被約交差積に忠実である。一様なgapなので直和でも零以外のスペクトルが零へ近づかず、 $C_r^*(G_{\text{sur}})$ 内の T 自身にも同じgapがある。 $\chi(0) = 1$ 、 $\chi|_{[\varepsilon, 2d]} = 0$ となる連続関数を取り、 $b_0 = \chi(T)$ とすれば同じ C^* 環内の射影になる。汎関数計算は各 π_{ω} と可換なので、核と対角成分の記述も従う。

Section 5.1, (17)–(21) · pp. 15–16 Proposition 5.5 · p. 21

4. どの論文が、どの段階を担うか

LPSの結果はProposition 3.1のexpander族、Osajdaの結果は同命題の有限ラベルと等長埋込み、Bridson–Haeffligerの結果はProposition 2.3の一様双曲性、Lückの結果はTheorem 1.2と主定理の最後のトレース比較を担う。符号の二つの距離、厳密な局所関係、全体のcycle階数評価は本稿内の論証である。

本稿の導入・構成・主定理の証明・参考文献を調べた範囲では、同カタログの他の2原稿を直接入力とする箇所は確認できなかった。共通するexpanderや射影という題材だけから、論文間の証明依存を作っていない。

5. 原典を読む入口と確認範囲

- Proposition 2.3; Lemma 2.4 · pp. 7–9 — 全コピーの交わりを一つの木球へ集める。
- Lemma 4.2; Definition 4.3 · pp. 13–14 — 商加群の局所関係が増えないことと有限生成性。
- Lemmas 5.2–5.3 · pp. 16–19 — cycle座標を消去し、互いに素な外側頂点へ階数を配分する。
- Lemma 5.4 · pp. 20–21 — 不正成分を含む一様な下界を得る。
- Proposition 6.1 · pp. 21–22 — コピー数・確率・対角成分からトレースを計算する。
- Proof of Theorem 1.1 and rationalization · p. 22 — 係数なしassemblyと有理化後の非全射性。

編集側では、原稿の§§2–6の上記帰着と計算、主定理の定義域・値域・全結論、外部4文献の直接入力の記事と使用箇所を照合した。Lückの参照PDFは誌面1–30の著者公開組版であり、最終誌面123–152とはページ表記を区別した。LPSの刊行版scanではTheorems 3.4・4.1と欄外の誌面267・269頁をそれぞれPDF 7・9頁で目視確認した。

Lemma 2.2の特異な平面diagramの全手術とProposition 2.3のdisk fillingへの変換を独立に再構成したわけではない。外部入力定理の証明全体、その先の文献、Davis–Lück版との比較文献は未検証である。本稿の反例の主張を専門家査読や全証明の独立検証として認定するものではない。