

OpenAI Math Digest

CATALOGUE 187

Snaky in 21 Maker moves

カタログ案内と1篇の証明概説

独立した非公式の読解ガイド・日本語版

収録版: 2026-10-15

制作: Masataka Iwai・大阪大学

AI生成の解説には誤りや不正確な説明が含まれる可能性があります。重要な主張・証明は原論文でご確認ください。本冊子はWebサイトの解説をまとめたもので、原論文そのものではありません。専門家査読・形式検証は未実施です。

目次

カタログ案内に続き、収録論文1篇の解説を掲載しています。目次・引用はクリックできます。横長の表は紙面向けの項目一覧に組み直し、主張と参照先を保持しています。

00・カタログ187 案内	3
---------------	---

01・Snaky in 21 Maker moves	5
----------------------------	---

原論文の参照版: 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a

[カタログ187・案内](#)[Web版を読む ↗](#)

CATALOGUE 187

Snaky in 21 Maker moves

Snaky in 21 Maker moves

公式カタログ187はCombinatorics（組合せ論）に属する単論文カタログである。空盤面からのMakerの勝利を、相手の全応手に耐える条件の合成と、有限証明書の高さで示す。「21」はMaker自身の実着手数の上界であり、最適性の主張ではない。

1. 公式順の収録論文

主結果の範囲を短くまとめています。正確な仮定と定式化は併記した原典の結果を参照してください。

[カタログ 187 · 2026-10-15 確認の固定参照版](#)

#

01

論文・概説

Snaky in 21 Maker moves →

図中の略称: Snaky in 21 Maker moves

September 25, 2026 · 84 ページ

[原論文 \(GitHub\) ↗](#)

主に何を主張するか

空の無限格子盤から、すべての合法的なBreaker応手に対しMakerが21回以内の実着手で勝つ。251マス盤と17×17盤にも制限できる。

[Theorem 1 · p. 1; Corollary 6 · p. 8 ↗](#)

議論の役割・概説

必要所有と排除領域の条件を合成し、有限証明書から空要求・高さ21を得る。共通部分の所有が応手後の継続を保証する。

[証明概説を読む →](#)

2. 読む入口

まず主定理の証明概略で「条件の合成→空要求→一つの方策」の接続を読む。合成補題は全応手を覆う理由、有限証明書は21という数値の由来を説明する。盤面・先後・目標形は記事の主要結果にまとめた。

単論文のため、論文間の分類や関係図は置かない。証明内部の分岐と合流は記事の全体図・合成図にまとめ、細部の交差計算は表で示す。他カタログとの直接依存・帰結・別証明・一般化は未調査であり、「関係なし」とは扱わない。

3. 原典と確認範囲

OpenAI Research Catalog · Catalogue 187; Combinatorics · p. 20

分野の正式英語表記と順序は公式overviewに従う。Combinatoricsは第7の分野見出し（subject ID 13）、番号範囲155–192、PDF pp. 17–21。本件はp. 20。参照版は2026年10月6日付overviewを含む公式固定コミット1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6aである。

新稿はAstraが原典から執筆し、ゲームの量化、合成の両手番の結論、最終交差、方策化、実着手数、有限盤への制限を自己点検した。著者提供の二つの再構成器を新たに実行したが、専用局所応手検査やLeanコンパイルは未実施。全確認範囲と未確認事項は記事末尾に示す。

本案内と記事はAI生成の解説である。原典の代替や数学的正しさの保証とはせず、研究で用いる際はリンク先の原稿・証明・データを確認されたい。

187 / 01

[Web版を読む](#) ↗

CATALOGUE 187 · PAPER 01 / 1 概説

Snaky in 21 Maker moves

応手を排除するのではなく、応手後に残る継続を合成する

本稿の21手戦略は、局所的な攻めを一つずつ実行する固定手順ではない。Makerの必要所有集合と、Breakerがまだ入っていない領域を組にした十分条件を再帰的に合成する。子領域の共通部分をMakerが所有すれば、次の合法応手は少なくとも一つの子領域を外す。この原理を有限証明書に沿って反復し、空盤面に適用できる条件を得た後、証明の選択を履歴から決まる一つの方策にする。

原稿の著者: OpenAI · September 25, 2026 · 84 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

盤面の各マス、その左下隅の整数座標で表す。初期盤面は空の $\mathbb{Z}^2$ であり、Makerが先手、以後MakerとBreakerは交互に未所有の1マスを取る。所有は永久に残る。Makerだけが目標形の完成を目指す weak achievement game で、Breakerが別の形を完成することは勝利条件ではない。Snakyは

$$S = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (3, 1), (4, 1)\}$$

という6マスである。 G を8個の 2×2 符号付き置換行列の集合とすると、許されるコピーは $t + R(S)$ 、 $t \in \mathbb{Z}^2$ 、 $R \in G$ 。整数平行移動、90度単位の回転、反転を許すが、拡大縮小は許さない。Makerが一つのコピーの全マスを所有した時点で直ちに勝つ。他の所有マスがあってもよい。初期所有や、初手に複数マスを取るハンディキャップはない。

§1; (1) · pp. 1–2

Theorem 1 — 空盤面から21回以内のMaker実着手

このゲームには、すべての有限な合法履歴上で合法的な着手を指定する一つのMaker方策があり、空盤面からそれに従えば、Breakerのどの合法的な継続に対しても高々21回の実際のMaker着手で S の許されたコピーが完成する。同値に、早期勝利後も新しいマスを取るよう方策を延長したとき、その方策に沿う最初の20回のBreaker応手が合法なら、Makerの21回目の着手直後の所有集合は目標を含む。

Theorem 1 · p. 1

21はMaker自身の着手数の上界である。後述の「指定マスを既に所有している場合の置換」も1回に数える。両者を合わせれば遅くとも第41手番で勝つという意味であり、21回が必要、21回が最適、またはより速い戦略が存在しないとは主張していない。両者が目標完成を競うstrong gameについての主張でもない。

Corollary 6 — 251マスの盤と17×17盤

証明書の最終領域を T_{727} とする。これは251マスからなり、 $T_{727} \subseteq \{0, \dots, 16\}^2$ である。初期状態で空の T_{727} を盤とするゲーム、および空の17×17盤 $\{0, \dots, 16\}^2$ を盤とするゲームのいずれでも、Makerは21回以内の実着手で勝つ。先手・交互の1マス取得は上と同じで、目標はそれぞれの盤内に含まれる S の許されたコピーである。

Corollary 6 · p. 8

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Snaky in 21 Maker moves](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

外部の証明入力は記録していません。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

参照する本稿の著者はOpenAI、正式タイトルは [Snaky in 21 Maker moves](#)、版は2026年9月25日（84ページ）。下記の原典リンクは公式リポジトリの固定コミット1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6aを参照する。

以下では原典§§2–4の21手構成を解説する。直接の数学的入力と同じ原稿内のLemma 3、Lemma 4、Proposition 5であり、先行論文の勝利定理を仮定として借りない。§1の歴史・方法上の参照、§5の独立した四連石の結果、Appendices A–Bの25手・35手構成は、この証明経路と区別する。

2. Theorem 1 — 主定理の証明概略

証明対象：[Theorem 1 · p. 1](#)

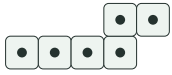
証明対象の仮定と全結論はTheorem 1。まず証明で保存する情報を定める。有限集合 $A \subseteq T \subset \mathbb{Z}^2$ と整数 $h \geq 1$ について、 (A, T, h) が有効とは、任意の有限で互いに素な所有集合 M, B に対し、Maker手番で $A \subseteq M$ かつ $B \cap T = \emptyset$ なら、既に目標を完成しているか、あと h 回の実着手以内に完成できることをいう。 A は必要所有集合、 T はBreakerを排除する領域、 h は高さである。

この条件は局面全体を指定していない。 $T \setminus A$ には既存のMaker石があってもよく、 T 外には両者の任意の有限な所有を許す。 $|M|$ と $|B|$ の差や過去の着手順も制限しない。この余裕が、同じ条件を多数の異なる履歴で使い直すために必要になる。

Definition 2; §2 · p. 3

証明の道筋。最後の1マスを取る六つの基底を、応手後に継続を選べる規則で合成する。証明書の最終条件が $A = \emptyset$ 、 $h = 21$ となることを計算し、そこで得た再帰的選択を固定順で実行する。図の盤面は目標形であり、空盤面からの対局例ではない。

目標形と条件の基底



$$S; \quad t + R(S), \quad R \in G, \quad |G| = 8$$

$(S \setminus \{s_j\}, S, 1)$ ($j = 0, \dots, 5$) 最後の 1 マスを取る六基底
黒丸は目標の構成マス。対局の初期配置ではない。

六基底を有効にし、合成で有効性を保存
[Lemma 4 · p. 4](#) [Lemma 3; \(2\)–\(3\) · pp. 3–4](#)

条件を合成し、応手後に子を選ぶ

$$A \subseteq M, \quad B \cap T = \emptyset \implies \bigcup_i A_i \cup \bigcap_i T_i \subseteq M'$$

合法的な応手 b は共通部分に入れない。どれかの T_i が残る。
 $h = 1 + \max_i h_i$ 置換も含む、実際の Maker 着手数

有限証明書の集合と高さを再構成し、最後の要求を消す
[Proposition 5; \(7\) · pp. 5–6](#)

空盤面に使える最終条件

$$(A_{727}, T_{727}, h_{727}) = (\emptyset, T_{727}, 21), \quad |T_{727}| = 251$$

事前所有は不要。最初のピボットは $(8, 8)$ 。

掲載順の生存子と固定順の空きマスで選択を一意化
[§4 · pp. 7–8](#)

一つの方策が、すべての合法応手に勝つ

$\exists \sigma \forall \beta : \quad \text{Maker claims} \leq 21$
 子の順序・置換先を固定。各移行で高さが減り、基底で終了。
 到達しない履歴にも合法に延長し、早期勝利後のコピーを保持。

図1：Snakyの目標形、六基底と合成の役割、空の要求集合から一つの方策への接続。

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 有限の条件を、任意の履歴に適用する

Lemma 4の六基底は、 S の各マス s_j を一つずつ除いた $(S \setminus \{s_j\}, S, 1)$ である。必要な5マスをMakerが所有し、 S にBreakerがいなければ、残りの1マスは空いているか既にMaker所有である。前者では1回で完成し、後者では既に勝っている。これを出発点に合成規則を繰り返す。対称配置で移した条件も有効であり、その高さは変わらない。

Proposition 5の最終条件 $(\emptyset, T_{727}, 21)$ には事前のMaker所有が不要である。空盤面ではBreaker排除条件も自動的に満たす。ここで初めて、条件付きの勝利からハンディキャップなしの勝利へ移れる。個々の途中条件に必要な石を、空盤面で最初から与えているわけではない。

[Lemma 4 · p. 4](#) [Proposition 5; \(7\) · pp. 5–6](#)

2. 子の選択と置換を固定し、一つの方策にする

存在する継続を対局ごとに後から選ぶだけでは、Theorem 1の方策の記述が明瞭にならない。原典§4は、マスをも $\max(|x|, |y|)$ の小さい順、同値なら辞書式順に並べ、子を証明書の掲載順に並べて、選択規則を対局前に固定する。

活動中の条件を配置 F で使っているとき、指定マス $F(p)$ が空なら取る。既にMaker所有なら、固定順で最初の空きマスを取る。 $B \cap F(T) = \emptyset$ なので指定マスをBreakerが所有する事態は起こらない。勝っていないければ、次の応手を含まない領域をもつ最初の子へ移る。既存のBreaker石もその領域にないことは親から継承される。参照先に配置 G が付いていれば次の配置は $F \circ G$ であり、括弧内合成なら現在の F を保つ。

基底では最後の空きマスを取って終了する。合成から子への移行は1回のMaker実着手と、未勝利の場合の1回のBreaker応手を伴い、高さを少なくとも1減らす。従って高さ21からの経路は高々21回で終了する。指定マスの既所有を「着手を省略できる」と扱わないことが、実着手数と交互手番の対応を保つ。

§4 · pp. 7-8

3. 全履歴への合法性と21回目の終点

方策に従ってきた履歴では、活動中の式と配置を履歴から再構成できる。過去に方策と異なるMaker着手が含まれる履歴には、固定順で最初の空きマスを指定すればよい。所有集合は有限なので無限盤には必ず空きマスがある。この拡張により方策は到達しない履歴を含めて合法であり、空盤面から従うすべての履歴には上の高さ帰納法が適用される。量化の順序は $\exists \sigma \forall \beta$ で、 σ は将来のBreaker応手を見て選ばれない。

勝利がMakerの $m \leq 21$ 回目なら、その直前までにBreakerが着手した回数は $m - 1$ 。勝利後の応手を要求しない。形式的に勝利後も空きマス取得を続ければ、完成済みコピーは永久所有によって残る。したがって最初の20応手が合法的な延長履歴では、21回目のMaker着手直後にもコピーがある。これが主定理の同値な終点記述である。

§4 · pp. 7-8

3. Lemma 3 — 共通部分を所有して継続を残す

証明対象：Lemma 3; (2)–(3) · pp. 3-4

Lemma 3 — 条件付き勝利の合成

$1 \leq r < \infty$ 個の有効な条件 (A_i, T_i, h_i) と任意の $p \in \mathbb{Z}^2$ を取る。有効性は前節の Definition 2 の意味であり、各 $A_i \subseteq T_i$ は有限、 $h_i \geq 1$ は整数とする。次で定める (A, T, h) は有効である。

$$T = \{p\} \cup \bigcup_{i=1}^r T_i,$$

$$A = \left(\bigcup_{i=1}^r A_i \cup \bigcap_{i=1}^r T_i \right) \setminus \{p\},$$

$$h = 1 + \max_{1 \leq i \leq r} h_i.$$

さらに、Breaker 手番で $A \cup \{p\} \subseteq M$ かつ $B \cap T = \emptyset$ なら、Maker は既に勝っているか、あと $h - 1$ 回の Maker 着手以内で勝てる。

Lemma 3; (2)–(3) · pp. 3–4

親の 1 回で、全候補の仮定を用意する

$$T = \{p\} \cup \bigcup_i T_i, \quad A = (\bigcup_i A_i \cup \bigcap_i T_i) \setminus \{p\}$$

p を取得、既所有なら空きマスへ置換。

$$M' \supseteq \bigcup_i A_i \cup \bigcap_i T_i$$

共通部分の所有と応手の合法性を使う

[Lemma 3; \(2\)-\(3\) · pp. 3-4](#)

未勝利の場合、任意の合法応手から生存子へ

$$b \notin M' \implies b \notin \bigcap_i T_i \implies \exists i : b \notin T_i$$

$$A_i \subseteq M', \quad (B \cup \{b\}) \cap T_i = \emptyset$$

領域外の応手は全子を外す。古い Breaker 石は $T_i \subseteq T$ で排除。

$$1 + h_i \leq 1 + \max_i h_i = h$$

六基底の二配置を合成する具体例（全対局木ではない）

[§3.2; \(6\); Figure 2 · pp. 5-6](#)

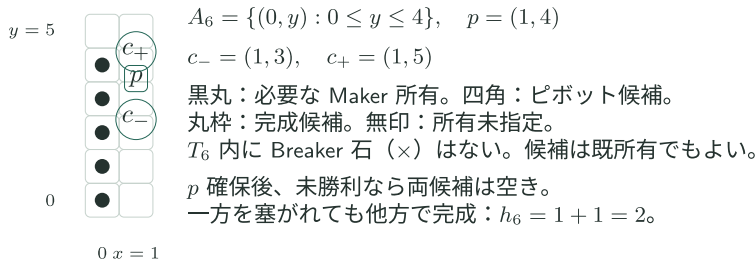
条件付きの例：card 6、高さ 2

図2：共通部分を所有する合成規則とcard 6の二つの完成候補。盤面は条件付き局面であり全戦略木ではない。

[図を拡大](#) [TeXソース](#) ↓

1. 新しい応手と古い所有を同時に処理する

$p \in T$ はBreaker所有ではないので、空なら取れる。既所有なら別の空きマスに置換する。いずれも1回の実着手後の集合 M' は $\bigcup_i A_i \cup \bigcap_i T_i$ を含む。ここで必要所有の和集合と領域の共通部分は役割が異なる。前者はどの子を選んでも必要なMaker石を持つこと、後者はすべての子を塞ぐ応手が合法でないことを保証する。

未勝利の場合、合法的なBreaker応手 b は M' の外にある。従って $b \notin \bigcap_i T_i$ 、すなわち $b \notin T_i$ となる子が少なくとも一つある。その子について $A_i \subseteq M'$ であり、古いBreaker所有は $T_i \subseteq T$ と $B \cap T = \emptyset$ から排除される。よって $(B \cup \{b\}) \cap T_i = \emptyset$ となり、子の仮定が回復する。手数は親の1回に選ばれた子の h_i 回を加えた $1 + h_i \leq h$ である。

領域外の応手 $b \notin T$ は、すべての子領域を外すので同じ議論に含まれる。盤の外を仮想的なpassと置き換える必要はない。置換着手にも実際のBreaker応手が続くが、Maker所有の増加は上の包含を壊さない。Breaker手番から始める追加結論では、その包含が既に成立しているため親の1回を使わず、上界が $\max_i h_i = h - 1$ になる。

Lemma 3; (2)–(3) · pp. 3–4

2. card 6に現れる二つの攻めと、配置の輸送

原典§3.2の最初の合成では、Makerの必要所有は縦5マス $A_6 = \{(0, y) : 0 \leq y \leq 4\}$ 、領域は $T_6 = A_6 \cup \{(1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$ である。ピボット $(1, 4)$ を確保すると、下側の縦4マスを用いるコピーは $(1, 3)$ 、上側の縦4マスを用いるコピーは $(1, 5)$ で完成する。未勝利なら両完成候補は空きであり、Breakerが一方を取っても他方が残る。どちらも取らない応手にも同じ終了手が見える。基底の高さ1に親の1を加え、 $h_6 = 2$ となる。

候補やピボットは条件の記述時点で既にMaker所有でもよい。完成済みなら停止し、ピボットだけ既所有なら置換を1回数えて同じ分岐へ進む。図の無印マスを空きと仮定しない。

次のcard 7はcard 6を二配置で使う。共通の必要所有列は $x = 0, 1 \leq y \leq 5$ 。列外の追加領域は片方が高さ4, 5, 6、他方が0, 1, 2で交わらない。領域の交差は共通列だけなので、ピボット $(0, 5)$ を除くと要求は縦4マスになり、 $h_7 = 1 + h_6 = 3$ となる。こうして追加の石を最初から要求せず、前の手番の攻めへ組み込む。

配置 $F(x) = Rx + t$ は格子全体の全単射で、許された目標、合法性、所有の非交差を保つ。戦略の全履歴を輸送できるので高さを保って条件を移せる。これは対称に見えるBreaker応手を無根拠に捨てる操作ではない。

§3.2; (6); Figure 2 · pp. 5–6 Definition 2; §2 · p. 3

4. Proposition 5 — 有限証明書が空盤面の条件を作る

証明対象 : Proposition 5; (7) · pp. 5–6

Proposition 5 — 728条件と最後の空要求

Appendix Dのデータは番号6から727までの722行である。各行の子リストは非空で、参照は既出cardの許された配置だけを使い、括弧内式は有限で非空の合成である。六つの基底を含め728個の有効な条件が得られ、各高さは21以下。最後の条件は

$$\begin{aligned} p_{727} &= (8, 8), & A_{727} &= \emptyset, \\ |T_{727}| &= 251, & h_{727} &= 21, \\ T_{727} &\subseteq \{0, \dots, 16\}^2 \end{aligned}$$

を満たす。

Proposition 5; (7) · pp. 5–6

六基底と 722 行を、循環なく評価する

既出 card の配置参照 $j : sUV$ と、有限な括弧内合成。
座標は行の座標系。括弧は内側から、番号は小さい側から。
 $(A_i, T_i, h_i) \mapsto (A, T, 1 + \max_i h_i)$

集合演算を再構成し、各条件の有効性を帰納的に伝える
§3.1 · pp. 4–5 Proposition 5; (7) · pp. 5–6

最終行の 32 配置へ合流する

子 card	648	708	712	713	725	726
配置数	4	4	8	4	8	4
h_i	15	20	15	15	20	20
余分な累積交差	35	31	21	12	4	0

すべての配置後の $A_i = \{p\}$ 、 $p = (8, 8)$ 。

Table 1 の累積交差を使い、ピボットを要求から除く
§3.3; Table 1 · pp. 6–7 Lemma 3; (2)–(3) · pp. 3–4

要求が空になり、最悪の高さが 21 になる

$\bigcup_i A_i = \bigcap_i T_i = \{p\} \implies A_{727} = \emptyset$
 $h_{727} = 1 + \max(15, 20, 15, 15, 20, 20) = 21$
 $T_{727} = \{p\} \cup \bigcup_i T_i, \quad |T_{727}| = 251$
同じ初手を一度だけ数え、応手後に一つの子を実行する。

assert の対象と数学的帰納法の役割を区別する
§6.1 · pp. 11–12 Appendix G.2 · pp. 82–84

有限計算とゲームの意味を接続する

再構成器：集合・高さ・後方参照を検査。
Lemma 3：その条件が任意の合法応手に耐えることを保証。
今回：著者の二実装を再実行。独自の独立証明ではない。

図3：データの後方参照を再構成し、最終32配置の要求と共通部分を同じ1マスに集める。

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 証明木の共有を、循環のない計算として読む

cardは番号付きの条件であり、対局の着手番号ではない。既に証明した条件を参照して使い直すため、データは全対局木をそのまま展開せずに記述できる。座標文字は0123456789ABCDEFGで0から16を表し、例えば88は(8, 8)。j:suvはcard j に符号付き座標置換 R_s を施してから (U, V) だけ平行移動する。 s の重み2、4のビットで順に x, y の符号を変え、重み1のビットで最後に座標を交換する。

括弧内の (XY child ...) も Lemma 3 の合成である。XY はその行の座標系のピボットであり、外側ピボットへの相対変位ではない。参照はすべて小さい番号へ向かい、括弧内は内側から計算する。これにより各集合演算と最大値が有限で定義され、番号についての帰納法と式についての構造帰納法を組み合わせる有効性を伝えられる。実際の集合を計算する部分と、計算した集合がゲームの十分条件であるという Lemma 3 の意味論を分けている。

§3.1 · pp. 4–5 Proposition 5; (7) · pp. 5–6

2. 最終32配置で何を消すのか

最終行は六種類の card の 32 配置を子とする。配置後の各要求集合はすべて $p = (8, 8)$ だけになる。一方、領域には p 以外のマスもあり、すべての領域に共通する余分なマスがあると、そのマスも親の事前所有に要求されてしまう。Table 1 は配置を追加してこの余分な交差を消す計算を示す。

子 card	
648	
配置前の要求集合	
$\{(4, 5)\}$	
配置前の領域の大きさ	
87	
高さ	
15	
配置数	
4	
累積交差から p を除いたマス数	
35	

子card

708

配置前の要求集合

$\{(8,8)\}$

配置前の領域の大きさ

225

高さ

20

配置数

4

累積交差から p を除いたマス数

31

子card

712

配置前の要求集合

$\{(5,5)\}$

配置前の領域の大きさ

96

高さ

15

配置数

8

累積交差から p を除いたマス数

21

子card

713

配置前の要求集合

$\{(5, 5)\}$

配置前の領域の大きさ

98

高さ

15

配置数

4

累積交差から p を除いたマス数

12

子card

725

配置前の要求集合

$\{(7, 7)\}$

配置前の領域の大きさ

167

高さ

20

配置数

8

累積交差から p を除いたマス数

4

子card

726

配置前の要求集合

 $\{(7, 7)\}$

配置前の領域の大きさ

169

高さ

20

配置数

4

累積交差から p を除いたマス数

0

最右列はその行までの全配置を累積した交差であり、六群それぞれの独立な交差の大きさではない。最後に $\bigcup_i A_i = \bigcap_i T_i = \{p\}$ となるため、親の要求集合は $(\{p\} \cup \{p\}) \setminus \{p\} = \emptyset$ 。高さは $1 + \max(15, 20, 15, 15, 20, 20) = 21$ である。初手を一度だけ数え、その後は実際に選んだ一つの子を実行するので、32配置の手数を合計しない。

§3.3; Table 1 · pp. 6–7

この交差条件は、初手 p の後の全合法応手について少なくとも一つの子を保証する。例えば原典は、Maker (8, 8)、Breaker (7, 8)から708:100を選び(8, 7)へ進み、次のBreaker (8, 6)に対して外側の座標交換を保った684:011のピボット(11, 8)へ進む例を挙げる。これは非局所的な継続が使える例であり、その応手列をBreakerに強制する主張ではない。全応手の保証は例の数ではなく交差条件による。

3. 今回の有限再構成が確認したこと

編集側は固定版の著者配布証明書を新たに取得し、付属の短いverify_certificate.pyと別実装のindependent_evaluator.pyを実行した。両方がPASSとなり、728条件、最終要求集合の空性、251マス、高さ21、最終交差表を確認した。短い検査器は17×17内への包含、全cardの最大高さ21、card 6／7も検査する。別実装は異なる構文解析と明示行列で再構成し、1,620合成節点、うち898括弧内節点、4,089参照を数えた。

これは著者の二実装を編集側が再実行した結果である。独自検査器による独立証明、全中間集合の二実装間比較、全対局の実行とは異なる。各assertや例外検査が通ったことと、任意の履歴に対する意味を保証する数学的帰納法を混同しない。

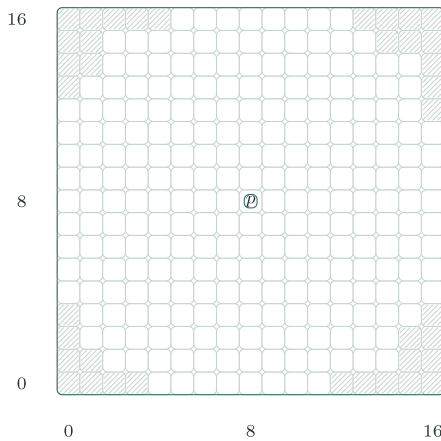
§6.1 · pp. 11–12 Appendix G.2 · pp. 82–84

5. Corollary 6 — 盤内で置換できることを保証する

証明対象：Corollary 6 · p. 8

証明対象はCorollary 6の二つの有限盤。無限盤の戦略から有限盤の戦略への移行では、指定されたピボットだけでなく、既所有の場合の置換先も盤内に取れることが必要である。図の251マスは今回の再構成結果から描いた最終領域で、各マスは初期状態では空いている。

空の有限盤：最終領域と 17×17 正方形



T_{727} : 251 マス

白 : T_{727} 内の空きマス。

斜線 : 正方形内の T_{727} 外。

斜線は Breaker 石ではない。

$p = (8, 8)$ 最初の候補、まだ未所有。

初期状態では全マスが空き。

縦軸 y 、横軸 x 。左下隅がマス座標。

領域の入れ子と有限盤の空きマス評価を使う
[Lemma 3; \(2\)-\(3\) · pp. 3-4](#) [Corollary 6 · p. 8](#)

指定マスも置換先も盤内にある

$$F_i(T_i) \subseteq F(T), \quad p \in T$$

子領域・ピボット・最後の完成形は最終領域内に残る。

第 $m \leq 21$ 回の Maker 着手前：

$$\# \text{occupied cells} \leq 2(m-1) \leq 40 < 251.$$

既所有ピボットの代わりに、盤内の最初の空きマスを取れる。

盤内置換で実着手数を保ち、領域外応手を包含する
[Corollary 6 · p. 8](#)

両盤で 21 回以内。余分な応手も処理できる

17×17 内で $b \notin T_{727}$ なら、全子領域を外す。

領域内の応手には合成補題。同じ高さ帰納法が働く。

251 マスや 17×17 が最小という主張ではない。

図4： 17×17 内の最終領域251マスと、置換先の存在を保つ手数評価。斜線は最終領域の外であり、石ではない。

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 子領域の入れ子が通常の着手を盤内に保つ

合成式から、配置後の各子領域は親領域に含まれ、各ピボットも自身の領域にある。基底の完成形は基底領域そのものである。従って最終条件から下る途中の指定マスと最後の完成マスは、すべて T_{727} 内にある。

置換先は T_{727} に固定順を入れ、その最初の空きマスにする。Makerの $m \leq 21$ 回目の直前には、両者の所有マスは合わせて高々 $2(m-1) \leq 40$ 。251マス全部が埋まることはないので、毎回合法的な置換が存在する。置換を行ってもMakerの必要所有は失われず、その後のBreaker応手に対する生存子の議論も変わらない。これで251マス盤上に同じ高さ帰納法を実現できる。

Corollary 6 · p. 8

2. 正方形の追加マスにBreakerが置いても継続がある

17×17盤でもMakerの着手を T_{727} 内に限ればよい。Breakerが正方形内で T_{727} の外に置く場合、その応手はすべての子領域を外す。領域内の応手はLemma 3が扱うため、新たに許された盤面のマスが上界を増やすことはない。両盤で勝利後に応手を仮定せず、実着手を高々21回数える。この論証は251マスや17×17が最小の盤であることを示していない。

Corollary 6 · p. 8

6. 直接入力と計算資料の区別

本記事の証明経路は、原典内の六基底、合成補題、証明書の有限計算、履歴方策化で閉じている。外部文献の結果を適用する箇所はこの経路では確認されず、空の依存表は設けない。他カタログでの引用・利用・一般化・別証明については未調査である。

証明書は条件の合成データであり、一つの勝利棋譜ではない。再構成器はそのデータから有限集合と高さを評価する。戦略探索プログラムや非公開の対局木は、この再構成の入力ではない。原典§6とAppendix G.1はさらに局所応手クラス37,042件の検査、全cardの相互比較、誤入力拒否などの検査群を報告するが、今回実行したのは前節の二プログラムだけであり、それらの検査群を実行済みとはしない。

§6.1 · pp. 11–12 Appendix G.1 · pp. 81–82

公式リポジトリのLean案内は、無限盤の21手方策を形式化の対象に挙げ、有限盤への制限を含めないと述べる。原稿§6.2およびAppendix Cの35手証明書の有限再構成補遺とは別の対象である。今回Leanコード・依存関係・カーネルでのコンパイルは確認していない。PythonのPASSをLeanによる主定理確認とは扱わない。

固定版の資料：21手証明書、短い検査器、別実装、Leanの対象説明。

7. 原典を読む入口と確認範囲

- §1; (1) · pp. 1–2 — 空盤面・先手・目標の8対称配置と実着手数の定式化。
- Lemma 3; (2)–(3) · pp. 3–4 — 必要所有と排除領域の意味、Maker手番とBreaker手番の二つの結論。
- §3.2; (6); Figure 2 · pp. 5–6 — card 6/7で合成を追い、条件付き局面と対局履歴を区別する。
- §3.3; Table 1 · pp. 6–7 — 最終32配置の累積交差と空要求を確かめる。
- §4 · pp. 7–8 — 選択順の固定、配置の合成、全履歴への拡張と有限盤の置換。
- Appendix G.2 · pp. 82–84 — 短い再構成器の集合演算とassertの範囲を読む。

編集側はゲーム設定、Definition 2、Lemma 3とその両手番の結論、六基底、証明書の規則と最終交差、§4の方策・実着手数、Corollary 6を原典と照合した。有限計算は今回の固定版取得と二つの著者提供プログラムの再実行による。図のcard 6は原典§3.2の座標、有限盤は再構成された T_{727} に基づく。

Appendix Dの全行を手計算で検証したわけではなく、専用局所応手検査、全中間集合の相互比較、方策の対局実行、探索、Leanコンパイルは未実施。§5のProposition 7および25手・35手の別構成の証明は本記事の確認対象から外す。単独制作の自己点検であり、専門家査読や全証明の独立検証ではない。