

OpenAI Math Digest

CATALOGUE 197

非sofic群と群環の反例

総括・論文間のつながりと4篇の証明概説

独立した非公式の読解ガイド・日本語版

収録版: 2026-10-18

制作: Masataka Iwai・大阪大学

AI生成の解説には誤りや不正確な説明が含まれる可能性があります。重要な主張・証明は原論文でご確認ください。本冊子はWebサイトの解説をまとめたもので、原論文そのものではありません。専門家査読・形式検証は未実施です。

目次

総括に続き、公式カタログ順で全4篇の解説を収録しています。目次・引用はクリックできます。横長の表は紙面向けの項目一覧に組み直し、主張と参照先を保持しています。

00・カタログ197 総括	3
01・A Torsion-Free Group Algebra That Is Not Directly Finite	10
02・A Counterexample to Kaplansky's Direct-Finiteness Conjecture in Characteristic Two	21
03・A Counterexample to the Group-Ring Determinant Conjecture	33
04・A Counterexample to Kaplansky's Direct-Finiteness Conjecture in Odd Characteristic	42

原論文の参照版: 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a

[カタログ197・総括](#)[Web版を読む ↗](#)

CATALOGUE 197

非sofic群と群環の反例

Nonsofic groups and group-ring counterexamples

三つのscalar直接有限性反例は、係数体・群のtorsion・構成法が異なる。そのうち標数2の有限体上の反例を用いて、第四の問題である整数群環の行列式下界へ反例を移す。scalar元、群環上の行列、非sofic性、cellular automatonの帰結を区別して接続を示す。

公式順の記事一覧

主結果の範囲を短くまとめています。正確な仮定と定式化は併記した原典の結果を参照してください。

[カタログ 197・2026-10-18 確認の固定参照版](#)

#

01

論文・概説

[A Torsion-Free Group Algebra That Is Not Directly Finite →](#)

図中の略称: Torsion-free direct finiteness

October 4, 2026 · 31 ページ

[原論文 \(GitHub\) ↗](#)

主に何を主張するか

有限表示torsion-free群 G と $a, b, c \in F_2[G]$ で $ab=1$ 、 $ac=0$ 、 $c \neq 0$ （従って $ba \neq 1$ ）。有限2次元分類複体を持つ。

[Theorem 1.1 · p. 1 ↗](#)

議論の役割・概説

同期歩行のparityをcone複体・配置排除と結び、非零係数とtorsion-free性を別々に保証する独立構成。

[証明概説を読む →](#)

#

02

論文・概説

A Counterexample to Kaplansky's Direct-Finiteness Conjecture in Characteristic Two →

図中の略称: Direct finiteness in characteristic two

September 23, 2026 · 28 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

ある有限標数2体 K と、奇素数位数のtorsionを持つ有限表示群 G でscalar対 $ab=1 \neq ba$ を構成。全配置上の単射非全射CAも得る。

[Theorem 1.1 · p. 1; Corollary 7.3 · p. 26](#) ↗

議論の役割・概説

穴あき有限幾何のpairing→埋込み→character packing→scalar化。行列式論文に使われる標数2入力を供給。

[証明概説を読む](#) →

03

論文・概説

A Counterexample to the Group-Ring Determinant Conjecture →

図中の略称: Group-ring determinant
September 23, 2026 · 9 ページ

原論文 (GitHub) ↗

主に何を主張するか

有限生成 G_D 上の整数群環行列 A が $Q[G_D]$ 上可逆で、Fuglede–Kadison 行列式は 0 と 1 の間。対数積分は有限かつ負。

Theorem 1.1 · p. 2 ↗

議論の役割・概説

第2論文の scalar 欠損 → 二進因子分解と実 trace 差 → mod 2^k 持上げ → 整数行列の行列式。

証明概説を読む →

#

04

論文・概説

A Counterexample to Kaplansky's Direct-Finiteness Conjecture in Odd Characteristic →

図中の略称: Direct finiteness in odd characteristic

September 26, 2026 · 25 ページ

原論文 (GitHub) ↗

主に何を主張するか

一つの指定された奇素数 p 、位数 p^4 の体 K 、torsionを含む有限生成群 G にscalar対 $ab=1 \neq ba$ を構成。全配置上の単射非全射CAを得る。

Theorem 1.1 · p. 1; Proposition 8.1 · p. 23 ↗

議論の役割・概説

高次数modular表現の冪等元→共通central sector→向き付き三角圧縮→有限群因子でscalar化。標数2論文への依存なし。

証明概説を読む →

構成と結果のつながり

図の実線は、原稿が実際に使う論文間の直接入力を表す。破線は完成したscalar対からのcellular automatonの帰結であり、別の群環反例の構成入力ではない。上段のtorsion-free構成は独立している。

図の引用案内

- **OpenAI26tf** — OpenAI, A Torsion-Free Group Algebra That Is Not Directly Finite, October 4, 2026。素体 $\mathbb{F}_2$ ・torsion-free群の独立構成。[OpenAI26tf, Theorem 1.1, p. 1]
- **OpenAI26two** — OpenAI, A Counterexample to Kaplansky's Direct-Finiteness Conjecture in Characteristic Two, September 23, 2026。行列式論文へ渡すscalar対と、そのCA帰結。[OpenAI26two, Theorem 1.1, p. 1]
- **OpenAI26det** — OpenAI, A Counterexample to the Group-Ring Determinant Conjecture, September 23, 2026。二進欠損から整数群環行列への変換。[OpenAI26det, Theorem 1.1, p. 2]

- **OpenAI26odd** — OpenAI, A Counterexample to Kaplansky's Direct-Finiteness Conjecture in Odd Characteristic、September 26, 2026。一つの指定奇素数に対する独立構成とCA帰結。
[OpenAI26odd, Theorem 1.1, p. 1]

全て同一の公式commitに固定した版を参照する。各引用は原典の結果番号と誌面/PDF共通ページを示す。

1 独立構成：Torsion-free direct finiteness

$a, b, c \in \mathbb{F}_2[G]$, $ab = 1$, $ac = 0$, $c \neq 0$.

有限表示・torsion-free・有限 2 次元分類複体。

[OpenAI26tf, Theorem 1.1, p. 1]

2 Direct finiteness in characteristic two

$a_2b_2 = 1 \neq b_2a_2$ in $K_2[H_2]$, $|K_2| < \infty$, $\text{char } K_2 = 2$.

H_2 は有限表示で奇数位数の torsion を含む。

[OpenAI26two, Theorem 1.1, p. 1]

直接入力：二進欠損を射影へ

[OpenAI26det, Theorem 1.2; §5, pp. 2, 8]

帰結：有限体の scalar 対を移す

[OpenAI26two, Corollary 7.3, p. 26]

3 Group-ring determinant

$A \in M_n(\mathbb{Z}[G_D])$, $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Q}[G_D])$.

$0 < \det_{\mathcal{N}(G_D)}(T_A) < 1$.

拡大群 G_D は有限生成、 C_3 を含む。

[OpenAI26det, Theorem 1.1, p. 2]

各構成群の全配置上の帰結

$T_aT_b = \text{id}$, $\text{im } T_b = \text{Fix}(T_{ba})$.

T_b は単射・非全射。二つの群を同一視しない。

帰結：同じ K で全配置へ作用

[OpenAI26odd, Proposition 8.1, p. 23]

4 Direct finiteness in odd characteristic

$ab = 1 \neq ba$ in $K[G]$, $|K| = p^4$.

一つの指定奇素数 p 、有限生成群、torsion を含む。

[OpenAI26odd, Theorem 1.1, p. 1]

独立したtorsion-free構成、標数2から行列式への直接入力、二つのscalar構成からCAへの帰結

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

Direct finiteness in characteristic twoのscalar対が、Group-ring determinantで二進行列対へ制限される。そこから拡大群 $G_D = (\bigoplus_{H_2} C_3) \rtimes H_2$ 上の射影を作り、整数行列の行列式を0と1の間へ落とす。入力群と出力群は同じではなく、出力群には位数3のtorsionがある。元の体が $\mathbb{F}_2$ そのものとは限らないため、係数制限の次元 d を保つ必要がある。

Direct finiteness in odd characteristicはこの二進入力置き換える論文ではない。指定 p で構成したscalar対を、標数2原稿と同じ右近傍規約の作用 T_c へ移すと、両方で $T_a T_b = \text{id}$ と $\text{im } T_b = \text{Fix}(T_{ba})$ が得られる。非全射性は逆積欠損の非零係数で検出され、全配置空間上の主張である。

種別

直接入力

供給結果 → 使用箇所

標数2 Theorem 1.1 → 行列式 Theorem 1.2、§5

何を渡すか・適用条件

有限標数2体と有限生成群上のscalar対。入力の有限表示性はここでは有限生成へ弱めて使う。

種別

論文内の帰結

供給結果 → 使用箇所

標数2 Theorem 1.1 → Proposition 7.2、Corollary 7.3

何を渡すか・適用条件

有限体・有限台・ $ab = 1 \neq ba$ から単射非全射CAと像の固定点記述。

種別

論文内の帰結

供給結果 → 使用箇所

奇標数 Theorem 1.1 → Proposition 8.1

何を渡すか・適用条件

同じ代数的条件を、指定された位数 p^4 の体のままで使う。

[OpenAI26two, Theorem 1.1, p. 1]

[OpenAI26det, Theorem 1.2; §5, pp. 2, 8]

[OpenAI26two, Corollary 7.3, p. 26]

[OpenAI26odd, Proposition 8.1, p. 23]

非sofic性は逆方向の構成原理ではない。外部結果 **ES04** (Gábor Elek · Endre Szabó, Sofic groups and direct finiteness, arXiv:math/0305440v2, 19 April 2004) のsofic群環のstable finitenessにより、三つのscalar構成それぞれの群はnonsoficとなる。行列式の出力群については **ES05** (同著者, Hyperlinearity, essentially free actions and L^2 -invariants. The sofic property, arXiv:math/0408400v2, 7 October 2014) の下界を A^*A へ適用して矛盾を得る。これらの外部定理は、ここで完成した反例から得る帰結を説明する。

[ES04, Corollary 4.7, p. 8]

[ES05, Theorem 5, p. 18]

証明を読む入口

- 素体とtorsion-free性を同時に追う： Torsion-free direct finitenessのparity、有限配置の排除、cone surgeryを読む。 $ab = 1$ と $ac = 0$ の計算、 $c \neq 0$ 、分類複体の性質は別の接続で保証される。
- 行列からscalarへの移行を追う： 標数2の記事ではcharacter packingと埋込み先での欠損検出、奇標数の記事では共通sector、三角圧縮、有限Heisenberg行列単位を見る。両者の係数仮定と局所機構は異なる。
- 正のtraceとmod 2の違いを追う： 行列式の記事では射影の実traceと二進因子分解の列数、続く節では整数化と有理可逆性を分けて読む。

原典と確認範囲

公式の分野は Algebra、番号は 197、overviewの名称は Nonsofic groups and group-ring counterexamples (PDF p. 21) である。CONTENTS.mdの見出しは A torsion-free group algebra that is not directly finite と異なる。記事一覧はCONTENTSの4篇の順序を保持し、内部paper IDとカタログ番号を区別する。参照commitは1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a、overview表紙の日付はOctober 6, 2026。

OpenAI Research Catalog · Catalogue 197 / Algebra · p. 21

主要結果、証明の核心、記録した入力結果と適用箇所を公式原典と照合した。行列式の標数2入力とCAの像の計算は供給側・利用側を照合している。未記録の引用関係を「依存なし」とは扱わない。各記事に確率評価・位相の場合分け等の独立再計算を行っていない範囲を記す。標数2原稿のCorollary 7.4と外部type- F_∞ 埋込みは、この案内の確認済み結果には含めない。有限手順の実行、全外部証明の再帰的検証、専門家査読・形式検証は未実施である。

A Torsion-Free Group Algebra That Is Not Directly Finite

同期歩行のparityから片側逆元を作り、球面配置の排除で振れなし性を保証する。

本原稿は、有限ラベル付きグラフのconeで群を構成し、標数2の打消しを利用して群環のscalarな片側逆元を作る。代数計算に必要なparityは頂点型に組み込み、非零性と有限の分類空間はランダム matching・平面分離・cone surgeryで保証する。

原稿の著者: OpenAI · October 4, 2026 · 31 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 振れなし群環の直接有限性の反例

有限表示をもつ振れなし群 G と $a, b, c \in \mathbb{F}_2[G]$ が存在し、

$$ab = 1, \quad ac = 0, \quad c \neq 0$$

を満たす。従って $ba \neq 1$ である。さらに G は有限2次元分類複体をもつ。これは行列環だけの反例ではなく、素体 $\mathbb{F}_2$ 上の群環そのものの反例という主張である。

Theorem 1.1 · p. 1

証明は十分大きい有限matchingのうち条件を満たすものを選択する。群の有限表示と有限和の存在を与えるが、選択されたmatchingの辺を列挙した具体例ではない。非sofic性はこの主張と Elek-Szabóの定理からの帰結であり、非sofic性を入力して片側逆元を得る議論ではない。

Section 7 · p. 30 [ES04, Corollary 4.7, p. 8]

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [A Torsion-Free Group Algebra That Is Not Directly Finite](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [LT79](#) Richard J. Lipton and Robert Endre Tarjan — A Separator Theorem for Planar Graphs : Lemma 5.5 の平面分離。必要statementは出版社Abstractで確認、外部PDF本文・ページ対応は未確認。SIAM Journal on Applied Mathematics 36(2), 177–189 (1979); publisher abstract checked 2026-10-18。
- [Hat02](#) Allen Hatcher — Algebraic Topology : §6のHurewicz・Whiteheadによる可縮性。2002 book; author-hosted PDF checked 2026-10-18。
- [ES04](#) Gábor Elek and Endre Szabó — Sofic groups and direct finiteness : 主定理から非sofic性を導く帰結だけに使用。arXiv:math/0305440v2; PDF header 19 April 2004。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 — 主定理の証明概略

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · [p. 1](#)

証明の道筋。 $q = 128$ の射影平面とFano平面の7つの追加ラベルからparityを固定する。大きなgirthを条件としたmatchingで「縮約された球面配置」を排除し、cone複体をasphericalにして根を保護する。最後に根を含む成分の頂点ラベルを足し合わせる。

1 頂点型を処方する

$q = 128$, projective plane + 7 Fano labels
 $|S_x \cap S_{x'}| \equiv 1$ except (x_A, x_A) ; $|S_x \cap S_y| \equiv 1$

parity を保って確率的に配置を排除

Proposition 3.1 · pp. 5–6

Theorem 5.2 · p. 19

2 有限 matching を選ぶ

$\text{girth } \Gamma \geq L$, 縮約された球面配置なし

cone surgery と有限 2 次元性

Proposition 6.1 · pp. 24–25

3 cone で幾何学的条件を回収

$X = F \cup \bigcup K_\Lambda$, $\tilde{X} \simeq *$;
 根保護、捩れなし、有限表示

同期歩行の parity と根の恒等元係数

Proposition 2.1 · pp. 3–4

Section 7 · p. 30

4 scalar な片側逆元と非零 annihilator

$a, b, c \in \mathbb{F}_2[G]$:
 $ab = 1, ac = 0, c \neq 0 \implies ba \neq 1$

頂点型から幾何学的条件と scalar 反例を得る全体像

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 存在するグラフの条件を分離する

各連結成分 Λ の cone を rose F へラベル写像で貼り、 $X = F \cup_{\Lambda \rightarrow F} \bigcup_\Lambda K_\Lambda$ 、 $G = \pi_1(X)$ とする。ラベルの出次数集合 S_x はあらかじめ処方するので、matching を選び直しても parity は変わらない。一方、girth · 直径 · 球面配置の不在は matching の選択で得る。Theorem 5.2 はこれらを同時に満たす有限の選択を与え、Proposition 6.1 がその選択を分類複体と根保護へ変換する。

Proposition 3.1 · pp. 5–6 Theorem 5.2 · p. 19 Proposition 6.1 · pp. 24–25

2. 全結論への最後の接続

Proposition 2.1によって $ab = 1, ac = 0, c \neq 0$ が得られる。 $ba = 1$ なら $c = (ba)c = b(ac) = 0$ となるので矛盾する。有限性と2次元性はconeの構成、asphericityと振れなし性はProposition 6.1から来る。このように群環の恒等式と群の位相的性質は別々の入力を合流させている。

Proposition 2.1 · pp. 3–4 Section 7 · p. 30

3. Proposition 2.1 の証明 — 一つの偶数次数例外を残す

証明対象：Proposition 2.1 · pp. 3–4

Proposition 2.1 — Parity criterion

同じroseへimmersedする有限looplessグラフ Γ_A, Γ_B と根 x_A, x_B をとる。根を含む成分の頂点集合を A', B' 、出ラベル集合を S_x とする。 $|S_x \cap S_{x'}|$ は $(x, x') = (x_A, x_A)$ を除く $A' \times A'$ 上で奇数、 $|S_{x_A}|$ は偶数、 $|S_x \cap S_y|$ は $A' \times B'$ 上で常に奇数と仮定する。また、どちらかの根から異なる頂点へ至る道のラベルは G で非自明とする。根からの道のラベルを g_x, h_y と置けば

$$a = \sum_{x \in A'} g_x, \quad b = \sum_{x \in A'} g_x^{-1}, \quad c = \sum_{y \in B'} h_y^{-1}$$

は $ab = 1, ac = 0, c \neq 0$ 、従って $ba \neq 1$ を満たす。

Proposition 2.1 · pp. 3–4

1 同期歩行上で積の項を固定

$$(g_x t)(g_{x'} t)^{-1} = g_x g_{x'}^{-1}$$

$$\deg(x, x') = |S_x \cap S_{x'}|$$

各成分の奇数次数頂点数は偶数
[Proposition 2.1 · pp. 3–4](#)

2 次数の例外を数える

$A' \times A'$: 唯一の偶数次数頂点 (x_A, x_A)
 $A' \times B'$: 全頂点が奇数次数

例外成分のみ奇数個、根保護で恒等元項は一つ
[Proposition 2.1 · pp. 3–4](#)

3 標数 2 の打消しを適用

$$ab = 1, \quad ac = 0; \quad [1]c = 1 \implies c \neq 0$$

結合則と非零性
[Theorem 1.1 · p. 1](#)

4 逆向きの恒等式を排除

$$ba = 1 \implies c = (ba)c = b(ac) = 0, \quad \text{矛盾}$$

同期歩行の次数parityが二つの積を決める

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. $A' \times A'$ の一つの例外が $ab = 1$ を与える

共通ラベル t で両座標を同時に進めるグラフを考える。積の項は

$$(g_x t)(g_{x'} t)^{-1} = g_x g_{x'}^{-1}$$

により各連結成分上で一定である。その頂点次数は $|S_x \cap S_{x'}|$ 。例外を含まない成分は全頂点が奇数次数なので頂点数が偶数になり、標数2で打ち消える。 (x_A, x_A) を含む成分は偶数次数頂点がちょうど一つで頂点数が奇数、その寄与は 1 である。

[Proposition 2.1 · pp. 3–4](#)

2. $A' \times B'$ の打消しと c の非零性

混合積では全頂点の次数が奇数なので各成分の頂点数が偶数となり、 $ac = 0$ 。一方 $h_{x_B} = 1$ であり、根保護によって他の h_y は恒等元でない。従って c の恒等元係数は正確に 1 である。すべての頂点ラベルの相互相異性を要求しているわけではなく、この係数の確認には根 x_B の保護で十分である。

Proposition 2.1 · pp. 3–4

4. Theorem 5.2 の証明 — 有界な道の評価から全配置を排除する

証明対象：Theorem 5.2 · p. 19

Theorem 5.2 — 縮約された球面配置の不在

$v = 16513$, $n = vm$, $L = \lfloor c_0 \log n \rfloor$ とし、 $c_0 > 0$ は §3.3 の条件で固定する。処方した各 inverse-label slot 集合間の独立一様 matching を $\text{girth} \geq L$ に条件付ける。

$m \equiv 1 \pmod{4}$ が無限大へ向かうとき、 Γ が Definition 5.1 の reduced spherical arrangement をもつ確率は 0 に収束する。従って十分大きい許容 m ごとに、girth 条件、Proposition 3.4 の成分直径条件、reduced spherical arrangement の不在を同時に満たす matching が存在する。ここで配置の比較は逆向きのラベルを対にし、各対は異なる underlying graph edge を使う。根から始まる非閉道を境界にする例外円板は高々一つであり、通常の閉境界を少なくとも一つ含む。

Theorem 5.2 · p. 19

1 重複度 stage で有界道の評価

$$\sum_j (V_j - E_j - k_j) \leq 0, \quad \log \prod_j B_j \leq -\delta H/2 + a_0 b_0 + o(L)$$

word-weight 減衰と first-moment bound
[Lemma 4.3; Section 4.3–4.4 · pp. 12–18](#)
[Theorem 4.1 · pp. 10–11](#)

2 先に許容損失率を固定

$$\exists \varepsilon > 0 \forall K_0, C, I: \text{有界系の確率} = o(1)$$

閉路化と separator の損失を総和で制御
[Lemmas 5.3–5.5; Section 5.4 · pp. 19–24](#)

3 任意サイズの球面配置を抽出

分割・短閉路化・再帰的平面分離

$\varepsilon, D_0, U, \eta, K_0, C, I$ を固定してから $n \rightarrow \infty$

悪い cluster を捨てても正の総長が残る
[Theorem 5.2 · p. 19](#)
[Lemmas 5.3–5.5; Section 5.4 · pp. 19–24](#)

4 残る cluster が有界評価に反する

$$L \leq H_Z \leq CL, \quad b_Z \leq \varepsilon H_Z, \quad I_Z \leq I$$

従って縮約された球面配置なし

有界道評価と平面分離を合わせた配置排除

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 重複した edge traversals を独立な処方と数えない

Theorem 4.1 は、固定した $\varepsilon > 0$ に対して、任意の固定 K_0, C, I の下で、道の本数 $\leq K_0$ 、総長 $L \leq H \leq CL$ 、比較区間対数 $\leq I$ 、未対応位置 $b_0 \leq \varepsilon H$ の系が存在する確率を $o(1)$ とする。 ε を先に選ぶ順序が決定的である。証明では同じ edge の重複度 m_e に応じて stage $\Delta_j = \{e : m_e \geq j\}$ を作る。根を一度固定する損失を入れると、頂点選択と edge 処方の指数は $\sum_j (V_j - E_j - k_j) \leq 0$ となる。

比較に整合する近似 grid で長い block を作り、 $P(W)$ の二乗和減衰を利用する。各 stage の first-moment bound を B_j とすれば、実現確率は $\min_j B_j$ 以下であり、原稿は

$$\log \prod_j B_j \leq -\frac{\delta}{2} H + a_0 b_0 + o(L)$$

を示す。stage同士の独立性を仮定して確率を掛けるのではない。小さい ε と $\exp(o(L))$ 個のpatternの総和から有界系を排除する。

Theorem 4.1 · pp. 10–11 Lemma 4.3; Section 4.3–4.4 · pp. 12–18

2. 任意に大きい配置から一つの有界clusterを残す

長い境界を長さ $O(UL)$ のpieceに分割し、直径評価によって各pieceへ高々 D_0L を付加して閉じる。追加部分は未対応として数える。平面Euler計数は比較区間数をpiece数に比例させ、Lemma 5.5の再帰的separatorは少数のpieceを消して成分サイズを K_0 以下にする。パラメータを $\varepsilon, D_0, U, \eta, K_0, C, I, n$ の順に固定するため、前段の有界評価を一つの固定した三組 (K_0, C, I) に適用できる。

損失の小ささは各clusterごとには保証されない。未対応率が大きいcluster、比較区間が多いcluster、そして長さ $< L$ の唯一あり得る例外clusterを捨てても正の総長が残る、と総和で評価する。この残ったclusterがTheorem 4.1に反する。平面分離の必要な定数付きstatementはLT79の出版社Abstractと照合したが、外部PDF本文とページ対応は未確認である。

Lemmas 5.3–5.5; Section 5.4 · pp. 19–24

5. Proposition 6.1 の証明 — 同じedgeの対を手術で消す

証明対象 : Proposition 6.1 · pp. 24–25

Proposition 6.1 — Cone criterion

有限グラフ $\Gamma = \Gamma_A \sqcup \Gamma_B$ がrose F へimmersedし、根 x_A, x_B をもつとする。式(2.1)のcone複体 X と群 G について、Definition 5.1のreduced spherical arrangementが存在しなければ $\pi_2(X) = 0$ であり、根から異なる頂点へ行く道のラベルは G で非自明である。

さらに X は有限で次元高々2のaspherical複体、 G は有限表示をもつ振れなし群である。

Proposition 6.1 · pp. 24–25

1 失敗を最短 cone picture で表す

$\pi_2(X) \neq 0$ または根保護が失敗

同じ抽象 cone の lift で二つの cap を埋める
Section 6.2; Equations (6.1)–(6.3) · pp. 26–29

2 同じ edge の対を band surgery で消す

根の端点を保持、球面の essentiality を保持
 $[\tilde{f}] = [\tilde{f}_1] + [\tilde{f}_2]$ in $H_2(\tilde{X})$

手術が総長を減らすため同じ edge の対は残れない
Proposition 6.1 · pp. 24–25
Section 6.2; Equations (6.1)–(6.3) · pp. 26–29

3 最小性から禁止配置を得る

各対が異なる underlying edge を通る
 配置なし $\implies \pi_2(X) = 0$ + 根保護

次元高々 2、Hurewicz · Whitehead、自由 resolution
Section 6.3 · pp. 29–30

4 可縮普遍被覆と捩れなし性

$\tilde{X} \simeq *$;
 $C_\ell \leq G \implies H^k(C_\ell; \mathbb{F}_\ell) = 0$ ($k > 2$)
 周期 resolution の非消滅と矛盾

配置の不在を根保護と有限分類複体に変える

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 最短cone pictureからreduced arrangementを作る

$\pi_2(X) \neq 0$ 、または根 r から別頂点 z へのラベルが自明と仮定し、境界総長最小のcone pictureを選ぶ。roseのedge内部の点の逆像は、境界の逆ラベルを結ぶ互いに交わらないarcを与える。同じ underlying graph edgeを対にするarcがあればband surgeryで総長を短くできる。

根付きの場合はmarked breakを含む側を残すことで、元の端点 r, z を保持する。球面の場合に一つの内側cone diskが二つへ分裂するときは、二つのcapを同じ抽象coneのliftで充填し、普遍被覆の H_2 で $[\tilde{f}] = [\tilde{f}_1] + [\tilde{f}_2]$ とする。Hurewiczにより少なくとも一方の球面がessentialのまま残る。coneの像が X に埋め込まれているとは仮定しない。最小性から同一edgeの対はなくなり、禁止されたreduced arrangementが得られる。

Section 6.2; Equations (6.1)–(6.3) · pp. 26–29 [Hat02, Theorem 4.32, 誌面 p. 366 / PDF p. 375]

2. 分類複体と振れなし性を回収する

$\tilde{X}$ は単連結、 $\pi_2 = 0$ 、次元高々2なのでacyclicであり、HurewiczとWhiteheadから可縮となる。有限CW構造から G の有限表示を得る。もし素数位数の部分群 $C_\ell \leq G$ があれば、可縮普遍被覆のcellular resolutionを $\mathbb{Z}C_\ell$ に制限して長さ高々2の自由resolutionを得る。しかし巡回群の周期resolutionは $H^k(C_\ell; \mathbb{F}_\ell) \cong \mathbb{F}_\ell$ を全 $k \geq 0$ で与え、矛盾する。この周期計算は本稿に再掲されている。これで有限2次元分類複体・有限表示・振れなし性の全てに証明が対応する。

Section 6.3 · pp. 29–30 [Hat02, Theorem 4.5, 誌面 p. 346 / PDF p. 355]

6. どの論文が、どの段階を担うか

入力

LT79の平面分離

利用箇所

Lemma 5.5、Theorem 5.2

役割と照合範囲

loop・多重辺を除いた平面グラフを再帰分離する。必要statementと適用を照合。外部PDF本文・ページ対応は未確認。

入力

Hat02のHurewicz・Whitehead

利用箇所

§§6.1–6.3

役割と照合範囲

単連結CW複体での $\pi_2 \simeq H_2$ 、acyclicから可縮への移行。定理記述と使用条件を照合。

入力

ES04、Corollary 4.7

利用箇所

Introductionの非sofic性

役割と照合範囲

soficなら任意division ring上でstably finite、の対偶。構成の入力ではなく帰結。

標数2の別反例原稿は、本稿の主定理の入力として使われていない。zero-divisors原稿はparityとarrangement-exclusionの方法上の先行研究として記されるが、本稿は必要な見積りと位相的議論を再証明する。その原稿との全範囲の照合は行っていない。

7. 原典を読む入口と確認範囲

- Proposition 2.1 · pp. 3–4 — 同期歩行のparityと恒等元係数の計算。
- Theorem 4.1 · pp. 10–11 — ε を先に固定する量化と重複edgeの扱い。
- Lemmas 5.3–5.5; Section 5.4 · pp. 19–24 — 任意サイズの球面配置から有界clusterを抽出する。
- Section 6.2; Equations (6.1)–(6.3) · pp. 26–29 — root endpointsとessential sphereを保つcone surgery。
- Section 7 · p. 30 — 選んだ有限matchingから主定理へ組み立てる。

主定理、parity計算、multiplicity-stage評価とparameterの量化順、平面抽出、cone surgery、最終組立の本文を読んだ。直接外部入力ではHurewicz · WhiteheadとElek–Szabóの記述を確認し、LT79は出版社Abstractの必要statementまで確認した。§3の全確率定数、Lemma 4.4の全grid評価、外部結果の証明の独立再検証は未実施である。ここで示すのは原稿の論証をたどる概説であり、全証明の正しさの認定ではない。

A Counterexample to Kaplansky's Direct-Finiteness Conjecture in Characteristic Two

穴をあけた有限affine空間のpairingを、character packingと有限群のmatrix unitsでscalar反例へ移す。

本原稿の核心は、片側逆元と逆積の非零欠損を異なる段階で保証することにある。直線ごとの零和は前向き積を恒等行列にし、埋め込まれた部分群環上の特殊化は逆積の欠損を検出する。その後有限群因子を追加して初めて群環の二つのscalar元を得る。

原稿の著者: OpenAI · September 23, 2026 · 28 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 有限標数2体上のscalar反例

標数2の有限体 K 、奇素数位数の元を含む有限表示群 G 、および $a_{\text{out}}, b_{\text{out}} \in K[G]$ が存在して

$$a_{\text{out}} b_{\text{out}} = 1, \quad b_{\text{out}} a_{\text{out}} \neq 1$$

を満たす。体・群・二つの有限和は、有限集合と有限体演算を用いる停止する処方によって指定される。 $K = \mathbb{F}_2$ とは主張せず、 G は捩れなしではなく奇素数位数の捩れを実際に含む。

Theorem 1.1 · p. 1

処方の停止は証明されるが、原稿はこの探索を実行していない。積の恒等式と欠損の非零性は代数的に証明され、群のword problemを解く手続きを必要としない。Elek–Szabóの定理の対偶により、この G は非soficでもある。非sofic性だけから群環反例を導く逆向きの含意は使わない。

Section 6; Equation (6.2) · pp. 22–24 [ES04, Corollary 4.7, p. 8]

Corollary 7.3 — 単射だが全射でないcellular automaton

Theorem 1.1の同じ $K, G, a_{\text{out}}, b_{\text{out}}$ に対し、有限supportの $c = \sum_u c_u u$ から

$$(T_c x)(g) = \sum_u c_u x(gu) \quad (x \in K^G)$$

を定める。 $T_{b_{\text{out}}} : K^G \rightarrow K^G$ は単射だが全射でなく、その像は $T_{b_{\text{out}} a_{\text{out}}}$ の固定点集合である。従って G はsurjunctiveでない。configurationは有限supportに制限しない。

Corollary 7.3 · p. 26

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [A Counterexample to Kaplansky's Direct-Finiteness Conjecture in Characteristic Two](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [Xyl11](#) Triantafyllos Xylouris — On the least prime in an arithmetic progression and estimates for the zeros of Dirichlet L-functions : §5の様な最小素数評価と§6の素数探索の停止。Acta Arithmetica 150(1), 65–91 (2011), publisher PDF。
- [ES04](#) Gábor Elek and Endre Szabó — Sofic groups and direct finiteness : 主定理から非sofic性を得る帰結。arXiv:math/0305440v2; PDF header 19 April 2004。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 — 主定理の証明概略

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · p. 1

証明の道筋。穴 O を除いたaffine空間 V に、各点次数 $D = \ell + 1$ 、incidence girth ≥ 12 の完全直線系を作る。穴の指示関数を低次数多項式で補間して行列pairingを得る。Theorem 3.1がその有限データをscalar反例へ変換し、§6は存在証明を停止する有限探索へ置き換える。

1 完全直線系と穴を構成

$$V = Q^n \setminus O, \quad \deg(v) = \ell + 1, \quad \text{girth} \geq 12$$

低次数の完全直線系、穴の個数評価

Theorem 5.1 · p. 15

Proposition 2.3 · pp. 5–6

2 穴で補間して pairing を得る

$$\sum_{v \in f} x_v x_v^T = 0, \quad \sum_{v \in V} x_v x_v^T = -I_m$$

$$0 < m < t \leq m\ell^2$$

incidence criterion に全条件を渡す

Theorem 3.1 · p. 6

3 埋込み・packing・scalar 化

$$a_{\text{out}} b_{\text{out}} = 1, \quad b_{\text{out}} a_{\text{out}} - 1 \neq 0$$

有限表示群、奇素数位数の元を保持

十分大きい全ての h で成功、word oracle 不要

Section 6; Equation (6.2) · pp. 22–24

4 全選択を停止する有限探索で指定

$$K = \mathbb{F}_{2^{h(\ell-1)}}, \quad G = L \times F$$

有限式を指定するが、探索の実行は未実施

有限幾何のデータから scalar 反例と停止する処方へ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 幾何・代数・サイズを別々に供給する

$Q = \{a_0, \dots, a_{q-1}\}$ は位数 $q = 2^h$ の体とし、 $S_d = \{(a_{k_1}, \dots, a_{k_n}) : k_i \geq 0, \sum_i k_i \leq d\}$ を index simplex とする。 $A = Q^n$ 、 $O \subset S_{(q-2)/2}$ 、 $m = |O|$ とする。各穴 o の指示値を補間する多項式 f_o を選び、 $x_v = (f_o(v))_{o \in O}$ とする。 $x_v x_v^T$ の各成分は次数 $\leq q-2$ の多項式なので完全直線上でも A 全体でも和が零になる。穴での値が標準基底だから、 $V = A \setminus O$ に制限すると

$$\sum_{v \in f} x_v x_v^T = 0, \quad \sum_{v \in V} x_v x_v^T = -I_m$$

が得られる。穴の個数の上下限は $0 < m < t = |V| \leq m\ell^2$ を保証する。incidence girthは局所部分群を埋め込むため、上限はcharacter packingのため、狭義不等式 $m < t$ は逆積の欠損検出のために使う。

Proposition 2.3 · pp. 5–6 Theorem 3.1 · p. 6

2. 存在から停止する処方へ

$h = 2, 3, \dots$ と順に、 $\ell \equiv -1 \pmod{q^{100}}$ の最小素数、所定次数の最初の既約多項式による有限体 $K = \mathbb{F}_{2^{h(\ell-1)}}$ 、その部分体 Q と最初の原始 ℓ 乗根を選ぶ。各 h で有限個の $(O, \mathcal{F})$ を列挙し、個数・完全直線・正則性・girthを判定する。Theorem 5.1は十分大きいすべての h と任意の体の列挙に対する成功を保証するため、外側の探索も止まる。

その後は有限体線形代数、有限の局所乗法表、指定されたconjugation relations、有限群のmatrix unitsによって群と二つの有限式が定まる。異なる表示語が同じ群元かどうかを判定して有限式を正規化する必要はない。この処方を実行可能性を理論的に主張するもので、実用的な計算量や実行済みの出力を与えるものではない。

Section 6; Equation (6.2) · pp. 22–24 [Xyl11, Theorem 1.1, 誌面 p. 66 / PDF p. 2]

3. Theorem 3.1 の証明 — 矩形恒等式、逆積欠損、scalar化

証明対象：Theorem 3.1 · p. 6

Theorem 3.1 — Incidence criterion

ℓ を奇素数、 K を原始 ℓ 乗根 ζ を含む標数2の有限体、 $\kappa = \ell^2$ とする。 $|V| = t$ と有限な非空部分集合族 $\mathcal{F}$ は、各 $v \in V$ がちょうど $\ell + 1$ 個のmemberに属し、二部incidence graphのgirthが12以上であるとする。整数 m と列ベクトル $x_v \in K^m$ が

$$0 < m < t \leq m\kappa, \quad \sum_{v \in V} x_v x_v^T = -I_m, \quad \sum_{v \in f} x_v x_v^T = 0 \quad (f \in \mathcal{F})$$

を満たせば、位数 ℓ の元を含む有限表示群 G と有限和 $a_{\text{out}}, b_{\text{out}} \in K[G]$ が以下の構成で得られ、 $a_{\text{out}} b_{\text{out}} = 1$ かつ $b_{\text{out}} a_{\text{out}} \neq 1$ となる。

Theorem 3.1 · p. 6

1 局所群を埋め込み平均を取る

$$K_v \hookrightarrow N, \quad P_v = \ell^{-2} \sum_{u \in K_v} u$$

$$UP = U, \quad PT = T, \quad UT = I_m$$

$t \leq m\ell^2$ と直交 idempotents で平方化

[Lemma 3.2 · pp. 7–9](#)

[Sections 4.2–4.3; Equations \(4.5\)–\(4.13\) · pp. 10–12](#)

2 character を slot に収納する

$$H = N \times C_\ell \hookrightarrow L, \quad J_0 C = eP$$

$$a_{\text{mat}} = UJ_0 + (1 - e)I_m, \quad b_{\text{mat}} = CT + (1 - e)I_m$$

$m < t$ で rank 欠損、特殊化は $K[H]$ だけに適用

[Section 4.4; Equations \(4.14\)–\(4.17\) · p. 12](#)

3 部分群環に戻して欠損を検出

$$\Delta = b_{\text{mat}} a_{\text{mat}} - I_m; \quad J_0 \Delta C = e(TU - P)$$

$$\epsilon : K[H] \rightarrow K, \quad \epsilon(e(TU - P)) = X^T X - I_t \neq 0$$

matrix units の線形独立性と補元の annihilation

[Section 4.5; Equations \(4.18\)–\(4.25\) · pp. 13–14](#)

[Section 4.6 · p. 14](#)

4 有限群の corner へ埋め込み単位を補う

$$\Phi : \text{Mat}_m(K[L]) \hookrightarrow K[L \times F], \quad \Phi(I_m) = f_{\text{blk}}$$

$$a_{\text{out}} = 1 - f_{\text{blk}} + \Phi(a_{\text{mat}})$$

$$b_{\text{out}} = 1 - f_{\text{blk}} + \Phi(b_{\text{mat}})$$

$$a_{\text{out}} b_{\text{out}} = 1, \quad b_{\text{out}} a_{\text{out}} - 1 = \Phi(\Delta) \neq 0$$

部分群平均からmatrix defectを作りscalar群環へ埋め込む

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 局所群の埋込みが平均と矩形恒等式を正当化する

各点に $K_v^0 = (\mathbb{F}_\ell^2, +)$ 、各memberに $L_f^0 = (\mathbb{F}_\ell, +)$ を置き、incidentな L_f^0 を K_v^0 の異なる1次元部分空間へ貼り合わせて N を作る。Lemma 3.2は局所群が潰れないことを、例外頂点の一つある平面 weighted graphへ帰着して証明する。最小化後はblack degree ≥ 3 、ordinary white degree ≥ 2 、高々一面を除くface length ≥ 12 であり、Eulerの式と矛盾する。これは単にpresentationを与えるだけでは得られない埋込み保証である。

埋め込まれた K_v の平均 $P_v = \kappa^{-1} \sum_{u \in K_v} u$ と $P = \text{diag}(P_v)$ を使い、 $U_{-,v} = -\kappa x_v P_v$, $T_{v,-} = P_v x_v^T$ を定める。 ℓ が奇数なので分母は可逆である。incidentな1次元部分群による $K_v \setminus \{1\}$ の分割と二つのpairingは

$$UP = U, \quad PT = T, \quad UT = I_m$$

を与える。ただし U, T はまだ矩形であり、直接有限性の反例ではない。

Lemma 3.2 · pp. 7–9 Section 4.1; Equation (4.4) · p. 10

2. Character packing後も部分群環へ戻して欠損を検出する

$H = N \times \langle z \rangle$ 、 $|z| = \ell$ とし、局所群の座標同型と character twist を実現する stable letters を加えて L を作る。原稿は H の正則置換作用を延長して $H \hookrightarrow L$ を直接証明する。中央 idempotent $e = \ell^{-1} \sum_r \zeta^{-r} z^r$ と直交 character idempotents により、 $t \leq m\kappa$ 個の座標を m 個の slot へ収納し、 $J_0 C = eP$ を得る。そこで

$$a_{\text{mat}} = UJ_0 + (1 - e)I_m, \quad b_{\text{mat}} = CT + (1 - e)I_m$$

は $a_{\text{mat}} b_{\text{mat}} = I_m$ を満たす。

逆積欠損 $\Delta = b_{\text{mat}} a_{\text{mat}} - I_m$ は

$$J_0 \Delta C = e(TU - P) \in \text{Mat}_t(K[H])$$

で検出する。 $\epsilon : K[H] \rightarrow K$, $nz^r \mapsto \zeta^r$ を適用すると、 $X = (x_v)$ に対して $X^T X - I_t$ となる。 $m < t$ により $\ker X \neq 0$ だからこの行列は非零である。 $K[H] \hookrightarrow K[L]$ が非零性を保つ。特殊化 ϵ を $K[L]$ 全体へ延長できるとは主張していない。

Sections 4.2–4.3; Equations (4.5)–(4.13) · pp. 10–12 Section 4.4; Equations (4.14)–(4.17) · p. 12

3. 有限群因子のmatrix unitsで単位元を補完する

$F = (\mathbb{Z}/\ell)^m \rtimes S_m$ の character idempotents から p_{ij} を作り、 $p_{ij} p_{kr} = \delta_{jk} p_{ir}$ と線形独立性を確認する。 $G = L \times F$ に対して

$$\Phi : \text{Mat}_m(K[L]) \hookrightarrow K[G], \quad \Phi(Z) = \sum_{i,j} Z_{ij} p_{ij}$$

は単射な環準同型だが、 $\Phi(I_m) = f_{\text{blk}}$ は corner の単位元である。そこで

$$a_{\text{out}} = 1 - f_{\text{blk}} + \Phi(a_{\text{mat}}), \quad b_{\text{out}} = 1 - f_{\text{blk}} + \Phi(b_{\text{mat}})$$

とする。補元は image を両側で annihilate するため、前向き積は 1、逆積欠損は $\Phi(\Delta) \neq 0$ となる。 $|S_m|$ は逆数にしておらず、逆数にする $|(\mathbb{Z}/\ell)^m|$ だけが奇数である。

局所零和の長さ高々3のrelatorsが N の有限表示を与え、有限個の stable letters · relations と有限群 F によって G も有限表示となる。埋込み鎖 $K_v \leq N \leq H \leq L \leq G$ は位数 ℓ の元を保持する。有限 support が与える有限生成性だけから有限表示性を結論しているわけではない。

4. Theorem 5.1 の証明 — 穴の周囲のtradeで正則性を保つ

証明対象：Theorem 5.1 · p. 15

Theorem 5.1 — 正則で大きなincidence girthをもつ完全直線系

$q = 2^h$ 、 ℓ は $-1 \pmod{q^{100}}$ の最小素数とし、 $D = \ell + 1$, $s = \lfloor \log_q D \rfloor$, $b = s + 20$, $n = 10b$, $N_{\text{pt}} = q^n$ とする。任意に列挙した位数 q の体 Q に対し $A = Q^n$, $S = S_{(q-2)/2}$ と置く。

十分大きいすべての h とすべてのこのような Q ・列挙について、 $O \subset S$ と $V = A \setminus O$ に含まれる完全affine Q -lineの集合 $\mathcal{F}$ が存在し、

$$\frac{2N_{\text{pt}}}{D^2} \leq |O| \leq \frac{7N_{\text{pt}}}{D^2},$$

各 V の点がちょうど D 本の直線に属し、incidence graphのgirthは 12 以上となる。

Theorem 5.1 · p. 15

1 一様な次元上界を得る

$$\ell \equiv -1 \pmod{q^{100}}, \quad \ell \leq Cq^{100L}$$

$$s = \lfloor \log_q(\ell + 1) \rfloor, \quad n = 10(s + 20) = O(1)$$

最小素数の一様評価、Vandermonde 配置、穴の削除
[\[Xyl11, Theorem 1.1, 誌面 p. 66 / PDF p. 2\]](#)
[Lemmas 5.2–5.4 · pp. 15–18](#)

2 両立する穴と direction spaces を選ぶ

$$2q^n/D^2 \leq |O| \leq 7q^n/D^2$$

translate 内の衝突と replacement rectangle を排除

三角形・四角形・五角形の型分けと local lemma
[Lemmas 5.5–5.7 · pp. 19–21](#)

3 ランダム slab で短 polygon を排除

各 event は高々 4 変数に依存

$$\max_{P_j, C} \sum_{A \ni P_j, C} \Pr(A) = O(q^{-7}) < 1/16$$

非穴点の incidence は一つずつ減増または不変
[Lemmas 5.8–5.9; proof of Theorem 5.1 · pp. 21–22](#)

4 fan を平行線へ交換して次数を保存

q fan lines $\mapsto q - 1$ parallel lines
 穴を除き、各点次数 D と girth ≥ 12 を得る

一様な素数評価、穴の選択、slabとlocal trade

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 一様なパラメータと両立する穴を選ぶ

Xylourisの定理を互いに素な剰余 $q^{100} - 1$ と法 q^{100} に適用し、 $\ell \leq Cq^{100L}$ を得る。ここで $C > 0, L$ は絶対定数で、Xylourisの記述では $L = 5.18$ とできる。このため s 、従って n は h によらない上限をもち、 $h \rightarrow \infty$ の見積りを一様に使える。 D を q 個ずつのdirection bundleへ分け、任意の高々10個がdirect sumになる W_r, E_j をVandermonde配置で選ぶ。

穴は小確率で選んで衝突を削除する。各 W_r のtranslateに穴が高々一つ、各関連cosetで穴密度が有界、replacement linesだけで作る例外rectangleの4つの証人が同時に穴にならない、という三つの条件を得る。これらは後で直線を交換するときの整合性とevent countにそれぞれ必要になる。

[Xyl11, Theorem 1.1, 誌面 p. 66 / PDF p. 2] Lemmas 5.2–5.4 · pp. 15–18

2. Slabの短polygonを排除し、完全直線を交換する

各 $U_j = d_j \oplus E_j$ のcosetで独立な2次元部分空間 $P_{j,C} \subset E_j$ を選び、3次元slabに分ける。三角形・四角形・五角形のcandidateを、direction spacesのdirectnessで少数の型へ絞る。各bad eventは高々4変数に依存し、1変数あたりの確率の総和は $O(q^{-7})$ 。原稿内で証明するweighted local lemmaにより、slab内の穴の衝突と短polygonを同時に排除する。

各slabを完全直線でpartitionしてから、穴 o とbundle r ごとに o を通る q 本のfanを除き、 $o + W_r$ 内の $q - 1$ 本の平行線へ置き換える。穴以外の点は一つのincidenceを失うと同時に一つ得るか、どちらも変化しない。穴はすべてのincidenceを失う。従って V 上の次数は正確に D のままである。短いincidence cycleは排除済みのgeneric polygonか、穴の選択で禁止したreplacement rectangleに帰着する。

Lemmas 5.5–5.7 · pp. 19–21 Lemmas 5.8–5.9; proof of Theorem 5.1 · pp. 21–22

5. Corollary 7.3 の証明 — 右隣接作用と像の局所方程式

証明対象：Corollary 7.3 · p. 26

証明の道筋。 上の主要結果で定義した T_c は右隣接の規約で $T_c T_d = T_{cd}$ を満たす。左逆写像で単射性を得て、逆積をprojectionとして像を同定する。

1 右隣接の作用を使う

$(T_c x)(g) = \sum_u c_u x(gu), \quad T_c T_d = T_{cd}$
 x の support は無限でもよい

有限 support の係数和を合成する

[Lemma 7.1 · p. 25](#)

[Proposition 7.2 · p. 26](#)

2 左逆写像と像を同定

$ab = 1 \implies T_a T_b = \text{id}$
 $\text{im } T_b = \{y : T_{ba} y = y\}$

scalar な逆積欠損と有限 alphabet K

[Corollary 7.3 · p. 26](#)

3 非零欠損係数から像にない configuration を得る

$(ba - 1)_h \neq 0 \implies (T_{ba} \delta_h - \delta_h)(1_G) \neq 0$
 $\delta_h \notin \text{im } T_b; \quad G$ は surjunctive でない

scalar逆元から全configuration上の単射非全射写像へ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 左逆写像は全configurationに作用する

係数のsupportは有限なので、 $x \in K^G$ 自身のsupportが無限でも積の二重和は有限であり、
 $T_c(T_d x)(g) = \sum_{u,v} c_u d_v x(guv) = T_{cd} x(g)$ 。積の順序は dc ではない。 $a = a_{\text{out}}, b = b_{\text{out}}$ とすると
 $T_a T_b = T_{ab} = \text{id}$ で、 T_b は単射となる。 K の有限性が有限alphabet、 b の有限supportが有限memory
を供給する。

[Lemma 7.1 · p. 25](#)

2. 逆積欠損の係数が欠ける点指示関数を選ぶ

$y = T_b x$ なら $T_{ba} y = y$ 。逆にこの等式を満たせば $y = T_b(T_a y)$ なので

$$\text{im } T_b = \{y : T_{ba} y = y\}.$$

$(ba - 1)_h \neq 0$ となる係数をとると、点指示関数 δ_h は

$$(T_{ba} \delta_h - \delta_h)(1_G) = (ba - 1)_h \neq 0$$

を満たし、像に入らない。この像は有限local equations $\sum_u (ba - 1)_u y(gu) = 0$ でも記述できる。
従って非全射性と非surjunctivityが同時に得られる。特定の非零係数を探索で実際に計算したという主張は含まない。

Proposition 7.2 · p. 26 Corollary 7.3 · p. 26

6. 直接入力とカタログ内での役割

入力・接続

Xyl11、Theorem 1.1

利用箇所

§5の s の一様上界、§6の素数探索

確認範囲

互いに素な法・剰余、効果的定数付きstatement、適用を照合。外部証明未検証。

入力・接続

ES04、Corollary 4.7

利用箇所

Introductionの非sofic性

確認範囲

任意division ring上のsofic群環のstable finitenessと、その対偶を照合。構成への入力ではなく帰結。

入力・接続

本稿Theorem 1.1 → determinant反例原稿

利用箇所

群環determinant反例の標数2入力

確認範囲

本稿側のscalar結論を確認。利用先の接続は当該記事とカタログの接続記録で扱う。

HNN型の埋込み、有限群によるmatrix-to-scalar移送、補間、local lemmaは原稿内で証明される。紹介される既存文献やcoding論文への引用を、未照合の直接依存として追加していない。

7. 原典を読む入口と確認範囲

- Proposition 2.3 · pp. 5–6 — 穴の補間から二つのpairingを得る。

- Theorem 3.1 · p. 6 — incidence条件とサイズ不等式の役割。
- Section 4.4; Equations (4.14)–(4.17) · p. 12 — 部分群環に戻して逆積欠損を検出する。
- Section 4.5; Equations (4.18)–(4.25) · pp. 13–14 — matrix unitsと補助単位元でscalar化する。
- Theorem 5.1 · p. 15 — 正則性を保つtradeとgirth排除。
- Section 6; Equation (6.2) · pp. 22–24 — 有限探索の停止と有限式の指定。
- Proposition 7.2 · p. 26 — 全configuration上の像と欠ける点指示関数。

§§2–4のpairing・局所埋込み・packing・逆積欠損・scalar化、§5のパラメータと幾何構成、§6の停止処方、§7.1–7.2のCAと像の証明を読んだ。穴・slabの全確率定数の独立再計算、外部定理の全証明、探索の実行は行っていない。§7.3のCorollary 7.4と別原稿のtype- F_∞ embeddingはこの記事の確認範囲外である。著者の存在・停止の主張を紹介する概説であり、全証明の正しさの認定ではない。

A Counterexample to the Group-Ring Determinant Conjecture

二進の片側逆元欠損を、実traceの余剰と整数行列の負の対数行列式へ移す

原稿は標数2のscalar群環反例を入力として、整数群環上の行列式予想の反例を構成する。核心は、有理直交射影の実traceが、そのmod 2因子分解の列数を上回る状況を作り、その差をFuglede–Kadison行列式へ変換することである。

原稿の著者: OpenAI · September 23, 2026 · 9 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 有理可逆な整数群環行列の反例

有限生成離散群 G_D 、整数 $n \geq 1$ 、 $\mathbb{Q}[G_D]$ 上可逆な $A \in M_n(\mathbb{Z}[G_D])$ が存在し、左正則表現の作用素 T_A について

$$0 < \det_{\mathcal{N}(G_D)}(T_A) < 1.$$

$T_A^*T_A$ の確率スペクトル測度を μ_A 、 $\tau_n(I_n) = n$ となる非正規化traceを τ_n とすると、

$$\log \det_{\mathcal{N}(G_D)}(T_A) = \frac{1}{2} \tau_n \log(T_A^*T_A) = \frac{n}{2} \int_{(0,\infty)} \log t \, d\mu_A(t).$$

この積分は有限かつ厳密に負である。 A は整数群環上の行列であり、 $\mathbb{Z}[G_D]$ 上可逆とは主張していない。構成される群は位数3の元を含む。有限表示性やtorsion-free性は結論に含まれない。

[Theorem 1.1 · p. 2](#)

[Equations \(1.1\)–\(1.2\) · p. 1](#)

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [A Counterexample to the Group-Ring Determinant Conjecture](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [OpenAI26two](#) OpenAI — A Counterexample to Kaplansky’s Direct-Finiteness Conjecture in Characteristic Two : 標数2の有限体上のscalar片側逆元対を供給する唯一の外部構成入力。September 23, 2026; fixed commit 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a。
- [ES05](#) Gábor Elek; Endre Szabó — Hyperlinearity, essentially free actions and L^2 -invariants. The sofic property : 構成後の非sofic性への帰結にのみ使用する行列式下界。arXiv:math/0408400v2, 2014-10-07, 20 pages。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 の証明 — 主定理の全体像

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · p. 2

証明の道筋。 標数2の有限体 K_2 と scalar 対 $a_2 b_2 = 1 \neq b_2 a_2$ を出発点とする。 $d = [K_2 : \mathbb{F}_2]$ として二進行列へ移し、射影の構成と整数行列への変換を順に用いる。出発点は停止が証明された有限手順による存在定理であり、実行済み数値例ではない。 $K_2 = \mathbb{F}_2$ も仮定しない。

1 標数 2 の scalar 入力
 $a_2 b_2 = 1 \neq b_2 a_2 \text{ in } K_2[H_2], d = [K_2 : \mathbb{F}_2].$

係数制限と、巡回座標での一係数分離

[OpenAI26two, Theorem 1.1, p. 1]; Lemma 2.1 · p. 3; Proposition 2.2 · pp. 3–4

2 二進欠損を実 trace 差へ
 $G_D = (\bigoplus_{H_2} C_3) \rtimes H_2, P \in M_{d+1}(\mathbb{Z}[1/3][G_D]).$
 $P = P^* = P^2, \tau(P) = d + \theta, \bar{P} = uv \text{ (} d \text{ 列経由)}.$
mod q へ持ち上げ、分母を消す

Lemmas 3.1–3.2 · pp. 5–6

3 整数行列と有理逆元
 $q = 2^k \equiv 1 \pmod{3^{1+|S|}}, q > 1.$
 $A \in M_{2d+1}(\mathbb{Z}[G_D]), A^{-1} \in M_{2d+1}(\mathbb{Q}[G_D]).$

shear を除き、trace 差を計算する

Proposition 4.3 · p. 7; §5; Equations (5.1)–(5.2) · p. 8

4 全結論
 $\det_{\mathcal{N}(G_D)}(T_A) = q^{-\theta} \in (0, 1), \theta = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{|S|} > 0.$
 $\int \log t \, d\mu_A = -\frac{2\theta \log q}{2d+1} > -\infty.$
 H_2 の生成系と z_1 で G_D を有限生成。

二進欠損から射影のtrace差を作り、整数行列の行列式へ変換する

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. scalar入力から有限生成群上の整数行列へ係数ごとの正則表現 $K_2 \hookrightarrow M_d(\mathbb{F}_2)$ により、 $X, Y \in M_d(\mathbb{F}_2[H_2])$ と $C = I_d - YX \neq 0$ を得る。 $XY = I_d$ から $C^2 = C, XC = CY = 0$ である。Proposition 2.2は

$$G_D = \left(\bigoplus_{h \in H_2} C_3 \right) \rtimes H_2, \quad P \in M_{d+1}(\mathbb{Z}[1/3][G_D]), \quad \tau_{d+1}(P) = d + \theta$$

を構成し、 $\bar{P}$ を d 列経由で因子分解する。 H_2 の有限生成系と恒等元座標の生成元 z_1 だけで G_D を生成できる。Proposition 4.3 に $r = d, m = d + 1$ を入れ、 $n = 2d + 1$ の整数行列と有限台の有理逆元を得る。

[OpenAI26two, Theorem 1.1, p. 1]

Lemma 2.1 · p. 3

§5; Equations (5.1)–(5.2) · p. 8

2. traceの余剰から二つの厳密不等式と積分の有限性へ

有限集合 $S \subset H_2 \setminus \{1\}$ から

$$\theta = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{|S|} > 0, \quad D = 3^{1+|S|}$$

を得る。 $q = 2^k > 1$ を $q \equiv 1 \pmod{D}$ となるよう取ると、

$$\det_{\mathcal{N}(G_D)}(T_A) = q^{-\theta} \in (0, 1), \quad \int_{(0, \infty)} \log t \, d\mu_A(t) = -\frac{2\theta \log q}{2d+1} < 0.$$

有理群環逆元の正則表現は有界なので、正のスペクトルは0から離れたコンパクト区間に入る。したがって対数積分の有限性は別途保証され、これはdeterminant classの失敗ではなく下界1の失敗である。

Proposition 4.3 · p. 7

§5; Equations (5.1)–(5.2) · p. 8

3. Proposition 2.2 の証明 — 一係数の分離とtrace差

証明対象 : Proposition 2.2 · pp. 3–4

Proposition 2.2 — 二進因子分解より大きなtraceを持つ射影

$d \geq 1$, $X, Y \in M_d(\mathbb{F}_2[H_2])$ が $XY = I_d \neq YX$ を満たすとする。上記の G_D には有限集合 $S \subset H_2 \setminus \{1\}$ と直交射影 $P \in M_{d+1}(\mathbb{Z}[1/3][G_D])$ が存在し、 $\tau_{d+1}(P) = d + \theta$ 、 $\theta = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{|S|} > 0$ 、 $\bar{P} = uv$ を満たす。 u は $(d+1) \times d$ 、 v は $d \times (d+1)$ の $\mathbb{F}_2[G_D]$ 行列で、 $D = 3^{1+|S|}$ は P の全係数の分母を払う。

Proposition 2.2 · pp. 3–4

1 非零係数を恒等元へ移す

$$C = I_d - YX \neq 0, C^2 = C, XC = CY = 0.$$

$$h_0^{-1}C_{ij} = 1 + \sum_{s \in S} s, S \subset H_2 \setminus \{1\}.$$

$sp s^{-1}$ の p_s と p の $1 - p_s$ が積を零にする
[Proposition 2.2 · pp. 3-4](#)

2 可換な座標射影で分離

$$p_h = (1 + z_h + z_h^2)/3, p = p_1 \prod_{s \in S} (1 - p_s).$$

$$p s p = 0 \ (s \in S), \tau(p) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{|S|} = \theta > 0.$$

$XC = CY = 0$ と $C^2 = C$ により非対角ブロックが消える
[Proposition 2.2 · pp. 3-4](#)

3 実 trace と二進列数を分ける

$$fCw = \bar{p}, P = \text{diag}(I_d, p),$$

$$u = \begin{pmatrix} X \\ fC \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} Y & Cw \end{pmatrix}, \quad uv = \bar{P}.$$

$$\tau(P) = d + \theta > d; D = 3^{1+|S|} \text{ が分母を払う。}$$

C3座標の平均で欠損の一係数を分離し、実traceと二進列数の差を作る

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 群を拡大して不要な係数を消す

非零成分 C_{ij} の係数1を左移動して $h_0^{-1}C_{ij} = 1 + \sum_{s \in S} s$ とする。座標 h の平均 $p_h = (1 + z_h + z_h^2)/3$ から

$$p = p_1 \prod_{s \in S} (1 - p_s)$$

を作る。座標平均は可換な自己共役冪等元である。 $sp s^{-1}$ は p_s を、 p は $1 - p_s$ を因子に持つので $p s p = 0$ 。ラベル集合とその平行移動が互いに素である必要はない。恒等元係数は元の相異なる座標ごとに積となり $\tau_1(p) = \theta > 0$ を与える。

[Proposition 2.2 · pp. 3-4](#)

2. 二進欠損を用いて一列を節約する

f を第 i 成分が $\bar{p} h_0^{-1}$ の行、 w を第 j 成分が $\bar{p}$ の列とすると $fCw = \bar{p}$ 。そこで

$$P = \text{diag}(I_d, p), \quad u = \begin{pmatrix} X \\ fC \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} Y & Cw \end{pmatrix}$$

とする。 $XC = CY = 0$ と $C^2 = C$ から $uv = \text{diag}(I_d, \bar{p}) = \bar{P}$ となる。大きい実traceを持つのは有理直交射影 P であり、二進射影のtraceを実数として比較しているのではない。

Proposition 2.2 · pp. 3–4

4. Proposition 4.3 の証明 — 整数化とshear不変性

証明対象：Proposition 4.3 · p. 7

Proposition 4.3 — trace差の行列式への変換

G を離散群、 $m, r \geq 1$ 、 $P = P^* = P^2 \in M_m(\mathbb{Q}[G])$ とする。奇数 $D > 0$ が分母を払い、 $\bar{P} = uv$ が $\mathbb{F}_2[G]$ 上の $m \times r$ と $r \times m$ の因子分解を持つと仮定する。各 $q = 2^k > 1$ 、 $q \equiv 1 \pmod{D}$ についてLemma 3.2の行列 $A \in M_{r+m}(\mathbb{Z}[G])$ は $\mathbb{Q}[G]$ 上可逆で、

$$\tau_{r+m} \log(T_A^* T_A) = 2(r - \tau_m(P)) \log q, \quad \log \det_{\mathcal{N}(G)}(T_A) = (r - \tau_m(P)) \log q.$$

さらに $T_A^* T_A$ のスペクトル測度の台は $(0, \infty)$ のコンパクト部分区間に含まれる。

Proposition 4.3 · p. 7

1 corner 環で因子分解を持ち上げる

$$q = 2^k, e = P_q, W = e - eu_0v_0e, W^k = 0.$$

$$Q = e + W + \cdots + W^{k-1}, e = (Qeu_0)(v_0e).$$

$q \equiv 1 \pmod{D}$ と $UV \equiv P \pmod{q}$ で整数係数を得る
 Lemmas 3.1–3.2 · pp. 5–6

2 整数化と有理分解

$$A = \begin{pmatrix} qI_r & V \\ U & q^{-1}\{UV - P - q(I_m - P)\} \end{pmatrix} = L_1 B R_1.$$

$$B = \text{diag}(qI_r, -q^{-1}P - (I_m - P)).$$

零対角ブロックと trace の巡回性を使う
 Lemmas 4.1–4.2 · pp. 6–7

3 shear を連続的に除く

$$M(x) = L_x B R_x, \tau(M' M^{-1}) = 0.$$

$$\frac{d}{dx} \tau \log(M^* M) = 2 \operatorname{Re} \tau(M' M^{-1}) = 0.$$

直交射影の補空間を分け、有界逆元を使う
 Proposition 4.3 · p. 7

4 対角射影で計算する

$$\log(B^* B) = 2 \log q \operatorname{diag}(I_r, -P).$$

$$\log \det(T_A) = (r - \tau(P)) \log q.$$

$$A^{-1} \in M_{r+m}(\mathbb{Q}[G]) \Rightarrow \operatorname{supp} \mu_A \subseteq (0, \infty).$$

mod 2 因子分解を mod q へ持ち上げ、ブロック shear を除いて行列式を計算する

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. corner の有限幾何級数が整数化を可能にする

$R = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})[G]$, $e = P_q$ とする。 u, v の任意の持ち上げ u_0, v_0 に対して corner 環 $eM_m(R)e$ で $Z = eu_0v_0e$, $W = e - Z$ と置く。 W の全係数は偶数で $W^k = 0$ 、したがって $Q = e + W + \cdots + W^{k-1}$ は Z の corner 逆元である。 $u_q = Qeu_0$, $v_q = v_0e$ は $e = u_qv_q$ を与える。

その整数持ち上げを U, V とすると、

$$A = \begin{pmatrix} qI_r & V \\ U & q^{-1}\{UV - P - q(I_m - P)\} \end{pmatrix}.$$

$P + q(I_m - P) = qI_m + (1 - q)P$ は $D \mid q - 1$ により整数であり、 UV とのmod q 一致で右下成分も整数になる。 $J = -q^{-1}P - (I_m - P)$ 、 $B = \text{diag}(qI_r, J)$ なら $A = L_1BR_1$ で、 L_x, R_x は非対角成分 $xU/q, xV/q$ の下・上三角shearである。 $J^{-1} = -qP - (I_m - P)$ から有理逆元が明示される。持上げに $PU = U$ や $V = U^*$ を課す必要はない。

Lemmas 3.1–3.2 · pp. 5–6

2. 非可換な経路上ではtraceを取ってから微分する

$M(x) = L_xBR_x$ に対しLemma 4.1は

$$\frac{d}{dx} \tau \log(M(x)^* M(x)) = 2 \operatorname{Re} \tau(M'(x) M(x)^{-1})$$

を与える。証明は一様収束する対数級数とtraceの巡回性を使い、 M^*M とその微分の可換性を仮定しない。shearの対数微分は対角ブロックが零であり、共役後もtraceが零なので、この量は経路上一定である。 $B^*B = \text{diag}(q^2I_r, q^{-2}P + I_m - P)$ で計算すると所要の差 $r - \tau_m(P)$ が出る。有界逆元は $\|T_A^{-1}\|^{-2}I \leq T_A^*T_A \leq \|T_A\|^2I$ を与える。

Lemmas 4.1–4.2 · pp. 6–7

Proposition 4.3 · p. 7

5. 直接入力と帰結の区別

標数2のscalar対はCharacteristic Twoの記事が扱う外部入力であり、その構成を本稿内で再証明しない。奇標数の対だけでは二進の前提を満たさない。射影の座標法やtracial logarithmic derivativeには先行研究があるが、本稿は必要な論証を局所的に与えている。

非sofic性は構成後の帰結である。 G_D がsoficなら、ES05の下界を正の自己共役整数行列 A^*A へ適用でき、 $\tau \log(T_A^*T_A) \geq 0$ となって負値に矛盾する。この定理は A の構成には使わない。

[ES05, Theorem 5, p. 18]

§5; Equations (5.1)–(5.2) · p. 8

6. 原典を読む入口と確認範囲

- Proposition 2.2 · pp. 3–4 — 欠損の一係数を分離し、実traceと二進因子分解の差を作る
- Lemmas 3.1–3.2 · pp. 5–6 — corner逆元と整数係数の確保を追う
- Lemmas 4.1–4.2 · pp. 6–7 — 非可換な微分をtraceの巡回性で処理する
- §5; Equations (5.1)–(5.2) · p. 8 — 全結論と正規化を照合する

原稿の§§2-5を読み、主要結果・射影・mod q 持上げ・整数性・trace計算・有限生成性の接続を照合した。標数2の入力定理の記述と本稿の使用箇所、ES05の正の整数行列に対する下界と非sofic帰結への適用も照合した。外部論文の全証明、有限手順の数値実行、専門家査読・形式検証はこの確認に含まれない。

A Counterexample to Kaplansky's Direct-Finiteness Conjecture in Odd Characteristic

高次数のmodular表現、共通central sector、三角圧縮からscalar片側逆元へ

原稿は一つの指定された奇素数 p と位数 p^4 の体について、直接有限性の反例を有限の公式と選択で構成する。低rankのグラフ適合行列と、大きい正則rankを持つ局所冪等元の比率を比較するだけでは足りない。有限群の埋込みを保持し、同じ非零環の上でrankを長方形行列の恒等式へ変え、その後に行列の欠損をscalar群環へ単射的に移すことが証明の軸である。

原稿の著者: OpenAI · September 26, 2026 · 25 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#)

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 指定された奇標数のscalar反例

$$m = \binom{1200}{600}, \quad p = \min\{h \in \mathbb{Z} : h > 1, h \mid (m!)^2 + 1\}$$

とする。 p は奇素数である。位数 p^4 の指定された体 K 、torsionを含む指定された有限生成群 G 、指定された有限和 $a, b \in K[G]$ が存在し、

$$ab = 1, \quad ba \neq 1.$$

「指定された」とは有限の公式と順序付き有限集合内の選択による指定を意味する。原稿は実用的な計算としての実行を主張していない。結論はこの特定の p に対するもので、任意の奇素数に対する主張ではない。群の有限表示性はこの定理の結論として掲げられていない。

Theorem 1.1 · p. 1

Proposition 8.1 — 片側逆元と全配置上の像

k を有限体、 L を群、 $a, b \in k[L]$ を $ab = 1$ を満たす有限和とする。 $c = \sum_u c_u u$ に対し、有限台に限らない全関数 $x : L \rightarrow k$ 上で

$$(T_c x)(g) = \sum_u c_u x(gu)$$

と定める。このとき $T_b : k^L \rightarrow k^L$ は単射cellular automatonであり、

$$\text{im } T_b = \{y \in k^L : T_{ba} y = y\}.$$

$(ba - 1)_h \neq 0$ であるすべての h について、点指示関数 δ_h はその像に属さない。特に $ba \neq 1$ なら T_b は非全射である。Theorem 1.1のscalar対への適用で、単射かつ非全射のcellular automatonを得る。

Proposition 8.1; Equation (8.1) · p. 23

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 A Counterexample to Kaplansky's Direct-Finiteness Conjecture in Odd Characteristic を指します。外部入力には次の略号を使います。

- ES04 Gábor Elek; Endre Szabó — Sofic groups and direct finiteness : sofic群上のstable finiteness。scalar構成後の非sofic帰結にのみ使う。arXiv:math/0305440v2, 2004-04-19, 9 pages。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 の証明 — 構成全体の接続

証明対象 : Theorem 1.1 · p. 1

証明の道筋。 グラフの比 $t/m < 1/100$ と局所冪等元の比 $d/w > 1/96$ を、 $S = fK[G_1]$ 上のsplit injection $S^{md} \rightarrow S^{wt}$ へ結び付ける。 $wt < md$ から非零核ベクトルで証明された行列欠損を作り、有限群因子でscalar化する。高rank冪等元とcentral sectorの実現はProposition 3.1とProposition 5.1で詳述する。

1 指定体と二つの厳密な比

$$p = \min\{h > 1 : h \mid (m!)^2 + 1\}, |K| = p^4, m = \binom{1200}{600}.$$

$$F = \alpha\beta^T, t/m < 1/100; e^2 = e \in K[H], d/w > 1/96.$$

向き付き消滅、球面接着、central sector の rank 実現
[Corollary 3.3 · p. 8](#); [Lemma 4.1](#); [Proposition 4.2 · pp. 9–13](#); [Proposition 5.1 · p. 14](#)

2 有限群を保持して共通環へ

$$H_i \hookrightarrow G_0 \hookrightarrow G_1, S = fK[G_1], f \neq 0.$$

$$P_i P_j = 0 \quad (\text{辺 } i < j \text{ のみ}), Y_i J_i = fI_d, J_i Y_i = P_i I_w.$$

厳密下三角部分を有限級数で除き、核ベクトルを取る
[Lemmas 6.1–6.2 · pp. 18–20](#)

3 三角圧縮と非零欠損

$$D^\sharp C^\sharp = fI_{md}, r = wt < md.$$

$$A_R B_R = I_r, (B_R A_R - I_r)v_* = -v_* \neq 0.$$

独立な行列単位と補単位で欠損を保つ
[Proposition 7.1](#); [Lemma 7.2](#); [Corollary 7.3 · pp. 20–22](#);
[Proof of Theorem 1.1](#); [finite prescriptions · pp. 22–23](#)

4 有限群因子で scalar 化

$$\Phi : M_n(K[G_1]) \hookrightarrow K[G_1 \times \Lambda], g = \Phi(I_n).$$

$$a = 1 - g + \Phi(\tilde{A}_R), b = 1 - g + \Phi(\tilde{B}_R): ab = 1 \neq ba.$$

$$G = G_1 \times \Lambda \text{ は有限生成で torsion を含む.}$$

二つの比率を共通環へ実現し、三角圧縮と単射の行列符号化でscalar対を作る

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 係数体とグラフの低rank因子分解を固定する

$p \leq m$ なら p が $m!$ と $(m!)^2 + 1$ の両方を割るため、 $p > m$ である。また $(m!)^2 = -1 \text{ in } \mathbb{F}_p$ 。最小の非平方元 $\eta \in \mathbb{F}_p^*$ を選び、

$$K_0 = \mathbb{F}_p[\xi]/(\xi^2 - \eta), \quad K = K_0[\nu]/(\nu^2 - \xi)$$

とする。 $N_{K_0/\mathbb{F}_p}(\xi) = -\eta$ は非平方なので両段階が二次拡大であり、 $|K| = p^4$ 。 $M = p^4 - 1$ と位数 M の $\zeta \in K^*$ を固定する。

グラフ Γ の頂点は $[1200]$ の600元部分集合 I_i 、辺は $|I_i \cap I_j| < 200$ で定める。三つの隣接頂点なら和集合が1203元以上となるためtriangle-freeである。次数400以下へmultilinear化した多項式

$$Q_j(X) = \prod_{k=200}^{599} \frac{\sum_{x \in I_j} X_x - k}{600 - k}$$

から $F_{ij} = \sum_{T \in \mathcal{T}} \alpha_i(T) \beta_j(T)$ 、 $\mathcal{T} = \{T \subset [1200] : |T| \leq 400\}$ を得る。 $F_{ii} = 1$ 、異なる非隣接頂点では $F_{ij} = 0$ 、 $t = |\mathcal{T}|$ は $t/m < 1/100$ を満たす。分母は $p > m$ により可逆である。

Lemma 2.1; Proposition 2.2 · pp. 3–4

2. 片側消滅を接着し、有限群の埋込みを保持する

$P = (\mathbb{F}_p)^3$, $A_0 = (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^P$, $H = A_0 \rtimes P$ とし、 c を恒等元座標の関数、 $u(s) = (0, s)$ 、 $v(s) = cu(s)c^{-1}$ とする。 $U = u(P)$ と $V = cUc^{-1}$ は $U \cap V = 1$ を満たす。局所冪等元 e は $\ell = (p-1)/2$ について

$$(u(s) - 1)^\ell e = 0, \quad e(v(s) - 1)^\ell = 0, \quad d/w > 1/96$$

を満たす ($w = |H|$, $d = \dim_K eK[H]$)。各辺 $i < j$ で H_i の $v(1, \bar{j}, \bar{j}^2)$ と H_j の $u(1, \bar{i}, \bar{i}^2)$ を同一視して G_0 を作る。共通元を y とすると、 $K[\langle y \rangle] = K[X]/(X^p)$ の右消滅イデアルから $e_i = qX^{p-\ell}$ となり、 $p - \ell = \ell + 1$ により $e_i e_j = 0$ 。逆順の積は仮定しない。

Proposition 4.2 は $H_i \hookrightarrow G_0$ を保証する。必要な長さ3以下の局所語の非消滅は、 $p > m$ による Vandermonde 独立性と $U \cap V = 1$ で確認する。Lemma 4.1 の球面図式では、仮に核があれば非自明面がちょうど一つの最小図式を作る。中性辺・橋・同型面・連続同ラベルを縮約し、triangle-free 性と短語条件で通常の頂点次数・面長を4以上にする。Euler の総和8に対し、ループなしでは例外面の寄与は高々3、残る単一ループの場合でも高々7 となって矛盾する。この最初の商の単射性を通常の graph-of-groups 正規形だけで代用しない。

Corollary 3.3 · p. 8

Lemma 4.1; Proposition 4.2 · pp. 9–13

3. 共通環での恒等式から、証明可能な行列欠損へ

Proposition 5.1 により $G_0 \hookrightarrow G_1$ と非零 central idempotent f を取り、単位元が f の環 $S = fK[G_1]$ で $P_i = f e_i$ を用いる。 $Y_i J_i = f I_d$, $J_i Y_i = P_i I_w$ が各頂点で同時に成り立つ。

$C_0 = (\beta_j(T) P_j)_{T,j}$ と $D_0 = (\alpha_i(T) P_i)_{i,T}$ の積は $\mathcal{P} + N$ となる。 $\mathcal{P} = \text{diag}(P_i)$ 、 N は厳密下三角であり、 $N^m = 0$, $\mathcal{P}N = N = N\mathcal{P}$ 。有限幾何級数が $D_0 C_0$ を $\mathcal{P}$ へ直し、 w 重複製と J_i, Y_i によって

$$D^\sharp C^\sharp = f I_{md}, \quad C^\sharp : S^{md} \rightarrow S^{wt}, \quad r = wt < md = N_0$$

を得る。ここで不等式は通常の整数の不等式である。

$\iota : S^r \rightarrow S^{N_0}$ と $\pi : S^{N_0} \rightarrow S^r$ を最初の r 座標の包含と射影として、

$$A_R = \pi D^\sharp + (1 - f) I_r, \quad B_R = C^\sharp \iota + (1 - f) I_r$$

と置くと $A_R B_R = I_r$ 。最後の座標が f の u_* に対して $v_* = C^\sharp u_* \neq 0$ 、 $D^\sharp v_* = u_*$ 、 $A_R v_* = 0$ となり、 $(B_R A_R - I_r) v_* = -v_* \neq 0$ が逆積の欠損を証明する。群の語の一致判定は要らない。

Lemmas 6.1–6.2 · pp. 18–20

4. 非零欠損を保ってscalar化し、有限指定を完結する

最小の $q \geq 0$ で $n = M^q \geq r$ を取り、 A_R, B_R を単位行列で n 次へ拡張する。有限Heisenberg群 $\Lambda = (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^q \times (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^q \times \mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ の積を

$$(x, y, k)(x', y', k') = (x + x', y + y', k + k' + y \cdot x')$$

と定める。Proposition 7.1 の行列単位 Ω_{uv} は非零central sector $f'K[\Lambda] \simeq M_n(K)$ の基底を成す。shift/modulation表現で標準行列単位へ写ることが線形独立性、従って符号化

$\Phi : M_n(K[G_1]) \hookrightarrow K[G_1 \times \Lambda]$ の単射性を保証する。積の公式だけで単射性を済ませない。

$G = G_1 \times \Lambda$ とし、 $g = \Phi(I_n)$ に対して $a = 1 - g + \Phi(\tilde{A}_R)$ 、 $b = 1 - g + \Phi(\tilde{B}_R)$ と置く。補空間との交差項が零なので $ab = 1$ であり、単射性から $ba - 1 = \Phi(\tilde{B}_R \tilde{A}_R - I_n) \neq 0$ 。係数体は終始同じ K である。有限個の有限群と指定された同一視が G を有限生成し、埋め込まれた H_i がtorsionを残す。体・指標・基底・有限逆元の選択は全て順序付き有限集合内で完結する。

Proposition 7.1; Lemma 7.2; Corollary 7.3 · pp. 20–22

Proof of Theorem 1.1; finite prescriptions · pp. 22–23

3. Proposition 3.1 の証明 — 大きい局所冪等元を作る

証明対象 : Proposition 3.1; §3.1 · pp. 5–6

Proposition 3.1 — 両側の指定消滅と正則rank下界

上記の p, K, M, P, A_0, H, u, v を用い、 $\ell = (p-1)/2$, $w = |H|$ とする。有限の体演算で指定される冪等元 $e \in K[H]$ が存在し、全ての $s \in P$ について $(u(s) - 1)^\ell e = 0$ と $e(v(s) - 1)^\ell = 0$ を満たす。その正則rank $d = \dim_K eK[H]$ は $d/w > 1/96$ を満たす。

Proposition 3.1; §3.1 · pp. 5–6

1 高次数の列空間

$$X_j^p = 0, D = 3(p-1), \ell = (p-1)/2.$$

$$B: \deg \geq D - \ell + 1, h = \binom{\ell+2}{3}, h/p^3 > 1/48.$$

次数で両側を消し、grid 評価で半分超の指標を残す
[Proposition 3.1; §3.1 · pp. 5–6; Lemma 3.2; §3.2 · pp. 6–7](#)

2 非退化な重み付き pairing を選ぶ

$$N_\lambda = B^\top D_\lambda^{-1} B.$$

$$\det(B^\top \text{diag}(\tau) B) \neq 0; |\mathcal{R}| > |A_0|/(2p^3).$$

自由 orbit の行列単位で実現し、 p^3 本の列の rank を数える
[§3.3; Equations \(3.6\)–\(3.7\) · pp. 7–8](#)

3 Fourier block へ幕等元を置く

$$T_\lambda = B N_\lambda^{-1} B^\top D_\lambda^{-1}, T_\lambda^2 = T_\lambda.$$

$$d = hp^3 |\mathcal{R}|, d/w > 1/96.$$

$$(u(s) - 1)^\ell e = 0, e(v(s) - 1)^\ell = 0 \quad (\text{全 } s \in P).$$

高次数部分空間を重み付き pairing と Fourier orbit で群環の幕等元へ実現する

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. augmentation 次数で列と行を消す

K^P の translation 作用 L_s に対し $X_j = L_{\epsilon_j} - I$ と置く。 $X_j^p = 0$ で、 $X_1^{n_1} X_2^{n_2} X_3^{n_3} e_0$ ($0 \leq n_j < p$) は基底を成す。 $D = 3(p-1)$ として総次数 $D - \ell + 1$ 以上の基底を列に持つ行列 B を取ると、

$$(L_s - I)^\ell B = 0, \quad B^\top (L_s - I)^\ell = 0, \quad h = \text{rank } B = \binom{\ell+2}{3}, \quad h/p^3 > 1/48.$$

前者は次数を $D + 1$ 以上へ上げること、後者は $-s$ への同じ議論を転置することによる。転置には係数の共役を含めない。

[Proposition 3.1; §3.1 · pp. 5–6](#)

2. 重みを変えて非退化 pairing を十分な頻度で得る

A_0 の指標 λ について $D_\lambda = \text{diag}((x\lambda)(c))$ 、 $N_\lambda = B^\top D_\lambda^{-1} B$ とする。Cauchy–Binet による $\det(B^\top \text{diag}(\tau_x) B)$ は、相異なる単項式に極大 minor の二乗を係数として持ち、 B の全列 rank により非零である。次数 h の grid 評価で特異 pairing の割合は高々 $h/M < 1/4$ 。非自明安定化群を持つ指標の割合も $< 1/4$ であるため、自由 orbit から N_λ 可逆の指標は半分を超える。各該当 orbit から一つを取り $\mathcal{R}$ とすれば $|\mathcal{R}| > |A_0|/(2p^3)$ 。可適合性が orbit 上一定である必要はない。

[Lemma 3.2; §3.2 · pp. 6–7](#)

3. 表現行列のrankを正則rankへ数え直す

自由指標orbitに対応するFourier行列単位により、central blockは $M_{p^3}(K)$ になる。そこに

$$T_\lambda = BN_\lambda^{-1}B^\top D_\lambda^{-1}$$

を置き、それ以外のblockでは零として e を定める。 $T_\lambda B = B$ なので冪等でrankは h 。左乗法の像は p^3 本の列それぞれが $\text{im } B$ に入る行列だから、正則rankは hp^3 である。従って $d = hp^3|\mathcal{R}|$ 、 $d/w > h/(2p^3) > 1/96$ 。重み付き行因子により $v(s)$ の共役translationも指定の側で消える。対角化するのはprime-to- p の A_0 であり、modular群環全体の半単純性を仮定しない。

§3.3; Equations (3.6)–(3.7) · pp. 7–8

4. Proposition 5.1 の証明 — 正則rankを共通環上の恒等式にする

証明対象：Proposition 5.1 · p. 14

Proposition 5.1 — 共通central sectorでの長方形行列

K を標数 p の体、 M を p と素な正整数とし、 K は位数 M の元 ζ を含むとする。

$H = (C_M)^{(\mathbb{F}_p)^3} \rtimes (\mathbb{F}_p)^3$ 、 $w = |H|$ とする。可算群 G_0 が指定された $H_i \simeq H$ ($1 \leq i \leq m$) を含み、 $e_i \in K[H_i]$ が共通の正整数rank $d = \dim_K e_i K[H_i]$ を持つ冪等元であるとする。

G_0 を含む群 G_1 と位数 M のcentral元 z が存在し、 $f = M^{-1} \sum_{k=0}^{M-1} \zeta^{-k} z^k \neq 0$ 、 $S = fK[G_1]$ 、 $P_i = fe_i$ について、指定された $J_i \in \text{Mat}_{w \times d}(S)$ 、 $Y_i \in \text{Mat}_{d \times w}(S)$ が $Y_i J_i = fI_d$ 、 $J_i Y_i = P_i I_w$ を満たす。各成分は G_1 の指定された有限部分群の群環に f を掛けたものに属し、有限群演算と K 上の線形代数だけで構成される。

Proposition 5.1 · p. 14

1 有限群を付加し central 文字を固定

$$L_i = (C_M)^{H_i} \rtimes H_i, z = \delta_i, |z| = M.$$

$$f = M^{-1} \sum_k \zeta^{-k} z^k \neq 0, S = fK[G_1] \quad (\text{単位 } f).$$

指数和 1 で prime-to- p 安定化群を排除する
[§§5.1–5.2; Lemma 5.2 · pp. 14–16](#)

2 modular stabilizer block を分解

$$T_\theta \cap A_0 = 1, T_\theta \hookrightarrow (\mathbb{F}_p)^3.$$

$$fK[L_i] \simeq \prod_\theta M_{s_\theta}(K[T_\theta]).$$

augmentation 後の基底を有限幾何級数で持ち上げる
[§5.3; Equations \(5.5\)–\(5.7\) · pp. 17–18](#)

3 冪零 ideal を用いた有限基底変換

$$\mathfrak{a}^{3(p-1)+1} = 0, Q^{-1}EQ = \text{diag}(I_{d_0}, 0).$$

$$d = d_0|T_\theta|, w = s_\theta|T_\theta|, wd_0 = s_\theta d \quad (\text{整数等式}).$$

各 block の座標対応を逆写像で同じ群環へ戻す
[§5.3; Equations \(5.5\)–\(5.7\) · pp. 17–18](#)

4 同数の座標を対応させる

$$J_i \in \text{Mat}_{w \times d}(S), Y_i \in \text{Mat}_{d \times w}(S).$$

$$Y_i J_i = fI_d, J_i Y_i = P_i I_w, P_i = f e_i.$$

有限群を付加し、modular stabilizerの冪零augmentation idealでrankを厳密に実現する

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 指標sectorをそろえ、安定化群を制御する

$\langle z \rangle \times G_0 \curvearrowright L_i = (C_M)^{H_i} \rtimes H_i$ を付加し、 z を定数関数 δ_i と同一視する。共有部分群 $\langle z \rangle \times H_i$ の自由作用を軌道ごとに同一視することで、各因子の単射性を示す。従って z の位数が保たれ、 f の恒等元係数 M^{-1} は非零である。

$\chi(z) = \zeta$ となる指標orbitの安定化群 T_θ は A_0 と自明に交わる。もし位数 $q > 1$ の元が交われば、指標の指数和1が $q(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$ に入り矛盾する。従って $T_\theta \hookrightarrow (\mathbb{F}_p)^3$ で、非自明・非正規の場合も許す elementary abelian p 群となる。明示的行列単位と次元照合から

$$fK[L_i] \simeq \prod_\theta M_{s_\theta}(K[T_\theta]), \quad s_\theta = [H_i : T_\theta]$$

を得る。

[§§5.1–5.2; Lemma 5.2 · pp. 14–16](#)

2. 冪零ideal上で座標射影へ共役する

一つのblockで $D_\theta = K[T_\theta]$ 、 $E = \rho_\theta(P_i)$ とする。augmentation ideal $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a}^{3(p-1)+1} = 0$ を満たす。augmentation で E の像と補像の基底を選び、対応する E と $I - E$ の列から Q を作る。 $Q = Q_0(I + N)$ で N の成分は $\mathfrak{a}$ に入り、有限幾何級数が逆元を与える。これにより $Q^{-1}EQ = \text{diag}(I_{d_0}, 0)$ 。

元の正則表現との比較で、通常の数として $d = d_0|T_\theta|$ 、 $w = s_\theta|T_\theta|$ 、従って $wd_0 = s_\theta d$ となる。等しい個数の座標を対応させてblock内の長方形行列を作り、全blockを戻すと J_i, Y_i が得られる。単なる K -線形rankの等式から S 上の自由加群同型を飛躍して結論してはいない。

§5.3; Equations (5.5)–(5.7) · pp. 17–18

5. Proposition 8.1 の証明 — 無限台の配置にも欠損を残す

証明対象：Proposition 8.1; Equation (8.1) · p. 23

証明の道筋。主要結果の主張の規約で、有限和の合成順序を確認してから像を固定点集合として記述する。ここではcharacteristicやtorsionによる追加制約はない。

1 scalar 対から全配置への作用

$$ab = 1, (T_c x)(g) = \sum_u c_u x(gu), x \in k^L.$$

有限和を積の順序どおりに展開する
Proposition 8.1; Equation (8.1) · p. 23

2 有限 memory と左逆写像

$$T_c T_d = T_{cd}, T_a T_b = \text{id}.$$

T_b は単射 cellular automaton。

$y = T_b x$ の必要十分条件を求め、非零係数で検出する
Proposition 8.1; Equation (8.1) · p. 23

3 固定点条件と欠ける配置

$$\text{im } T_b = \{y : T_{ba} y = y\}.$$

$$(T_{ba} \delta_h - \delta_h)(1) = (ba - 1)_h \neq 0 \Rightarrow \delta_h \notin \text{im } T_b.$$

無限台の原像を許しても像に入らない。

群環積を全配置上の作用へ移し、像の固定点記述から欠ける配置を得る

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 合成順序と単射性

二つの有限和を展開すると $T_c T_d = T_{cd}$ である。したがって $T_a T_b = T_{ab} = \text{id}$ で T_b は単射。 b の有限台が memory set を与えるので cellular automaton である。

2. 像の特徴付けと欠ける点指示関数

$y = T_b x$ なら $T_{ba} y = T_b T_a T_b x = y$ 。逆に $T_{ba} y = y$ なら $y = T_b(T_a y)$ なので像に入る。さらに $(T_{ba} \delta_h - \delta_h)(1) = (ba - 1)_h \neq 0$ より δ_h は像に入らない。この議論は全関数空間上で成立するため、無限台の配置を原像に許しても結論は変わらない。

Proposition 8.1; Equation (8.1) · p. 23

6. 直接入力と背景・帰結の区別

標数2の論文は別の局所構成を与える比較対象で、この奇素数の証明の入力ではない。本稿のグラフ fit、grid 評価、球面接着、central sector、有限 Heisenberg 符号化は必要部分が本稿内で証明されている。原稿が挙げる先行研究との方法上の関係を、外部定理の未証明な利用と取り違えない。

外部結果を使う非sofic性は完成した scalar 対の帰結である。ES04によればsofic群の群環は任意の斜体上 stably finite である。体 K もその仮定を満たすため、本稿の $ab = 1 \neq ba$ と両立せず G は nonsofic となる。一方、cellular automaton の反例は上の直接計算で得られ、この外部定理を必要としない。

[ES04, Corollary 4.7, p. 8]

7. 原典を読む入口と確認範囲

- Proposition 3.1; §3.1 · pp. 5–6 — 高次数の modular 表現と正則 rank の区別を読む
- Lemma 4.1; Proposition 4.2 · pp. 9–13 — 接着商で有限群が消えない理由を追う
- §5.3; Equations (5.5)–(5.7) · pp. 17–18 — 整数 rank から同じ環上の恒等式への接続を見る
- Lemmas 6.1–6.2 · pp. 18–20 — 向き付き零積と非零核ベクトルの証明を読む
- Proposition 7.1; Lemma 7.2; Corollary 7.3 · pp. 20–22 — 単射な行列単位と補単位による scalar 化を追う
- Proposition 8.1; Equation (8.1) · p. 23 — 全配置上での積の順序と欠ける配置を確認する

本文§§2–8を読み、指定体、二つの比率、向き付き零積、有限群の埋込み、共通 sector の整数 rank 恒等式、三角圧縮、scalar 化の単射性、全配置上の像を照合した。球面図式のループ・橋・同ラベル平滑化と Euler 矛盾も原典の該当箇所を読んだが、全ての位相的分けの独立形式検証ではない。ES04 の定理記述と使用を確認し、その証明や背景文献の証明を再帰的に検証していない。巨大な有限手順の実行、専門家査読・形式検証は未実施である。