

OpenAI Math Digest

CATALOGUE 074

三次元と四次元のKakeya問題

総括・論文間のつながりと2篇の証明概説

独立した非公式の読解ガイド・日本語版

収録版: 2026-10-16

制作: Masataka Iwai・大阪大学

AI生成の解説には誤りや不正確な説明が含まれる可能性があります。重要な主張・証明は原論文でご確認ください。本冊子はWebサイトの解説をまとめたもので、原論文そのものではありません。専門家査読・形式検証は未実施です。

目次

総括に続き、公式カタログ順で全2篇の解説を収録しています。目次・引用はクリックできます。横長の表は紙面向けの項目一覧に組み直し、主張と参照先を保持しています。

00・カタログ074 総括	3
01・The Kakeya maximal conjecture in three dimensions	7
02・Every four-dimensional Kakeya set has full Hausdorff dimension	21

原論文の参照版: 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a

[カタログ074・総括](#)[Web版を読む ↗](#)

CATALOGUE 074

三次元と四次元のKakeya問題

Kakeya in three and four dimensions

三次元では最大関数の密度依存、四次元では任意集合のHausdorff次元を扱う。両者をつなぐのは三次元原稿内の重み付きplank補題であり、最大関数定理そのものではない。

1. 公式順の記事一覧

主結果の範囲を短くまとめています。正確な仮定と定式化は併記した原典の結果を参照してください。

[カタログ 074・2026-10-16 確認の固定参照版](#)

#

01

論文・概説

[The Kakeya maximal conjecture in three dimensions →](#)

図中の略称: The Kakeya maximal conjecture in three dimensions

September 23, 2026 · 97 ページ

[原論文 \(GitHub\) ↗](#)

主に何を主張するか

すべての $\varepsilon > 0$ と $0 < \delta < 1$ に対し、単位長・半径 δ のチューブ最大作用素が $L^3(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^3(S^2)$ 、ノルム $C \varepsilon \delta^{-\varepsilon}$ 。

[Theorem 1.1 · p. 2 ↗](#)

議論の役割・概説

密度依存を保つ重み付き配置と定常極値配置の排除から最大関数へ。独立のplank補題が4Dの帰着にも使われる。

[証明概説を読む →](#)

#

02

論文・概説

Every four-dimensional Kakeya set has full Hausdorff dimension →

図中の略称: Every four-dimensional Kakeya set has full Hausdorff dimension

September 24, 2026 · 175 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

各方向に単位線分を含む任意の $K \subset \mathbb{R}^4$ は Hausdorff次元4。集合にも線分の選択にも可測性・コンパクト性を仮定しない。

[Theorem 1.1 · p. 3](#) ↗

議論の役割・概説

可変尺度被覆から正のhorizonを持つ重み付き問題へ帰着し、三つの配置で改善を構成して矛盾させる。

[証明概説を読む](#) →

図の矢印に付した引用

この案内では、以下の著者由来キーを使う。原稿の主張と編集側の照合範囲を区別する。

- **OpenAI26a** — OpenAI, The Kakeya maximal conjecture in three dimensions, September 23, 2026. 用途：密度依存を保つ重み付き配置と定常極値配置の排除から最大関数へ。独立のplank補題が4Dの帰着にも使われる。[OpenAI26a, Theorem 1.1, p. 2]
- **OpenAI26b** — OpenAI, Every four-dimensional Kakeya set has full Hausdorff dimension, September 24, 2026. 用途：可変尺度被覆から正のhorizonを持つ重み付き問題へ帰着し、三つの配置で改善を構成して矛盾させる。[OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 3]

2. 二つの結論と、共有されるplank入力

図は主要な接続をまとめたもので、各矢印に書いた補題だけで主定理が従うという意味ではない。追加の幾何入力と反復の条件は個別記事で示す。



最大関数評価とHausdorff次元の異なる経路

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

三次元側では、全時間のplank集中を制御する重み付き評価を、flat scaleでのplate捕捉と正のdeficitを持つ配置の構成に使う。主結果へは定常配置の排除に加え、離散評価から一般の L^3 関数への移行が必要であり、集合の体積下界だけで最大関数評価を代用しない。

[OpenAI26a, Lemmas 4.7, 4.9, pp. 32–33, 35–38] [OpenAI26a, Section 10, pp. 86–94]

四次元側では、同型の重み付きplank評価をLemma 2.15として用い、Hausdorff反例を正のhorizonを持つ重み付き問題へ移す。その後の配置別の改善と元の尺度への回収は四次元原稿の議論である。結論は $\dim_H K = 4$ であり、四次元の最大関数評価はここでは主張しない。

[OpenAI26b, Theorem 2.17, pp. 20–25] [OpenAI26b, Section 10.8, p. 168]

引用番号の照合。 四次元原稿は入力を [24, Lemma 2.3] と記す。今回固定した三次元版では、対応する全時間plankの仮定・長いmark条件・結論はLemma 3.3にある。この内容対応を照合したが、番号が変わった版履歴は未確認である。利用先の番号を黙って修正せず、この差を保持する。

[OpenAI26a, Lemma 3.3, pp. 20–21] [OpenAI26b, Lemma 2.15, pp. 17–18]

詳細は三次元の記事と四次元の記事へ。

3. 原典・確認範囲

公式分野は **Real and complex analysis**（実解析・複素解析、071–086）。本カタログは概要PDF p.9にあり、公式順の2本を掲載する。

OpenAI Research Catalog · 074 · p. 9

参照commitは 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a。主結果、選んだ証明本文、直接入力の記事と使用箇所を照合した。全97頁・175頁の証明を独立に検証したものではなく、各記事末尾に未確認箇所を明記する。他カタログとの未掲載の接続は未調査であり、依存なしを意味しない。

The Kakeya maximal conjecture in three dimensions

密度損失を追う臨界指数、定常的なplate構造、二つの座標系の情報量比較

原稿は、3次元Kakeya最大作用素の $L^3 \rightarrow L^3$ 評価を、任意に小さい尺度損失で主張する。証明は、重み付きの直線とそのmarked timesを保った極値問題を設け、正の臨界指数が要求する幾何構造と射影の情報量を両立不能にする。集合版のKakeya定理を入力に使うが、密度の小さいshadingを含む最大作用素評価への接続は別途必要である。

原稿の著者: OpenAI · September 23, 2026 · 97 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 3次元Kakeya最大作用素

$a \in \mathbb{R}^3$ 、 $\omega \in S^2$ 、 $0 < \delta < 1$ に対し

$$T_\delta(a, \omega) = \{a + t\omega + u : |t| \leq \tfrac{1}{2}, u \cdot \omega = 0, |u| \leq \delta\}, \quad K_\delta f(\omega) = \sup_{a \in \mathbb{R}^3} \frac{1}{\pi\delta^2} \int_{T_\delta(a, \omega)} |f(x)| dx.$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して有限な C_ε が存在し、すべての $0 < \delta < 1$ と複素数値 $f \in L^3(\mathbb{R}^3)$ について

$$\|K_\delta f\|_{L^3(S^2)} \leq C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} \|f\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}.$$

球面上の測度は通常的面積測度である。定数は δ, f 、tubeの中心・方向に依存しない。

Theorem 1.1 · p. 2

Corollary 11.1 — Euclideanおよび局所定曲率Nikodym評価

$\mathbb{R}^3$ の単位線分 γ の δ 近傍を $T_\delta^{\text{Euc}}(\gamma)$ とし、

$$N_{\delta}^{\text{Euc}} f(x) = \sup_{\gamma \ni x} \delta^{-2} \int_{T_{\delta}^{\text{Euc}}(\gamma)} |f(y)| dy.$$

$1 \leq p \leq 3$ 、 $q = 2p'$ ($p = 1$ では $q = \infty$)、 $\varepsilon > 0$ に対し、すべての $0 < \delta < 1$ で

$$\|N_{\delta}^{\text{Euc}} f\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq C_{p,\varepsilon} \delta^{1-3/p-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

さらに、滑らかな3次元定曲率Riemann多様体 (M, g) 上で、測地線を直線に移す局所座標内に $U \Subset V$ 、 $\overline{V}$ compact を固定する。固定線分長を計量の固定rescalingで1にし、 U 内の単位測地線分の δ_0 近傍が V に入る $0 < \delta_0 < 1$ を選ぶ。 $x \in U$ で

$$N_{\delta,U}^g f(x) = \sup_{\substack{\gamma \ni x \\ \gamma \subset U}} \delta^{-2} \int_{T_{\delta}^g(\gamma)} |f| dV_g$$

と置く (空の上限は0)。同じ p, q, ε と $0 < \delta < \delta_0$ に対し

$$\|N_{\delta,U}^g f\|_{L^q(U, dV_g)} \leq C_{p,\varepsilon,U,V,g} \delta^{1-3/p-\varepsilon} \|f\|_{L^p(V, dV_g)}.$$

特に両方の $p = q = 3$ の作用素ノルムは $\delta^{-\varepsilon}$ で抑えられる。多様体側の定数は固定局所幾何に依存する。

Corollary 11.1 · pp. 94–95

Corollary 11.2 — 固定位相の局所曲線Keakeya評価

十分小さい $\rho > 0$ と $\Omega = B_{\rho}^2 \times (-\rho, \rho)$ 、 $Y = B_{\rho}^2$ を固定し、その近傍で滑らかな実位相

$$\phi(x, t; y) = x \cdot y + \psi(t; y), \quad \psi(0; y) = 0$$

を取る。Hörmanderのmixed-rank条件と曲率非退化条件、およびBourgain条件を仮定する。この形ではmixed-rankは自動的に、残る条件は

$$\det \nabla_y^2 \partial_t \psi(t; y) \neq 0, \quad \nabla_y^2 \partial_t^2 \psi(t; y) = c(t; y) \nabla_y^2 \partial_t \psi(t; y)$$

である。局所定理に必要な縮小後の位相と座標を固定し、

$$T_{\delta,y}^{\phi}(\omega) = \{(x, t) \in \Omega : |\nabla_y \phi(x, t; y) - \nabla_y \phi(\omega, 0; y)| < \delta\}, \quad K_{\delta}^{\phi} f(y) = \sup_{\omega \in B_{\rho}^2} \delta^{-2} \int_{T_{\delta,y}^{\phi}(\omega)} |f| dx dt.$$

ある $0 < \delta_{\text{curv}} \leq \rho$ が存在し、任意の $1 \leq p \leq 3$ 、 $q = 2p'$ ($p = 1$ では $q = \infty$)、 $\varepsilon > 0$ に対して

$$\|K_{\delta}^{\phi} f\|_{L^q(Y)} \leq C_{p,\varepsilon,\phi,\Omega,Y} \delta^{1-3/p-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad 0 < \delta < \delta_{\text{curv}}.$$

特に $p = q = 3$ で損失は $\delta^{-\varepsilon}$ となる。位相と局所化は δ に依存させない。

Corollary 11.2 · pp. 95–96

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [The Kakeya maximal conjecture in three dimensions](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [GWZ26](#) Larry Guth; Hong Wang; Joshua Zahl — A streamlined proof of the Kakeya set conjecture in $\mathbb{R}^3$: 凸集中と密度閾値を持つ集合評価を重み付きline chartへ移す。arXiv:2601.14411v1, 20 January 2026。
- [RW25](#) Kevin Ren; Hong Wang — Furstenberg sets estimate in the plane : 平面Furstenberg評価からplateの充填と条件付き射影評価を得る。arXiv:2308.08819v3, 19 January 2025。
- [Gut10](#) Larry Guth — The endpoint case of the Bennett–Carbery–Tao multilinear Kakeya conjecture : 明示的な横断性損失を持つ多重線形評価から局所的な平面性を得る。Acta Mathematica 205 (2010), 263–286; published version。
- [GLX25](#) Chuanwei Gao; Diankun Liu; Yakun Xi — Curved Kakeya sets and Nikodym problems on manifolds : 主定理の帰結としてNikodymおよび固定位相の曲線Kakeya評価を移送。arXiv:2503.11574v1, 14 March 2025。
- [OpenAI26b](#) OpenAI — Every four-dimensional Kakeya set has full Hausdorff dimension : 本稿の重み付きplank評価の利用先。引用番号に固定版との不整合がある。September 24, 2026; commit 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 の証明 — 臨界指数から任意の関数へ

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · [p. 2](#)

証明の道筋。 [次節](#)で説明する [Proposition 10.1](#) が $p > 2$ を2へ任意に近づけながら $h(p, 0) = 0$ とする。方向分離からplankの集中を抑え、離散shading評価、指示関数の分布評価、cell平均の有限level分解を順につなぐ。中間段階の密度冪は λ^{p+1} であり、この段階で $p = 2$ を代入しない。

$N = \delta^{-1}$ に相当するdyadic解像度を使う。 $|A|$ は以下ではcell数、 $|E|$ は指示関数の集合のLebesgue体積である。

臨界指数の消滅を入力

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad p > 2, \quad h(p, 0) = 0, \quad (p-2)/3 < \varepsilon/2$$

両端の傾きの比較と regularization で一様定数を得る

[Proposition 10.1 · pp. 86–90](#)

[Proposition 10.2; \(10.19\)–\(10.23\) · pp. 91–92](#)

方向分離した離散 shading

$$\Delta_0 = \sup_B n_B / (ab) \lesssim 1, \quad \theta = \max\{N^{-1}, \lambda\}$$

$$|A| \gtrsim_{p,\xi} N^{-\xi} n N \theta^{p+1}$$

分離方向の caps と、中心ごとの有界重複を使う

[Proposition 10.2; \(10.19\)–\(10.23\) · pp. 91–92](#)

密度全域を積分する

$$\|K_N 1_E\|_3^3 \lesssim N^{p-2+\xi} (1 + \log N) |E|$$

$\lambda < N^{-1}$ は有限な球面測度で別に評価

$O(\log N)$ 個の levels を Hölder で合計し、対数を吸収

[Proposition 10.2; \(10.24\)–\(10.25\) · p. 93](#)

Cell 平均と有限 level 分解

$$\|f\|_3 = 1 \text{ に正規化 (最終評価は斉次性を戻す)}$$

$$0 \leq F_N \leq N, \quad \|F_N\|_3 \leq 1, \quad K_\delta f \leq 64 K_N F_N$$

$$\|K_\delta f\|_3 \lesssim_{p,\kappa} \delta^{-(p-2)/3-\kappa} \|f\|_3$$

p を ε から一度選び、 $\kappa = \varepsilon/2$ とする

[Proof of Theorem 1.1 · p. 94](#)

Theorem 1.1 : 任意の L^3 関数

$$\|K_\delta f\|_{L^3(S^2)} \leq C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} \|f\|_{L^3(\mathbb{R}^3)}$$

臨界指数の消滅から密度を保つ離散化と一般の L^3 評価へ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 全時間plankの集中を方向分離で抑える

有界line chartで $M_i(t) = b_i + tu_i$ を用いる。indexは正の重み ω_i と marked time bins S_i を持ち、同じ直線でも異なるindex・shadingを同一視しない。総重み $n = \sum_i \omega_i$ 、incidence $I = \sum_i \omega_i |S_i|$ 、平均marked数 $k = I/n$ 、占有cell集合 E の平均多重度 $m = I/\#E$ を区別する。幅 a, b のplankは全時間のtraceを含むindexの重み n_B を数える。marked点かplankに一度入るだけでは所属にならない。

最大作用素への適用時には単位重み、 c/N 分離した傾きに戻る。plankの両端でtraceを比較すると傾きは $O(a/N) \times O(b/N)$ の長方形に入り、 $n_B \lesssim ab$ 。従って $\Delta_0 = \sup_B n_B/(ab) \lesssim 1$ はすべての部分族にも保たれる。

Definition 2.3; (2.1)–(2.8) · pp. 6–8 Proposition 10.2; (10.19)–(10.23) · pp. 91–92

2. 密度に一樣な離散評価と指示関数評価

$h(p, 0) = 0$ とする。各直線が $\gtrsim \max\{1, \lambda N\}$ 個のmarked binsを持つなら、任意の $\xi > 0$ に対し

$$|A| \gtrsim_{p,\xi} N^{-\xi} n N \max\{N^{-1}, \lambda\}^{p+1}.$$

一樣定数の不存在を仮定した反例列をregularizeすると、 $\theta = \max\{N^{-1}, \lambda\} = N^{-\alpha+o(1)}$ と $F(1) = \alpha$ が得られる。 $q = 0$ では時間costが正確に $p\alpha$ なので、反例の多重度 $N^{p\alpha+\xi-o(1)}$ は臨界評価 $N^{p\alpha+o(1)}$ に反する。ここが漸近記法から有限配置すべてに一樣な定数を取り出す接続である。

長さ4、半径 $4/N$ の補助作用素 K_N について、方向chartと中心の単位cubeへの分割から

$$\sigma\{K_N 1_E > \lambda\} \lesssim_{p,\xi} N^\xi |E| \max\{N^{-1}, \lambda\}^{-(p+1)}.$$

$\lambda \geq N^{-1}$ では $\lambda^3 \sigma\{K_N 1_E > \lambda\} \lesssim N^{p-2+\xi} |E|$ 。小密度範囲は球面の有限測度と非空の格子集合の $|E| \geq N^{-3}$ で別に処理する。分布関数を積分して $\|K_N 1_E\|_3^3 \lesssim N^{p-2+\xi} (1 + \log N) |E|$ を得る。

Proposition 10.2; (10.19)–(10.23) · pp. 91–92

3. Cell平均、level分解、任意の尺度損失

$\|f\|_3 = 1$ と正規化し、 $N^{-1} \leq \delta < 2N^{-1}$ を選ぶ。各 N^{-1} -cubeでの $|f|$ の平均 F_N は $0 \leq F_N \leq N$ 、 $\|F_N\|_3 \leq 1$ を満たし、tubeの固定拡大により $K_\delta f \leq 64K_N F_N$ 。 $F_N < N^{-1}$ は直接抑え、残る値を $O(\log N)$ 個のdyadic levelsに分ける。指示関数評価と有限和のHölderから

$$\|K_\delta f\|_3 \lesssim_{p,\xi} N^{(p-2+\xi)/3} (1 + \log N) \lesssim_{p,\kappa} \delta^{-(p-2)/3-\kappa}$$

となる。 ε を固定して $(p-2)/3 < \varepsilon/2$ となる $h(p, 0) = 0$ の p を一度選び、 $\kappa = \varepsilon/2$ とする。斉次性を戻せば主張全体が得られる。原典はtube積分のパラメータ連続性から中心の上限を可算稠密集合に制限し、可測性も確認する。

最終定理を指示関数に適用すれば、 δ 分離方向のshadingに対する $|\bigcup_T Y(T)| \gtrsim_\varepsilon \delta^\varepsilon \lambda^3 \sum_T |T|$ が全 $0 < \lambda \leq 1$ で得られる。この最終的な立方密度冪と、証明途中の $p+1 > 3$ を区別する。

3. Proposition 10.1 の証明 — 定常幾何と射影制約の不整合

証明対象 : Proposition 10.1 · pp. 86–90

Proposition 10.1 — 最大作用素端点での臨界指数の消滅

$0 < \eta < 1/2$ 、 $p > 2$ 、 $z = -q \in [-1, 0]$ 、 $d = 2 - q$ とする。時間プロフィール F は非減少 1-Lipschitz、 $F(0) = 0$ であり、 N^κ bins の各占有 block の marked 数が $N^{\kappa - F(\kappa) + o(1)}$ となる。原典は

$$D(q, e) = \eta^{-1} \int_{1/2-\eta}^{1/2} \min(q, re) \, dr, \quad \Pi_F(1) = \int_0^1 [pF'(u) - D(q, F'(u))] \, du,$$

$$\Delta_A = \sup_B \frac{n_B}{a^{d-1-A} b^{1+A}}, \quad h(p, z) = \min\{A \in [0, d-1] : m \leq_{\text{exp}} N^{A+\Pi_F(1)} \Delta_A \text{ for every uniform-profile sequence}\}$$

と定義する。 $\leq_{\text{exp}}$ は $N^{o(1)}$ までの指数比較を意味する。Proposition 10.1 は、2 に任意に近い $p > 2$ で $h(p, 0) = 0$ が成立すると主張する。 $q = 0$ では $\Pi_F(1) = pF(1)$ であり、結論は η に依存しない。

Definition 2.3; (2.1)–(2.8) · pp. 6–8 Proposition 10.1 · pp. 86–90

証明の道筋。 正の臨界指数から extremal sequence を取り、局所質量上界、時間充填、異方的 rescaling で正準プロフィールを得る。その packet が要求する座標 entropy を、同じ index に属する二つの event の射影制約と比較する。以下はこの論理の接続の概略であり、有限テストの全同時化や pinning 反復の全証明は確認範囲外である。

正の臨界指数を仮定

$$m \leq_{\text{exp}} N^{h+\Pi_F(1)} \Delta_h, \quad h > 0$$

同じ trace でも index・重み・shading を保持

重みへの拡張と局所化；密度閾値を保持する

[GWZ26, Theorem 1.1, p. 2] [RW25, Theorem 4.1, p. 9]

[Gut10, Theorem 1.3, 誌面 p. 264 / PDF p. 2]

Proposition 4.1; Lemma 4.3 ·pp. 24–28

局所質量上界と時間の充填

凸集中付きの集合評価・平面 Furstenberg・横断的三族
各短い block で共通平面；正の slack が尺度損失を吸収

外側 cut と異方的な内側 cut を比較し、元の重みを保つ

Propositions 5.4, 5.6 ·pp. 44–48

角度非集中で $\beta < 1$: Lemma 6.2 ·pp. 51–54

最小 delay から定常 packet へ

$$F(s) = \beta(s - \tau)_+, \quad \ell = 1 - \tau, \quad 0 < \beta < 1$$

(X, Y, U, V) の尺度速度 $(0, \tau, \ell, 1)$

平面射影・product pinning と short-gap 情報評価を比較

Lemmas 8.4–8.7; (8.27) ·pp. 73–78

Proposition 8.1 ·pp. 68–69

二つの frame の射影制約

$$Y' = Y + \Delta t V, \quad X' = X + \Delta t U + \Delta \vartheta Y + \Delta t \Delta \vartheta V$$

実 joint law：hit 確率 1；周辺の積： D^{-c}

五つの場合分け； v_1 の強い trace で正值集合に局所化

Proposition 7.4; Lemmas 7.5–7.6 ·pp. 65–68

Proposition 10.1 ·pp. 86–90

正の gap が臨界性と矛盾

Packet の entropy 需要と射影制約は両立しない

$$\exists p \downarrow 2: h(p, 0) = 0$$

正の臨界指数から正準packetを取り出し、entropy需要と射影制約を矛盾させる

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 重みを保つ集合入力と局所平面性

集合入力は凸体 K ごとの集中 $\sum_{T \subset K} |T| \leq \delta^{-\eta_m} |K|$ と平均密度 $\lambda \geq \delta^{\eta_m}$ を要求する。任意密度の評価として使わない。Lemma 3.2 は重みに比例したsampling、有限個のbox tests、重複tubeからの代表選択でこれを反復index付きの重み評価へ移す。Lemma 3.3 は全時間plank条件を凸集中へ変換し、marked binsに置く互いに離れた小球でcell数とshading体積を比較する。

局所質量が上界を超えるpacketはrescaling後に臨界性へ反する。さらに、多重線形入力の $\theta^{-1/2}$ 損失と方向cap数を小さいblock尺度の冪として計上し、正のslackで吸収する。これにより三方向が横断的なblockを捨て、各短いblock内で、残るreference indexのretained marked timesに共通の方向平面を選ぶ。平面Furstenberg入力は元のshadingのFrostman条件を保持してplate内を充填する。

[GWZ26, Theorem 1.1, p. 2] Theorem 3.1; Lemmas 3.2–3.3 · pp. 18–21

[Gut10, Theorem 1.3, 誌面 p. 264 / PDF p. 2] Proposition 4.1; Lemma 4.3 · pp. 24–28

[RW25, Theorem 4.1, p. 9] Theorem 3.4; Corollary 3.5 · pp. 21–22

2. 時間プロファイルと尺度間で両立するpacket

時間欠損を総密度だけに置き換えると、時間blockを切り取った後のcostを追えない。原稿は F を保持し、plateの充填から初期のflat intervalを得て、外側のscale cutとplateを整列させた内側のcutを比較する。最小delayの選択により

$$F(s) = \beta(s - \tau)_+, \quad 0 < \tau < 1, \quad \ell = 1 - \tau, \quad 0 < \beta < 1$$

という正準形と、各尺度で所属indexの重みを保つstationary packetsを得る。最後の $\beta < 1$ は角度非集中を調べる Lemma 6.2 まで含めた結論である。ここでstationaryとは、cutの反復後に同じ正規化プロファイルとpacket形状が現れるという意味である。

eventの法線パラメータ ϑ に対し $X = M_i(t)_1 + \vartheta M_i(t)_2$ 、 $Y = M_i(t)_2$ 、 $U = u_{i,1} + \vartheta u_{i,2}$ 、 $V = u_{i,2}$ と取る。四つの座標の尺度速度は $(0, \tau, \ell, 1)$ 。packet質量の下界をconditional entropyの需要へ変換する。

Propositions 5.4, 5.6 · pp. 44–48 Lemma 6.2 · pp. 51–54 Proposition 7.4; Lemmas 7.5–7.6 · pp. 65–68

3. 同じindexの二eventを独立と扱わない

二event間の変換は

$$\begin{pmatrix} X' & Y' \\ U' & V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ U & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Delta \vartheta & 1 \end{pmatrix}.$$

時間差と法線差が二次元のscalar projectionを作る。中間速度が一致する $\tau = \ell = 1/2$ では Y, U の joint rateを保持し、両座標を固定した後の X' に残る $\Delta t \Delta \vartheta V$ のproduct slopeをpinningで扱う。

同じindexから選ぶ二eventは一般に従属する。原稿はその実際のjoint lawと、条件付きmatrix・label周辺分布の積を比較する。射影の必要指数を下回るsupportなら、積法則のhit確率は D^{-c} だが、実際のlawでは同じmatrixから来るためhit確率は1。相対entropyのdata processingが $\gtrsim \log D$ の相互情報を要求し、Lemma 8.5 のshort-gap評価 $o(\log D)$ と矛盾する。pinningによるlawの偏りも両周辺の支配定数で計上する。

Proposition 8.1 · pp. 68–69 Lemmas 8.4–8.7; (8.27) · pp. 73–78 Sections 9.1–9.2 · pp. 79–85

4. 損失と極限の順序を保って矛盾を閉じる

異なる速度の場合の条件付きrate a_1, y_1, u_1, v_1 には、例えば $a_1 \geq y_1, u_1 \geq v_1$ 、 $a_1 < 1 \Rightarrow u_1 \leq (a_1 - s_0)_+$ 、 $s_0 = 1 - \beta > 0$ が課される。原稿は速度の一致とparameterの位置を五つに分け、packetの需要とこれらの制約の間に正のgapを得る。 $v_1 > 0$ の集合への局所化には弱収束だけでは足りず、Lemma 7.5 の強い L^1 trace／部分列compactnessを使う。

尺度ごとの制限で失うincidenceは $N^{-o(1)}$ とし、固定された有限テスト・尺度・正のgapを先に選んでから解像度を上げる。smoothing幅 η は初めに $p_{\min} - 2$ に従って固定する。最後の矛盾のために h, τ, β を見してから η を小さくする循環は用いない。この順序の下で正の臨界指数を排除し、前節の解析的帰着に渡す。

Proposition 10.1 · pp. 86–90

4. Corollary 11.1 の証明 — 補間とNikodymへの移送

証明対象：Corollary 11.1 · pp. 94–95

証明の道筋。主定理の L^3 評価と自明な $L^1 \rightarrow L^\infty$ 評価を補間して、移送定理が要求する全 p 範囲をそろえる。Euclideanと局所定曲率多様体の二つの結論は同じ移送命題から得る。

二つの端点を同じ正規化にそろえる

$$\|\tilde{K}_\delta f\|_3 \lesssim_\eta \delta^{-\eta} \|f\|_3, \quad \|\tilde{K}_\delta f\|_\infty \leq \delta^{-2} \|f\|_1$$

三つの円柱で比較し、 $1/p = 1 - 2\theta/3$ で補間

Corollary 11.1 · pp. 94–95

全補間範囲： $K(3)$

$$1 \leq p \leq 3, \quad q = 2p', \quad \|\tilde{K}_\delta f\|_q \lesssim \delta^{1-3/p-\varepsilon} \|f\|_p$$

Takeya–Nikodym 移送と定曲率測地線の局所直線化

[GLX25, Proposition 2.3; (6)–(9), pp. 13–14]

Corollary 11.1：二つの Nikodym 評価

$$\|N_\delta^{\text{Euc}} f\|_q \leq C_{p,\varepsilon} \delta^{1-3/p-\varepsilon} \|f\|_p$$

$$\|N_{\delta,U}^g f\|_{L^q(U)} \leq C_{p,\varepsilon,U,V,g} \delta^{1-3/p-\varepsilon} \|f\|_{L^p(V)}$$

$U \in V$ は固定局所 chart； $p = q = 3$ で $\delta^{-\varepsilon}$

L3評価とL1評価の補間をEuclideanおよび定曲率Nikodym作用素へ移す

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 全補間範囲をそろえてEuclideanへ移す

単位線分の δ 近傍を用い δ^{-2} で正規化する外部文献の作用素 $\tilde{K}_\delta$ は、三つの原稿の円柱で覆えて $\tilde{K}_\delta f \leq 3\pi K_\delta f$ 。他方、 $\|\tilde{K}_\delta f\|_\infty \leq \delta^{-2} \|f\|_1$ 。補間parameter θ に対して $1/p = 1 - 2\theta/3$ 、 $1/q = \theta/3$ なので $q = 2p'$ 、尺度冪は $1 - 3/p - \eta\theta$ となる。主定理の $\eta > 0$ は任意に選べ、両端点を含む $K(3)$ が得られる。GLX25のProposition 2.3によりEuclidean Nikodymの全範囲へ移送する。

Corollary 11.1 · pp. 94–95 [GLX25, Proposition 2.3; (6)–(9), pp. 13–14]

2. 定曲率多様体では局所幾何を固定する

同じ命題の測地線を直線化する局所微分同相を、固定compact chart上で使う。bi-Lipschitz定数と体積比較定数が有界なので $U \in V$ 上のtube平均を比較でき、原典の δ_0 の選び方により入力 V 内に収まる。移送の任意小損失は開始時の損失を小さくして吸収する。 $p = q = 3$ を代入すれば局所端点を得られる。

[GLX25, Proposition 2.3; (6)–(9), pp. 13–14] Corollary 11.1 · pp. 94–95

5. Corollary 11.2 の証明 — 位相の直線化

証明対象：Corollary 11.2 · pp. 95–96

証明の道筋。前節で得た全範囲の $K(3)$ を、translation-invariantかつBourgain条件を満たす固定位相に対する局所移送へ入力する。

固定された非退化 Bourgain 位相

$$\phi(x, t; y) = x \cdot y + \psi(t; y), \quad \psi(0; y) = 0$$

$$\det \nabla_y^2 \partial_t \psi \neq 0, \quad \nabla_y^2 \partial_t^2 \psi = c \nabla_y^2 \partial_t \psi$$

座標・位相を δ に依存させず固定する

[GLX25, Definitions 1.7, 1.10–1.11; Theorem 1.12, pp. 3–5]

局所直線化と parameter 比較

$$\phi \circ \kappa = x \cdot y + th(y) + q(y) + f(t), \quad \det \nabla_y^2 h \neq 0$$

曲線は $x = \omega - t \nabla h(y)$ へ移る

Theorem 1.1 と補間の $K(3)$ を曲線版へ移送

[GLX25, Proposition 4.1; Definition 4.5, p. 19]

Corollary 11.2 · pp. 95–96

Corollary 11.2：曲線最大作用素

$$\|K_\delta^\phi f\|_{L^q(Y)} \leq C_{p,\varepsilon,\phi,\Omega,Y} \delta^{1-3/p-\varepsilon} \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

$$1 \leq p \leq 3, \quad q = 2p', \quad 0 < \delta < \delta_{\text{curv}}$$

$p = q = 3$ では任意小損失 $\delta^{-\varepsilon}$

固定された非退化Bourgain位相を直線化し全p範囲の曲線評価を得る

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 直線化の仮定と作用素の正規化を保つ

GLX25のTheorem 1.12は局所微分同相で位相を $x \cdot y + th(y) + q(y) + f(t)$ に移し、 $\nabla_y^2 h$ を非退化にする。 y のみに依存する項はgradientの差で消え、 (x, t) のみの項は ∇_y に寄与しない。対応する曲線は $x = \omega - t \nabla h(y)$ という直線になる。Proposition 4.1はこの局所比較で通常の $K(3)$ と曲線版を同値にするので、同じ p, q 、同じ $\delta^{1-3/p-\varepsilon}$ の範囲を得る。空間座標と方向parameterの比較定数を位相・chartに依存させ、 δ_{curv} をその固定幾何から選ぶ。 $p = q = 3$ の結論もこれに含まれる。

[GLX25, Definitions 1.7, 1.10–1.11; Theorem 1.12, pp. 3–5] [GLX25, Proposition 4.1; Definition 4.5, p. 19]

Corollary 11.2 · pp. 95–96

6. どの論文が、どの段階を担うか

供給元と結果

[GWZ26, Theorem 1.1, p. 2]

利用箇所

Theorem 3.1; Lemmas 3.2–3.3 · pp. 18–21

使用内容・必要な仮定

凸集中と密度閾値のある集合評価。samplingとplankから凸体への比較で重み付きへ拡張

確認範囲

入力記述、重み付け・使用箇所を照合。入力定理の全証明は未検証

供給元と結果

[RW25, Theorem 4.1, p. 9]

利用箇所

Theorem 3.4; Corollary 3.5 · pp. 21–22、§9.1

使用内容・必要な仮定

line parameterとshadingのFrostman条件、 $\min\{t, (s+t)/2, 1\}$ の射影指数

確認範囲

記述とdualityの説明を照合。全量的再構成は未検証

供給元と結果

[Gut10, Theorem 1.3, 誌面 p. 264 / PDF p. 2]

利用箇所

Theorem 3.7; Corollary 3.8 · p. 23、Lemma 4.3

使用内容・必要な仮定

各三つ組の行列式下界 θ 、 $\theta^{-1/2}$ 損失、正重み・反復tubeへの拡張

確認範囲

出版版の記述、重み拡張、使用箇所を照合

供給元と結果

[GLX25, Proposition 2.3; (6)–(9), pp. 13–14]

利用箇所

Corollary 11.1

使用内容・必要な仮定

全補間範囲のKakeya評価、定曲率、固定局所chart

確認範囲

記述・指数・正規化と適用を照合

供給元と結果

[GLX25, Proposition 4.1; Definition 4.5, p. 19]

利用箇所

Corollary 11.2

使用内容・必要な仮定

固定された非退化translation-invariant Bourgain位相

確認範囲

記述と局所性を照合

4次元原稿への入力。本稿のLemma 3.3は、有界line chartで全時間plankの各幅 $1 \leq a \leq b \leq D$ に対し $\sum_{i: M_i \subset P} \omega_i \leq Aab$ 、各indexのmarked数 $\#J_i \geq D^{1-\eta_{\text{in}}}$ を仮定し、任意の目標損失 $\varepsilon > 0$ に適した $\eta_{\text{in}} > 0$ の下で $\sum_i \omega_i \#J_i \leq CAD^\varepsilon \#E$ を与える。重複したtraceと正の重みを許す。4次元原稿のLemma 2.15はこの内容を直接入力に使うが、引用番号は本稿の今回版にない「Lemma 2.3」となっている。内容の対応と番号・版の不整合を分けて記録し、Theorem 1.1そのものへの依存とはしない。

Lemma 3.3 · pp. 20–21 [OpenAI26b, Lemma 2.15, pp. 17–18]

7. 原典を読む入口と確認範囲

- Definition 2.3; (2.1)–(2.8) · pp. 6–8 — 重み・全時間plank・密度損失と臨界指数の定義
- Theorem 3.1; Lemmas 3.2–3.3 · pp. 18–21 — 三つの幾何入力のうち集合評価の重み付けと尺度変換
- Propositions 5.4, 5.6 · pp. 44–48 — 正準時間プロファイルとstationary packetの取得
- Lemmas 8.4–8.7; (8.27) · pp. 73–78 — 同一indexの二事象と独立積法則の比較

- Proposition 10.1 · pp. 86–90 — 五つの場合分けと強いtraceによる矛盾の閉じ方
- Proposition 10.2; (10.19)–(10.23) · pp. 91–92 — 方向分離から密度に一樣な離散評価へ
- Proposition 10.2; (10.24)–(10.25) · p. 93 — cell平均と有限個のlevel setから任意の関数へ
- Corollary 11.1 · pp. 94–95 — Euclidean／局所定曲率Nikodymへの移送
- Corollary 11.2 · pp. 95–96 — 固定位相に対する局所曲線Takeyaへの移送

編集側では、重み付きモデルと三つの幾何入力、正準プロファイル・stationary dataの主張、entropy 需要と二eventの情報比較、最後の五場合分け、離散評価から任意の関数への帰着、両系の移送を読んだ。外部4文献の入力定理の記述と利用先を照合した。§§2,4–9の有限テストの同時化、全 regularization・compactnessの詳細、product-pinning反復全体は未検証であり、これらを含む97頁の証明全体の正しさを認定したものではない。

原典§9のradial-projection文献はpinning法的方法的先行例として位置付けられ、ここで必要な有限尺度版は原稿内で証明される。別論文の球面Fourier restrictionからの経路も原典§1.3では別証明として挙げられる。この二種類の関係を本証明への直接入力の矢印に加えていない。4次元原稿からの引用番号と固定版の対応は未解消として残す。

Every four-dimensional Keakeya set has full Hausdorff dimension

可変尺度被覆を正のhorizonへ移し、二次局所近似の改善で反例を排除する

原稿は、4次元Keakeya集合のHausdorff次元を、重み付き軌道の時間局所化に必要な指数へ翻訳する。核心は、密度の減少率が1未満である問題を選び、二次多項式による近似を改善して、最適な時間指数または空間幅に矛盾させることである。局所的により近似を作るだけでなく、元の観測から復元できる短いラベル一覧と十分なincidence質量を伴うchartへ戻す必要がある。

原稿の著者: OpenAI · September 24, 2026 · 175 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 任意の4次元Keakeya集合のHausdorff次元

$K \subset \mathbb{R}^4$ とする。すべての $e \in S^3$ に対して $a_e \in \mathbb{R}^4$ が存在し、

$$\{a_e + te : 0 \leq t \leq 1\} \subset K$$

を満たすならば、原稿は

$$\dim_{\text{H}} K = 4$$

を示す。 K にも線分の選択 $e \mapsto a_e$ にも可測性を仮定せず、コンパクト性やstickinessも仮定しない。Hausdorff次元は任意集合への可算被覆による定義を用いる。これは可変尺度被覆に対する結論であり、4次元のKeakeya最大関数評価を主張する定理ではない。

Theorem 1.1 · p. 3

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Every four-dimensional Kakeya set has full Hausdorff dimension](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [OpenAI26a](#) OpenAI — The Kakeya maximal conjecture in three dimensions : 重み付きfull-time plank評価。4次元稿の引用番号2.3と現固定版3.3の不整合は本文参照。。September 23, 2026; fixed commit 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a。
- [CV13](#) Anthony Carbery; Stefán Ingi Valdimarsson — The endpoint multilinear Kakeya theorem via the Borsuk–Ulam theorem : 独立な方向をdeterminantで重み付けしたmultilinear Kakeya評価。。arXiv:1205.6371v1, 29 May 2012。
- [WZ25](#) Hong Wang; Joshua Zahl — Sticky Kakeya sets and the sticky Kakeya conjecture : scalar-normal first jetに使うrestricted-triple dot-product alternative。。arXiv:2210.09581v2, 7 October 2025。
- [OSS24](#) Tuomas Orponen; Nicolas de Saxcé; Pablo Shmerkin — On the Fourier decay of multiplicative convolutions : 平面剛性に使う、乗法的畳み込みのFourier減衰と平坦な係数の生成。。arXiv:2309.03068v2, 27 February 2024。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 — 主定理の証明概略

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · p. 3

証明の道筋。 $\dim_{\mathbb{H}} K < 4$ を仮定し、次節の帰着で正のhorizonを持つ重み付き問題を作る。密度指数・時間指数・空間の細さを順に最適化すると、細さの極限 ℓ に応じた三つの場合が残る。各場合の局所改善を元の問題のchart系へ回収し、最適性に矛盾させる。

元の解像度を $N_0 \rightarrow \infty$ 、深さ r の厚さを $a_r = N_0^{-r}$ とする。軌道は $(t, y_0 + tV, w_0 + tW)$ 、 $y \in \mathbb{R}^2$ であり、観測 p_r は (t, y) を正確に保持し、 w を幅 a_r/B で離散化する。 B はhidden変数の微分の尺度である。観測の典型密度を $n(r) = N_0^{-f(r)}$ と書く。時間長 q 、空間Jacobian J_c 、選択質量 m_c を持つchartが **true** である条件は

$$\frac{m_c}{q} \geq N_0^{-o(1)} n(r) J_c.$$

chartは割り当てた軌道を時間区間全体で空間箱と二次の小値条件に閉じ込める。hidden微分の下界だけは選択incidence上で要求する。終端深さ L のtrue系が質量 $N_0^{-o(1)}$ を覆うとき、 $q = N_0^{-h+o(1)}$ の指数 h の下限を $H(E)$ と呼ぶ。部分列と許された追加選択もこの下限に含む。

[Definitions 2.1, 2.6, 2.8](#) · pp. 8–12; [Definition 2.14](#) · p. 17

1 任意集合の反例を仮定

$K \subset \mathbb{R}^4$, $\dim_{\mathrm{H}} K < 4 - \sigma$ 全方向の単位線分、可測性の仮定なし

外測度・有限選択から正の horizon、次に指数を最適化

[Theorem 2.17 · pp. 20–25](#) [Proposition 4.3 · pp. 48–50](#)

2 重み付き問題と critical path

$E \in \mathcal{C}(d)$, $d < 1$, $H(E) > 0$ $f_i(r) - f_i(0) \rightarrow d_* r$, $h(r) \rightarrow kr$, $k > 0$

細さ $\log_{N_0}(q^2/J_c)$ の最適率 ℓ で分岐する。

 $\ell = 0$ 等方的な場合

速度場 $\rightarrow$ potential
conic の障害を hidden 変
数で補正

二次 test を復元

$$a_2 = ah^{e_2}, \quad e_2 > 0$$

$$h \sim_{\log, N} a^k$$

二次近似を改善

[§6 · pp. 86–108](#)

 $0 < \ell < \infty$ 有限の細さ

広い射影区間、または
horizontal model

$$Y' = -Z + tv$$

$2k = 1$: 三段の切替

$2k < 1$: $u_j \downarrow 2k$

$2k \neq 1$: 広い区間へ

切替または広い区間へ

[§§8–9 · pp. 117–154](#)

 $\ell = \infty$ 無限の細さ

二重の true 系
全時間区間へ局所化
密度比のずれを相殺
scalar 射影

固定深さで時間指数 $\rightarrow 0$

全時間化の後に射影

[§10 · pp. 154–168](#)

3 元尺度の atlas として回収

有限 ℓ : 全 substantial residual の候補を greedy に覆い、一覧を回収する。

無限 ℓ : 全時間正規化後に被覆と一覧を回収する。

元の観測 p_L からラベルを復元 ; 元尺度 N_0 で subpower 損失

有限の場合の回収条件と、全場合を閉じる最終論証

[Proposition 4.11; Lemma 4.12 · pp. 61–62](#) [§10.8 · p. 168](#)

4 最適性に矛盾し、主定理を得る

時間改善または過剰な細さ $\Rightarrow$ 正の horizon の反例を排除

$$H(E_i) \leq k - k\Delta/2 + o_i(1) < k \quad \text{or} \quad \ell_{\text{out}} > \ell \quad \boxed{\dim_{\mathrm{H}} K = 4}$$

反例から正のhorizonを持つ問題を作り、細さの三分岐を改善して最適性を破る

図を拡大 ↗ [TeXソース](#) ↓

1. 正のhorizonから線形のcritical pathを選ぶ

帰着で得る cap class $\mathcal{C}(d)$ は、固定した $S, \eta > 0$ について

$$f(L) - f(r) \leq d(L - r), \quad d < 1,$$

と、終端観測に速度binを付加した密度の上界 $n(L)N_0^{-Su+o(1)}$ ($0 < u \leq \eta L$) を満たす。Lemma 3.5 は、時間指数を h から $h - e$ へ下げる代わりに、厚さの深さを高々 Ce 失うatlasを作る。 C が問題ごとの複雑度に依存しないため、正のhorizonを許す最小密度指数 d_* へ近づけても、最大時間率 k は $0 < k \leq 1$ を保つ。

長さ1に正規化し、まず d_* 、次に $H(E)/L$ 、最後にnarrownessを最適化する。Proposition 4.3の経路では、相対密度は $f_i(r) - f_i(0) \rightarrow d_*r$ 、累積時間指数は kr となる。narrownessは $\log_{N_0}(q^2/J_c)$ であり、有限 ℓ の場合には累積量が ℓr に近づく。絶対密度 $f_i(0)$ の有界性や、すべての最適値を実現する一つの極限問題は要求しない。

Lemma 3.5 · p. 36; Proposition 4.3; Lemmas 4.1–4.5 · pp. 47–51

2. 等方の場合potentialを作り、二次の許容クラスへ戻す

$\ell = 0$ では、scalar-normal推定が軌道上の多項式近似を与え、独立な速度に対するmultilinear Kakeya評価と補間がこれを空間の多項式場へまとめる。軌道を切り替える議論で近似的な保存性を得てpotentialを作る。ただし、その次数は直ちに2以下とは限らない。

Proposition 6.8は、広い方向がconic近傍に残る場合の3次・4次の障害を特定する。それらを既存のhidden変数を使って二次の補正項として表し、許容されたchartの二次testへ戻す。局所の厚さを a 、時間blockの長さを $h = N^{o(1)}a^k$ とすると、得る厚さは $a_2 = ah^{e_2}$ ($e_2 > 0$)、質量は時間長で割って $N^{-o(1)}\nu_Q(a_2/a)^{d_*}$ 以上であり、近似は同じ時間block全体で成立する。ここで N は局所のtangent解像度、 ν_Q は選択後に取り直さない元の軌道割当質量である。同じ議論のscalar版からCorollary 6.9の $H = 0$ が先に得られ、後の射影定理の入力になる。

Theorem 6.1 · p. 86; Proposition 6.8; Corollary 6.9 · pp. 104–108

3. 有限の細さではhorizontal modelを経由する

$0 < \ell < \infty$ では、scalar射影により軌道全体を近似する二次graphを得る。三つの近い深さで射影区間が十分広ければ、比較原理から直接時間改善を得る。そうでない場合は、元のincidence辺を保持する平面剛性を使い、 $Y' = -Z + tv$ というhorizontal modelへ帰着する。この段階ではnarrowness率が k となり、自然な箱の幅は H と H^2 である。

臨界率 $2k = 1$ では、三つの線分を更新する経路が十分な3次元base体積を覆い、より細かい近似を得る。 $2k > 1$ では広い射影区間へ戻す。 $2k < 1$ ではその前に、パラメータ箱の幅 a_s^u における全時間予測を改善する。Proposition 9.5の反復は

$$u_{j+1} = \frac{u_j}{1 + \alpha(u_j - 2k)}, \quad u_0 = 1, \quad \alpha = \frac{1 - d_*}{10000}, \quad u_j \downarrow 2k$$

である。各有限反復の損失を吸収した後に反復回数をゆっくり増やし、終端幅 $h_s^2 = a_s^{2k}$ の実際のラベルと質量下界を作る。Proposition 9.6が広い区間の条件を回復し、Proposition 8.4の改善へつなぐ。極限指数だけを形式的に代入する段階ではない。

Propositions 8.4–8.5 · pp. 124–130; Propositions 9.2, 9.5–9.6 · pp. 138–154

4. 無限の細さと、局所改善を元尺度へ戻す手続き

$\ell = \infty$ では、二重に入れ子になったtrue系から全時間区間に有効な細い局所化を得る。再正規化で絶対密度指数は大きくずれても、使用する密度比ではずれが相殺する。scalar射影とラベル回収により、固定された正の深さで時間指数が0へ近づくatlasを作り、正の k に矛盾させる。

有限 ℓ の場合も、局所で改善候補が一つ見つかるだけでは結論しない。Proposition 4.11は、どのsubstantial residualにも候補があるという条件からgreedyに被覆を確保し、scalar-sheet比較とLemma 4.12の有限一覧回収を行う。成功質量は元の経路質量 p_{path} に対して $p_{\text{path}}/\log N_0$ 以上、ラベル一覧と誤差は元尺度でsubpowerとなる。局所の $N^{o(1)}$ をそのまま $N_0^{o(1)}$ と見なさず、先に元尺度の排除条件を固定してから対角化する。

その出力は、同じ深さ・時間で過剰なnarrownessを与えるか、深さを $\Delta > 0$ 増やす費用が $k\Delta/2$ 以下となる。後者なら残りを完成させて

$$H(E_i) \leq h_i + \frac{k\Delta}{2} + k(d_i)(1 - r_i - \Delta) \leq k - \frac{k\Delta}{2} + o_i(1),$$

となり、 $H(E_i) \rightarrow k$ に反する。三分岐がすべて排除されるので $\dim_{\text{H}} K \geq 4$ 、周囲次元の上界と合わせて等号になる。

Lemma 4.5 · p. 51; Proposition 4.11; Lemma 4.12 · pp. 61–62; Proposition 10.1; §10.8 · pp. 154–168

3. Theorem 2.17の証明 — 任意集合から正のhorizonへ

証明対象：Theorem 2.17 · p. 20

Theorem 2.17 — 反例から正のhorizonを持つ問題への帰着

$\mathbb{R}^4$ のKakeya集合 K で $\dim_{\text{H}} K < 4$ となるものが存在すると仮定する。このとき、ある $0 < d < 1$ 、 $S, \eta > 0$ と、version 2のtempered homogeneous exact problem $E \in \mathcal{C}(d)$ が存在して、 $H(E) > 0$ となる。 $\mathcal{C}(d)$ の密度条件と角度条件は前節の通りである。

Theorem 2.17 · p. 20

この帰着が主定理の可測性なしという範囲を支える。証明では $\dim_{\text{H}} K < 4 - \sigma$ 、 $0 < \sigma < 1$ と置く。記号 k はこの節では被覆のdyadic尺度番号であり、前節のcritical time rateとは異なる。

1 可変尺度の Hausdorff 被覆

$$\dim_{\mathrm{H}} K < 4 - \sigma, \quad \sum_i r_i^{4-\sigma} \leq 1$$

共通の時間区間と有界 intercept 箱；傾き集合の外測度は正

外測度の可算劣加法性、最大分離集合、有限選択

[Theorem 2.17, finite selection · pp. 20–21](#)

2 同じ尺度で有限個の線分を選ぶ

$$\delta = 2^{-k}, \quad ck^{-2}\delta^{-3} \leq M \leq C\delta^{-3}$$

各線分の被覆時間 $\gtrsim k^{-2}$ ；全方向に対する可測選択は不要

全時間 plank の重み cap と長い mark 集合を用いる

[\[OpenAI26a, Lemma 3.3, pp. 20–21\]](#)

本稿の再掲：[Lemma 2.15 · pp. 17–18](#)

3 密度 profile と角度 cap

$$g = r - f, \quad g(1, 0) \geq \sigma, \quad g(0, 0) \leq 0, \quad g(r, u) \leq r + 2 - 2u$$

平滑化後の傾き密度を制御；plank 評価が $g(0, 0) \leq 0$ を与える

最大化の一方方向比較を crop 後の密度条件へ移す

[Theorem 2.17, \(2.24\)–\(2.32\) · pp. 21–23](#)

4 端点と角度尺度を選択

$$(r_0, u_0) \in \arg \max(g - Rr + Su), \quad g(r_0, u_0) \geq \sigma/2$$

$$L = r_0, \quad d = 1 - R < 1, \quad E \in \mathcal{C}(d)$$

元 prior へ戻して crop 分母を相殺；monic cubic の Jacobian を使う

[Theorem 2.17, \(2.33\)–\(2.39\) · pp. 23–25](#)

5 質量下界と傾き体積上界を比較

$$N_0^{\sigma/2} \leq m(r_0, u_0) \leq N_0^{o(1)} q^{-3}$$

$$q = N_0^{-h+o(1)} \implies H(E) \geq \sigma/6 > 0$$

追加選択・部分列に対しても成立する終端 chart の下界

Hausdorff被覆から有限個の証人を選び、密度capとchartの質量比較により正のhorizonを得る

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 外測度で尺度をそろえ、有限個の証人だけを選ぶ

方向をgraph-slope chartへ制限する。共通の有理端点時間区間と有界なintercept箱の可算分解により、正の外測度を持つ傾き集合 S_0 を取れる。座標変換後の時間区間を $[0, 1]$ とする。

$\sum_i r_i^{4-\sigma} \leq 1$ を満たす球被覆を尺度別に分け、その合併を U_k とする。各線分ではある k について U_k 内の時間が ck^{-2} 以上となる。「そのような線分が存在する」傾き集合 S_k を使えば、外測度の可算劣加法性から同時に $|S_k|^* \gtrsim k^{-2}$ となる尺度を選べる。 $\delta = 2^{-k}$ とし、有限な最大 δ -分離集合を取ると

$$ck^{-2}\delta^{-3} \leq M \leq C\delta^{-3}.$$

ここで初めて各傾きに一つの成功線分を選ぶ。方向全体にわたる可測選択は用いない。 $k \rightarrow \infty$ で失う k の冪は、 $N_0 = \delta^{-1}$ に対してsubpowerである。

Theorem 2.17, finite selection · pp. 20–21

2. 平滑化とplank評価で密度profileを制御する

有限線族に一樣重みを付け、interceptと傾きの各座標を $O(\delta)$ だけ独立に平滑化する。選択質量は $N_0^{-o(1)}$ 以上で、3次元傾き密度は $N_0^{o(1)}$ 以下となる。hidden深さ r と2次元速度bin深さ u を同時に均質化し、

$$n(r, u) = N_0^{-f(r, u)}, \quad g(r, u) = r - f(r, u)$$

と置く。被覆の個数、傾き密度、3次元の重み付きplank評価から

$$g(1, 0) \geq \sigma, \quad g(0, 0) \leq 0, \quad g(r, u) \leq r + 2 - 2u$$

を得る。中央の評価が3次元論文の直接入力である。全時間plankに収まる軌道の重みを制御し、長いmark集合に対する平均多重度を制御する。球被覆を単一尺度の体積結論へ置き換えるのではなく、以後の密度profileの起点を保証するために使う。

$R, S > 0$ を $R + 4S < \sigma/2$ となるように選び、 $[0, 1] \times [0, 4]$ 上で $g(r, u) - Rr + Su$ を最大化する。最大点 (r_0, u_0) は $r_0 > 0$ 、 $u_0 < 4$ 、 $g(r_0, u_0) \geq \sigma/2$ を満たす。対応する空間・速度箱でcropして正規化すると、 $L = r_0$ 、 $d = 1 - R < 1$ のcap classが得られる。cropの条件付きpriorによる分母は、元の質量へ戻すと正確に相殺する。

Theorem 2.17, (2.24)–(2.32) · pp. 21–23

3. chartの質量下界と傾き体積上界を比較する

終端chartの時間長を q 、物理座標の空間Jacobianを J_{phys} とする。true floorを元の非正規化priorへ戻すと、 $m(r_0, u_0) = N_0^{g(r_0, u_0)}$ について

$$\frac{m_{\text{old}, c}}{q} \geq N_0^{-o(1)} m(r_0, u_0) a_{r_0} J_{\text{phys}}.$$

一方、chartの幾何条件を満たし得る傾きの集合 Σ には

$$|\Sigma| \leq N_0^{o(1)} \frac{a_{r_0} J_{\text{phys}}}{q^3}$$

という上界がある。証明は、固定複雑度の半代数的選択 $b = b(s)$ に対し、 $s \mapsto b(s) + ts$ のJacobian $\det(Db(s) + tI_3)$ が t のmonic cubicになることを使う。長さ $\asymp q$ の良い時間でJacobianは $\gtrsim q^3$ 、hidden微分も下から有界であり、area formulaと二次sublevel評価で像の体積を押さえる。多重度は半代数的複雑度により一樣に制御する。

元の傾き密度上界と比較して $a_{r_0}J_{\text{phys}}$ を消去すると、 $m(r_0, u_0) \leq N_0^{o(1)}q^{-3}$ となる。したがって任意のtrue終端系に対して $h \geq \sigma/6$ 、すなわち $H(E) \geq \sigma/6 > 0$ である。許された追加選択と部分列にも同じ比較が成立するため、horizonの下限自体が正となる。

Theorem 2.17, (2.33)–(2.39) · pp. 23–25

4. どの論文が、どの段階を担うか

供給元と結果

The Kakeya maximal conjecture in three dimensions、Lemma 3.3

利用箇所

Lemma 2.15、Proposition 2.16、Theorem 2.17

使用内容・必要な仮定

正の重みと反復indexを許すfull-time plank cap、各軌道の $D^{1-\eta}$ 以上のmarksから $\sum_i \omega_i \# J_i \lesssim AD^\varepsilon \# E_{\text{vis}}$ 。有限選択と平滑化の後に適用。

確認範囲

記述と適用条件を照合。4次元稿の引用番号「Lemma 2.3」は固定した3次元稿の番号と不一致。対応する記述はLemma 3.3。入力証明全体の独立検証ではない。

供給元と結果

Carbery–Valdimarsson、determinant multilinear Kakeya

利用箇所

§6.3、(6.10)、Proposition 6.2

使用内容・必要な仮定

独立な速度の寄与を重み付き体積評価へ変換し、物理support・parameter質量を制御する。

確認範囲

外部Theorem 1と本稿p.90を照合。full-line tube、非負重み、wedge次元と周囲次元の一致、半径の変更による r^n を確認。

供給元と結果

Wang–Zahl, restricted-triple dot-product alternative

利用箇所

Theorem 5.5, Proposition 5.4

使用内容・必要な仮定

上からのcovering条件の下で、restricted triplesの像の拡大か直線集中を得る。scalar supportの指数 $d < 1$ が拡大を排除する。

確認範囲

外部Definition 4.2とTheorem 5.2の§8再掲、本稿p.76の記述を照合。下流の全計算は未検証。

供給元と結果

Orponen–de Saxcé–Shmerkin, multiplicative convolution

利用箇所

Lemma 7.4, Proposition 7.6

使用内容・必要な仮定

平面比率分布からinterval確率の小さい係数を作り、残存する元のincidence辺を平行stripへ局所化する。

確認範囲

外部Theorem 1.5と本稿pp.112–113を照合。 $[-1, 1]$ への正規化、 $ns > 1$ 、平滑化energyの条件を確認。

[OpenAI26a, Lemma 3.3, pp. 20–21]

[CV13, Theorem 1, p. 2]

[WZ25, Definition 4.2, p. 17; Theorem 5.2, §8 restatement, p. 49]

[OSS24, Theorem 1.5, p. 2]

この直接入力を、3次元の最大関数主定理全体への依存と同一視しない。平面剛性にはさらにgraph Balog–Szemerédi–Gowersと固定回数のsumset calculus、傾き体積にはパラメータ様な半代数的選択・cell decompositionを使う。これらの基礎結果の証明は本記事の確認範囲外である。

5. 原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 1.1 · p. 3 — 任意集合に対する量化と、Hausdorff次元の定義。

- Theorem 2.17 · pp. 20–25; §10.8 · p. 168 — 可変尺度被覆からの帰着と、三分岐を閉じる最終証明。
- Lemma 3.5 · p. 36; Proposition 4.3; Lemmas 4.1–4.5 · pp. 47–51 — 密度・時間・細さを最適化する順序と合成。
- Proposition 4.11; Lemma 4.12 · pp. 61–62 — 局所候補を十分な元尺度の被覆と有限ラベルへ戻す条件。
- Theorem 6.1 · p. 86; Proposition 6.8; Corollary 6.9 · pp. 104–108 — 等方改善、二次への復元、scalarモデルの先行排除。
- Proposition 9.5 · pp. 143–149 — $u_j \rightarrow 2k$ の反復と実際のendpointラベルの構成。
- Proposition 10.1 · pp. 154–168 — 二重局所化、密度比の相殺、元尺度への回収。

主定理の仮定と結論、§2.6の任意集合からの帰着、§4.1の最適化、Proposition 4.11の回収条件、各分岐の出力記述、Proposition 9.5の反復の閉じ方、§10.8の結論への接続を確認した。3次元plank入力は固定版のLemma 3.3と照合し、引用番号の不整合を上記の通り記録した。Carbery–Valdimarsson、Wang–Zahl、Orponen–de Saxcé–Shmerkinの入力定理も、上表の範囲で原典の記述と本稿の使用条件を照合した。

scalar-sheet比較の全証明、条件付きhigher-jet推定、potential構成と二次への復元、各段階の例外集合・対角化の全損失を独立に検証したわけではない。本文はこれらの結果を入力とする原稿の論証を説明しており、175頁全体の正しさを認定するものではない。§11の幾何学的帰結は本記事の証明対象に含めず、そこで使う別のtransfer定理も未調査である。

Theorem 2.17 · pp. 20–25; §10.8 · p. 168