

OpenAI Math Digest

CATALOGUE 087

Mahler予想とシンプレクティック 幅

総括・論文間のつながりと3篇の証明概説

独立した非公式の読解ガイド・日本語版

収録版: 2026-10-15

制作: Masataka Iwai・大阪大学

AI生成の解説には誤りや不正確な説明が含まれる可能性があります。重要な主張・証明は原論文でご確認ください。本冊子はWebサイトの解説をまとめたもので、原論文そのものではありません。専門家査読・形式検証は未実施です。

目次

総括に続き、公式カタログ順で全3篇の解説を収録しています。目次・引用はクリックできます。横長の表は紙面向けの項目一覧に組み直し、主張と参照先を保持しています。

00 · カタログ087 総括	3
01 · The symmetric Mahler conjecture and its equality cases	8
02 · The Mahler Conjecture for General Convex Bodies	26
03 · Symplectic Balls in Symmetric Polar Products	40

原論文の参照版: 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a

[カタログ087・総括](#)[Web版を読む ↗](#)

CATALOGUE 087

Mahler予想とシンプレクティック幅

The Mahler conjectures and symplectic width

カタログ087は、対称凸体のMahler不等式とHanner等号分類、一般凸体のSantaló中心での不等式と単体剛性、対称凸体と極体の積のGromov幅を扱う3原稿からなる。以下は固定版の著者の主張とその証明経路への案内であり、3本を順に仮定する依存鎖ではない。

1. 公式順の論文と概説

主結果の範囲を短くまとめています。正確な仮定と定式化は併記した原典の結果を参照してください。

[カタログ 087 · 2026-10-15 確認の固定参照版](#)

#

01

論文・概説

[The symmetric Mahler conjecture and its equality cases →](#)

図中の略称: Symmetric Mahler equality cases

2026-09-22 · 26 ページ

[原論文 \(GitHub\) ↗](#)

主に何を主張するか

全ての原点对称凸体で体積積 $\geq 4^n/n!$ 。等号は線形Hanner体に限る。

[Theorem 1.1 · p. 2 ↗](#)

議論の役割・概説

正則質量を実単体積分へ変換。等号の欠損消失から共通実行可能ベクトル、metric median、Hanner分類へ。

[証明概説を読む →](#)

#

02

論文・概説

The Mahler Conjecture for General Convex Bodies →

図中の略称: General Mahler conjecture

2026-09-22 · 72 ページ

原論文 (GitHub) ↗

主に何を主張するか

全ての凸体でSantaló中心の体積積 $\geq (n+1)^{n+1}/(n!)^2$ 。等号は単体に限る。

Theorem 1.1 · p. 1 ↗

議論の役割・概説

正双対錐のLaplace積、Gaussian射影の同時正規化、非可換層欠損と厳密な区間評価。

証明概説を読む →

#

03

論文・概説

Symplectic Balls in Symmetric Polar Products →

図中の略称: Symplectic balls in polar products

2026-09-22 · 19 ページ

原論文 (GitHub) ↗

主に何を主張するか

$n \geq 2$ の対称凸体と極体の積のGromov幅は4。各容量 $0 < c < 4$ の球を埋込み、対称体積下界を導く。

Theorem 1.1 · p. 1 ↗

議論の役割・概説

正則零点の球と一様slice評価を合成。有限極体近似で一般の対称体へ移り、支持円柱で上界。

証明概説を読む →

2. 結論が合流する箇所と、仮定が異なる箇所

図の引用キーは、いずれもOpenAI、September 22, 2026の原稿を表す。[OpenAI26a] The symmetric Mahler conjecture and its equality cases、[OpenAI26b] The Mahler Conjecture for General Convex Bodies、[OpenAI26c] Symplectic Balls in Symmetric Polar Products。原典へのリンクは図の引用から開ける。



二つの対称体の経路が同じ体積下界へ合流し、一般体の中心と定数は別に扱う

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

対称版は、正則零点の質量評価を実単体積分に変え、欠損体積が消える場合の共通実行可能ベクトルから metric median を取り出す。これが下界だけでなく、等号が線形 Hanner 体に限られるという方向を担う。対称版の主定理と両方向の等号説明へ。

幅論文は、正則零点からの球と一様な水平積分評価を組み合わせ、容量 $c < 4$ の球を実次元 $2n$ の $U_K = \text{int } K \times \text{int } K^\circ$ に入れる。体積保存から対称版と同じ $4^n/n!$ の下界が得られるが、Hanner分類は含まない。両原稿はレンズを共有する背景を述べる一方、幅の証明は対称版の体積定理・等号分類を使わない。幅の構成と独立な上界、体積への帰結へ。

[OpenAI26c, Background and prior constructions, p. 2]

一般版は $P(K) = |K| |(K - s(K))^\circ|$ を対象とする。正双対錐のLaplace積へ帰着し、Gaussian射影の同時正規化、非可換な層欠損、厳密な固有値区間評価を通して単体剛性まで導く。一般版の定数 $(n+1)^{n+1}/(n!)^2$ は、 $n \geq 2$ では対称版の $4^n/n!$ より小さい。一般版を対称体に制限するだけでは鋭い対称版やHanner分類は得られない。一般版の下界と単体等号分類へ。

[OpenAI26b, Introduction, comparison with symmetric case, p. 1]

[OpenAI26a, §1.1, comparison with general case, p. 3]

3. 主定理の後に分岐する帰結

幾何から関数型への移行は、補助凸体の次元を増やすFradelizi–Meyerの含意を使う。幾何定理を固定した次元だけで使う書換えではない。偶なproper下半連続凸ポテンシャルでは積分積の下界は 4^n 、偶性のない一般ポテンシャルでは e^n となる（いずれも $0 < \int e^{-\varphi} < \infty$ 、双対積分は無限でもよい）。幾何的な等号分類から、関数型の全等号例の分類は自動的に移らない。

[OpenAI26a, Corollaries 1.2–1.3 and proofs, pp. 4–5]

[OpenAI26b, §8; Corollaries 1.2 and 8.1, pp. 40–41]

出発点

対称版の全次元の下界

帰結と使用条件

偶関数の積分積 $\geq 4^n$ 。対称な全次元log-concave確率測度では、さらにessential continuityの下でentropy-transportへ

説明先

関数型・輸送

出発点

一般版の全次元の下界

帰結と使用条件

一般関数の積分積 $\geq e^n$ 。全次元log-concave確率測度のessential continuityの下でentropy-transport
へ

説明先

関数型・輸送

出発点

幅論文の容量 $c < 4$ の球

帰結と使用条件

$n \geq 3$ 、有限正容量 R_i の厳密な体積・対容量条件から閉球近傍の非交差埋込み

説明先

充填の十分条件

最後の行はカタログ343の Symplectic Ball Packings in Higher Dimensions、OpenAI、September 23, 2026 ([OpenAI26p]) のTheorem 1.1を使う。利用先は幅論文のCorollary 5.5であり、主幅定理やMahler不等式の証明入力ではない。全ての R_i に対し $\sum_i R_i^n < 4^n$ 、 $R_i + R_j < 4$ ($i < j$) から一つの $c < 4$ を選び、球内充填と幅の埋込みを合成する。この極体との積への十分条件を必要十分条件とは扱わない。

[OpenAI26p, Theorem 1.1, p. 2] [OpenAI26c, Corollary 5.5, p. 17]

4. 原典・版と確認範囲

公式見出しは The Mahler conjectures and symplectic width。公式分野は公式目次の第4分野 Convex and metric geometry (087–101)、overview.pdfの誌面/PDF p.10に従う。CONTENTSの別見出し The Mahler conjectures, functional inequalities and polar-product symplectic width も台帳に保持した。

OpenAI Research Catalog · Catalogue 087, Convex and metric geometry · p. 10

各原稿の版はSeptember 22, 2026、公式固定commitは 1581d4c。日英記事の執筆・内容点検には明示指定した gpt-6-astra を用い、原稿の仮定・結論と選んだ直接入力の使用箇所を照合する。各記事末尾に確認範囲を記した。一般版の有理証明書・補間・尾部評価の全再計算、外部定理の全証明、参考文献の再帰的検証は完了していない。これらを専門家査読や全証明の独立検証とは呼ばない。

The symmetric Mahler conjecture and its equality cases

等角境界分布を単体体積へ移し、等号を3球交差性へ帰着する

OpenAIの2026年9月22日原稿は、原点对称凸体のMahler不等式を全次元で示し、等号を線形Hanner体に分類すると主張する。証明の中心は、平面の等角写像と孤立零点の質量から得る「実現可能な単体」の積分恒等式である。等号の場合には1次元を付加し、積分欠損の消失を各点・各方向の最適表示へ強め、極体のノルムにmetric medianを構成する。

原稿の著者: OpenAI · 2026-09-22 · 26 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

ここで紹介するのは原稿の論証と直接入力 of 接続である。編集側の照合範囲と、外部定理の全証明を含む未検証範囲は末尾に分けて記す。

1. 主要結果

$|K|$ はその次元のLebesgue体積、 $K^\circ = \{y : \langle x, y \rangle \leq 1 \ (x \in K)\}$ は固定した原点に関する極体、 $P(K) = |K||K^\circ|$ とする。Hanner多面体は原点中心の非退化区間から、 $H_1 \oplus_\infty H_2 = H_1 \times H_2$ と $H_1 \oplus_1 H_2 = \text{conv}((H_1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times H_2))$ を有限回反復して得る。線形Hanner体とはその可逆線形像であり、平行移動は含めない。

Theorem 1.1 — 対称Mahler不等式と等号分類

すべての整数 $n \geq 1$ と、非空な内部を持つ原点对称コンパクト凸体 $K = -K \subset \mathbb{R}^n$ に対し、

$$P(K) \geq \frac{4^n}{n!}.$$

等号が成立することと、 K が線形Hanner体であることは同値である。

Theorem 1.1 · p. 2

Corollary 1.2 — 偶関数型の関数的Mahler不等式

$n \geq 1$ とし、 $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を偶なproper下半連続凸関数、 $0 < \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi} < \infty$ とする。

Fenchel–Legendre変換 $\varphi^*(y) = \sup_x (\langle x, y \rangle - \varphi(x))$ に対し、

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(x)} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi^*(y)} dy \right) \geq 4^n.$$

第2積分は $+\infty$ でもよい。 $\varphi(x) = \sum_i |x_i|$ では両積分が 2^n であり定数は鋭いが、この系は一般の等号ポテンシャルを分類しない。

Corollary 1.2 · pp. 4–5

Corollary 1.3 — 対称entropy–transport不等式

$n \geq 1$ 、 $i = 1, 2$ に対し、 $\eta_i(dx) = e^{-V_i(x)} dx$ を全次元の原点对称log-concave確率測度とし、 V_i はproper下半連続凸関数とする。密度は本質的に連続、すなわち $\partial \text{supp } \eta_i$ 上の $\mathcal{H}^{n-1}$ ほとんどすべての点で $e^{-V_i} = 0$ と仮定する。moment measure $\nu_i = (\nabla V_i)_\# \eta_i$ は有限一次モーメントを持ち、 $H(\eta_i) = \int \log(d\eta_i/dx) d\eta_i = - \int V_i d\eta_i$ は有限で、

$$H(\eta_1) + H(\eta_2) \leq -n \log(4e^2) + \mathcal{T}(\nu_1, \nu_2).$$

ここでproper下半連続凸関数全体を $\mathcal{F}$ として、

$$\mathcal{T}(\mu_1, \mu_2) = \inf_{f \in \mathcal{F}} \left\{ \int f d\mu_1 + \int f^* d\mu_2 \right\}$$

であり、 $+\infty$ を許す。 H の符号は微分Shannon entropyの負である。

Corollary 1.3 · p. 5

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [The symmetric Mahler conjecture and its equality cases](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- **HL81** Allan B. Hansen; Åsvald Lima — The structure of finite dimensional Banach spaces with the 3.2. intersection property : 3球交差性から有限次元実Banach空間を $\ell^1 \cdot \ell^\infty$ 直和へ分類する。Acta Mathematica 146 (1981), 1–23; published PDF。
- **FM08** Matthieu Fradelizi; Mathieu Meyer — Some functional inverse Santaló inequalities : 全次元の対称幾何不等式から偶関数版を導く。Advances in Mathematics 218 (2008), 1430–1452; author's personal copy with cover。

- [CEK15](#) Dario Cordero-Erausquin; Bo'az Klartag — Moment measures : moment measureの一次モーメントとentropyの有限性を保証する。Journal of Functional Analysis 268 (2015), 3834–3866; published PDF。
- [FGZ21](#) Matthieu Fradelizi; Nathael Gozlan; Simon Zugmeyer — Transport proofs of some functional inverse Santaló inequalities : 偶関数型逆Santalóと対称entropy-transportの同値性を使う。
arXiv:2109.00871v3, 9 September 2021。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 — 主定理の証明概略

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · p. 2

証明の道筋。 下界、等号からの分類、Hanner体での等号成立の3部分を結ぶ。下界に必要な実単体恒等式を次節で説明し、等号分類の核心である共通witnessとmedianをその後の2節で説明する。一般の非対称Mahler原稿を入力には用いない。

1 原点を固定し、対称凸体を帯で近似

$$K = -K \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1, \quad Q = K^\circ$$

一様境界座標が恒等式を与え、極体の近似で極限を取る。

[Proposition 6.1 · pp. 15-16](#) [Corollary 6.2 · pp. 16-17](#)

2 正則質量を単体積分へ変換する

$$1 \leq S = \frac{d!}{4^d} \int_A |\Sigma_X| dX \leq \frac{d!}{4^d} P(A) \implies P(K) \geq 4^n/n!$$

直和の体積式が等号を保ち、積近傍とコンパクト性を使える。

[§7.1, \(36\)–\(38\) · pp. 18-19](#) [Proposition 7.1 · pp. 18-20](#)

3 等号を仮定し、1次元持ち上げる

$$P(K) = 4^n/n!, \quad B = K \oplus_1 [-1, 1], \quad B^\circ = Q \times [-1, 1]$$

欠損消失から各 X, ξ に共通 witness を得る。

端点漸近と凸分離が median を与え、実有限次元分類を適用する。

[Proposition 8.1 · pp. 21-22](#) [Lemma 8.2 · p. 23](#)

[\[HL81, Corollary 7.4, p. 15\]](#)

4 端点費用から median、3 球交差性、分類へ

$$(\mathbb{R}^n, p_Q): \text{全 3 点に median} \implies Q = TH$$

$$K = Q^\circ = T^{-T} H^\circ: \text{線形 Hanner 体}$$

区間の積 4、極性閉性、線形不変性で全 Hanner 体の達成を示す。

[Lemmas 2.1–2.2 · p. 6](#)

5 逆向きは区間からの再帰構成

$$P(A \oplus_s A') = \binom{k+l}{k}^{-1} P(A)P(A'), \quad s \in \{1, \infty\}$$

$$P(K) = 4^n/n! \iff K \text{ は線形 Hanner 体}$$

Theorem 1.1の下界・等号分類・逆向き

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 単体の積分から任意の凸体の下界へ

まず $A = \{X : |b_i \cdot X| \leq 1\}$ を有限個の帯の共通部分とする。等角 lens の幅 λ から作る実現可能単体の和集合 $\Sigma_X \subset A^\circ$ について、Proposition 6.1 は

$$1 \leq S = \frac{d!}{4^d} \int_A |\Sigma_X| dX \leq \frac{d!}{4^d} |A| |A^\circ|$$

を与える。左端は正則写像の質量、中央は境界分布の一様性、右端は極体への包含による。一般の K に対しては $Q = K^\circ$ を内接する対称多面体 Q_j で近似し、 $(1 - \delta_j)Q \subset Q_j \subset Q$ と極性から $K \subset Q_j^\circ \subset (1 - \delta_j)^{-1}K$ を得る。両体積の極限を取れば下界が従う。滑らかさや一般位置は仮定しない。

Proposition 6.1 · pp. 15–16 Corollary 6.2 · pp. 16–17

2. 等号から極体の3球交差性へ

$P(K) = 4^n/n!$ なら $B = K \oplus_1 [-1, 1]$ も $d = n + 1$ 次元で等号を満たす。 $B^\circ = Q \times [-1, 1]$ を近似したときの積分欠損が0へ収束するため、Proposition 7.1 は各 $X \in \text{int } B$ ・ 各 $\xi \neq 0$ に対して、すべての競合表示と比較できる1つの feasibility witness を与える。Proposition 8.1 は X を頂点 $(0, 1)$ へ近づけ、その費用比較から $(\mathbb{R}^n, p_Q)$ の任意の3点に median を構成する。

Lemma 8.2 では median から任意半径の3球交差性を得る。中心 x_i ・ 半径 r_i の球が2つずつ交われば、median m との距離 d_i は $d_i + d_j \leq r_i + r_j$ を満たす。 m が1つの球の外なら、外れた距離だけその中心へ動かすと3球すべてに入る。半径0も扱える。有限次元実ノルム空間は完備なので Hansen–Lima の分類が適用でき、 $Q = TH$ となる。極性で $K = T^{-T}H^\circ$ 、さらに Hanner 体の極性閉性から必要な分類が従う。

Proposition 7.1 · pp. 18–20 Proposition 8.1 · pp. 21–22 Lemma 8.2 · p. 23 [HL81, Corollary 7.4, p. 15]
Theorem 8.3; Proposition 8.4 · p. 23

3. すべての線形 Hanner 体が等号を達成する

逆向きは上の分類定理を必要としない。区間の体積積は4で、 k, l 次元の体 A, A' と $s \in \{1, \infty\}$ について

$$P(A \oplus_s A') = \binom{k+l}{k}^{-1} P(A)P(A')$$

が成立する。したがって再帰構成で $4^{k+l}/(k+l)!$ を保つ。極性は ℓ_1 和と ℓ_∞ 和を交換し、可逆線形変換の2つの行列式因子は体積積で相殺する。これで全等号族と $n = 1$ を含む逆向きが閉じる。

Lemmas 2.1–2.2 · p. 6

3. Proposition 6.1 — 正則質量から実単体恒等式へ

証明対象：Proposition 6.1 · pp. 15–16

Proposition 6.1 — 実現可能単体の積分恒等式

$d \geq 1$ 、 $b_1, \dots, b_m$ を $(\mathbb{R}^d)^*$ を張る非零かつ互いに非比例の実行ベクトルとする。

$A = \{X : |b_i X| \leq 1\}$ 、 $C = A^\circ$ とし、Lemma 3.1 の lens 幅 λ を使う。 $X \in \text{int } A$ に対し

$L_X = \{Y : |b_i Y| \leq \lambda(b_i X) \forall i\}$ とする。独立な d 行の集合 I と符号 ϵ_i について

$Y_{I,\epsilon} = B_I^{-1}(\epsilon_i \lambda(b_i X))_{i \in I}$ が L_X に属するとき、その組を実現可能といい、 Σ_X を対応する $\text{conv}(0, \epsilon_i b_i : i \in I)$ の和集合とする。

独立一様な境界角から $Z_I = B_I^{-1}(F(e^{i\theta_i}))_{i \in I}$ を作り、全行座標が閉 lens $\overline{D}$ に入る確率を P_I 、 $S = \sum_I P_I$ とおく。このとき

$$1 \leq S = \frac{d!}{4^d} \int_A |\Sigma_X| dX \leq \frac{d!}{4^d} |A| |A^\circ|,$$

$$0 \leq \int_A (|A^\circ| - |\Sigma_X|) dX \leq |A| |A^\circ| - \frac{4^d}{d!}.$$

Proposition 6.1 · pp. 15–16

1 lens の境界を一樣座標化する

$F(e^{i\Theta}) \stackrel{\text{law}}{=} \epsilon\lambda(T) + iT, \quad T \sim \text{Unif}[-1, 1]$
 ϵ は独立な一樣符号、 $g = F^{-1}$ 。

lens 内部のコンパクト部分単位集合を確認し、Stokes 質量を使う。

[Lemma 3.1 · pp. 7–8](#) [Lemma 4.1 · pp. 10–12](#)

2 高冪写像に孤立零点の質量を適用する

$f_k = (g(b_j z)^k)_j, \quad \sum_I M_{I,k} \geq (\pi k)^d / d!$
spanning 性が零点と先頭項の非退化を保証する。

k^d を相殺し、固定された有限測度上で上側 Fatou を用いる。

[Lemma 5.1 · pp. 12–14](#)

3 半径変換で境界確率へ集中させる

$u_i = \rho_i^{1/k} e^{i\theta_i}, \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} M_{I,k} / k^d \leq \frac{\pi^d}{d!} P_I$
 $S = \sum_I P_I \geq 1$

余分な境界一致は零測度。一意な最大点により単体内部は交わらない。

[Lemma 5.2 · p. 14](#) [Proposition 6.1 · pp. 15–16](#)

4 境界の零集合を除き、単体体積を加算する

$t_I = B_I X, \quad d! |\Sigma_X| = \sum_{I, \epsilon} |\det B_I| \mathbf{1}_{\text{feasible}} \quad a.e.$
 $S = \frac{d!}{4^d} \int_A |\Sigma_X| dX, \quad \Sigma_X \subset C = A^\circ$

包含と $S \geq 1$ を積分恒等式へ代入する。

[Proposition 6.1 · pp. 15–16](#)

5 下界と等号論証用の欠損を得る

$P(A) \geq 4^d / d!, \quad 0 \leq \int_A (|C| - |\Sigma_X|) dX \leq P(A) - 4^d / d!$

正則質量、境界確率、実単体体積の変換

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 高冪の孤立零点を境界確率へ移す

Lemma 3.1 の等角写像は $F(z) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{j \geq 0} (-1)^j z^{2j+1} / (2j+1)^2$ であり、境界値は $\epsilon\lambda(T) + iT$ 、 T は $[-1, 1]$ 上一様、 ϵ は独立な一樣符号となる。 $g = F^{-1}$ とし、 $\Omega = \{z : b_j z \in D \forall j\}$ 上で $f_k = (g(b_j z)^k)_j$ を用いる。行の spanning 性は零点の一意性と、次数 k の斉次先頭項が原点外で零にならないことを保証する。 $|f_k|^2 \leq s < 1$ は各行座標を lens 内部の固定コンパクト集合に閉じ込めるため、Lemma 4.1 のコンパクト部分単位集合の仮定も満たす。

Lemma 4.1は $d^c = \frac{i}{4}(\bar{\partial} - \partial)$ の規約で、Jacobian小行列式の二乗積分和を $(\pi k)^d/d!$ 以上とする。論証は $\log |f_k|^2$ の半正値性を使ったStokes比較と、斉次先頭項の球面flux $(\pi k)^d$ の計算である。共通位相回転に不変な補正項がfluxを変えないことが正規化の要点となる。

基底 I ごとに $u_i = g(b_i z)$ へ変数変換し、 $u_i = \rho_i^{1/k} e^{i\theta_i}$ と置くと k^d が相殺される。固定領域 $\sum_i \rho_i^2 < 1$ 上で指示関数は境界標本へ収束し、有限測度上の上側Fatou評価から $\limsup M_{I,k}/k^d \leq (\pi^d/d!)P_I$ を得る。有限個の基底について和を取って $S \geq 1$ となる。この段階では余分な境界一致を排除する必要はない。

Lemma 3.1 · pp. 7–8 Lemma 4.1 · pp. 10–12 Lemma 5.1 · pp. 12–14

2. 体積の二重計数を防ぎ、欠損を記録する

固定符号の境界分布は $4^{-d} dt_I$ 、 $t_I = B_I X$ なので、 $D_I = |\det B_I|$ として

$P_I = 4^{-d} D_I \int_A \sum_{\epsilon} \mathbf{1}_{(I,\epsilon) \text{ feasible}} dX$ となる。Lemma 5.2はlens境界のstrict curvatureと非比例性から、基底外に行まで境界上に来る角度集合が零測度であることを示す。したがってほとんどすべての X で異なる実現可能な組は異なる L_X の頂点を与える。

単体内部のベクトルは対応する頂点で一意に最大となる線形汎関数を定めるため、異なる単体の内部は交わらない。各体積 $D_I/d!$ を足せることが中央の恒等式を与え、 $\Sigma_X \subset C$ と $S \geq 1$ から

$$\int_A (|C| - |\Sigma_X|) dX = |A||C| - \frac{4^d}{d!} S$$

とその非負上界を得る。この積分された欠損が等号論証への出力であり、各 X で $\Sigma_X = C$ と断定するものではない。

Lemma 5.2 · p. 14 Proposition 6.1 · pp. 15–16

4. Proposition 7.1 — 欠損消失から共通witnessへ

証明対象：Proposition 7.1 · pp. 18–20

Proposition 7.1 — lens費用を最小化する表示

$K = -K \subset \mathbb{R}^n$ 、 $n \geq 1$ を $P(K) = 4^n/n!$ の凸体とし、 $Q = K^\circ$ 、 $d = n + 1$ 、 $B = K \oplus_1 [-1, 1]$ 、 $C = Q \times [-1, 1]$ とする。すべての $X \in \text{int } B$ と $0 \neq \xi = (q, a) \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対し、 $T = p_C(\xi) = \max\{p_Q(q), |a|\}$ とおくと、 $1 \leq r \leq d$ 個の $c_i \in Q \times \{-1, 1\}$ 、 $\alpha_i \geq 0$ と $Y \in \mathbb{R}^d$ が存在して、

$$\xi = \sum_i \alpha_i c_i, \quad \sum_i \alpha_i = T,$$

$$|h \cdot Y| \leq \lambda(h \cdot X) \quad (h \in C), \quad c_i \cdot Y = \lambda(c_i \cdot X) \quad (1 \leq i \leq r)$$

を満たす。特に任意の有限表示 $\xi = \sum_j \beta_j h_j$ 、 $\beta_j \geq 0$ 、 $h_j \in C$ に対し、

$$\sum_i \alpha_i \lambda(c_i \cdot X) \leq \sum_j \beta_j \lambda(h_j \cdot X).$$

選択は X, ξ に依存してよいが、同じ選択で全競合表示を扱う。

Proposition 7.1 · pp. 18–20

1 等号を保って持ち上げ、内接多面体で近似する

$$B = K \oplus_1 [-1, 1], \quad C = Q \times [-1, 1], \quad P(B) = 4^d/d! \\ C_j = Q_j \times [-1, 1], \quad B_j = C_j^\circ, \quad D_j = \int_{B_j} (|C_j| - |\Sigma_{j,X}|) dX \rightarrow 0$$

全 $Z \in U_k$ で V_k を避けるなら欠損積分が大きすぎる。

[§7.1, \(36\)–\(38\) · pp. 18–19](#) [§7.2, \(39\)–\(41\) · pp. 19–20](#)

2 所定の点と方向を積近傍で捕まえる

$$X \in \text{int } B, \quad e \in \partial C, \quad D_{j_k} < |U_k| |V_k| \\ X_k \rightarrow X, \quad e_k \rightarrow e, \quad e_k \in \Sigma_{j_k, X_k}$$

凹性で頂点の制約を凸包へ延長する。基底の極限で独立性を要求しない。

[§7.2, \(39\)–\(41\) · pp. 19–20](#)

3 同じ witness を有界に保ち、退化極限を許す

$$Y_k \in \lambda(0)B_{j_k}, \quad c_{ik} \rightarrow c_i, \quad Y_k \rightarrow Y, \quad \theta_{ik} \rightarrow \theta_i \\ |h \cdot Y| \leq \lambda(h \cdot X) \quad (h \in C), \quad c_i \cdot Y = \lambda(c_i \cdot X)$$

$1 = p_C(e) \leq \sum \theta_i \leq 1$ 。共通 Y が任意の競合表示に使える。

[Proposition 7.1 · pp. 18–20](#)

4 境界 gauge で重みを固定し、全表示と比較する

$$e = \xi/T, \quad \sum_i \theta_i = 1, \quad \alpha_i = T\theta_i \\ \sum_i \alpha_i \lambda(c_i \cdot X) = \xi \cdot Y \leq \sum_j \beta_j \lambda(h_j \cdot X)$$

積分欠損、積近傍、退化も許す共通witnessの構成

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 各点・各方向を積近傍で捕まえる

$|B||C| = \frac{4}{n+1}P(K) = 4^d/d!$ である。 $t_j Q \subset Q_j \subset Q$ 、 $t_j \rightarrow 1$ となる対称内接多面体から $C_j = Q_j \times [-1, 1]$ 、 $B_j = C_j^\circ$ を作ると、Proposition 6.1は $D_j = \int_{B_j} (|C_j| - |\Sigma_{j,X}|) dX \rightarrow 0$ を与える。

所定の $X \in \text{int } B$ 、 $e \in \partial C$ に近い正体積の小球 $U_k \subset \text{int } B$ 、 $V_k \subset \text{int } C$ を選ぶ。 $\overline{V_k} \subset \text{int } C$ となるように取り、 $t_j C \subset C_j$ と $t_j \rightarrow 1$ により、 j_k を十分大きくして $V_k \subset C_{j_k}$ と $D_{j_k} < |U_k| |V_k|$ を同時に確保する。すべての $Z \in U_k$ で $\Sigma_{j_k, Z}$ が V_k を避けるなら欠損積分がこの積以上となり矛盾する。よって $X_k \rightarrow X$ 、 $e_k \rightarrow e$ 、 $e_k \in \Sigma_{j_k, X_k}$ を選ぶ。積分収束を所定点での点wise収束へ取り違えないことが重要である。

[§7.1, \(36\)–\(38\) · pp. 18–19](#) [§7.2, \(39\)–\(41\) · pp. 19–20](#)

2. 特異化する基底でもwitnessを保つ

e_k を含む単体から d 個の行 c_{ik} 、重み $\theta_{ik} \geq 0$ 、 $\sum_i \theta_{ik} \leq 1$ と共通の Y_k を得る。頂点でのfeasibilityは λ の凹性により C_{j_k} 全体へ延びる。 $\lambda \leq \lambda(0)$ だから $Y_k \in \lambda(0)B_{j_k}$ であり、極体のsandwichが Y_k を一様有界にする。基底の逆行列に一様評価を課す必要はなく、極限の行が従属してもよい。

コンパクト性で Y_k, c_{ik}, θ_{ik} を同時に収束させ、任意の $h \in C$ には $t_{j_k} h \in C_{j_k}$ を用いて、同じ極限 Y で全不等式を得る。 $p_C(e) = 1$ より $1 \leq \sum_i \theta_i \leq 1$ で、原点頂点の重みは消える。 $e = \xi/T$ として $\alpha_i = T\theta_i$ とすれば表示を得る。最後は

$$\sum_i \alpha_i \lambda(c_i \cdot X) = \xi \cdot Y = \sum_j \beta_j h_j \cdot Y \leq \sum_j \beta_j \lambda(h_j \cdot X)$$

であり、この共通witnessが全競合表示に対する最適性を保証する。

§7.2, (39)–(41) · pp. 19–20 Proposition 7.1 · pp. 18–20

5. Proposition 8.1 — 頂点近傍の費用比較からmedianへ

証明対象：Proposition 8.1 · pp. 21–22

Proposition 8.1 — 等号体のmetric median

$n \geq 1$ 、 $K = -K \subset \mathbb{R}^n$ を $P(K) = 4^n/n!$ の凸体、 $Q = K^\circ$ とする。このとき $(\mathbb{R}^n, p_Q)$ の任意の3点 x_0, x_1, x_2 に対して点 m が存在し、すべての $0 \leq i < j \leq 2$ で

$$p_Q(x_i - x_j) = p_Q(x_i - m) + p_Q(m - x_j)$$

となる。medianの一意性は要求しない。

Proposition 8.1 · pp. 21–22

1 3点の距離を2符号の重みに変換する

$$\|\cdot\| = p_Q, \quad p_1 = \|x\|, \quad p_2 = \|y\|, \quad p = \|x - y\|$$

$$s = p_1 + p_2, \quad a = p_1 - p_2, \quad A_{\pm} = (p \pm a)/2, \quad c = (s - p)/2$$

Proposition 7.1 の全重みは p 。端点漸近は表示の変動に一様に対応する。

[Proposition 7.1 · pp. 18–20](#) [Lemma 3.2 · pp. 8–9](#)

2 頂点へ近づけて最適表示の費用を正規化する

$$X_{\delta} = (\delta u, 1 - \delta), \quad u \in \text{int } K, \quad \xi = (x - y, a)$$

$$\lambda(1 - \delta t)/\lambda(1 - \delta) \rightarrow t$$

正のコンパクト区間上一様

競合表示 $p_1(x/p_1, 1) + p_2(-y/p_2, -1)$ の費用を上界に使う。

[§8, \(42\)–\(46\) · pp. 21–22](#)

3 2項の競合表示と比較して支持関数を評価する

$$D_0 = \{r_+ - r_- : r_+ + r_- = x - y, \|r_{\pm}\| \leq A_{\pm}\}$$

$$\langle x + y, u \rangle \leq h_{D_0}(u) + s - p$$

支持関数を全方向へ斉次化する。各距離上界の和は元の距離に等しい。

[Proposition 8.1 · pp. 21–22](#)

4 凸分離と三角不等式で median を得る

$$x + y \in D_0 + (s - p)Q, \quad m = x - r_+ = y + r_-$$

$$\|m\| \leq c, \quad \|x - m\| \leq A_+, \quad \|y - m\| \leq A_-$$

3組すべてで距離が加法的。 $c = 0$ 、 $A_{\pm} = 0$ も含む。

lensの端点漸近、support function比較、metric median

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 2符号の費用を頂点で比較する

平行移動で3点を $0, x, y$ とし、 $\|\cdot\| = p_Q$ 、 $p_1 = \|x\|$ 、 $p_2 = \|y\|$ 、 $p = \|x - y\|$ 、 $s = p_1 + p_2$ 、

$a = p_1 - p_2$ 、 $A_{\pm} = (p \pm a)/2$ 、 $c = (s - p)/2$ と置く。重複点は自明なのでそれ以外を扱う。

$u \in \text{int } K$ を固定し、 $X_{\delta} = (\delta u, 1 - \delta) \in \text{int } B$ で Proposition 7.1 を $\xi = (x - y, a)$ に適用する。 $p \geq |a|$ なので全重みは p 、符号別の重みは $A_{\pm}$ である。

$r_{\pm} = \sum_{\sigma_i = \pm 1} \alpha_i b_i$ とすると $r_+ + r_- = x - y$ 、 $\|r_{\pm}\| \leq A_{\pm}$ 。これらが定める差のコンパクト凸集合を

$$D_0 = \{r_+ - r_- : r_+ + r_- = x - y, \|r_{\pm}\| \leq A_{\pm}\}$$

とする。Lemma 3.2の $\lambda(1-\eta) = \frac{2}{\pi}\eta \log(1/\eta) + O(\eta)$ から、 $\lambda(1-\delta t)/\lambda(1-\delta) \rightarrow t$ が正のコンパクト区間で一様に成り立つ。ここで $t = 1 - \sigma\langle b, u \rangle$ は $[1 - p_K(u), 1 + p_K(u)] \subset (0, \infty)$ に入る。この一様性により、選択された表示が δ で変動しても最適費用を $p - h_{D_0}(u)$ で下から評価できる。

比較相手を $(x - y, a) = p_1(x/p_1, 1) + p_2(-y/p_2, -1)$ とすると、その正規化費用は $s - \langle x + y, u \rangle$ へ収束する。最適性から

$$\langle x + y, u \rangle \leq h_{D_0}(u) + s - p \quad (u \in \text{int } K)$$

を得る。 u に一様な表示選択は不要である。

Lemma 3.2 · pp. 8–9 §8, (42)–(46) · pp. 21–22

2. 凸分離が距離の加法性を与える

連続性で上の不等式を K へ延長し、 $p_K = h_Q$ による斉次化を使うと、全方向 v で

$h_{\{x+y\}}(v) \leq h_{D_0}(v) + (s-p)h_Q(v)$ となる。凸分離から $x + y \in D_0 + (s-p)Q$ 。対応する $r_{\pm}$ を取り $m = x - r_+ = y + r_-$ とすれば、

$$\|m\| \leq c, \quad \|x - m\| \leq A_+, \quad \|y - m\| \leq A_-.$$

$c + A_+ = p_1$ 、 $c + A_- = p_2$ 、 $A_+ + A_- = p$ のため、3つの三角不等式はすべて等号になる。 $c = 0$ や $A_{\pm} = 0$ も同じ議論で扱う。これが主定理の分類で用いるmedianである。

Proposition 8.1 · pp. 21–22

6. Corollary 1.2 — 全次元の幾何から偶関数へ

証明対象：Corollary 1.2 · pp. 4–5

1 すべての次元の対称幾何不等式を入力する

$$P(K) \geq 4^N / N! \quad \text{すべての } N \geq 1, \quad f = e^{-\varphi} \text{ は偶}$$

偶な log-concave 関数への含意は全次元の仮定を必要とする。

[FM08, Proposition 1(a), 誌面 p. 1433 / PDF p. 5]

[FM08, Proof of Proposition 1(a), 誌面 pp. 1434–1435 / PDF pp. 6–7]

2 補助体の次元を増やして関数の積へ移す

$$N = n + m, \quad m \rightarrow \infty, \quad \mathcal{P}(f) = (\int f) \inf_z \int f^z \geq 4^n$$

$z = 0$ の積は平行移動最小値以上。 $\varphi = \|x\|_1$ で鋭さを確認する。

Corollary 1.2 · pp. 4–5

3 原点の極関数を Legendre 変換と同定する

$$f^0 = e^{-\varphi^*}, \quad (\int e^{-\varphi}) (\int e^{-\varphi^*}) \geq \mathcal{P}(f) \geq 4^n$$

第 2 積分が無限の場合も含む。

補助体の極限は関数の等号を分類する議論ではない。

[FM08, Remark 2, 誌面 p. 1437 / PDF p. 9]

等号分類の範囲

凸体の Hanner 分類から、一般の等号ポテンシャルの分類は導かない。

全次元の幾何不等式から偶関数型4のn乗へ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 平行移動最小化を経て原点の積へ戻す

$f = e^{-\varphi}$ とする。Frédérizi–Meyer の $\mathcal{P}(f) = (\int f) \inf_z \int f^z$ では $f^z(y) = \inf_{f(x)>0} e^{-\langle x-z, y-z \rangle} / f(x)$ を用いる。Proposition 1(a)は、全次元の対称凸体の Mahler 不等式を仮定して、偶な log-concave f に $\mathcal{P}(f) \geq 4^n$ を与える。Theorem 1.1 がこの仮定を供給し、 $f^0 = e^{-\varphi^*}$ なので原点での積は $\mathcal{P}(f)$ 以上である。第2積分が無限なら不等式は直ちに成立する。

外部の移行は $n + m$ 次元の補助凸体を用い $m \rightarrow \infty$ とするため、同じ n の幾何不等式だけを入力にすることはできない。 $\varphi = \|x\|_1$ では φ^* が立方体上 $0 \cdot$ 外で $+\infty$ となり鋭さを確認できる。一方、この極限操作から一般の関数の等号分類を読み取ることはできない。

[FM08, Proposition 1(a), 誌面 p. 1433 / PDF p. 5]

[FM08, Proof of Proposition 1(a), 誌面 pp. 1434–1435 / PDF pp. 6–7]

[FM08, Remark 2, 誌面 p. 1437 / PDF p. 9] Corollary 1.2 · pp. 4–5

7. Corollary 1.3 — 可積分性を確保して entropy–transport へ

証明対象：Corollary 1.3 · p. 5

1 対称・全次元・本質的連続性を確認する

$$\eta_i = e^{-V_i} dx, \quad \eta_i(\mathbb{R}^n) = 1, \quad \nu_i = (\nabla V_i)_\# \eta_i$$

$$e^{-V_i} = 0 \quad \mathcal{H}^{n-1}\text{-a.e. on } \partial \operatorname{supp} \eta_i$$

勾配の可積分性と、Proposition 7 の証明中のポテンシャル評価を使う。

[CEK15, Lemma 4, 誌面 p. 3840 / PDF p. 7]

[CEK15, Proof of Proposition 7, (14)–(15), 誌面 p. 3844 / PDF p. 11]

2 一次モーメントと entropy の有限性を得る

$$\int |y| d\nu_i = \int |\nabla V_i| e^{-V_i} dx = \int |\nabla e^{-V_i}| dx < \infty$$

$$V_i \in L^1(\eta_i), \quad H(\eta_i) = - \int V_i d\eta_i \in \mathbb{R}$$

Corollary 1.2 が左辺を供給する。密度の条件と entropy の符号を揃える。

Corollary 1.2 · pp. 4–5 [FGZ21, Theorem 1.3, p. 3]

3 偶関数版の定数 4 に同値性を適用する

$$\operatorname{IS}_{n,s}(4) \iff \operatorname{ET}_{n,s}(4)$$

同値性の c に 4 を代入する。

[FGZ21, Definitions 1.1–1.2, pp. 2–3] Corollary 1.3 · p. 5

4 対称 entropy–transport 不等式を得る

$$H(\eta_1) + H(\eta_2) \leq -n \log(4e^2) + \mathcal{T}(\nu_1, \nu_2)$$

$$\mathcal{T} = +\infty \text{ も許す。}$$

有限一次モーメントと有限entropyを確認して同値性を適用

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 輸送費用とentropyの定義域を確保する

$\rho_i = e^{-V_i}$ には $|\nabla \rho_i| = |\nabla V_i| e^{-V_i}$ が支持内部のほとんど至る所で成り立つ。Cordero-Erausquin–KlartagのLemma 4より $\int |\nabla \rho_i| < \infty$ なので、押し出しの定義から $\int |y| d\nu_i(y) < \infty$ である。また Proposition 7の証明は $V_i \in L^1(\eta_i)$ を示しており、 $H(\eta_i) = - \int V_i d\eta_i$ は有限となる。ここで外部 Proposition 7の主張そのものは V_i^* のmoment measureに関する可積分性であり、本稿が使う V_i の可積分性はその証明中の式(14)–(15)から取る。

[CEK15, Lemma 4, 誌面 p. 3840 / PDF p. 7]

[CEK15, Proof of Proposition 7, (14)–(15), 誌面 p. 3844 / PDF p. 11]

2. 対称版の同値性に定数4を入れる

Fradelizi–Gozlan–Zugmeyer Theorem 1.3はGozlanの結果として、 $\text{IS}_{n,s}(c)$ と $\text{ET}_{n,s}(c)$ の同値性を記載する。Definitions 1.1–1.2の本質的連続性、entropyの符号、費用 $\mathcal{T}$ を本稿と照合すると、Corollary 1.2を $c = 4$ として適用して $-n \log(4e^2)$ が得られる。原点对称性により偶なポテンシャルと対称moment measureを用いる設定に入り、全次元性は密度を持つ確率測度としての適用条件を確保する。 $\mathcal{T} = +\infty$ でも結論の意味は保たれる。

[FGZ21, Definitions 1.1–1.2, pp. 2–3] [FGZ21, Theorem 1.3, p. 3] Corollary 1.3 · p. 5

8. どの論文が、どの段階を担うか

供給元と結果

[HL81, Corollary 7.4, p. 15]

利用箇所

Theorem 8.3 / Proposition 8.4, p. 23 ; 等号分類

使用内容・必要な仮定

有限次元実Banach空間の3.2交差性から反復 ℓ_1/ℓ_∞ 和へ

確認範囲

原典p. 15の主張、§1の閉球・任意半径の規約、利用先を照合。分類の全証明は未検証

供給元と結果

[FM08, Proposition 1(a), 誌面 p. 1433 / PDF p. 5]

利用箇所

Corollary 1.2, pp. 4–5 ; 関数版

使用内容・必要な仮定

全次元の対称幾何不等式を偶関数の積へ移す

確認範囲

原典誌面p. 1433 / PDF p. 5と適用を照合。補助体の導入を読解し、全極限証明は未検証

供給元と結果

[CEK15, Lemma 4, 誌面 p. 3840 / PDF p. 7]; [CEK15, Proof of Proposition 7, (14)–(15), 誌面 p. 3844 / PDF p. 11]

利用箇所

Corollary 1.3、p. 5；有限性

使用内容・必要な仮定

log-concave密度の勾配可積分性とポテンシャルの可積分性

確認範囲

誌面pp. 3840, 3844 / PDF pp. 7, 11の記述・該当証明段落を照合

供給元と結果

[FGZ21, Theorem 1.3, p. 3]

利用箇所

Corollary 1.3、p. 5；同値性

使用内容・必要な仮定

本質的に連続な密度で対称逆Santalóからentropy-transportへ

確認範囲

指定v3、pp. 2–3の定義と主張を照合。Gozlan原論文の証明まで再帰検証していない

Grossの等角構成とDemaillyの一般化Lelong数は原稿で背景として挙げられるが、必要なlensの性質と質量評価は本稿内で証明され、ここでは外部の直接入力に数えない。一般の非対称Mahler論文についても、原稿§1.1は本証明の独立性を明記する。非対称版の定数 $(n+1)^{n+1}/(n!)^2$ だけから対称版の $4^n/n!$ は従わない。

§1.1 · p. 3

9. 原典を読む入口と確認範囲

- Lemma 4.1 · pp. 10–12 — 孤立零点の仮定と質量定数を確認する。
- Proposition 6.1 · pp. 15–16 — 確率から実単体体積への恒等式を読む。
- Proposition 7.1 · pp. 18–20 — 積分欠損から全点・全方向の共通witnessへの移行を読む。
- Proposition 8.1 · pp. 21–22 — 端点費用の比較と凸分離を読む。
- Theorem 8.3; Proposition 8.4 · p. 23 — 3球交差性、分類、極性の最後の接続を読む。

- Corollary 1.2 · pp. 4–5 — 全次元性を用いる関数版帰結を確認する。
- Corollary 1.3 · p. 5 — 有限性と同値性定理の適用を確認する。

参照版はOpenAI、2026年9月22日、公式commit 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6aの26頁PDFである。誌面とPDF位置は一致する。今回の編集では§§2–8の主要な証明本文、Corollaries 1.2–1.3の証明、直接入力4文献の上記箇所を新規に読解・照合した。特に質量の正規化、単体の二重計数、積分欠損から所定点への移行、退化基底でも同じwitnessを保つ量化、端点評価の一様性、任意半径の球への接続を対象とした。

これは全計算・測度論的細部の独立再証明や専門家査読ではない。外部分類定理、Fradelizi–Meyerの全極限論証、Gozlanの同値性の全証明は未検証である。カタログ内の利用先からの引用・適用は本部の接続照合で扱い、単に同じMahler問題を扱うことから依存を推定しない。参照箇所・ファイルハッシュ・未確認範囲はsources.json、制作と検査はstatus.mdに記録する。

The Mahler Conjecture for General Convex Bodies

双対錐のLaplace積、Gaussian射影場、等号からの単体剛性

OpenAIの2026年9月22日原稿は、一般凸体のSantaló中心での体積積の下界と、等号成立の単体による完全分類を主張する。証明は凸体を一つ高い次元の錐に持ち上げ、Gaussian射影場から得るentropy評価を非可換行列の区間平均不等式で閉じる。以下はその論証の概説であり、長いスカラー評価を含む全証明の独立検証ではない。

原稿の著者: OpenAI · 2026-09-22 · 72 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 一般凸体のMahler不等式と等号

整数 $n \geq 1$ と凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$P(K) := |K| |(K - s(K))^\circ| \geq \frac{(n+1)^{n+1}}{(n!)^2},$$

等号成立は K が単体であることと同値である。ここで凸体は内部が空でないコンパクト凸集合、 $s(K) \in \text{int } K$ は $z \mapsto |(K - z)^\circ|$ の一意的最小点であり、

$$(K - z)^\circ = \{y : \langle y, x - z \rangle \leq 1 \text{ for all } x \in K\}.$$

中心対称性や境界の滑らかさは仮定しない。 $P(K)$ は中心についての最小値なので、同じ下界はすべての内部点 z での $|K| |(K - z)^\circ|$ にも成立する。任意中心で等号になる、という主張ではない。

Theorem 1.1 · p. 1

Corollary 1.2 — 関数版

$n \geq 1$ 、 $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ はproper、下半連続、凸とし、 $0 < \int e^{-\varphi} < \infty$ とする。

Fenchel–Legendre変換 $\varphi^*(y) = \sup_x (\langle x, y \rangle - \varphi(x))$ に対して

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi(x)} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\varphi^*(y)} dy \right) \geq e^n.$$

第二積分は $+\infty$ でもよい。中心条件・偶性・正規化は不要である。定数の達成例は与えられるが、関数版の全等号例の分類はこの系の結論ではない。

Corollary 1.2 · p. 4

Corollary 8.1 — Entropy-transport不等式

$n \geq 1$ とし、 $\eta_i(dx) = e^{-V_i(x)} dx$ 、 $i = 1, 2$ は全次元のlog-concave確率測度、 V_i はproper、下半連続、凸とする。密度がessentially continuous、すなわち $\mathcal{H}^{n-1}$ -ほとんどすべての $\partial \text{supp } \eta_i$ 上で $e^{-V_i} = 0$ と仮定する。するとmoment measure $\nu_i = (\nabla V_i)_\# \eta_i$ は有限一次モーメントを持ち、

$$H(\eta_i) := \int \log(d\eta_i/dx) d\eta_i = - \int V_i d\eta_i$$

は有限であり、

$$H(\eta_1) + H(\eta_2) \leq -3n + \mathcal{T}(\nu_1, \nu_2), \quad \mathcal{T}(\mu_1, \mu_2) := \inf_f \left\{ \int f d\mu_1 + \int f^* d\mu_2 \right\}.$$

下限はproper、下半連続、凸な f 全体でとる。 $\mathcal{T}$ は $+\infty$ を許す。 H はShannon微分entropyの負号であり、essential continuityはこの系に追加される仮定である。

Corollary 8.1 · p. 41

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [The Mahler Conjecture for General Convex Bodies](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [Kla18](#) Bo’az Klartag — Isotropic constants and Mahler volumes：錐のLaplace積への対応。本稿Lemma 2.1で符号・階乗を再計算。arXiv:1710.08084v2, 1 March 2018。
- [Sol19](#) Valeriu Soltan — Moreau-Type Characterizations of Polar Cones：Moreau分解。本稿Lemma 3.1では正双対の符号で再証明。arXiv:1810.04206v1, 9 October 2018 (published 2019)。

- [Cha13](#) Patrawut Chansangiam — Operator Monotone Functions: Characterizations and Integral Representations : 平方根の作用素単調性により共分散更新をspectral box内に保つ。arXiv:1305.2471v1, 11 May 2013。
- [HP02](#) Christian Houdré and Nicolas Privault — Concentration and deviation inequalities in infinite dimensions via covariance representations : Gaussian covarianceの半群表示。本稿Lemma 5.1でHermite展開による再証明。Author manuscript for Bernoulli 8(6), 2002; manuscript pagination。
- [Nof17](#) Vanni Noferini — A formula for the Fréchet derivative of a generalized matrix function : 対称行列関数の差商微分公式を固有値間の区間平均に変換。Author accepted manuscript gendk_SIMAX_rev2c; SIAM J. Matrix Anal. Appl. 38(2), 2017。
- [FM08](#) Matthieu Fradelizi and Mathieu Meyer — Some functional inverse Santaló inequalities : 全次元の幾何不等式から一般log-concave関数の積下界を導く。Advances in Mathematics 218 (2008), 1430–1452; author personal copy with cover sheet。
- [FGZ21](#) Matthieu Fradelizi, Nathael Gozlan, and Simon Zugmeyer — Transport proofs of some functional inverse Santaló inequalities : Gozlanのfunctional inverse Santalóとentropy-transportの同値を使用。arXiv:2109.00871v3, 9 September 2021。
- [CEK15](#) Dario Cordero-Erausquin; Bo'az Klartag — Moment measures : 編集補足 : moment measureの有限一次モーメントとentropyの有限性を説明（原稿§8.2の明示引用ではない）。Journal of Functional Analysis 268 (2015), 3834–3866; published PDF。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 — 錐の積下界と等号の証明概略

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · p. 1

証明の道筋。 $m = n + 1$ として凸体の積を正双対錐のLaplace積へ移す。座標とGaussian共分散を同時に正規化し、射影を層に沿って積分した写像に変数変換を適用する。残る誤差を線形Gaussian行列場と非負の層欠損に分け、固有値間の厳密な区間評価で吸収する。等号では捨てた欠損がすべて消え、射影が固定基底で座標ごとに分離する。

1 凸体を正双対錐へ持ち上げる

$$m = n + 1, \quad D = C^*, \quad \langle U, V \rangle = m$$

$$\chi_C(V)\chi_D(U) = \frac{(n!)^2}{m^m} |K| |(K - z_0)^\circ|$$

Moreau 分解と固定点で非可換な射影場を正規化
 Lemma 3.1 · pp. 9–10; Proposition 3.4 · pp. 12–14

2 射影平均・共分散を同時に選ぶ

$$\mathbb{E}X_z = a(z)U, \quad A = f(\Phi I - P_z), \quad L = \sum_i G_i M_i$$

$$\mathbb{E}A = 0, \quad \lambda T^2 + C \circ T + K = 0$$

平滑化・変数変換・Jensen 不等式で entropy 評価
 Proposition 4.3; Equation (11) · pp. 19–20

3 層積分写像の Jacobian を積へ比較

$$\frac{1}{m} \log(\chi_C(V)\chi_D(U)) \geq -\mathcal{E}$$

Hermite 次数と threshold 比較で非線形誤差を評価
 Proposition 5.7 · pp. 26–27; Section 6.5; Equation (23) · p. 34

4 線形 Gaussian 場と正の欠損へ分離

$$\mathcal{E} \leq \Delta_p - J_\Sigma(u) + .80 \| [L, T] \|_2^2$$

$$+ 1.8\tau T^2 - \int (W - W_0) d\beta, \quad \beta \geq 0$$

正規化による相殺と厳密なスカラー区間評価
 Proposition 2.3 · p. 8; Proposition 7.2 · pp. 36–39
 切片積の換算: Lemma 2.1 · pp. 6–7

5 区間分散で誤差を吸収し、体積へ戻す

$$\mathcal{E} \leq -.14\tau T^2 - \int (W - W_0) d\beta \leq 0$$

$$\chi_C(V)\chi_D(U) \geq 1 \implies P(K) \geq \frac{m^m}{(n!)^2}$$

一般Mahler不等式の錐・entropy・spectral評価の接続

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 中心を固定し、体積を錐のLaplace積へ移す

$z_0 \in \text{int } K$ を任意に固定し、 $C = \{(tx, t) : t \geq 0, x \in K - z_0\}$ 、

$D = C^* = \{y : \langle y, x \rangle \geq 0 \ (x \in C)\}$ とする。錐の $*$ は正双対であり、凸体の $\circ$ とは規約が異なる。

$U = (0, m)$ 、 $V = (0, 1)$ に対して

$$\chi_C(V)\chi_D(U) = \frac{(n!)^2}{m^m} |K| |(K - z_0)^\circ|, \quad \chi_C(V) = \int_C e^{-\langle V, x \rangle} dx.$$

D の高さ t の切片は $-t(K - z_0)^\circ$ であり、この負号と $\int_0^\infty t^n e^{-at} dt = n! a^{-n}$ が定数を決める。一般の closed、solid、pointed な凸錐と内部の対 U, V 、 $\langle U, V \rangle = m$ について積が 1 以上なら十分である。 $(C, D, U, V) \mapsto (BC, B^{-T}D, BU, B^{-T}V)$ は積と pairing を保存する。Klartag の対応は負双対規約で述べられており、本稿はこの計算を正双対でやり直す。

Lemma 2.1 · pp. 6–7 [Kla18, Lemma 2.1; Corollary 4.1, pp. 6–7, 15]

2. 射影の平均と共分散を同時に正規化する

G を標準Gaussian、 $\Sigma = I + T$ 、 $Z = \Sigma^{1/2}G$ 、 $a(z) = \phi(z) + z\Phi(z)$ とする。 ϕ, Φ は一次元標準 Gaussian の密度・分布関数である。各層 $z \in \mathbb{R}$ に対して bias ξ_z を選び、

$$X_z = \Pi_C(Z + \xi_z), \quad Y_z = \Pi_D(-Z - \xi_z), \quad \mathbb{E}X_z = a(z)U$$

とする。Moreau分解は $X_z - Y_z = Z + \xi_z$ と $\langle X_z, Y_z \rangle = 0$ を与える。bias の存在は $\mathbb{E}\frac{1}{2}|\Pi_C(Z + \xi)|^2 - a(z)U \cdot \xi$ の coercivity と厳密凸性から従う。射影の弱微分 $P_z = D\Pi_C(Z + \xi_z)$ は $0 \leq P_z \leq I$ を満たすが、異なる層で可換・単調とは限らない。

Lemma 3.1 · pp. 9–10 [Sol19, Theorem 1.1, p. 1]

$A = \int (\Phi(z)I - P_z)dz$ 、 $M_i = \mathbb{E}(G_i A)$ 、 $L = \sum_i G_i M_i$ とおく。原稿の固定スカラープロファイルを $\mathbf{C}, \mathbf{K}$ と表記し、 $\mathbf{C} = \mathbb{E}\mathbf{C}(L)$ 、 $\mathbf{K} = \mathbb{E}\mathbf{K}(L)$ と区別する。Proposition 3.4 は線形座標と T を同時に選び、

$$\mathbb{E}A = 0, \quad \lambda T^2 + \mathbf{C} \circ T + \mathbf{K} = 0, \quad -\mathbf{C} - 2\lambda T \geq m_* I,$$

を満たす。 $\circ$ は Jordan 積、 $\lambda = .65$ 、 $m_* = .352$ 、 $-.022I \leq T \leq .064I$ である。平方根の作用素単調性が共分散更新をこの範囲に保ち、座標方向の内向き評価と Brouwer 固定点が平均の釣合いも実現する。共分散を先に I に固定すると、後段で必要な行列相殺を得られない。

Equation (7) · p. 11 Proposition 3.4 · pp. 12–14 [Cha13, Theorem 2.3, p. 4]

3. Entropy 誤差を、線形場と層欠損に分離する

正の重みで X_z, Y_z を積分し、平滑化した単射の錐値写像を作る。変数変換と Jensen 不等式で、その log Jacobian と線形コストを Laplace 積へ比較する。Proposition 4.3 は

$$\frac{1}{m} \log(\chi_C(V)\chi_D(U)) \geq -\mathcal{E}$$

を与える。ここで $\mathcal{E}$ は原稿の entropy 誤差汎関数である。この段階は積下界そのものをまだ証明しない。

Proposition 4.3; Equation (11) · pp. 19–20

$R = A - L$ の Gaussian 次数は 2 以上、奇部分では 3 以上である。Gaussian covariance 公式を $(1 + N_G)^{-1}$ の形で使い、各次数の係数を評価する。適用先は Gaussian Sobolev 空間のベクトル場であり、可測な P_z をさらに微分する議論ではない。原稿 Lemma 5.1 は Houdré–Privault の半群公式を Hermite 展開で再証明する。

Lemma 5.1 · pp. 20–21 [HP02, Proposition 2.1, Equation (2.4), p. 3]

$\Theta_z(L) = 1_{(-\infty, z]}(L)$ と比べた欠損は、固有値 x_i ごとの $((P_z)_{ii} - 1_{x_i \leq z})(x_i - z) \geq 0$ を通して正測度 β を作る。層の非単調性や非可換性を捨てずに残す点が重要である。Proposition 5.7と§6の評価を合わせると、

$$\mathcal{E} \leq \Delta_p - J_\Sigma(u) + .80\| [L, T] \|_2^2 + 1.8\tau T^2 - \int (W - W_0) d\beta, \quad W - W_0 > 0.$$

$\tau B = m^{-1} \mathbb{E} \operatorname{tr} B$ 、 $\|B\|_2^2 = \tau(B^T B)$ 。 $\Delta_p, J_\Sigma(u)$ は固定プロファイル u の線形場 L 上での平均差と Dirichlet項であり、ここで右辺の最後の積分以外は L, T だけに依存する。

Section 5.3; Lemma 5.4 · pp. 23–24 Proposition 5.7 · pp. 26–27 Section 6.5; Equation (23) · p. 34

4. 固有値間の厳密な区間評価で下界を閉じる

行列関数の微分を差商で書くと、固有値 x_i, x_j 間の区間平均が現れる。Daleckii–Kreĭn公式の適用には固有ベクトルの微分を要せず、対称行列と滑らかなプロファイルで十分である。Gaussian部分積分と正規化式が $S - I$ 、 $S = \sum_i M_i^2$ にかかる符号不定項を相殺する。Proposition 2.3の厳密な区間不等式は、非一致の固有値対に残る誤差をプロファイルの区間分散に吸収する。

Lemma 7.1 · pp. 35–36 [Nof17, Theorem 2.11, 誌面 p. 6 / PDF p. 7] このプロファイルは

$u = (\pi, q)$ で、 π は $w \operatorname{arsinh}(x/s)$ を角度に持つ円周成分、 $q = k - \sqrt{b - r^2 - d}$ である。恒等式 $d + |u|^2 = c + 2kq$ が二次補正を一成分に集約し、円周成分の変動が非自明な区間の厳密な分散を供給する。区間不等式はこの分散で差商誤差と共分散の交換子コストを同時に支配する。

Proposition 2.3 · p. 8

Proposition 7.2は $\Delta_p - J_\Sigma(u) + .80\| [L, T] \|_2^2 \leq -1.94\tau T^2$ を与え、したがって

$$\mathcal{E} \leq -.14\tau T^2 - \int (W - W_0) d\beta \leq 0.$$

これをentropy評価に戻して錐の積を 1 以上とし、切片の公式から任意中心 z_0 の下界を得る。

$z_0 = s(K)$ を選べばTheorem 1.1の不等式となる。Appendices A/Bは節点の有理区間計算だけでなく、節点間の解析的補間と無限遠の評価を含む。これらの全証明書の再実行・全評価の独立検証は本概説では未完了であり、Proposition 2.3を確認済みの数値実験として扱わない。

Proposition 7.2 · pp. 36–39 Appendix A.2; Proposition B.1 · pp. 43–45, 54–55

5. 消える欠損から単体を復元し、逆向きを計算する

1 錐の積の等号からすべての欠損を消す

$$\chi_C(V)\chi_D(U) = 1 \implies \mathcal{E} = 0$$

$$T = 0, \quad \beta = 0, \quad \nu\{(x, y) : x \neq y\} = 0$$

厳密な区間評価と Gaussian 直交性を等号に適用
[Proposition 7.2 · pp. 36–39](#); [Section 7.3 · pp. 39–40](#)

2 Gaussian 係数を固定基底で同時対角化

$$\nu[(x - y)^2] = \frac{1}{m} \sum_{i,j} \|[M_i, M_j]\|_{\text{HS}}^2 = 0$$

正の縮小行列 · Fubini · 交差弱微分の消滅
[Section 7.3 · pp. 39–40](#)

3 射影を座標ごとに分離する

$$\beta = 0 \implies P_z = \Theta_z(L) \text{ a.e.}$$

$$\Pi_C(x) = (f_1(x_1), \dots, f_m(x_m))$$

solid · pointed 性で零 · 直線因子を排除し、体積を直接計算
[Section 7.3 · pp. 39–40](#)

4 半直線の積から単体の切片を得る

$$C \cong \mathbb{R}_+^m \implies K \text{ は単体}$$

逆向き：標準単体と重心で

$$|K| = 1/n!, \quad |(K - z_0)^\circ| = m^m/n!$$

等号から可換係数 · 座標分離 · 単体への剛性

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

錐の積が 1 なら $0 \geq -\mathcal{E} \geq 0$ なので $\mathcal{E} = 0$ 。Proposition 7.2の証明で保持された厳密性から $T = 0$ 、 $\beta = 0$ 、固有値対の測度 ν は対角に台を持つ。さらに

$$\nu[(x - y)^2] = \frac{1}{m} \sum_{i,j} \|[M_i, M_j]\|_{\text{HS}}^2 = 0$$

より、すべての M_i は一つの固定直交基底で同時対角化できる。 $\beta = 0$ と $0 \leq P_z \leq I$ を使うと $P_z = \Theta_z(L)$ がほとんど至る所で従う。Fubiniで一つの層を固定し、Gaussian密度が全点で正であることから $D\Pi_C$ はLebesgue-a.e.にその基底で対角となる。

交差弱微分が消えるLipschitz射影は座標ごとに分離する。その像である錐 C は一次元閉凸錐の直積であり、solid性が $\{0\}$ 、pointed性が $\mathbb{R}$ の因子を排除するので各因子は半直線になる。元の錐に戻すと独立な $m = n + 1$ 本のrayがあり、高さ1の切片が単体になる。 $P(K)$ の等号は達成点 $s(K)$ でこの議論に入る。

逆に標準単体 $K = \text{conv}(0, e_1, \dots, e_n)$ と $z_0 = \mathbf{1}/m$ に対し、極体は $\text{conv}(m\mathbf{1}, -me_1, \dots, -me_n)$ 、その体積は $m^m/n!$ 、 $|K| = 1/n!$ 。下界と合わせてこの中心が最小を達成し、affine invarianceがすべての単体へ運ぶ。 $n = 1$ は区間で $(b-a)((z-a)^{-1} + (b-z)^{-1}) \geq 4$ 、等号は中点、という直接計算で処理される。

Section 7.3 · pp. 39–40 Section 2.1 · pp. 5–6

3. Corollary 1.2 — 全次元の幾何結果から関数版へ

証明対象：Corollary 1.2 · p. 4

証明の道筋。一定次元の体積不等式の言い換えではなく、補助凸体を高次元に作って極限をとる Fradelizi–Meyerの含意を使う。中心で最小化した関数積から原点でのLegendre変換の積へ戻り、別に達成例を計算する。

1 すべての次元の幾何下界を用意

$$P(K) \geq \frac{(d+1)^{d+1}}{(d!)^2} \quad (d \geq 1)$$

一般 log-concave 関数への全次元の含意
[FM08, Proposition 2(a), 誌面 pp. 1434–1435 / PDF pp. 6–7]

2 高次元補助体から関数積へ極限

$$P(f) = (\int f) \inf_z \int f^z \geq e^n$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^n P(\Delta_{n+k})}{P(\Delta_k)} = e^n$$

任意中心の積は最小値以上。等号例は別に積分する
Section 8.1 · pp. 40–41
極限から全等号分類は移らない: [FM08, Remark 2, 誌面 p. 1437 / PDF p. 9]

3 原点の Legendre 積と達成例

$$f^0 = e^{-\varphi^*} \implies (\int e^{-\varphi})(\int e^{-\varphi^*}) \geq e^n$$

$$\varphi = \sum_i x_i + \iota_{[-1, \infty)^n}, \quad \int e^{-\varphi} = e^n, \quad \int e^{-\varphi^*} = 1$$

全次元のMahler下界から関数版と鋭さへ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 中心最小化された関数積を使う

$f = e^{-\varphi}$ とし、 $f^z(y) = \inf_{x: f(x) > 0} e^{-\langle x-z, y-z \rangle} / f(x)$ 、 $P(f) = (\int f) \inf_z \int f^z$ とおく。Fradelizi–Meyer Proposition 2(a)は、すべての次元の一般凸体Mahler下界から $P(f) \geq e^n$ を与える。補助次元 k で単体を用いた比 $k^n P(\Delta_{n+k}) / P(\Delta_k)$ の極限が e^n になる。Theorem 1.1はこの全次元仮定を満たす。

$f^0 = e^{-\varphi^*}$ なので、原点での積は中心最小値 $P(f)$ 以上である。ここで中心を 0 に正規化したという仮定は加えない。第二積分が無限の場合は不等式が直ちに成立する。

[FM08, Proposition 2(a), 誌面 pp. 1434–1435 / PDF pp. 6–7] Section 8.1 · pp. 40–41

2. 定数の達成と分類の区別

ι_A を凸解析のindicatorとし、

$$\varphi(x) = \sum_i x_i + \iota_{[-1, \infty)^n}(x), \quad \varphi^*(y) = n - \sum_i y_i + \iota_{(-\infty, 1]^n}(y).$$

このとき $\int e^{-\varphi} = e^n$ 、 $\int e^{-\varphi^*} = 1$ である。したがって下界は鋭い。一方、Fradelizi–Meyerの高次元極限は等号例をそのまま移す議論ではなく、幾何側の単体分類から関数側の完全分類は従わない。

Section 8.1 · pp. 40–41 [FM08, Remark 2, 誌面 p. 1437 / PDF p. 9]

4. Corollary 8.1 — 関数積からentropy-transportへ

証明対象：Corollary 8.1 · p. 41

証明の道筋。Corollary 1.2をfunctional inverse Santaló $IS_n(c)$ の $c = e$ と読んで、Gozlanの同値定理をessentially continuousな密度に適用する。

1 関数版を $IS_n(e)$ と読む

$$(\int e^{-\varphi})(\int e^{-\varphi^*}) \geq e^n$$

Gozlan の $IS_n(c) \iff ET_n(c)$
 [FGZ21, Definition 1.1; Theorem 1.3, pp. 2–3]

2 密度の追加条件の下で同値を適用

$$\eta_i = e^{-V_i} dx, \quad \nu_i = (\nabla V_i)_\# \eta_i$$

全次元の確率測度・essential continuity

$$\int |y| d\nu_i < \infty, \quad V_i \in L^1(\eta_i)$$

編集補足：密度の勾配とポテンシャルの可積分性

[CEK15, Lemma 4, 誌面 p. 3840 / PDF p. 7; Proposition 7 proof,

(14)–(15), 誌面 p. 3844 / PDF p. 11]

有限一次モーメントと entropy の設定を保持し $c = e$ を代入
 Section 8.2 · p. 41

3 entropy の符号と定数を換算

$$H(\eta) = \int \log(d\eta/dx) d\eta, \quad -n \log(ee^2) = -3n$$

$$H(\eta_1) + H(\eta_2) \leq -3n + \mathcal{T}(\nu_1, \nu_2)$$

関数版からentropy-transport定数への換算

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 仮定を保ったまま定数を換算する

Frédérizi–Gozlan–ZugmeyerのDefinition 1.1とTheorem 1.3は、 $IS_n(c)$ と

$$H(\eta_1) + H(\eta_2) \leq -n \log(ce^2) + \mathcal{T}(\nu_1, \nu_2)$$

の同値を、全次元log-concave確率測度のessentially continuousな密度のクラスで述べる。この入力
 の測度・moment measureの設定に本稿Corollary 8.1の仮定を合わせ、 $c = e$ を代入すると

$-n \log(e^3) = -3n$ を得る。原稿はmoment measureの一次モーメントとentropyの有限性もこの設定
 で述べる。以下はその有限性を説明する編集補足であり、原稿§8.2が明示的に引用した経路ではない。

Cordero-Erausquin–KlartagのLemma 4は可積分log-concave密度 $\rho = e^{-V}$ に対して $\int |\nabla \rho| < \infty$ を
 与える。したがって $\nu = (\nabla V)_\# \eta$ について $\int |y| d\nu = \int |\nabla V| e^{-V} dx < \infty$ 。同論文Proposition 7の証
 明(14)–(15)は $0 < \int e^{-V} < \infty$ の凸 V に対して $V \in L^1(\eta)$ を示すので、 $H(\eta) = -\int V d\eta$ は有限で
 ある。これらを各 i に適用して系の有限性の結論を得る。直接使う記述と適用を確認したが、外部同値
 定理・可積分性定理の全証明は独立検証していない。

[CEK15, Lemma 4, 誌面 p. 3840 / PDF p. 7; Proposition 7 proof, (14)–(15), 誌面 p. 3844 / PDF p. 11]

[FGZ21, Definition 1.1; Theorem 1.3, pp. 2–3] Section 8.2 · p. 41

5. どの論文が、どの段階を担うか

入力

Klartagの錐対応

利用箇所

Lemma 2.1

役割・適用条件

proper convex coneの断面積とLaplace積。正双対への符号変更と階乗を本稿で再計算

確認範囲

原典の記述・本稿の計算を照合

入力

Moreau分解 (Soltanの記述)

利用箇所

Lemma 3.1

役割・適用条件

閉凸錐への射影と負双対への射影を直交分解。 D は正双対なので符号を変える

確認範囲

Theorem 1.1と本稿の再証明を照合

入力

ChansangiamのLöwner–Heinz不等式

利用箇所

Proposition 3.4

役割・適用条件

正行列の平方根の単調性。行列の可換性は不要

確認範囲

$r = 1/2$ の記述と共分散更新を照合

入力

Houdré–Privaultのcovariance公式

利用箇所

Lemma 5.1

役割・適用条件

Sobolev場のGaussian covarianceを逆生成作用素で表す

確認範囲

半群公式と本稿のHermite再証明を照合

入力

Noferini所収のDaleckii–Kreĭn公式

利用箇所

Lemma 7.1

役割・適用条件

滑らかな関数の対称行列微分を差商に変える

確認範囲

記述・適用箇所を照合

入力

Fradelizi–Meyer Proposition 2(a)

利用箇所

§8.1

役割・適用条件

全次元の一般凸体下界から関数下界へ

確認範囲

記述、高次元の極限、等号の留保を照合

入力

Cordero-Erausquin–Klartag Lemma 4 · Proposition 7証明

利用箇所

Corollary 8.1への編集補足（原稿§8.2の明示引用ではない）

役割・適用条件

moment measureの有限一次モーメントと有限entropy

確認範囲

直接の可積分性記述と適用を確認。全証明は未検証

入力

Gozlanの同値（Fradelizi–Gozlan–Zugmeyer Theorem 1.3）

利用箇所

§8.2

役割・適用条件

essential continuity付きのentropy–transportへ

確認範囲

同値の記述・符号・定数を照合。外部証明は未検証

以上の外部入力の証明全体を独立検証したものではない。カタログ087の対称Mahler原稿は、本稿の一般定数より強い対称体用の定数を扱う比較対象であり、本稿Theorem 1.1の証明入力ではない。Symplectic Balls in Symmetric Polar Productsへの直接依存も、本稿の読解範囲には記録されていない。

6. 原典を読む入口と確認範囲

- Lemma 2.1 · pp. 6–7 — 中心・符号・階乗を固定する。
- Proposition 3.4 · pp. 12–14 — 座標と共分散を同時に選ぶ固定点。
- Proposition 4.3; Equation (11) · pp. 19–20 — 積の対数を誤差汎関数へ帰着する。
- Proposition 7.2 · pp. 36–39 — 区間評価と正規化の相殺。
- Section 7.3 · pp. 39–40 — 等号から固定基底での可換性と単体を得る。
- Appendix A.2; Proposition B.1 · pp. 43–45, 54–55 — 定数を支える有理証明書・補間・尾部評価。独立検証は未完了。

- Section 8.1 · pp. 40–41 — 全次元極限と等号例。
- Section 8.2 · p. 41 — essential continuityと輸送の符号規約。

固定commit 1581d4cbdd69 の72ページ原稿を使用した。主定理の仮定・結論、中心と錐の換算、同時正規化、entropyから線形場への主要接続、§7の等号回収、§8の二つの帰結を読んだ。外部入力の上表の記述と利用先を照合した。

未確認として残るのは、Appendices A/Bの有理証明書の再実行と全補間・尾部評価、§§4–6の全可積分性・非可換核評価の独立再計算、外部結果の全証明である。これらは鋭い定数と等号分類を支える重要部分であり、概説の完成を論文全体の正しさの認定とはしない。担当は明示指定の gpt-6-astra。原典から新規に執筆した。

Symplectic Balls in Symmetric Polar Products

正則零点の消滅次数とレンズの一樣積分評価を組み合わせ、極体との積へ球を入れる

OpenAIの2026年9月22日原稿は、原点对称な凸体とその極体のLagrangian積に、容量が4未満の任意の標準球を滑らかにシンプレクティック埋込みする。下界を与える実際の埋込み、上界を与える円柱障害、体積保存からのMahler不等式を区別して説明する。

原稿の著者: OpenAI · 2026-09-22 · 19 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

$K \subset \mathbb{R}^n$ はコンパクト、凸、内部非空で $K = -K$ とし、 $K^\circ = \{p : \langle q, p \rangle \leq 1 \ (q \in K)\}$ と置く。位置 q と共役運動量 p を使い、

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^n dq_j \wedge dp_j, \quad U_K = \text{int } K \times \text{int } K^\circ, \quad B^{2n}(c) = \{\pi(|q|^2 + |p|^2) < c\}.$$

c は容量で、半径は $\sqrt{c/\pi}$ 、体積は $c^n/n!$ である。 c_G はこの球の滑らかなシンプレクティック埋込みが存在する容量の上限を表す。

Theorem 1.1 — 対称凸体と極体の積のGromov幅

任意の整数 $n \geq 2$ と原点对称凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$ に対して $c_G(U_K) = 4$ 。より正確には、各 $0 < c < 4$ について $B^{2n}(c) \hookrightarrow U_K$ が存在する。 K の滑らかさ、狭義凸性、座標ごとの符号対称性は仮定しない。上限4での埋込みは主張していない。

Theorem 1.1 · p. 1

Corollary 5.3 — 対称Mahler不等式

任意の整数 $n \geq 1$ と原点对称凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$\mathrm{vol}_n(K) \mathrm{vol}_n(K^\circ) \geq \frac{4^n}{n!}.$$

立方体と交差多面体の対でこの定数を達成するが、本稿は等号成立体の分類を与えない。

Corollary 5.3; Remark 5.4 · pp. 16–17

Corollary 5.5 — 有限球充填の十分条件

整数 $n \geq 3, k \geq 1$ 、原点对称凸体 $K \subset \mathbb{R}^n$ 、正の容量 $R_1, \dots, R_k$ が

$$\sum_{i=1}^k R_i^n < 4^n, \quad R_i + R_j < 4 \quad (i < j)$$

を満たすとする。このとき閉球 $\overline{B}^{2n}(R_i)$ の開近傍から U_K へのシンプレクティック埋込みを、像が互いに交わらないように取れる。 $k = 1$ では対ごとの条件は空である。この極体との積への条件は十分条件であり、必要十分条件と読み替えない。

Corollary 5.5 · p. 17

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Symplectic Balls in Symmetric Polar Products](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [AAKO14](#) Shiri Artstein-Avidan, Roman Karasev, Yaron Ostrover — From symplectic measurements to the Mahler conjecture : 支持する正方形円柱の構成。上界で使用。arXiv:1303.4197v2。
- [Gro85](#) Mikhael Gromov — Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds : nonsqueezingによる球容量の上界。Inventiones Mathematicae 82 (1985), 307–347; published PDF。
- [Gross19](#) Renan Gross — A conformal Skorokhod embedding : 一様分布の写像。回転して使い、必要な性質は本稿で証明。arXiv:1905.00852v1。
- [Mos65](#) Jürgen Moser — On the Volume Elements on a Manifold : 形式の変形法。本稿でコンパクト台を確認。Transactions of the American Mathematical Society 120 (1965), 286–294; published PDF。
- [OpenAI26p](#) OpenAI — Symplectic Ball Packings in Higher Dimensions : 帰結のみに使う高次元球充填。容量・閉球近傍規約を照合。September 23, 2026; commit 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 — 二つの尺度の比較と円柱障害

証明対象：Theorem 1.1 · p. 1

証明の道筋。 有限個の対称stripで定まる K について、Theorem 2.1が容量 πk 未満の球を供給し、Proposition 3.2が運動量方向の拡大率を $(1 + o(1))\pi k/4$ に抑える。両者をProposition 4.1で接続し、極体側の有限近似で任意の K に移す。上界は独立な支持円柱とnonsqueezingによる。二つの解析的入力の後続の証明節で説明する。

1 有限 strip を正則関数で記述

$$n \geq 2, \quad \text{span}_{\mathbb{R}}\{b_j\} = \mathbb{R}^n$$

$$K = \{x : |b_j \cdot x| \leq 1\}, \quad f_j = g(b_j \cdot z)^k, \quad \tau = \sum_j |f_j|^2$$

$$V = \{\tau < 1\}, \quad \omega = dd^c(|z|^2 + \tau)$$

単独零点・コンパクト sublevel と、一様 slice 評価を合流
[Theorem 2.1 · p. 4](#) [Proposition 3.2 · p. 9](#)

2 球の供給と運動量の制御

$$B^{2n}(d) \hookrightarrow (V, \omega) \quad (d < \pi k)$$

$$\Phi_k(z) = (x, -u - \sum_j J_k(b_j \cdot u, b_j \cdot x)b_j)$$

$$\Phi_k^* \omega_0 = \omega, \quad h_K(p)/k \leq C_K/k + (\pi/4)\tau + m\epsilon_k$$

水平単調性で大域単射、支持関数で像を極体の拡大に収める
[Proposition 4.1, Steps 1–2 · pp. 12–13](#)
[Proposition 4.1, Steps 3–4; Equations \(4.4\)–\(4.6\) · p. 14](#)

3 二つの拡大率を相殺

$$S = (1 + \eta)\pi k/4, \quad (1 + \eta)c < 4 \implies Sc < \pi k$$

$$D_{\sqrt{S}}(z) = \sqrt{S}z, \quad L_S(q, p) = (q, p/S)$$

$$L_S \circ \Phi_k \circ E \circ D_{\sqrt{S}} : B^{2n}(c) \hookrightarrow U_K$$

極体の有限近似後、源の $\sqrt{\lambda}$ 倍と位置の $1/\lambda$ 倍
[Lemma 5.1; proof of Theorem 1.1; Remark 5.2 · pp. 15–16](#)

4 任意の凸体で下界を得る

$$K \subset K' \subset \lambda K, \quad (K')^\circ \subset K^\circ, \quad \lambda c < 4$$

$$B^{2n}(c) \hookrightarrow U_K \quad (0 < c < 4), \quad c_G(U_K) \geq 4$$

支持する共役座標と面積保存写像；nonsqueezing を適用
[\[AAKO14, Remark 4.2, pp. 14–15\]](#)
[\[Gro85, §0.3.A, Corollary, 誌面 p. 310 / PDF p. 4\]](#)

5 独立な円柱障害と合わせる

$$U_K \hookrightarrow (-1, 1)^2 \times \mathbb{R}^{2n-2} \simeq B^2(4) \times \mathbb{R}^{2n-2}$$

$$c_G(U_K) \leq 4 \implies c_G(U_K) = 4$$

容量の下界を作る二つの入力と、独立した上界

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 有限stripから位相空間へ

$K = \{x : |b_j \cdot x| \leq 1, 1 \leq j \leq m\}$ とし、 b_j が $\mathbb{R}^n$ を張るとする。後述のレンズ D と $g : D \rightarrow \mathbb{D}$ を用い、 $\ell_j(z) = b_j \cdot z$ 、 $\Omega = \bigcap_j \ell_j^{-1}(D)$ 、 $f_j = g(\ell_j)^k$ 、 $\tau = \sum_j |f_j|^2$ と置く。 Ω は有界で、 f の共通零点は0だけである。 $\{\tau \leq s\}$ では各 $\ell_j(z)$ が $F(\{|w| \leq s^{1/(2k)}\}) \subseteq D$ に入る。線形写像 $(\ell_j)_j$ の単射性が閉sublevelのコンパクト性を保証するので、Theorem 2.1を適用できる。

$z = u + ix$ と書くと、 $dd^c|z|^2 = \sum du_j \wedge dx_j$ であり、目標の位置は $q = x$ 、元の運動量は $-u$ となる。補正を

$$\Phi_k(z) = (q, p), \quad q = x, \quad p = -u - \sum_j J_k(b_j \cdot u, b_j \cdot x) b_j$$

で定める。 $\partial_v J_k = |(g^k)'|^2$ により $\Phi_k^* \omega_0 = dd^c(|z|^2 + \tau)$ 。局所的な形式の一致だけでは埋込みにならない。固定した x の二点について、水平slice上の単調性から

$$(p_2 - p_1) \cdot (u_2 - u_1) \leq -|u_2 - u_1|^2$$

を得るため大域単射になる。fiberが非連結でも同じ水平区間上で比較できる点が重要である。

Proposition 4.1, Steps 1–2 · pp. 12–13

2. 極体を保つ運動量評価と相殺する拡大

h_K を支持関数とすると $h_K(\pm b_j) \leq 1$ であり、Proposition 3.2は

$$\frac{h_K(p)}{k} \leq \frac{C_K}{k} + \frac{\pi}{4} \tau + m \epsilon_k, \quad \epsilon_k \rightarrow 0$$

を与える。 K, m, C_K を固定してから k を大きく取る。任意の $\eta > 0$ に対して像は $\text{int } K \times S \text{int } K^\circ$ に入り、 $S = (1 + \eta)\pi k/4$ とできる。 $(1 + \eta)c < 4$ なら $Sc < \pi k$ なので、Theorem 2.1の球 $B^{2n}(Sc)$ を使える。源の $D_{\sqrt{S}}(z) = \sqrt{S}z$ と目標の $L_S(q, p) = (q, p/S)$ を合成すると、形式の倍率 S と S^{-1} が相殺し、 $B^{2n}(c) \hookrightarrow U_K$ となる。

Proposition 4.1, Steps 3–4; Equations (4.4)–(4.6) · p. 14

3. 任意の凸体への有限近似

各 $c < 4$ に対して $\lambda = 1 + \alpha > 1$ を $\lambda c < 4$ となるよう取る。Lemma 5.1は K° の有限netの対称凸包を極化して、有限strip体 K' を

$$K \subset K' \subset \lambda K, \quad (K')^\circ \subset K^\circ$$

となるよう作る。 $B^{2n}(\lambda c) \hookrightarrow \text{int } K' \times \text{int } (K')^\circ$ を $\lambda \text{int } K \times \text{int } K^\circ$ への埋込みとみなし、源の $\sqrt{\lambda}$ 倍と位置の $1/\lambda$ 倍を組み合わせる。ここでも形式の倍率が相殺する。選択順は c, α, K' と有限制約列、 η, k である。一つの c に一つの有限構成を作るので、埋込みの極限や境界の平滑化は不要である。

Lemma 5.1; proof of Theorem 1.1; Remark 5.2 · pp. 15–16

4. 支持円柱による上界

$\langle q_0, p_0 \rangle = 1$ を満たす $q_0 \in K, p_0 \in K^\circ$ を選ぶ。 q_0 と $\ker p_0$ の基底から作る A により $Q = A^{-1}q, P = A^T p$ はシンプレクティックで、 $|Q_1|, |P_1| < 1$ となる。従って U_K は第一共役座標の面積4の正方形に基づく円柱へ入る。正方形を面積保存で面積4の円板へ移し、Gromovのnonsqueezingから球の容量は4以下となる。これはHofer–Zehnder容量の値から下界を推論する議論ではない。

Proof of Theorem 1.1, upper bound · p. 16 [AAKO14, Remark 4.2, pp. 14–15]
[Gro85, §0.3.A, Corollary, 誌面 p. 310 / PDF p. 4]

3. Theorem 2.1 — 正則零点を球へ変える

証明対象：Theorem 2.1 · p. 4

Theorem 2.1 — 正則零点からの球

$n, m \geq 1, 0 \in \Omega \subset \mathbb{C}^n$ は開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^m$ は正則とする。ある整数 $k \geq 1$ に対して $f^{-1}(0) = \{0\}$ 、 $|f(z)| = O(|z|^k)$ 、さらに全ての $0 < s < 1$ について $\{|f|^2 \leq s\} \Subset \Omega$ を仮定する。 $\tau = |f|^2, V = \{\tau < 1\}$ 、 $d^c \phi(X) = -\frac{1}{4} d\phi(iX)$ 、 $\omega = dd^c(|z|^2 + \tau)$ と置く。このとき各 $0 < c < \pi k$ に対し $(B^{2n}(c), \omega_0) \hookrightarrow (V, \omega)$ が存在する。

Theorem 2.1 · p. 4

証明の道筋。 消滅次数を対数ポテンシャルの傾きに変え、0の近くのみ滑らかな放射状ポテンシャルで置換する。差のコンパクト台がMoser流を完備にし、放射状モデルで見える球を元の形式へ戻す。

1 消滅次数を対数傾きへ

$$0 < a < k, \quad a/k < b < 1, \quad a < \mu < bk$$

$$H = \chi(\log \tau) \leq bk \log |z|^2 + C, \quad H = \tau \text{ 境界側}$$

$\mu < bk$ で内側を支配；固定した r_1 の後で δ を選ぶ
[Theorem 2.1, Steps 1–2 · pp. 4–6](#)

2 特異点のみを置換

$$P_\delta = \mu \log(|z|^2 + \delta) - M, \quad \tilde{H} = \text{rmax}(H, P_\delta)$$

$$\tilde{H} = P_\delta \text{ on } B_{r_1}, \quad \text{supp}(\tilde{H} - \tau) \Subset V$$

固定コンパクト台が非コンパクト領域でも流の存在を保証
[\[Mos65, §4, Theorem 2 and deformation equation, 誌面 pp. 292–293 / PDF pp. 7–8\]](#)
[Theorem 2.1, Steps 3–4 · pp. 6–7](#)

3 コンパクト台の流で形式を輸送

$$\omega_s = dd^c(|z|^2 + (1-s)\tau + s\tilde{H})$$

$$\iota_{Y_s} \omega_s = -d^c(\tilde{H} - \tau), \quad \phi_1^* \omega_1 = \omega$$

放射状座標の単調性と形式の直接計算
[Theorem 2.1, Steps 3–4 · pp. 6–7](#)

4 放射状モデルの球を戻す

$$R(z) = \sqrt{1 + \mu/(|z|^2 + \delta)} z, \quad R^* \omega_0 = \omega_1$$

$$\pi(r_1^2 + \mu r_1^2/(r_1^2 + \delta)) > \pi a$$

$$\phi_1^{-1} \circ \iota \circ R^{-1} : B^{2n}(\pi a) \hookrightarrow (V, \omega)$$

消滅次数、特異点の置換、コンパクト台の変形による球

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 対数傾きと正則化最大値

容量を $c = \pi a$ と書き、 $0 < a < k$, $a/k < b < 1$, $a < \mu < bk$ を取る。 $H = \chi(\log \tau)$ が境界側では τ と一致し、0の近くでは $H \leq bk \log |z|^2 + C$ となるよう、増加凸関数 χ を選ぶ。

$P_\delta = \mu \log(|z|^2 + \delta) - M$ について、まず外側球面で $P_\delta < H - 2$ 、次に δ に依存しない内側球で $P_\delta > H + 2$ を確保する。 $\mu < bk$ の厳密性が後者を与える。その後で $\delta > 0$ を小さくする順序が必要である。

正則化最大値で $\tilde{H}$ を作ると、内側では P_δ 、外側では H になり、多重劣調和性を保つ。 $\tilde{H} - \tau$ の台は、仮定によりコンパクトなある $\{\tau \leq \sigma\}$, $\sigma < 1$ に入る。

[Theorem 2.1, Steps 1–2 · pp. 4–6](#)

2. Moser輸送と放射状の容量

$\omega_s = dd^c(|z|^2 + (1-s)\tau + s\tilde{H})$ は常に非退化である。 $\iota_{Y_s}\omega_s = -d^c(\tilde{H} - \tau)$ の解は固定コンパクト集合に台を持つため、非コンパクトな V 上でも $0 \leq s \leq 1$ の流 ϕ_s が存在し、 $\phi_1^*\omega_1 = \omega$ 。これは Moserの変形法の局所適用を本稿で証明したもので、コンパクト多様体についての原定理を非コンパクト領域へ無条件に引用していない。

内側では $\Psi(t) = t + \mu \log(t + \delta)$ に対し $R(z) = \sqrt{\Psi'(|z|^2)}z$ が標準形式へ移す。半径 r_1 の球の像の容量は $\pi(r_1^2 + \mu r_1^2/(r_1^2 + \delta)) > \pi a$ 。この像の球を R^{-1} 、包含、 ϕ_1^{-1} で戻せばよい。sublevel境界の正則値条件や V の連結性は使わない。

Theorem 2.1, Steps 3–4 · pp. 6–7

[Mos65, §4, Theorem 2 and deformation equation, 誌面 pp. 292–293 / PDF pp. 7–8]

4. Proposition 3.2 — 先端まで一様な水平積分評価

証明対象：Proposition 3.2 · p. 9

Proposition 3.2 — 一様slice評価

Lemma 3.1の写像

$$F(w) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{\ell \geq 0} \frac{(-1)^\ell w^{2\ell+1}}{(2\ell+1)^2} : \mathbb{D} \longrightarrow D, \quad g = F^{-1}$$

を用いる。 D は有界で、高さ $-1 < t < 1$ の水平sliceは $(-V(t), V(t)) + it$ である。整数 $k \geq 2$ に対し

$$J_k(v, t) = k^2 \int_0^v |g(h + it)|^{2k-2} |g'(h + it)|^2 dh.$$

J_k は D 上滑らか、 v について奇関数で、 $\partial_v J_k = k^2 |g|^{2k-2} |g'|^2 \geq 0$ 。 F だけに依存する $\epsilon_k \geq 0$, $\epsilon_k \rightarrow 0$ が存在して、全ての $v + it \in D$ に同時に

$$\frac{|J_k(v, t)|}{k} \leq \frac{\pi}{4} |g(v + it)|^{2k} + \epsilon_k$$

が成り立つ。

Proposition 3.2 · p. 9

証明の道筋。Grossの一様分布の写像を源・目標で回転した $F(w) = i\psi(iw)$ を使う。拡大係数は加えない。水平線の積分を円板内の半径へ移し、主要項 $\pi/4$ と先端での誤差を分離する。

[Gross19, §3.2, p. 9]

1 水平 slice を半径で測る

$$F(w) = i\psi(iw), \quad g = F^{-1}, \quad F(ir) = iT(r) \\ r_0 = T^{-1}(|t|), \quad R = |g(v + it)|, \quad A = \Re(wF'(w)) > 0$$

$|g'|^2 dv = (r/A) dr$ で変数変換；回転のみで尺度を保持
[\[Gross19, §3.2, p. 9\]](#) [Lemma 3.1; Equation \(3.11\)](#) · pp. 7–10

2 主要項 $\pi/4$ を取り出す

$$J_k(v, t)/k = k \int_{r_0}^R \frac{r^{2k-1}}{A} dr \\ 1/A = \pi/2 + (1/A - \pi/2)$$

先端の損失を $T(r) - |t| \geq L_*(r - r_a)$ で抑える
[Equations \(3.15\)–\(3.21\)](#) · pp. 10–12

3 動く端点を一様に制御

$$r_a = \max(r_0, r_*), \quad L_* = \inf_{r \geq r_*} T'(r) \rightarrow \infty \\ k \int_{r_a}^1 r^{2k-1} \sqrt{\frac{1-r}{r-r_a}} dr \leq 1 + \pi/e$$

先に $r_* \uparrow 1$ 、次に固定 r_* で $k \rightarrow \infty$
[Equations \(3.15\)–\(3.21\)](#) · pp. 10–12

4 全ての高さで誤差を消す

$$\frac{|J_k|}{k} - \frac{\pi}{4}|g|^{2k} \leq C_* k r_*^{2k-2} + \frac{C_0(1 + \pi/e)}{\sqrt{L_*}} \\ |J_k|/k \leq (\pi/4)|g|^{2k} + \epsilon_k, \quad \epsilon_k \rightarrow 0$$

移動するsliceの先端でも誤差を一様に消す順序

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 半径積分と主要係数

$F(ir) = iT(r)$ 、 $T'(r) = 8 \operatorname{arctanh} r / (\pi^2 r) \rightarrow \infty$ とする。正の水平sliceに沿って $w = re^{i\theta(r,t)}$ と書く
と、 $r_0 = T^{-1}(|t|)$ から $R = |g(v + it)|$ まで r が単調増加する。

$$A(r, \theta) = \Re(wF'(w)) = \frac{4}{\pi^2} \arctan \frac{2r \cos \theta}{1 - r^2}, \quad \frac{J_k(v, t)}{k} = k \int_{r_0}^R \frac{r^{2k-1}}{A(r, \theta(r, t))} dr.$$

$1/A$ の定数部分 $\pi/2$ の積分が $\frac{\pi}{4}(R^{2k} - r_0^{2k})$ を与える。 t を固定した境界極限だけでは、
 $t = t_k \rightarrow \pm 1$ における残差は制御できない。

[Lemma 3.1; Equation \(3.11\)](#) · pp. 7–10

2. 動く端点と極限の順序

$r_* \in (1/2, 1)$ で分ける。内部の寄与は $C_* k r_*^{2k-2}$ 。外側では $r_a = \max(r_0, r_*)$ 、 $L_* = \inf_{r_* \leq r < 1} T'(r)$ として

$$\frac{1}{A} \leq \frac{\pi}{2} + C_0 \sqrt{\frac{1-r}{T(r)-|t|}}, \quad T(r)-|t| \geq L_*(r-r_a).$$

残る $I = k \int_{r_a}^1 r^{2k-1} \sqrt{(1-r)/(r-r_a)} dr$ は $H = k(1-r_a)$ と $y = k(1-r)$ を使うと、 H の大小によらず $I \leq 1 + \pi/e$ 。従って超過分は

$$C_* k r_*^{2k-2} + \frac{C_0(1 + \pi/e)}{\sqrt{L_*}}$$

以下になる。先に $r_* \uparrow 1$ で第二項を小さくし、その r_* を固定して $k \rightarrow \infty$ とする。これで高さと両端点が k とともに動く場合まで一様になる。滑らかさはコンパクトな水平線分上の微分、奇性と単調性は積分密度の対称性と非負性から従い、これらも §4 の大域埋込みに使われる。

Equations (3.15)–(3.21) · pp. 10–12

5. Corollary 5.3 — 体積保存による帰結

証明対象：Corollary 5.3; Remark 5.4 · pp. 16–17

証明の道筋。 $n \geq 2$ では球の体積を下から近づけ、 $n = 1$ は区間を直接計算する。等号例の確認と等号分類は別である。

1 内部と閉体の体積を同定

$$tC \subset \text{int } C \quad (0 < t < 1), \quad t \uparrow 1$$

$$\text{vol}_{2n}(U_K) = \text{vol}_n(K) \text{vol}_n(K^\circ)$$

主定理の埋込みは $\omega_0^n/n!$ を保存
Theorem 1.1 · p. 1 Corollary 5.3; Remark 5.4 · pp. 16–17

2 各容量の球で体積を下から評価

$$n \geq 2, \quad 0 < c < 4: \quad B^{2n}(c) \hookrightarrow U_K$$

$$c^n/n! \leq \text{vol}_{2n}(U_K)$$

$c \uparrow 4$; 容量 4 の埋込みは不要。一次元は直接計算
Corollary 5.3; Remark 5.4 · pp. 16–17

3 容量の数値極限と一次元

$$\text{vol}_n(K) \text{vol}_n(K^\circ) \geq 4^n/n!$$

$$n = 1: \quad [-a, a] \text{ and } [-a^{-1}, a^{-1}] \implies 4$$

極体を 2^n 個の単体へ分ける
Corollary 5.3; Remark 5.4 · pp. 16–17

4 鋭さの例を確認

$$\text{vol}([-1, 1]^n) = 2^n, \quad \text{vol}(\{\sum |p_j| \leq 1\}) = 2^n/n!$$

等号例であって、全等号例の分類ではない

内部の体積、球の体積、容量の上限から鋭い定数へ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 内部への移行と容量の極限

0 を内部に含む凸体 C では $tC \subset \text{int } C$ ($0 < t < 1$) なので $t \uparrow 1$ により内部と閉体の体積は一致する。従って $\text{vol}_{2n}(U_K) = \text{vol}_n(K) \text{vol}_n(K^\circ)$ 。シンプレクティック埋込みは $\omega_0^n/n!$ を保つので、各 $c < 4$ について $c^n/n! \leq \text{vol}_{2n}(U_K)$ 。数値として $c \uparrow 4$ とするだけでよく、容量4の球の埋込みや埋込み列の収束を要求しない。

2. 一次元と鋭さ

$n = 1$ では $K = [-a, a]$, $K^\circ = [-a^{-1}, a^{-1}]$ の長さの積は4。一般次元の立方体は体積 2^n 、極体の交差多面体は各象限の単体を数えて $2^n/n!$ であり、積は $4^n/n!$ となる。この例から他の全等号例を分類することはできない。

6. Corollary 5.5 — 球充填を極体との積へ移す

証明対象：Corollary 5.5 · p. 17

証明の道筋。厳密な二種類の不等式に残る余裕を使って $c < 4$ を一度選び、外部の球充填定理と Theorem 1.1 を合成する。

1 有限個の厳密な余裕を確保

$$n \geq 3, \quad \sum_i R_i^n < 4^n, \quad R_i + R_j < 4 \\ \exists c < 4: \quad \sum_i R_i^n < c^n, \quad R_i + R_j < c$$

高次元球充填の十分性と近傍規約を使用
[OpenAI26p, Theorem 1.1, p. 2]

2 閉球を開球内へ充填

$$\bigsqcup_i \overline{B}^{2n}(R_i) \hookrightarrow B^{2n}(c)$$

閉球の開近傍上で定義された埋込み

閉球の像のコンパクト性で近傍を選択；主定理と合成
Corollary 5.5 · p. 17 Theorem 1.1 · p. 1

3 近傍を縮めて極体との積へ合成

$$B^{2n}(c) \hookrightarrow U_K$$

各近傍の像は互いに交わらず、 U_K 内にある

閉球の近傍を保った充填の合成

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 厳密な余裕と近傍の縮小

有限個の条件が厳密なので、 $\sum_i R_i^n < c^n$ と $R_i + R_j < c$ が全て成り立つ $c < 4$ を選べる。外部の Theorem 1.1 は $n \geq 3$ の閉球を $B^{2n}(c)$ 内へ、閉球の開近傍上で定義された埋込みとして充填する。コンパクトな閉球の像が互いに交わらず開球内にあるので、有限個の近傍を縮めて像の非交差と目標内への包含を同時に保つ。最後に Theorem 1.1 の $B^{2n}(c) \hookrightarrow U_K$ と合成する。外部定理の必要十分性は球を目標とする場合のもので、この合成から U_K での必要性は出ない。

Corollary 5.5 · p. 17 [OpenAI26p, Theorem 1.1, p. 2]

7. どの論文が、どの段階を担うか

供給元

Gross

利用箇所

Lemma 3.1, §3

使う内容・接続

一様分布の等角写像を回転。必要なレンズ・slice性質は本稿で証明

確認範囲

§3.2の級数と回転を照合。確率論の全証明は対象外

供給元

Moser

利用箇所

Theorem 2.1, Step 3

使う内容・接続

形式の道をベクトル場で輸送。本稿は固定コンパクト台を証明

確認範囲

§4の変形方程式と本稿pp.5–6の台を照合

供給元

Artstein-Avidan–Karasev–Ostrover、Gromov

利用箇所

Theorem 1.1の上界

使う内容・接続

支持正方形円柱とnonsqueezing

確認範囲

入力の記述とp.16での適用を照合。nonsqueezingの証明全体は未検証

供給元

OpenAI, Symplectic Ball Packings in Higher Dimensions

利用箇所

Corollary 5.5

使う内容・接続

 $n \geq 3$ 、厳密不等式、閉球の近傍上の埋込み

確認範囲

Theorem 1.1と容量・近傍規約を照合。充填定理の証明は未検証

同じ087の The symmetric Mahler conjecture and its equality cases はレンズの共通する背景であり、本稿はその体積不等式や等号分類を証明入力としない。逆に本稿のCorollary 5.3は対称体について同じ体積下界を与えるが、等号分類を含まない。一般凸体の原稿との直接依存は、この原稿で読んだ証明には記録されていない。関連する全ての接続を調査済みという意味ではない。

Background and prior constructions · p. 2

8. 原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 1.1 · p. 1 — 容量の規約と主張の範囲
- Theorem 2.1 · p. 4 — 消滅次数を球容量に変える仮定
- Equations (3.15)–(3.21) · pp. 10–12 — 移動する端点でも一様な誤差
- Proposition 4.1, Steps 1–2 · pp. 12–13 — 局所形式と大域単射性
- Lemma 5.1; proof of Theorem 1.1; Remark 5.2 · pp. 15–16 — 近似とパラメータの選択順
- Corollary 5.3; Remark 5.4 · pp. 16–17 — 体積の帰結と鋭さ
- Corollary 5.5 · p. 17 — 外部充填定理を使う帰結

固定版の本文§§2–5 (pp.3–17) を読み、消滅次数から球への変形、先端を含む一様評価、有限stripの大域単射性、二段階の拡大相殺、支持円柱、体積と充填の帰結を照合した。外部入力の上表の記述・使用箇所まで確認した。これらは原稿の論証を案内する編集上の確認であり、著者による全次元の主張を独立に認定するものではない。外部定理の全証明、全参考文献の再帰的検証、等号分類は確認範囲外である。