

OpenAI Math Digest

CATALOGUE 068

滑らかな半正値性の下での反標準束 の非消滅

総括・論文間のつながりと7篇の証明概説

独立した非公式の読解ガイド・日本語版

収録版: 2026-10-12

制作: Masataka Iwai・大阪大学

AI生成の解説には誤りや不正確な説明が含まれる可能性があります。重要な主張・証明は原論文でご確認ください。本冊子はWebサイトの解説をまとめたもので、原論文そのものではありません。専門家査読・形式検証は未実施です。

目次

総括に続き、公式カタログ順で全7篇の解説を収録しています。目次・引用はクリックできます。横長の表は紙面向けの項目一覧に組み直し、主張と参照先を保持しています。

00・カタログ068 総括	3
01・Anticanonical nonvanishing from smooth semipositivity	16
02・Invariant anticanonical indices and conversion of twisted differentials	28
03・Bounded anticanonical metrics on klt pairs and torus quotients	40
04・Cohomological transfer and equivariant anticanonical sections	49
05・Metric descent and rank-preserving contractions	64
06・Integrable metrics and effectivity with controlled boundary	79
07・Exact orders and invariant anticanonical linear systems	93

原論文の参照版: [fd4aeeb2ee4fc729c18d98444fed42fd0529eeeb](https://arxiv.org/abs/2404.00000)

カタログ068 · 総括

Web版を読む 

CATALOGUE 068

滑らかな半正值性の下での反標準束の非消滅

Anticanonical nonvanishing under smooth semipositivity

公式順の7稿、計270ページを扱う。共通する問いは反標準束の正冪の非消滅だが、各稿は不変指数、 klt 対上の有界計量、固定指標の移送、計量降下、境界補正、消滅次数の厳密達成という異なる結果を与える。 $\mathrm{smooth\ semipositivity}$ は滑らかな半正值Hermitian計量の存在を意味し、 nef 性だけを仮定する結論への読み替えはしない。

公式カタログPDFの068項目：[OpenAI Research Catalog · Catalogue 068 · p. 8](#)。原稿のPDFへのリンクは各行にある。カタログ番号068と、以下の内部掲載順01–07は別である。

公式順の記事一覧

主結果の範囲を短くまとめています。正確な仮定と定式化は併記した原典の結果を参照してください。

カタログ 068 · 2026-10-12 確認の固定参照版

#

01

論文・概説

Anticanonical nonvanishing from smooth semipositivity →

図中の略称: Smooth semipositivity

September 26, 2026 · 27 ページ

原論文 (GitHub) ↗

主に何を主張するか

滑らかな連結複素射影 X で $-K_X$ が smoothly semipositive なら、ある $m > 0$ で $H^0(X, -mK_X) \neq 0$ 。無正次数形式の多様体では、有限随伴体積と別の有界半正値線束から境界にのみ極を許す非消滅も示す。

Theorems 1.1–1.2 · pp. 2–3 ↗

議論の役割・概説

二計量の移送と次元帰納法で通常の新消滅を証明し、トーラス不変直像を通して自然不変切断を作る。有限被覆と norm は他稿にも幾何入力を供給する。

証明概説を読む →

#

02

論文・概説

Invariant anticanonical indices and conversion of twisted differentials →

図中の略称: Invariant anticanonical indices

September 26, 2026 · 18 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

自然トーラス作用の不変反標準Euler指数は可除指数上で多項式となり実際の零次値を保つ。別に、smoothly semipositiveな $-K_S$ の無限twistsから固定擬有効誤差を除き、正冪の通常切断を得る。

[Theorems 1.1–1.2 · pp. 1–2; Corollary 5.2 · pp. 16–17](#) ↗

議論の役割・概説

局所化・削除面の相殺と、有界底計量・零次も含む消滅という独立な二経路を接続する。不変形式を有限被覆へ先に降下し、その後で通常のconversionを使う。

[証明概説を読む](#) →

#

03

論文・概説

Bounded anticanonical metrics on klt pairs and torus quotients →

図中の略称: Bounded anticanonical metrics

September 26, 2026 · 20 ページ

原論文 (GitHub) ↗

主に何を主張するか

有効有理境界を持つ射影的 $\mathbb{Q}$ -factorial klt対で、nefな反対数標準因子の解消上に局所有界半正計量があり $\chi(O) \neq 0$ なら正のCartier倍数が非消滅。smooth RCでは任意トーラスの自然不変切断を得る。

Theorems 1.1–1.2 · p. 2; Corollary 4.1 · p. 18 ↗

議論の役割・概説

極大底と縦係数の最小値から有界計量を作る。安定トーラス商で自然線形化を保ち、商の切断を全域へ延長する。

証明概説を読む →

#

04

論文・概説

Cohomological transfer and equivariant anticanonical sections →

図中の略称: Cohomological transfer

September 26, 2026 · 43 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

smooth semipositiveな反標準束の任意線形化 P について、 $-M$ が擬有効で非有界次数の $M+iP$ に不変切断があれば正の mP に不変切断がある。自然指数とmonodromyから一般のsmooth非消滅を導く。

[Theorem 1.1; Corollary 1.2 · p. 2; Theorem 7.2 · pp. 17–19](#) ↗

議論の役割・概説

共通の不変切断比の体、連続最大値計量、零次数の特異積分を使い、非自明でも固定された乗数イデアルで誤差を除く。独立なharmonic経路ではkernel条件から高次直像消滅を得る。

[証明概説を読む](#) →

#

05

論文・概説

Metric descent and rank-preserving contractions →

図中の略称: Metric descent

September 26, 2026 · 76 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

全零次随伴rank 1から非加重可積分な底の反標準補正計量を得る。一般不変切断と全可除随伴rankを保つ縮約、許容極付き非消滅、自然不変切断も示す。

[Theorems 2.1, 4.1, 6.1, 7.1 · pp. 7, 16, 34, 38](#) ↗

議論の役割・概説

Toroidal体積と二計量移送を区別し、補正の例外台・縮約後の切断比・境界上の極を制御する。

[証明概説を読む](#) →

#

06

論文・概説

Integrable metrics and effectivity with controlled boundary →

図中の略称: Controlled boundary

September 26, 2026 · 45 ページ

原論文 (GitHub) ↗

主に何を主張するか

$-K_Y + C$ のstrictな特異計量で s_C が可積分なら、任意の擬有効 M は C 上の補正後に有理線形有効。
 smooth 半正值の $-K_X$ では固定擬有効誤差を非有界な切断列から除去する。

Theorems 1.1, 4.3, 5.1, 9.2 · pp. 2, 9–11, 32–35 ↗

議論の役割・概説

重み付き近似で補正の台を制御し、Iitaka底から切断を戻す。非加重計量は実際の多重次数付き因子環の有限生成を別途供給する。

証明概説を読む →

#

07

論文・概説

Exact orders and invariant anticanonical linear systems →

図中の略称: Exact orders

September 26, 2026 · 41 ページ

原論文 (GitHub) ↗

主に何を主張するか

$L = -K_X$ は smooth 半正值、 M は任意の固定線束。曲率 null 面内の $N_j \sim m_j L + M$ と中心付き離散 valuation (零も可) の $v(N_j)/m_j \rightarrow 0$ から、 $N \geq 0$ 、 $N \sim_Q L$ 、 $v(N) = 0$ を得る。高次 $H^0(O_X)$ 消滅の下で自然不変切断も得る。 $q=0$ での不変非消滅・固定誤差除去と、RC の場合の controlled 因子を含む有限有理多面錐も扱う。

Theorems 1.1–1.2, 11.1; Propositions 10.1, 12.1 · pp. 3–4, 25, 27, 31 ↗

議論の役割・概説

Null な極の体、toroidal 体積、有限生成環を合流させ、境界 ray の実際の生成元で漸近次数を厳密達成へ変える。

証明概説を読む →

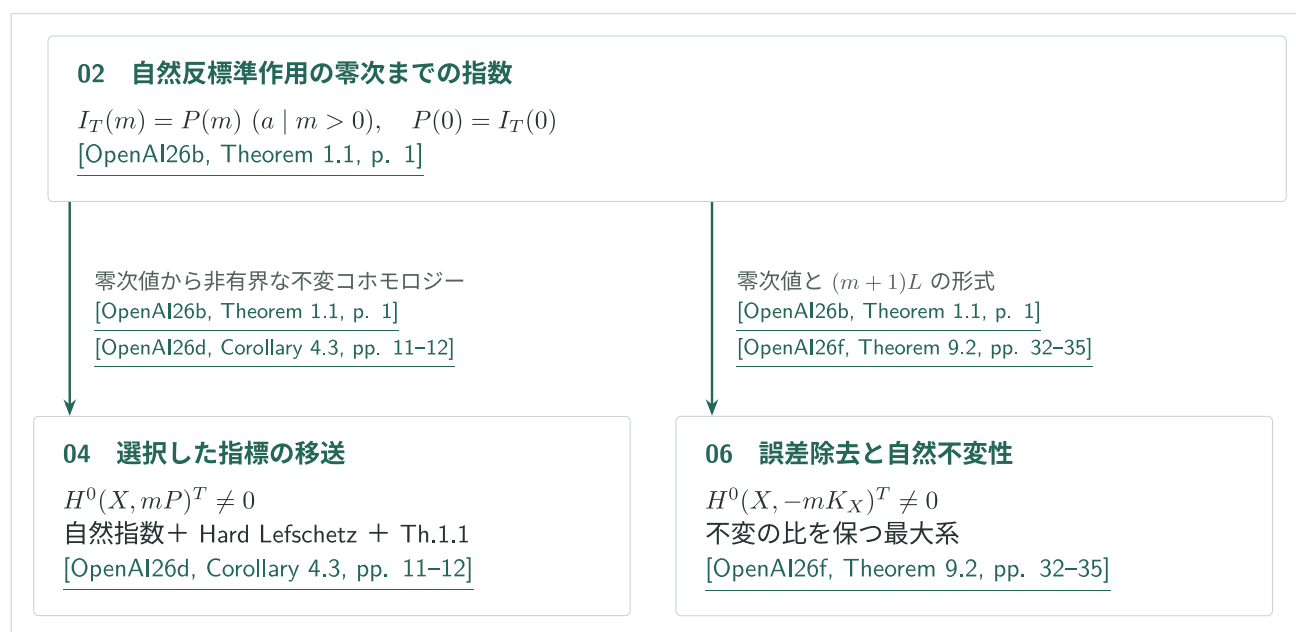
文献と引用の読み方

本文・図では以下の著者由来キーを使う。いずれも 2026 年 9 月 26 日稿を公式リポジトリの固定 commit で参照する。GitHub の PDF 閲覧リンクではページへの自動移動を前提としない。各記事ではその稿の内部結果に接頭辞を付けず、外部入力のみキーを付ける。

- [OpenAI26a](#) OpenAI — Anticanonical nonvanishing from smooth semipositivity. 二計量の移送と次元帰納法で通常非消滅を証明し、トラス不変直像を通して自然不変切断を作る。有限被覆と norm は他稿にも幾何入力を供給する。 September 26, 2026 · 27 ページ.
- [OpenAI26b](#) OpenAI — Invariant anticanonical indices and conversion of twisted differentials. 局所化・削除面の相殺と、有界底計量・零次も含む消滅という独立な二経路を接続する。不変形式を有限被覆へ先に降下し、その後で通常 conversion を使う。 September 26, 2026 · 18 ページ.

- [OpenAI26c](#) OpenAI — Bounded anticanonical metrics on klt pairs and torus quotients. 極大底と縦係数の最小値から有界計量を作る。安定トラス商で自然線形化を保ち、商の切断を全域へ延長する。 September 26, 2026 · 20 ページ.
- [OpenAI26d](#) OpenAI — Cohomological transfer and equivariant anticanonical sections. 共通の不変切断比の体、連続最大値計量、零次数の特異積分を使い、非自明でも固定された乗数イデアルで誤差を除く。 September 26, 2026 · 43 ページ.
- [OpenAI26e](#) OpenAI — Metric descent and rank preserving contractions. Toroidal体積と二計量移送を区別し、補正の例外台・縮約後の切断比・境界上の極を制御する。 September 26, 2026 · 76 ページ.
- [OpenAI26f](#) OpenAI — Integrable metrics and effectivity with controlled boundary. 重み付き近似で補正の台を制御し、Iitaka底から切断を戻す。非加重計量は実際の多重次数付き因子環の有限生成を別途供給する。 September 26, 2026 · 45 ページ.
- [OpenAI26g](#) OpenAI — Exact orders and invariant anticanonical linear systems. Nullな極の体、toroidal体積、有限生成環を合流させ、境界rayの実際の生成元で漸近次数を厳密達成へ変える。 September 26, 2026 · 41 ページ.

不変指数から分岐する非消滅の経路



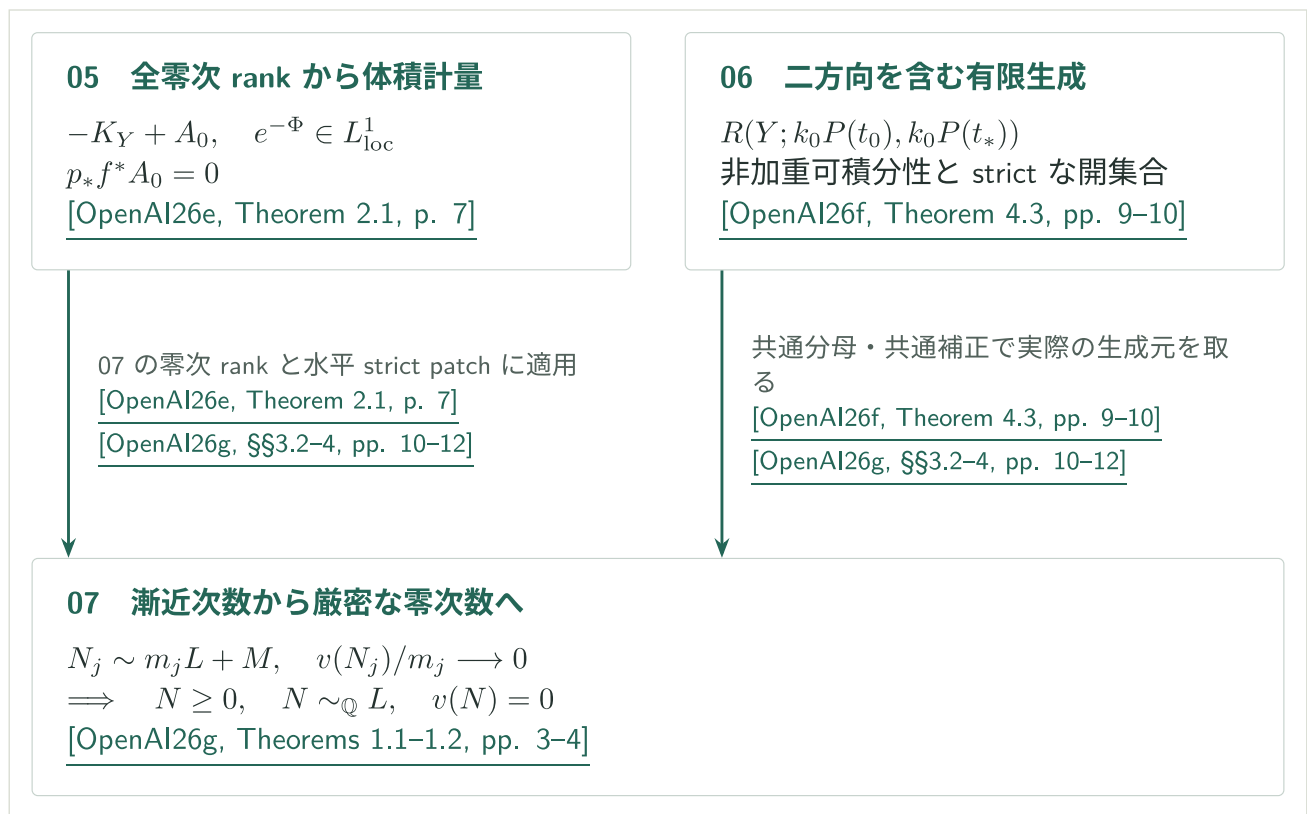
自然指数から二つの利用先への分岐

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

02の指数定理は、自然反標準作用について、ある整数のすべての正の倍数で不変Euler指数が多項式となり、その定数項が実際の零次指数であることを主張する。指数定理自体はprojectivityや半正値性を仮定しない。04・06で切断を取り出す際に、非零の零次指数、smooth semipositivity、Hard Lefschetz等の追加条件を使う。[OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 1]

04は任意に選んだ線形化に対する移送定理を先に証明し、自然指数から得たコホモロジーを微分形式・determinantへ送り、その帰結で自然不変切断を得る。06は不変な比の体を保った最大線形系に同じ指数入力を使う。02の通常の誤差除去だけから不変切断が自動的に得られる、と読み替えることはできない。[OpenAI26d, Proposition 4.1; Corollary 4.3, pp. 10–12]、[OpenAI26f, Proposition 9.1; Theorem 9.2, pp. 32–35]

計量と有限生成が合流する厳密達成



非加重計量と有限生成から厳密な零次数へ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

07の主定理は、固定線束 M を伴う有効因子列 $N_j \sim m_j L + M$ が曲率null面にあり、中心付き離散 valuation（零valuationを含む）の $v(N_j)/m_j$ が零へ近づくと、 $N \geq 0, N \sim_{\mathbb{Q}} L, v(N) = 0$ を得る。 M はこの定理では任意であり、 $-M$ の擬有効性は別の形式弧の系の条件である。[OpenAI26g, Theorems 1.1–1.2, pp. 3–4]

まず07内で構成した全直像の零次rank 1と水平strict patchを05のtoroidal体積定理へ渡す。得られるのは $-K_Y + A_0$ 上の非加重可積分計量と例外的な補正である。06の有限生成定理を二つの有理方向へ共通の補正・分母で適用し、実際の二重次数付き因子環の境界ray生成元を取る。最後は補正をpushdownしてからvaluationの中心で評価する。補正自体のvaluationが零であるとは仮定しない。
[OpenAI26e, Theorem 2.1, p. 7]、[OpenAI26f, Theorem 4.3, pp. 9–10]、[OpenAI26g, §§3.2–4, pp. 10–12]

05→06の計量降下は06 §5.3の別経路でも使われるが、06の重み付き支持制御定理から始まる主経路とは区別する。重み付き可積分性、非加重可積分性、通常開集合上のstrict positivity、大域Kähler下界を同一条件として扱わない。
[OpenAI26f, §5.3, pp. 13–15]、[OpenAI26f, Theorem 1.1, p. 2]

結果単位の接続と独立した経路

供給元の結果

Anticanonical nonvanishing from smooth semipositivity · [OpenAI26a, Theorem 2.1; Lemma 2.2, pp. 5, 8]

利用先・使用箇所

Invariant anticanonical indices and conversion of twisted differentials · [OpenAI26b, Proposition 5.1; Corollary 5.2, pp. 16–17]

種類と役割

帰結での利用。不変形式を有限被覆へ降下し、通常conversion後にnormを取る。01の非消滅主定理は使わない。

供給元の結果

Anticanonical nonvanishing from smooth semipositivity · [OpenAI26a, Theorem 2.1; Lemma 2.2, pp. 5, 8]

利用先・使用箇所

Bounded anticanonical metrics on klt pairs and torus quotients · [OpenAI26c, Corollary 4.1, p. 18]

種類と役割

帰結での利用。残存compact torusと不変canonical frameでTh1.2の切断を降下し、finite étale normを取る。

供給元の結果

Anticanonical nonvanishing from smooth semipositivity · [OpenAI26a, Theorem 2.1; Lemma 2.2, pp. 5, 8]

利用先・使用箇所

Cohomological transfer and equivariant anticanonical sections · [OpenAI26d, §14.1, p. 39]

種類と役割

帰結での利用。 Cor4.3の自然不変切断を一般 X へ戻す。全被覆の積分解を仮定しない。

供給元の結果

Invariant anticanonical indices and conversion of twisted differentials · [OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 1]

利用先・使用箇所

Cohomological transfer and equivariant anticanonical sections · [OpenAI26d, Proposition 4.1; Corollary 4.3, pp. 10–12]

種類と役割

帰結での利用。 実際の零次指数から非有界コホモロジーを得て、Th1.1へ送る。

供給元の結果

Invariant anticanonical indices and conversion of twisted differentials · [OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 1]

利用先・使用箇所

Integrable metrics and effectivity with controlled boundary · [OpenAI26f, Proposition 9.1; Theorem 9.2, pp. 32–35]

種類と役割

直接入力。 自然線形化と $(m+1)L$ shiftを保って不変形式を作る。

供給元の結果

Metric descent and rank-preserving contractions · [OpenAI26e, Theorem 2.1, p. 7]

利用先・使用箇所

Integrable metrics and effectivity with controlled boundary · [OpenAI26f, §5.3, pp. 13–15]

種類と役割

別経路。§5.3の非加重toroidal計量。§5.2の重み付き主経路と区別する。

供給元の結果

Metric descent and rank-preserving contractions · [OpenAI26e, Theorem 2.1, p. 7]

利用先・使用箇所

Exact orders and invariant anticanonical linear systems · [OpenAI26g, §§3.2–4, pp. 10–12]

種類と役割

直接入力。全零次rankと水平strict patchから計量と例外補正を供給する。

供給元の結果

Integrable metrics and effectivity with controlled boundary · [OpenAI26f, Theorem 4.3, pp. 9–10]

利用先・使用箇所

Exact orders and invariant anticanonical linear systems · [OpenAI26g, §§3.2–4, pp. 10–12]

種類と役割

直接入力。共通 $\varepsilon \cdot k_0$ で実際の二方向因子環を有限生成にする。

供給元の結果

Integrable metrics and effectivity with controlled boundary · [OpenAI26f, Theorem 2.2, pp. 6–7]

利用先・使用箇所

Exact orders and invariant anticanonical linear systems · [OpenAI26g, Proposition 12.1; §12.2, pp. 31, 34]

種類と役割

追加結果への直接入力。加重近似でklt境界と消える補正を作り、controlled因子の有限多面錐を得る。Th1.1の有限生成入力とは別。

04は、底からの曲率下界と消えるregularization errorから、高次の底コホモロジーを消す独立の調和的機構も示す。[OpenAI26d, Theorem 7.2, pp. 17–19] 07の追加出力は、高次 $H^i(\mathcal{O})$ 全消滅より弱い $q = 0$, $\chi \neq 0$ とfaithful作用・同変very ample束の下での不変非消滅、 $q = 0$ での不変固定誤差除去、RCでのcontrolled因子の有限多面錐である。前二者と錐の結論は各記事で仮定を分けて示す。[OpenAI26g, Proposition 10.1; Theorem 11.1, pp. 25, 27]、[OpenAI26g, Proposition 12.1; §12.2, pp. 31, 34]

01の非消滅主定理そのものを、被覆の構造定理・normと取り違えない。01は有限体積と二計量の経路、03はklt対上の有界計量とEuler多項式の経路を与える。03の主定理を04の移送定理の入力とする関係は、今回読んだ核心箇所にはない。共通のsmoothな非消滅結論を持つという比較は、証明依存の矢印ではない。[OpenAI26a, Theorems 1.1–1.2, pp. 2–3]、[OpenAI26c, Theorems 1.1–1.2, p. 2]、[OpenAI26d, Theorem 1.1; Corollary 1.2, p. 2]

図は確認済みの二つの分岐・合流を選んで示す。01からの構造入力と別経路は表へ残し、七稿全体を単一の依存鎖や排他的な分類にはしない。未調査の接続は図に描かない。

原典と確認範囲

公式overview.pdfのp.8は本見出しを用い、CONTENTS.mdは同じ068を Anticanonical nonvanishing in every dimension と記す。公式分野は Algebraic and complex geometry。固定版、SHA-256、原稿のページ数、重複照合は台帳に記録した。

各記事は主張の仮定・結論と、選んだ核心証明の本文、直接使う外部結果の記述・使用箇所を照合した読解案内である。著者の定理を紹介することと、編集側の照合結果は区別する。別担当による点検も全証明の独立再検証や専門家査読ではない。外部文献の証明は再帰的に検証していない。

01–07の読解範囲・未確認入力各記事末尾にある。とくに04のTh7.2以外の補助・別経路§§5–13、05の後半§§8–12、06の別経路§§6–8/10–12、07の今回追加したProp10.1・Th11.1・Prop12.1以外の補助・別経路§§8–14は全体の詳細点検を完了した範囲ではない。07のcompact-monodromy descentへの01の接続は今回の確認済み表に採用していない。

AI生成の解説なので、重要な主張・適用条件・証明はリンク先の原典で確認されたい。

Anticanonical nonvanishing from smooth semipositivity

有限随伴体積による帰納法と、自然線形化の不変切断

OpenAI, Anticanonical nonvanishing from smooth semipositivity (2026年9月26日版) の証明を案内する。普通の切断を作る有限体積定理と、被覆上の切断を降下させる不変化を分ける。smooth semipositivityはnef性より強い仮定であり、本文の不変直像の段階でも滑らかさを使う。

原稿の著者: OpenAI · September 26, 2026 · 27 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

主要結果

Theorem 1.1 — 反標準非消滅

X を滑らかな連結複素射影多様体とする。 $-K_X$ が曲率半正值の滑らかなHermitian計量を持つなら、ある整数 $m > 0$ に対して

$$H^0(X, -mK_X) \neq 0.$$

第一冪の切断や、次元だけによる一様な m は主張していない。

Theorem 1.1 · p. 2

Theorem 1.2 — 有限体積と許された極

Z を次元 d の滑らかな連結複素射影多様体とし、 $H^0(Z, \Omega_Z^q) = 0$ をすべての $1 \leq q \leq d$ に仮定する。 $D \geq 0$ は整因子で、 $J = -K_Z + D$ は半正值特異Hermitian計量 h_J を持ち、標準切断 $s_D \in H^0(Z, K_Z + J)$ について

$$\int_Z |s_D|_{h_J}^2 < \infty$$

とする。線束 L が局所有界な重みを持つ半正值特異Hermitian計量を持つなら、ある整数 $a > 0, b \geq 0$ に対して

$$H^0(Z, aL + bD) \neq 0.$$

h_J の重みは有界でなくてよい。一方 h_L は上下両側に局所有界である。結論は L の正の冪の有理切断で、極を D 上に限るというものであり、 b の一様性は含まない。

Theorem 1.2 · p. 3

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Anticanonical nonvanishing from smooth semipositivity](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [BP08](#) Bo Berndtsson; Mihai Păun — Bergman kernels and the pseudoeffectivity of relative canonical bundles : 特異係数を許す相対Bergman計量。Lemma 4.1とProposition 5.1。arXiv:math/0703344v4, 2008-01-21。
- [Ber09](#) Bo Berndtsson — Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations : 滑らかな係数の直像 L^2 計量。不変直和因子の商計量に使用。arXiv:math/0511225v2, 2007-08-20; published 2009。
- [DPS01](#) Jean-Pierre Demailly; Thomas Peternell; Michael Schneider — Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds : 乗数イデアル付きHard Lefschetzからtwisted formsを作る。arXiv:math/0006205v2, 2000-10-10; published 2001。
- [CP19](#) Frédéric Campana; Mihai Păun — Foliations with positive slopes and birational stability of orbifold cotangent bundles : 正の最小movable slopeを持つ葉層の代数的可積分性。Published version, 2019, 49 pages。
- [DPS96](#) Jean-Pierre Demailly; Thomas Peternell; Michael Schneider — Compact Kähler manifolds with hermitian semipositive anticanonical bundle : 普遍被覆の等長分解と有限被覆の構造。誌面版p.218とはページを区別。Undated author manuscript, 8 pages; published 1996。
- [CDP](#) Frédéric Campana; Jean-Pierre Demailly; Thomas Peternell — Rationally connected manifolds and semipositivity of the Ricci curvature : 残余因子の有理連結性を含む構造定理。arXiv:1210.2092v3, 2018-02-05。
- [GKP](#) Daniel Greb; Stefan Kebekus; Thomas Peternell — Movable curves and semistable sheaves : 実境界movable classでのHN filtrationとtensor slope。arXiv:1408.4308v2, 2015-04-15。
- [BDPP](#) Sébastien Boucksom; Jean-Pierre Demailly; Mihai Păun; Thomas Peternell — The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension : 擬有効錐とmovable curve錐の双対性。arXiv:math/0405285v1, 2004。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

Theorem 1.1 — 主定理の証明概略

証明対象：Theorem 1.1 · p. 2

証明の道筋。有限被覆の普遍被覆を分解し、残る因子のトーラス作用を保持する。Theorem 1.2は通常
の非消滅を与え、Theorem 7.2が自然作用に不変な切断へ進める。最後に有限étale normを取る。

幾何学的帰着

$$\tilde{X} = \mathbf{C}^a \times F \times Z, \quad T \curvearrowright Z$$

無形式の底に二つの計量を移す

[Theorem 1.2 · p. 3](#); [Theorem 7.2 · pp. 24–25](#)

通常の有限体積定理

$$H^0(S, aA + bD_S) \neq 0 \quad (a > 0, b \geq 0)$$

不変直像の直交商と不変な持上げ

[Proposition 7.1 · pp. 23–24](#); [\[Ber09, Theorem 1.2, p. 3\]](#)

自然不変切断の持上げ

$$0 \neq s_Z \in H^0(Z, -mK_Z)^T$$

deck 不変の標準枠を掛け、指数を被覆次数倍する

[Theorem 2.1 · pp. 5–8](#); [Lemma 2.2; §7.3 · pp. 8, 25–26](#)

降下と有限ノルム

$$H^0(X, -m \deg(\nu) K_X) \neq 0$$

主定理全体の帰着

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 被覆の分解はモノドロミーを消さない

構造定理により、適切な有限étale被覆 $S \rightarrow X$ の普遍被覆は $\mathbf{C}^a \times F \times Z$ となる。 F は Ricci 平坦で標準束に平行な非消滅枠があり、 Z は正次数の正則形式を持たず $-K_Z$ が滑らかに半正值である。原稿は deck 群を有限指数で取り直し、 F への作用を消して Z への像の閉包を連結 compact torus T にする。 S 自体が直積になるとは主張しない。

Theorem 2.1 · pp. 5–8 [DPS96, Structure Theorem, p. 1] [CDP, Theorem 1.4, p. 3]

2. 有限体積定理から自然不変切断へ

無正次数形式の因子で $D = 0, J = L = -K_Z$ とすると有限体積と有界計量の条件は満たされる。しかし普通の切断では deck 作用に対する降下が保証されない。Theorem 7.2 ではトーラスの有理商を取り、不変随伴直像の rank one を使って底へ二つの計量を移す。その底に Theorem 1.2 を適用し、不変切断として持ち上げる。

Theorem 1.2 · p. 3 Theorem 7.2 · pp. 24–25

3. 自然作用に対する不変性を使って降下する

得られた $s_Z \in H^0(Z, -mK_Z)^T \setminus \{0\}$ と、 $\mathbf{C}^a, F$ の不変標準枠の逆冪との積は deck 不変である。したがって S 上の $-mK_S$ の切断に降下し、次数 $e = \deg(S/X)$ の norm が $H^0(X, -meK_X) \neq 0$ を与える。 Z が点なら $m = 1, s_Z = 1$ とする。必要なのはある正の指数であり、被覆次数や指数の一樣評価ではない。

Lemma 2.2; §7.3 · pp. 8, 25–26

Theorem 1.2 — 有限体積から小さい底への帰納法

証明対象：Theorem 1.2 · p. 3

主張は主要結果のとおり。 $aL + bD$ がすべて非消滅しないと仮定して矛盾を導く。

非消滅の否定から支持面

$$L \cdot \alpha = D \cdot \alpha = 0, \quad \mu_{\min, \alpha}(T_Z) \geq 0$$

有界重みで乗数イデアルが自明、Hard Lefschetz と tail 安定化

[\[DPS01, Theorem 2.1.1, p. 8\]; Lemma 6.1 · pp. 19–20](#)

固定した行列式と無限の twists

$$s_i \in H^0(Z, M + m_i L), \quad m_i \longrightarrow \infty$$

最大系と補間から水平極なし・全次数 rank one

[Lemma 6.2 · pp. 20–22](#)

切断比を支配する小さい底

$$\dim S < \dim Z, \quad \rho: \text{水平極なし}; \quad \text{rank} = 1$$

零次・高次積分で二計量を移し、次元を下げる

[Proposition 5.1 · pp. 15–19; §6.3 · pp. 22–23](#)

次元帰納法と許可された極

$$H^0(S, aA + bD_S) \neq 0 \implies H^0(Z, akL + cD) \neq 0$$

通常
の非消滅の帰納法

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 有限体積から supporting movable class 上の非負接束へ

$L + D$ は擬有効だが big ではないため、錐双対性から非零 movable class α で $L \cdot \alpha = D \cdot \alpha = 0$ となるものを選ぶ。有限体積は Lemma 4.1 の相対 Bergman 計量に使う。多重ファイバーの局所式 $s_1 = z_1^e$ で、相対形式の係数は $z_1^{-(e-1)}$ を含む。Bergman 重みから $(e-1) \log |z_1|^2$ を引いても上に局所有界となる評価により、飽和 conormal の行列式に計量が延長する。正の HN 部分を葉層とし、その代数的可積分性を用いると $\mu_{\min, \alpha}(T_Z) \geq -D \cdot \alpha = 0$ を得る。

Lemma 4.1; Theorem 4.2; Corollary 4.3 · pp. 11–15 [BP08, Theorem 0.1, p. 2] [CP19, Theorem 1.1, p. 2]
[GKP, Corollary 2.27; Theorem 4.2, pp. 8, 12] [BDPP, Theorems 2.2, 2.4, p. 6]

2. 一つの行列式と、全ての切断比を支配する底

無正次数形式より $\chi(\mathcal{O}_Z) = 1$ 。Riemann–Rochの多項式 $\chi(K_Z + mL)$ は定数項が $(-1)^d$ であり、大きな m で消えない。有界重みは $\mathcal{I}(h_L^m) = \mathcal{O}_Z$ を保証し、Hard Lefschetz は固定した Ω_Z^p への写像 $-mL \rightarrow \Omega_Z^p$ を無限個与える。generic span の tail を安定化して行列式 M を固定し、 $M \cdot \alpha \leq 0$ かつ $s_i \in H^0(Z, M + m_i L)$ 、 $m_i \rightarrow \infty$ を得る。

全系 $|uL + vM + wD|$ ($u, v, w \geq 0$) は α との交点が非正なので generically finite にはならない。像次元最大の系を選び、像の函数体の $\mathbf{C}(Z)$ 内の相対代数閉包から $\dim S < \dim Z$ の底を作る。積の切断を使う最大性は、これら全系の切断比を $\mathbf{C}(S)$ に入れる。 $\rho = s_2/s_1$ の水平因子の次数は、 s_i を使った補間式(6.5)と $m_i \rightarrow \infty$ から非負になる。同じ切断比の性質と共通分母の除去が、 $j = 0$ を含む全 $j \geq 0$ の随伴 rank one を与える。

Lemma 6.1 · pp. 19–20 [DPS01, Theorem 2.1.1, p. 8] Lemma 6.2 · pp. 20–22

3. 二つの計量を移し、許された極だけを戻す

Proposition 5.1 は底に有界半正值線束 A と、有限随伴体積を持つ $-K_S + D_S$ を作る。正則形式の引戻しは単射なので S も無正次数形式である。次元帰納法から $aA + bD_S$ の切断を得て持ち上げると、 $akL + cD$ の非零切断となり仮定に反する。底が点なら、水平極のない ρ だけで既に非消滅する。次元零の初期段階は $a = 1, b = 0$ である。

Proposition 5.1 · pp. 15–19 §6.3 · pp. 22–23

Proposition 5.1 — 零次積分と高次momentsの役割を分ける

証明対象：Proposition 5.1 · pp. 15–19

Proposition 5.1 — 二計量の移送

X, S, Y は滑らかな連結複素射影多様体、 $\bar{Y}$ は normal projective とし、 $r : Y \rightarrow \bar{Y}$ 、 $\bar{\pi} : \bar{Y} \rightarrow X$ は射影双有理、 $\bar{f} : \bar{Y} \rightarrow S$ は全射等次元で一般ファイバーは連結とする。 $\pi = \bar{\pi}r$ 、 $f = \bar{f}r$ と置く。 D, J, h_J, L, h_L は Theorem 1.2 の計量条件を満たす（無形式の仮定はここでは不要）。ある $k > 0$ と $k\bar{\pi}^*L$ の非零有理切断 ρ が水平極を持たず、 $\eta = \text{Spec } \mathbf{C}(S)$ 上で全整数 $j \geq 0$ に対し

$$\dim_{\mathbf{C}(S)} H^0(Y_\eta, (K_{Y/S} + \pi^*(J + jkL))|_{Y_\eta}) = 1$$

と仮定する。 k, ρ を共通の正幂で置き換えれば、 S 上の線束 A 、有効整因子 D_S と非零正則切断 $e \in H^0(\bar{Y}, k\bar{\pi}^*L - \bar{f}^*A)$ を得る。 A には局所有界な半正値計量、 $-K_S + D_S$ には有限随伴体積の半正値計量がある。 D_S の支えは、 $\bar{f}^*T$ の全成分が $\bar{\pi}$ -例外または $\text{Supp } \bar{\pi}^*D$ 内となる素因子 T に限られる。さらに $a > 0, b \geq 0$ で $H^0(S, aA + bD_S) \neq 0$ なら、ある $c \geq 0$ で $H^0(X, akL + cD) \neq 0$ である。

Proposition 5.1 · pp. 15–19

縦の最小次数を差し引く

$$c_T = \min_{Q \mapsto T} \frac{\text{ord}_Q \rho}{\text{ord}_Q f^* T}, \quad e \in H^0(k\bar{\pi}^* L - \bar{f}^* A)$$

各底因子上で一成分には e が消えないように正規化

[Proposition 5.1 · pp. 15–19](#)

随伴ファイバー積分

$$V_j = \int_{Y_s} |(\eta_Y / f^* ds) e_v^j|^2, \quad \Phi_j = -\log V_j$$

rank one で psh 性、 j と独立な境界次数で有界性

[\[BP08, Theorem 0.1, p. 2\]; §5, \(5.3\)–\(5.10\) · pp. 16–19](#)

異なる二つの計量

$$j = 0 : -K_S + D_S; \quad \Psi = \lim_{\ell} (\sup_{j \geq \ell} \Phi_j / j)^* : A$$

bad primes は例外的または D 上、残る極を D で払う

[Proposition 5.1 · pp. 15–19](#)

補正の支えを使って持ち上げる

$$aA + bD_S \text{ effective} \implies akL + cD \text{ effective}$$

二計量の移送

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 等次元normal modelで縦の次数を正規化する

$c_T = \min_{\bar{f}(Q)=T} \text{ord}_Q(\rho) / \text{ord}_Q(\bar{f}^* T)$ の分母を払って $A = \mathcal{O}_S(\sum c_T T)$ と置く。底の標準有理切断で ρ を割った e は全素因子で非負の次数を持ち、normalityにより正則になる。各 T の上で少なくとも一成分には e が消えない。等次元性はnormal modelにのみ課し、積分用のsmooth resolutionには課さない。

[Proposition 5.1 · pp. 15–19](#)

2. 零次積分は体積を、高次積分は有界性を運ぶ

Jacobianを含む $\eta_Y = \pi^* s_D$ を使い、局所枠 ds, v について

$$V_j(s) = \int_{Y_s} |(\eta_Y / f^* ds) e_v^j|_{\pi^*(h_J h_L^{j_k})}^2, \quad \Phi_j = -\log V_j$$

とする。rank oneにより Bergman 計量から Φ_j の psh 性が得られる。 $j = 0$ では、境界補正 D_S を加えた計量の随伴測度が $f_*|\eta_Y|^2$ となり有限体積を保つ。一方

$$\Psi = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\sup_{j \geq \ell} \frac{\Phi_j}{j} \right)^*$$

は A の重みになる。 h_L の有界性から $V_j \leq C^j V_0$ で下界を得る。 e が消えない成分での評価 $V_j \geq C_1 C_2^j |s_1|^{2b_T}$ は b_T を j と独立にし、 j で割った極限で境界項を消す。これが上下両側の有界性を得る接続である。

§5, (5.3)–(5.10) · pp. 16–19 [BP08, Theorem 0.1, p. 2]

3. 補正因子の支えが持上げを可能にする

底の切断を引き戻して e^a を掛けた有理切断の極は bad primes 上だけにある。それらは X 上では例外的または D 上である。例外的極は normality による押下げで消え、残りを s_D^c で払う。従って許可した境界以外に新しい極を作らない。

Proposition 5.1 · pp. 15–19

Theorem 7.2 — 自然線形化の不変非消滅

証明対象：Theorem 7.2 · pp. 24–25

Theorem 7.2 — compact torus に不変な反標準切断

Z は滑らかな連結複素射影多様体で $H^0(Z, \Omega_Z^q) = 0$ を全 $q > 0$ に仮定する。 $L = -K_Z$ は滑らかな半正値 Hermitian 計量を持つ。compact connected real torus T が正則自己同型で連続的に作用し、 L には微分から来る自然線形化を入れる。このときある整数 $m > 0$ に対し $H^0(Z, mL)^T \neq 0$ である。

Theorem 7.2 · pp. 24–25

自然作用と有理トーラス商

$$T \subset G, \quad \mathbf{C}(Z)^G = \mathbf{C}(S)$$

基本ベクトル場の外積と稠密軌道上の比

[Theorem 7.2 · pp. 24–25](#)

不変随伴部分が一次元

$$\dim_{\mathbf{C}(S)} H^0(Y_\eta, K_{Y/S} + \pi^*((j+1)L))^T = 1$$

smooth 係数の直像定理と compact averaging

[\[Ber09, Theorem 1.2, p. 3\]; Proposition 7.1 · pp. 23–24](#)

直交不変商の半正値性

$$P_T = \int_T t \, dt, \quad \Phi_j = -\log \|u_j\|_{L^2}^2 \text{ is psh}$$

底は無形式、 $D=0$ なので例外的極だけが残る

[Theorem 1.2 · p. 3; Theorem 7.2 · pp. 24–25](#)

普通の非消滅を不変に持ち上げる

$$H^0(S, aA + bD_S) \neq 0 \implies H^0(Z, mL)^T \neq 0$$

不変切断への移送

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 有理商で不変部分だけのrank oneを得る

$H^1(\mathcal{O}_Z) = 0$ を使って T の作用を代数トーラス G へ延長し、自然線形化で T -不変と G -不変を一致させる。Rosenlicht商の一般ファイバーには稠密な軌道がある。可換性により不変な基本ベクトル場の外積と底の反標準枠から、水平極のない不変な ρ を得る。不変随伴切断の比は $\mathbf{C}(Z)^G = \mathbf{C}(S)$ に属するため、その不変部分は全 $j \geq 0$ で一次元となる。全随伴空間が一次元である必要はない。

[Theorem 7.2 · pp. 24–25](#)

2. smooth direct imageの直交商として正值性を得る

平均した h_J, h_L は滑らか・半正值・ T 不変である。smooth locus上の随伴直像はBerndtssonの定理により L^2 半正值となる。compact averagingは不変部分への正則直交射影なので、その一次元部分の計量は商計量として半正值である。一般の部分束に正值性移るとする議論ではない。ここでsmooth係数の定理を用いる点が、特異係数を許す普通のProposition 5.1との違いである。

Proposition 7.1 · pp. 23–24 [Ber09, Theorem 1.2, p. 3]

3. 通常の定理を底に適用して不変に持ち上げる

Proposition 5.1と同じ境界評価を使うProposition 7.1により底の二計量を作る。無正次数形式は底へ移り、Theorem 1.2が $aA + bD_S$ の切断を与える。底への作用は自明で e は不変だから持ち上げも不変である。 $D = 0$ なので許可される極は例外因子上だけで、押下げ後には正則となる。一般軌道次元零なら作用が自明でTheorem 1.2を直接使い、 Z が点の場合も含めて結論を得る。

Proposition 7.1 · pp. 23–24 Theorem 7.2 · pp. 24–25

直接入力とカタログ内での役割

本稿はカタログ068の基礎となる非消滅と自然不変非消滅を同一原稿内で証明する。他の068原稿を直接入力として引用してはいない。後続論文への利用は、利用先の結果と適用条件を照合したカタログ案内で区別する。DPS96/CDPは構造、BDPP/GKP/CP19はslope、DPS01はtwisted forms、BP08とBer09は異なる計量移送を供給する。nef性のみ、あるいは可積分な特異計量のみからTheorem 7.2を結論する記事ではない。

原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 2.1 · pp. 5–8 — モノドロミーを残す有限被覆。
- Lemma 4.1; Theorem 4.2; Corollary 4.3 · pp. 11–15 — 有限体積からcotangent slopeを抑える。
- Proposition 5.1 · pp. 15–19 — 零次と高次momentsを別々に使う。
- Lemma 6.2 · pp. 20–22 — 最大系から水平極なし・全次数rank oneを得る。
- Proposition 7.1 · pp. 23–24 — smooth係数が必要な不変直像の正值性。
- Theorem 7.2 · pp. 24–25 — 自然線形化の不変切断を作る。

編集側は固定版の主要主張、§§2・4-7の証明本文、外部8原典の上記入力結果の記述と適用箇所を照合した。§3のモデル準備は原稿の記述を読んだが、flattening・等変解消・Rosenlicht商・Yau定理の元論文までは今回別途照合していない。外部定理の全証明、psh envelopeの全延長議論、共通分母操作を独立に再証明したものではなく、専門家査読・形式検証でもない。主張の紹介と、この読解範囲は区別する。

Invariant anticanonical indices and conversion of twisted differentials

零次の値を保つ二つの議論を、形式の降下で接続する

OpenAI, Invariant anticanonical indices and conversion of twisted differentials (2026年9月26日版) は、不変Euler標数の多項式性と、固定した擬有効誤差を除く通常の非消滅を独立に証明する。応用では、トーラス不変の形式を有限被覆へ降下させた後でconversionを使う。この順序により、conversion自体の等変版を必要としない。

原稿の著者: OpenAI · September 26, 2026 · 18 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

主要結果

Theorem 1.1 — 不変反標準指数

compact complex manifold F に compact real torus T が正則に作用し、 $L_F = -K_F = \det T_F$ に微分から来る自然線形化を入れる。

$$I_T(m) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \dim H^q(F, L_F^m)^T \quad (m \geq 0)$$

と置くと、ある整数 $a > 0$ と $P \in \mathbf{Q}[t]$ が存在して

$$\begin{aligned} I_T(m) &= P(m) \quad (m \in a\mathbf{Z}_{>0}), \\ P(0) &= I_T(0). \end{aligned}$$

射影性・Kähler性・正值性は仮定しない。自然線形化を任意の character twist に変えることはできない。

Theorem 1.1 · p. 1

Theorem 1.2 — 擬有効誤差の除去

S は滑らかな連結複素射影多様体、 $L = -K_S$ は滑らかな半正值Hermitian計量を持つとする。 D を擬有効Cartier因子とし、狭義増大する正整数列 m_j に対して

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(m_j L - D)) \neq 0$$

と仮定する。このときある整数 $k > 0$ で $H^0(S, \mathcal{O}_S(kL)) \neq 0$ となる。 D が有効であること、 S の有理連結性、Euler標数の仮定は不要であり、結論は通常の切断である。

Theorem 1.2 · p. 2

Corollary 5.2 — 滑らかな半正值性からの反標準非消滅

X を滑らかな連結複素射影多様体とする。 $-K_X$ が滑らかな半正值Hermitian計量を持つなら、ある整数 $m > 0$ で $H^0(X, -mK_X) \neq 0$ である。第一幕や一様な指数は主張しない。

Corollary 5.2 · pp. 16–17

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Invariant anticanonical indices and conversion of twisted differentials](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [Ber09](#) Bo Berndtsson — Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations : rank one随伴直像の L^2 計量の半正值性。arXiv:math/0511225v2, 2007-08-20; published 2009。
- [DPS01](#) Jean-Pierre Demailly; Thomas Peternell; Michael Schneider — Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds : smooth係数Hard Lefschetzと不変twisted forms。arXiv:math/0006205v2, 2000-10-10; published 2001。
- [Fuj16](#) Osamu Fujino — Kollár–Nadel type vanishing theorem : 底方向に正な特異計量から高次直像の消滅。arXiv:1607.04684v1, 2016-07-15 (manuscript date 2016-07-10); published 2018。
- [DK01](#) Jean-Pierre Demailly; János Kollár — Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler–Einstein metrics on Fano orbifolds : 小さい指数でpsh重みを可積分にし乗数イデアルを自明にする。arXiv:math/9910118v3, 2013-11-14。
- [ASeg68](#) Michael F. Atiyah; Graeme B. Segal — The index of elliptic operators. II : compact群の固定成分に局所化するLefschetz公式。Annals of Mathematics 87 (1968), 531–545; scanned copy with one cover page。
- [ASin68](#) Michael F. Atiyah; Isadore M. Singer — The index of elliptic operators. III : 固定点公式のcohomological表現とcompact complex Riemann–Roch。Annals of Mathematics 87 (1968), 546–604; scanned copy with one cover page。

- [LMPTX23](#) Vladimir Lazić; Shin-ichi Matsumura; Thomas Peternell; Nikolaos Tsakanikas; Zhixin Xie — The Nonvanishing Problem for varieties with nef anticanonical bundle : nef反標準束のcotangent tensor部分層の負の第一-Chern類が擬有効。Documenta Mathematica 28 (2023), 1393–1440; published PDF。
- [OpenAI26a](#) OpenAI — Anticanonical nonvanishing from smooth semipositivity : 有限被覆・残余トーラス・不変標準枠と有限étale normのみ。September 26, 2026。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

Corollary 5.2 — 主定理の証明概略

証明対象 : [Corollary 5.2](#) · pp. 16–17

証明の道筋。 Theorem 1.1とTheorem 1.2は互いに独立である。前者からcompact factor上の不変twisted formsを作り、有限被覆へ降下させる。そこで後者を用いて通常の反標準切断へ変換し、normで X へ戻す。

不変指数の零次値

$$I_T(0) = 1 \implies P \neq 0$$

Hard Lefschetz は $m+1$ を用い、不変枠が降下を保つ

[Theorem 2.4; Corollary 2.5 · pp. 8–9; Proposition 5.1 · p. 16](#)

不変 twisted forms を降下

$$H^0(F, \Omega_F^p \otimes L_F^{m+1})^T \hookrightarrow H^0(S, \Omega_S^p \otimes (-K_S)^{m+1})$$

飽和行列式の負を擬有効にし、普通の定理を適用

[\[LMPTX23, Theorem 4.1, 誌面 p. 1409 / PDF p. 17\]; Theorem 1.2 · p. 2](#)

通常の固定誤差と conversion

$$N_j \sim d_j(-K_S) - D, \quad D \text{ pseudoeffective} \implies H^0(S, -kK_S) \neq 0$$

等変な conversion は使わず、有限 étale norm を取る

[\[OpenAI26a, Theorem 2.1; Lemma 2.2, pp. 5–8\]; Corollary 5.2 · pp. 16–17](#)

有限ノルムで元の多様体へ

$$H^0(X, -k \deg(\nu) K_X) \neq 0$$

二つの独立な主結果の接続

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 不変Euler指数から固定次数の不変形式へ

有限被覆の普遍被覆を $\tilde{S} = \mathbf{C}^b \times C \times F$ とし、 C は Ricci 平坦、 F は無正次数形式の compact factor とする。残余作用は compact torus T を通る。Hodge 対称性から $H^q(F, \mathcal{O}_F) = 0$ ($q > 0$) なので $I_T(0) = 1$ である。Theorem 1.1 の多項式は非零となり、ある固定 q に対して $H^q(F, L_F^m)^T$ が非有界な m で非零になる。係数を L_F^{m+1} とした Hard Lefschetz と compact averaging により、固定 p で $H^0(F, \Omega_F^p \otimes L_F^{m+1})^T \neq 0$ を得る。

[\[OpenAI26a, Theorem 2.1; Lemma 2.2, pp. 5–8\]](#)

[Theorem 2.4; Corollary 2.5 · pp. 8–9](#) [\[DPS01, Theorem 2.1.1, p. 8\]](#)

2. 形式を降下してから擬有効誤差を作る

不変標準枠を掛けるProposition 5.1により、不変形式は S 上の $H^0(S, \Omega_S^p \otimes (-K_S)^r)$ へ単射で移る。 $p > 0$ ならgeneric spanの固定した行列式を取り、cotangent tensor内で飽和した線束 M を得る。nef性で $-M$ が擬有効となり、 $D = -M$ と置けば、無限の形式は有効因子 $N_j \sim d_j(-K_S) - D$ へ変わる。 $p = 0$ では既に反標準切断である。

Proposition 5.1 · p. 16 Theorem 4.1; Lemma 4.2; Corollary 4.3 · p. 15
[LMPTX23, Theorem 4.1, 誌面 p. 1409 / PDF p. 17]

3. 通常のconversionと有限étale norm

S の反標準計量は X からの滑らかな半正值引戻しであり、Theorem 1.2を適用できる。得られた $-kK_S$ の通常の切断を、次数 $d = \deg(S/X)$ のnormで $-dkK_X$ の非零切断へ送る。この段階で切断に T -不変性を要求しない。有限被覆を大域的直積と扱う必要もない。

Theorem 1.2 · p. 2 Corollary 5.2 · pp. 16–17 [OpenAI26a, Theorem 2.1; Lemma 2.2, pp. 5–8]

Theorem 1.1 — 格子点計数の零次項を保持する

証明対象：Theorem 1.1 · p. 1

主張は主要結果を参照。原稿の二つの組合せ補題が、多項式性と実際の零次指数の一致を別々に担う。

自然反標準 character

$$w = \sum_i \nu_i, \quad [t^0] \text{ in the fixed-component formula}$$

compact 群の固定成分公式、有限次数で Chern roots を展開

[\[ASeg68, Theorem 2.12, 誌面 p. 540 / PDF p. 11\]; §2.2, \(2.2\)–\(2.4\) · pp. 7–8](#)

polarization と重み付き計数

$$D = \{x_i \geq 0 : \sum \alpha_i x_i = -w\}, \quad A = \bigcup_{i \in I} (D \cap \{x_i = 0\})$$

自然 character の和が外点 u を同じ affine 空間に置く

[Lemmas 2.1–2.2 · pp. 4–6](#)

削除面への retraction

$$u_i = \pm 1, \quad r(x) = u + t(x)(x - u), \quad \chi(D) - \chi(A) = 0 \ (I \neq \emptyset)$$

全可除指数の計数と包除原理、 $m=0$ で許されるのは $b=0$

[Lemmas 2.1–2.2 · pp. 4–6; §2.2, \(2.2\)–\(2.4\) · pp. 7–8](#)

多項式の零次項と実際の零次値

$$I_T(m) = P(m) \ (a \mid m > 0), \quad P(0) = I_T(0)$$

局所化と削除面の相殺

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 固定成分公式を全ての可除指数の多項式へ

固定成分 $Z \subset F^T$ で、法接束の characters を ν_i 、形式的 Chern roots を x_i とする。自然反標準 character は $w = \sum_i \nu_i$ であり、局所寄与は

$$\int_Z \mathrm{td}(Z) e^{mc_1(L_F|_Z)} t^{mw} \prod_i (1 - t^{-\nu_i} e^{-x_i})^{-1}.$$

一つの整数方向で分母を polarize すると、自明 character の係数は $\sum_i \alpha_i b_i = -mw$ 、 $b_i > 0$

($i \in I$)、 $b_i \geq 0$ (それ以外) の重み付き格子点計数となる。全 α_i は同じ線型汎関数で正である。

Lemma 2.1 は閉有理多面体を格子単体に分割し、基本平行多面体と二項係数恒等式(2.1)から小さい指数も含む全可除指数での多項式を得る。次数は切り詰めた cohomology で有限となり、最後に対称な全寄与だけを特性類として積分する。

[§2.2, \(2.2\)–\(2.4\) · pp. 7–8](#) [Lemmas 2.1–2.2 · pp. 4–6](#) [\[ASeg68, Theorem 2.12, 誌面 p. 540 / PDF p. 11\]](#)
[\[ASin68, Theorems 3.9, 4.3, 誌面 pp. 562–565 / PDF pp. 18–21\]](#)

2. 自然線形化が削除面へのretractionを与える

$D = \{x_i \geq 0 : \sum \alpha_i x_i = -w\}$ 、 $A = \bigcup_{i \in I} (D \cap \{x_i = 0\})$ とする。 $I \neq \emptyset, D \neq \emptyset$ なら、 $u_i = -1$ ($i \in I$)、 $u_i = 1$ (それ以外) が同じ affine 空間に属す。これは $w = \sum \nu_i$ を用いる箇所である。

$t(x) = \max_{i \in I} (x_i + 1)^{-1}$ 、 $r(x) = u + t(x)(x - u)$ は D から A への retraction で、線分 homotopy は A を固定する。従って $\chi(D) = \chi(A) = 1$ で、包除原理による多項式定数項は $(\chi(D) - \chi(A))W(0, 0) = 0$ となる。

$I = \emptyset$ なら閉計数の定数項 $W(0, 0)$ が残る。実際の $m = 0$ でも正の pairing が $b = 0$ を強制し、これが許されるのは $I = \emptyset$ の場合だけである。従って $P(0) = I_T(0)$ 。 $F^T = \emptyset$ なら固定点公式と character の連続性から全指数で $I_T = 0$ 、 $P = 0$ とする。自明作用・零次元多面体も同じ式に含まれる。非閉集合 $D \setminus A$ の通常の Euler 標数を用いるのではなく、compact な二つの Euler 標数の差を用いる。

Lemmas 2.1–2.2 · pp. 4–6 §2.2, (2.2)–(2.4) · pp. 7–8

Theorem 1.2 — 有界な底計量と零次の消滅

証明対象：Theorem 1.2 · p. 2

主張は主要結果を参照。指数定理に依存せず、反標準恒等式を二度使って Euler 多項式の零次値を確保する。

最大の支配された底
 $c\pi^*L - f^*H$ pseudoeffective, section ratios $\in \mathbf{C}(Y)$

水平次数の affine 性と、縦の最小次数の差引き

§3.1, (3.2)–(3.7) · pp. 9–12

正規化切断と全次数 rank one
 $\sigma : f^*B \rightarrow \ell\pi^*L, \quad E = K_V + \pi^*L, \quad \text{rank } f_*\mathcal{O}(E + k\ell\pi^*L) = 1$

smooth 直像の高次 moments、消えない成分で上下界

[Ber09, Theorem 1.2, p. 3]; §3.2, (3.8)–(3.10) · pp. 12–13

有界な底計量
 $\varphi_\beta = -\log \max_{V_y} |\sigma_\beta|_{h^\ell_L}^2$ psh and locally bounded

小指数可積分性と Kollár–Nadel、 $k=0$ も含める

[Fuj16, Theorem 1.3, p. 2]; §3.3, (3.11)–(3.12) · pp. 13–14

零次消滅から正冪の切断
 $Q(k) = h^0(Y, \mathcal{G}(kB)) \ (k \geq 0), \quad Q(0) > 0 \implies H^0(S, k\ell L) \neq 0$

固定擬有効誤差の除去

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 最大の支配された底と縦次数の正規化

$\pi : V \rightarrow S$ 上で $c\pi^*L - f^*H$ が擬有効 (H は底 Y 上の ample divisor) となる有理写像のうち、底の次元が最大のものを選ぶ。函数体も相対代数閉にする。 $c'L - A$ が擬有効なら、 A の二つの切断比は $\mathbf{C}(Y)$ に属する。そうでなければ pencil との積がより大きい支配された底を与える。

$N_j \sim m_j L - D$ の間の式 (3.3) から水平次数は m_j の affine 函数となる。非負性と $m_j \rightarrow \infty$ が $N_2 - N_1$ の水平有効性を与える。normal model で各底素因子上の最小正規化次数を差し引き、分母を払えば $\sigma : f^*B \rightarrow \ell\pi^*L \ (\ell > 0)$ を得る。各底素因子上の少なくとも一成分で σ は消えない。底が点ならこの時点で正冪の切断が得られる。

§3.1, (3.2)–(3.7) · pp. 9–12

2. rank oneの積分から有界最大値計量へ

$E = K_V - \pi^* K_S = K_V + \pi^* L$ は有効例外因子で、標準切断を e とする。最大性は全 $k \geq 0$ に対し $f_* \mathcal{O}_V(E + k\ell\pi^* L)$ のgeneric rankを1にする。rankが大きければ、十分な底のample twistで二つの切断を作り、その比を押し下げることによって最大性に反する。

B の局所枠 β に対し、smooth-fiber locusで

$$\varphi_\beta = -\log \max_{V_y} |\sigma_\beta|_{h_L}^2$$

と置く。Berndtssonの定理は $e\sigma_\beta^k/f^*\tau$ の L^2 積分の $-1/k$ 倍対数にpsh性を与える。正の全台測度に対する高次momentsの極限とDiniの定理により、この極限は φ_β に局所一様収束する。propernessは重みの下界を与え、 σ が消えない成分を使う局所power-map表示は上界を与える。divisorとcodimension twoを越えて延長し、局所有界な半正值計量 h_B を得る。

§3.2, (3.8)–(3.10) · pp. 12–13 [Ber09, Theorem 1.2, p. 3]

3. $k=0$ を含む消滅が非零多項式を保証する

擬有効支配から底方向に正の特異計量を作り、滑らかな h_L と小さい比率で混合する。psh重みの小指数可積分性により、ある $\varepsilon > 0$ で $\Theta_h(\pi^* L) \geq \varepsilon f^* \omega_H$ かつ $\mathcal{I}(h) = \mathcal{O}_V$ となる。 h_B が有界なので全ての固定 $k \geq 0$ について $f^* h_B^k$ を掛けても乗数イデアルは変わらない。Fujinoの定理を $q = 0$ で用いると

$$H^i(Y, \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_Y(kB)) = 0 \quad (i > 0, k \geq 0), \quad \mathcal{G} = f_* \mathcal{O}_V(E).$$

従って $Q(k) = \chi(Y, \mathcal{G}(kB)) = h^0(Y, \mathcal{G}(kB))$ は零を含む全非負指数で成り立つ。 e により $Q(0) > 0$ なので Q は非零、多くの正の k で切断がある。これに σ^k を掛け、 $\pi_* \mathcal{O}_V(E) = \mathcal{O}_S$ で押し下げれば $k\ell L$ の切断を得る。 $L = -K_S$ はrank oneの随伴式と、この零次の固定層の両方に使われる。

§3.3, (3.11)–(3.12) · pp. 13–14 [DK01, §1.4(8), p. 7] [Fuj16, Theorem 1.3, p. 2]

Proposition 5.1 — conversionより前に形式を降下する

証明対象 : Proposition 5.1 · p. 16

Proposition 5.1 — 不変twisted formsの降下

$\nu: S \rightarrow X$ を上記の有限被覆とし、 $\tilde{S} = \mathbf{C}^b \times C \times F$ 、deck群は $\mathbf{C}^b$ に平行移動、 C に自明、 F に compact torus T を通して作用するとする。 C と $\mathbf{C}^b$ のdeck不変標準枠を選ぶと、全 $r \geq 0$ 、 $0 \leq p \leq \dim F$ について単射

$$H^0(F, \Omega_F^p \otimes (-K_F)^r)^T \hookrightarrow H^0(S, \Omega_S^p \otimes (-K_S)^r)$$

が存在する。さらにある固定 p で右辺は非有界な正整数 r に対して非零である。

Proposition 5.1 · p. 16

compact factor の不変形式

$$u \in H^0(F, \Omega_F^p \otimes L_F^r)^T, \quad \tilde{S} = \mathbf{C}^b \times C \times F$$

平行移動と自明作用が標準枠を保つ

[OpenAI26a, Theorem 2.1; Lemma 2.2, pp. 5–8]

deck 不変な tensor

$$\eta^{-r} \otimes \text{pr}_F^* u \in H^0(\tilde{S}, \Omega_{\tilde{S}}^p \otimes K_{\tilde{S}}^{-r})$$

微分形式・反標準束の自然作用が一致する

Proposition 5.1 · p. 16

有限被覆上の形式へ単射

$$H^0(F, \Omega_F^p \otimes L_F^r)^T \hookrightarrow H^0(S, \Omega_S^p \otimes (-K_S)^r)$$

Hard Lefschetz の指数ずれと飽和行列式を用いる

Theorem 2.4; Corollary 2.5 · pp. 8–9; Theorem 4.1; Lemma 4.2; Corollary 4.3 · p. 15

非有界な指数を保って conversion へ

$$r = m + 1 \longrightarrow \infty, \quad D = -M \text{ pseudoeffective}$$

不変形式の降下と通常の変換

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 自然作用が二つのtensor因子で一致する

不変標準枠の積を η とする。不変形式 u を $\eta^{-r} \otimes \text{pr}_F^* u$ へ送ると、微分形式と反標準束の双方の自然作用がdeck作用と一致するため降下できる。射影による形式の引戻しは単射で、枠とのtensorは可逆、局所被覆も非消滅を保つ。 S の射影性により降下した正則切断は代数的である。

Proposition 5.1 · p. 16 [OpenAI26a, Theorem 2.1; Lemma 2.2, pp. 5–8]

2. 指数のずれと行列式の飽和を保つ

$I_T(0) = 1$ とCorollary 2.5の指数は $m + 1$ なので、降下写像には $r = m + 1$ を入れる。 F が点なら $p = 0$ で同じ結論を得る。降下後の $p > 0$ では、generic spanの基底 r' 本のうち一本を無限のtwisted formsで置き換えて外積を取る。新指数は m_j +固定分で非有界のままである。 $\bigwedge^{r'} \Omega_S^p$ 内の飽和線束 M は反射的なので線束となり、tensor powerの直和因子への包含で飽和性を保つ。LMPTX23の定理はこの $-M$ を擬有効にする。そこで通常のTheorem 1.2を適用するので、不変形式を不変反標準切断に直接変換したとは述べない。

Theorem 2.4; Corollary 2.5 · pp. 8–9 Theorem 4.1; Lemma 4.2; Corollary 4.3 · p. 15
[LMPTX23, Theorem 4.1, 誌面 p. 1409 / PDF p. 17]

直接入力とカタログ内の接続

01「Anticanonical nonvanishing from smooth semipositivity」から使うのは有限被覆のTheorem 2.1とnormのLemma 2.2のみである。01の通常非消滅Theorem 1.2や不変非消滅Theorem 7.2は本稿の二つの主定理の入力ではない。本稿のCorollary 5.2は同じ非消滅結論への別経路であり、幾何入力の共有と証明全体の独立性を区別する。

原典を読む入口と確認範囲

- Lemmas 2.1–2.2 · pp. 4–6 — 全ての可除指数と零次項を保つ数え上げ
- §2.2, (2.2)–(2.4) · pp. 7–8 — 自然反標準指標からdeleted facesを得る
- §3.1, (3.2)–(3.7) · pp. 9–12 — 最大底・水平次数・全次数rank one
- §3.2, (3.8)–(3.10) · pp. 12–13 — 最大値計量と境界の上下界
- §3.3, (3.11)–(3.12) · pp. 13–14 — $k=0$ を含む消滅と非零Euler多項式
- Proposition 5.1 · p. 16 — conversionより前に不変形式を降下

編集側は原稿pp.1-17の主張と証明、固定成分公式の原典（スキヤンの誌面540/PDF11、誌面562-565/PDF18-21）、Berndtsson・Fujino・Demailly-Kollár・DPS・LMPTXの入力記述と使用箇所、01の被覆・normを照合した。Hilbert schemeによるmodel構成の元文献、固定点計算の全ての形式的root操作、外部定理の証明を再帰的に検証してはいない。重み付き計数・境界延長は証明本文を追ったが独立再証明ではない。これは著者の主張への読解案内であり、専門家査読や形式検証ではない。

Bounded anticanonical metrics on klt pairs and torus quotients

有界計量を底へ移し、零捻りのEuler特性から切断を作る

本稿は、klt対の反対数標準因子に対する有界計量の非消滅判定を証明し、トーラス商を介して自然不変な反標準切断を得る。局所有界なpsh重みは連続である必要がない。一方、商を作る上階では滑らかな半正計量を仮定する。この二つをnef性だけに置き換えてはいない。

原稿の著者: OpenAI · September 26, 2026 · 20 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 有界計量による非消滅

(W, D) を有効な有理境界を持つ射影的 $\mathbb{Q}$ -factorial klt対とし、 $P = -(K_W + D)$ と置く。 P はnefとする。滑らかな射影的解消 $\rho: \widetilde{W} \rightarrow W$ 上で、 ρ^*P が局所有界な重みを持つ半正計量を持ち、 $\chi(\widetilde{W}, \mathcal{O}_{\widetilde{W}}) \neq 0$ と仮定する。このとき、 mP がCartierとなるある整数 $m > 0$ について

$$H^0(W, \mathcal{O}_W(mP)) \neq 0.$$

Theorem 1.1 · p. 2

Theorem 1.2 — 安定商からの自然不変切断

Z を滑らかな有理連結射影多様体とし、 $-K_Z$ が滑らかな半正Hermitian計量を持つとする。 Z に作用する任意の代数的トーラス T に対し、ある整数 $m > 0$ が存在して

$$H^0(Z, -mK_Z)^T \neq 0.$$

不変性は微分から誘導される $-K_Z = \det T_Z$ の自然線形化に関する。 m は作用ごとに選び、任意の線形化・全ての正整数 m についての主張ではない。

Theorem 1.2 · p. 2

Corollary 4.1 — 滑らかな射影多様体への帰結

X を滑らかな連結複素射影多様体とする。 $-K_X$ が滑らかな半正計量を持つなら、ある整数 $m > 0$ について $H^0(X, -mK_X) \neq 0$ である。

Corollary 4.1 · p. 18

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Bounded anticanonical metrics on klt pairs and torus quotients](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [DPS01](#) Jean-Pierre Demailly; Thomas Peternell; Michael Schneider — Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds : 乗数イデアル付きhard Lefschetzにより非零コホモロジーを捻り微分形式へ移す。arXiv:math/0006205v2, 10 October 2000。
- [LMPTX23](#) Vladimir Lazić; Shin-ichi Matsumura; Thomas Peternell; Nikolaos Tsakanikas; Zhixin Xie — The Nonvanishing Problem for varieties with nef anticanonical bundle : 飽和cotangent tensor部分層の負の第一Chern類を擬有効にする。Documenta Mathematica 28 (2023), 1393–1440。
- [PT14](#) Mihai Păun; Shigeharu Takayama — Positivity of twisted relative pluricanonical bundles and their direct images : rank one随伴直像の積分計量に半正曲率を与える。arXiv:1409.5504v1。
- [Fuj16](#) Osamu Fujino — Kollár-Nadel type vanishing theorem : 底方向の正曲率から零捻りを含む高次コホモロジー消滅を得る。arXiv:1607.04684v1, manuscript version 0.01 (10 July 2016)。
- [DWZZ19](#) Fusheng Deng; Zhiwei Wang; Liyou Zhang; Xiangyu Zhou — A new proof of Kiselman’s minimum principle for plurisubharmonic functions : 軌道上の有界性を別途得た後、下限のpsh性を与える。arXiv:1810.12733v1, 30 October 2018。
- [OpenAI26a](#) OpenAI — Anticanonical nonvanishing from smooth semipositivity : 有限被覆上のトーラスmonodromyを保持した構造と有限étale norm。主定理の非消滅は入力にしない。2026-09-26; commit fd4aeeb2ee4fc729c18d98444fed42fd0529eeeb。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 の証明 — 極大底と零捻り

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · p. 2

証明の道筋。 Euler仮定から捻り微分形式を作り、その行列式を支配する極大次元の底を選ぶ。因子の分解とrank one直像から底の有界計量を構成し、零捻りを含む消滅によってEuler多項式を非零にする。以下の図は全経路を示し、各中間結果はこの主定理の入力として説明する。

Euler 仮定と有界半正計量

$$P = -(K_W + D), \quad \chi(\widetilde{W}, \mathcal{O}_{\widetilde{W}}) \neq 0$$

hard Lefschetz と負の行列式類の擬有効性

[DPS01, Theorem 2.1.1, p. 8] [LMPTX23, Theorem 4.1, 誌面 p. 1409 / PDF p. 17]

捻り形式の行列式から極大底へ

$$N_i \sim_{\mathbb{Q}} M + m_i P, \quad -M \in \overline{\text{Eff}}(W), \quad m_i \rightarrow \infty$$

新しい pencil を排除し、縦成分の最小比を引く

Lemmas 2.2–2.3 · pp. 7–8

余項の成分を欠かせる

$$r\pi^*P = f^*V + H, \quad H \geq 0$$

rank one 積分の本質的上限、有界性、乗数イデアルの相殺

Lemma 2.4; Proposition 2.5 · pp. 9–11 [Fuj16, Theorem 1.3, p. 2]

有界な底計量と全非負捻りの消滅

$$\mathcal{G} = f_*\mathcal{O}_S(E), \quad H^i(Y, \mathcal{G}(aV)) = 0 \quad (i > 0, a \geq 0)$$

正の捻りを選び、例外因子を pushforward で除く

Lemma 2.6; proof of Theorem 1.1 · pp. 11–12

零捻りから非消滅を戻す

$$Q(0) = h^0(Y, \mathcal{G}) > 0 \implies H^0(W, arP) \neq 0 \quad (a > 0)$$

有界計量から零捻りを経由して正のCartier倍数の切断へ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. Euler仮定を無限個の捻り形式へ移す

$\chi(\widetilde{W}, K_{\widetilde{W}} + t\rho^*(r_0P))$ は t の多項式で、 $t = 0$ で非零である。したがって無限個の正整数で非零コホモロジーを持ち、部分列で次数を固定できる。有界計量の正の幂は乗数イデアルが自明なので、hard Lefschetz はある p について $\Omega_{\widetilde{W}}^p \otimes n_i \rho^*P$ の非零切断を与える。 $p = 0$ なら終了する。 $p > 0$ ならこれらの一般点での span の行列式を飽和し、 $N_i \sim_{\mathbb{Q}} M + m_i P$ 、 $m_i \rightarrow \infty$ 、 $N_i \geq 0$ を得る。正の捻り指数の和が非有界であることが重要で、 P の数値的非自明性を追加しない。cotangent tensor 部分層の定理に klt・有効境界・nef 性を適用し、 $-M$ の擬有効性を得る。

Lemma 2.1 · pp. 5–6 [DPS01, Theorem 2.1.1, p. 8] [LMPTX23, Theorem 4.1, 誌面 p. 1409 / PDF p. 17]

2. 新しいpencilを排除し、縦成分の最小比を引く

$\pi: S \rightarrow W$ と連結ファイバーを持つ $f: S \rightarrow Y$ のうち、ある $d > 0$ と ample A に対し $d\pi^*P - f^*A$ が擬有効となるものから $\dim Y$ 最大を選ぶ。 P と例外因子で支配され、一般ファイバー上で非定数となる pencilがあれば底を大きくできるため、そのようなpencilはない。正規等次元モデル上でこの性質を N_i の比に適用すると、水平部分は m_i のアフィン関数になる。差を取り、各底素因子上の係数／多重度の最小値を引いて

$$r\pi^*P = f^*V + H, \quad H \geq 0$$

を得る。各底素因子の上に H に含まれない成分が少なくとも一つある。この条件は後の有界性を支え、単なる有効分解より強い。 Y が点なら既に切断が得られる。

Lemmas 2.2–2.3 · pp. 7–8

3. rank one積分を本質的上限にして有界計量を作る

$R = K_S - \pi^*(K_W + D)$ 、 $E = \lceil R \rceil$ 、 $\Xi = E - R$ と置く。 E は有効例外因子、 Ξ は係数が $[0, 1)$ の SNC 因子で、 $K_S + \pi^*P + \Xi = E$ である。極大性は全 $a \geq 0$ について $f_*\mathcal{O}_S(E + ar\pi^*P)$ のrankを1にする。 $B_a = (ar + 1)\pi^*P + \Xi$ は整数線束で、自明な乗数イデアルを持つ。

随伴直像の半正性を適用し、局所生成切断 $s = f^*v s_H$ について

$$u_a(y) = -\frac{1}{a} \log \int_{S_y} |s|_{h_P}^{2a} d\mu_y \longrightarrow -\log \operatorname{ess\,sup}_{S_y} |s|_{h_P}^2$$

を得る。原稿は指数ごとのbase-change開集合の共通部分をZariski開とはせず、共通の全測度集合とpsh関数の局所 L^1 コンパクト性を使う。 H を欠く成分の近傍で s が非零であるため、欠落した底因子に近づいても本質的上限が下から正に抑えられる。propernessによる逆側の評価とpsh延長により、 V 上の局所有界半正計量を得る。連続性への置換は行わない。

Lemma 2.4; Proposition 2.5 · pp. 9–11 [PT14, Theorems 3.3.4–3.3.5, p. 24]

4. 零捻りで非零を確保し、切断を押し戻す

$d\pi^*P - f^*A$ の正カレント計量を少量混ぜ、 $\pi^*P + \Xi$ に底方向の厳密な正曲率と自明な乗数イデアルを同時に与える。klt係数の余裕、Skodaの小指数可積分性、Hölderを使う。これに $af^*V + aH$ の計量を加えると、全 $a \geq 0$ で乗数イデアルは正確に $\mathcal{O}_S(-aH)$ となる。したがって随伴束は $E + af^*V$ に簡約され、Kollár–Nadel消滅により

$$H^i(Y, \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_Y(aV)) = 0 \quad (i > 0, a \geq 0), \quad \mathcal{G} = f_*\mathcal{O}_S(E).$$

$E \geq 0$ と $a = 0$ での消滅が $Q(0) = h^0(Y, \mathcal{G}) > 0$ を保証する。 $Q(a) = \chi(Y, \mathcal{G}(aV))$ は非零多項式なので、ある $a > 0$ で切断が存在する。 s_H^a を掛け、 $\pi_*\mathcal{O}_S(E) = \mathcal{O}_W$ で押し戻すと $H^0(W, arP) \neq 0$ となる。最初のEuler仮定は非零で足り、正值を仮定していない。

Lemma 2.6; proof of Theorem 1.1 · pp. 11–12 [Fuj16, Theorem 1.3, p. 2]

3. Theorem 1.2 の証明 — 自然線形化を保つ商

証明対象：Theorem 1.2 · p. 2

証明の道筋。補助 ample 線形化で完全な安定商を選ぶが、降下するのは元の自然反標準束である。軌道上限計量を有界にし、Theorem 1.1の切断を全ての欠落因子を越えて延長する。



安定商の有界計量から自然不変切断へ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 補助GIT線形化と自然反標準束を分ける

作用の有効像へ移り、滑らかな計量を極大コンパクト部分群で平均する。自然反標準重みの一般点での正値性と有限個の重みパターンを使い、 $L + \delta J$ の小さな指標移動に対する非空のstable=semistable locus U を選ぶ。 $W = U/T$ は射影的で、有限stabilizer sliceから $\mathbb{Q}$ -factorial klt対と境界

$D = \sum (1 - 1/e_B)B$ を得る。トーラスの随伴表現が自明なので軌道接方向の行列式に指標は現れず、 $L|_U = q^*P$ は自然な同変 $\mathbb{Q}$ 線束の同型となる。補助指標を L へ移してはいけない。

Propositions 3.2–3.3 · pp. 13–14 Remark 3.6 · p. 18

2. 軌道上限の有界性を先に証明する

U 上の弱重み不等式を、代数弧に沿う移動持上げの位数へ変換する。位数の凸性と原点近傍の重み計算から極がないと分かる。作用グラフのコンパクト化と曲線選択により、この弧ごとの結論を局所一様ノルム上界へ強める。そこで初めて、軌道上のノルムの上限で商計量を定義できる。負の対数は指数写像上で虚方向に依らないpsh関数の下限であり、Kiselman原理でpshとなる。slice上の上下界、有限商での円板判定、解消への引戻しにより局所有界性を保つ。曲線への制限は P のnef性も与える。

Lemma 3.4 · pp. 15–16 Proposition 3.5 · pp. 16–17 [DWZZ19, Theorem 1.1, p. 1]

3. Euler仮定と延長で不変非消滅を得る

Z の有理連結性から商の滑らかな解消にも $\chi(\mathcal{O}) = 1$ が従う。Theorem 1.1で mP の非零切断を得て、同変同型の分母を消す冪を取る。射影的な W 上の切断は有界な商計量で大域有界だから、軌道上限の定義により引戻しも U 全体で有界である。上階の滑らかな計量に対する係数の除去可能性で、 $Z \setminus U$ の因子を含む全域へ延長する。不変性は稠密開集合上の一致から保たれる。自明作用・点の商も原稿で別途処理される。

§3.5; proof of Theorem 1.2 · pp. 17–18

4. Corollary 4.1 の証明 — monodromy と norm

証明対象：Corollary 4.1 · p. 18

証明の道筋。 有限étale被覆の普遍被覆を分解し、有理連結因子の自然不変切断をdeck作用に沿って降下させ、最後に有限被覆のnormを取る。

有限被覆で monodromy を保持

$$\tilde{X} = \mathbb{C}^q \times B \times Z, \quad K_B \simeq \mathcal{O}_B$$

不変な標準枠とトーラス不変性で deck 作用を消す
[\[OpenAI26a, Theorem 2.1, p. 5\]](#) [Theorem 1.2 · p. 2](#)

自然不変切断を降下

$$0 \neq s_Z \in H^0(Z, -mK_Z)^T \implies 0 \neq s \in H^0(X', -mK_{X'})$$

各 sheet 上の切断を積にし、非零切断を保つ
[\[OpenAI26a, Lemma 2.2, p. 8\]](#) [Corollary 4.1 · p. 18](#)

有限 étale norm を取る

$$d = \deg(X'/X), \quad 0 \neq \text{Nm}(s) \in H^0(X, -mdK_X)$$

残留トーラス monodromy を処理し有限 norm で元の多様体へ戻す

図を拡大 ↗ TeX ソース ↓

1. 不変な標準枠と切断をテンソルする

同伴原稿の構造定理は、有限 étale 被覆 $X' \rightarrow X$ の普遍被覆を $\mathbb{C}^q \times B \times Z$ とし、前二因子の不変標準枠と、 Z 上の代数的トーラスに含まれる残留 monodromy を保持する。Theorem 1.2 の切断を前二因子の反標準枠とテンソルすれば deck 不変となり、 X' 上へ降りる。有限被覆自体が直積とは主張しない。

[\[OpenAI26a, Theorem 2.1, p. 5\]](#) [Theorem 1.2 · p. 2](#)

2. 正の指数を被覆次数倍にして戻す

$d = \deg(X'/X)$ とすると有限 étale norm は非零切断を $H^0(X, -mdK_X)$ へ送る。したがって元の X である正の指数の非消滅が得られる。同伴原稿から入力するのは独立な構造定理と norm 補題であり、その非消滅主定理を再び仮定する循環ではない。

[\[OpenAI26a, Lemma 2.2, p. 8\]](#) [Corollary 4.1 · p. 18](#)

5. どの論文が、どの段階を担うか

入力

DPS01・LMPTX23

利用箇所

Lemma 2.1、pp. 5–6

使用内容・確認範囲

hard Lefschetzと飽和cotangent tensor部分層の負のChern類。入力の記述と適用仮定を直接照合。

入力

PT14

利用箇所

Proposition 2.5、pp. 9–11

使用内容・確認範囲

trivial multiplier idealとrank oneの下で積分計量を正にする。外部定理の記述を照合、証明全体は対象外。

入力

Fuj16

利用箇所

Theorem 1.1の証明、pp. 11–12

使用内容・確認範囲

正曲率下の随伴直像消滅を $a = 0$ にも適用。記述と相殺後の束を照合。

入力

DWZZ19

利用箇所

Proposition 3.5、pp. 16–17

使用内容・確認範囲

tube fiber上の下限のpsh性。有界性は別のLemma 3.4から供給。

入力

Anticanonical nonvanishing from smooth semipositivity

利用箇所

Corollary 4.1、p. 18

使用内容・確認範囲

Theorem 2.1の自然monodromyとLemma 2.2のnorm。帰結への入力であり、主定理への依存ではない。

6. 原典を読む入口と確認範囲

- Lemma 2.1 · pp. 5–6 — Euler仮定から無限個の捻り微分形式を得る。
- Lemmas 2.2–2.3 · pp. 7–8 — 底の極大性と成分を欠く有効余項。
- Lemma 2.4; Proposition 2.5 · pp. 9–11 — 連続性を仮定せず積分を本質的上限へ移す。
- Lemma 2.6; proof of Theorem 1.1 · pp. 11–12 — 零捻りでEuler多項式を非零にする。
- Lemma 3.4 · pp. 15–16 — 非有極性を局所一様有界性へ強める。
- Corollary 4.1 · p. 18 — 残留monodromyに対する不変性を用いる。

編集側では主要結果の仮定・量化と、§§2–4 (pp. 5–18) の証明本文を読解した。上記5件の解析・cotangent入力および同伴原稿の構造・normの記述と使用箇所を照合した。局所有界性と連続性、零捻りの役割、自然線形化と補助指標を区別している。

外部結果の証明全体の独立検証は行っていない。GIT・Luna slice・有限写像のdiscrepancy公式、Skodaの基礎文献とpsh延長定理は、本稿内の使用内容を読んだ範囲に留まり原典文献での直接照合は未了である。これは著者の論証の概説と接続の照合であり、全証明の正しさの認定や専門家査読ではない。

Cohomological transfer and equivariant anticanonical sections

指標を保って固定誤差を除き、不変切断をmonodromyに沿って降下させる

滑らかな半正反標準束に対し、固定された負の擬有効誤差を持つ不変切断から、誤差のない正の次数の不変切断を作る。主定理では反標準束の任意の線形化を許す。自然線形化を必要とするのは、後に不変指数からこの入力を提供する段階である。本記事は著者が最短経路とする§§2–4と§14.1を中心に、主定理と滑らかな非消滅の帰結を説明する。

原稿の著者: OpenAI · September 26, 2026 · 43 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#)

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 不変切断の移送

X を滑らかな連結複素射影多様体とし、 $L = -K_X$ が滑らかな半正計量を持つとする。代数的トーラス T が X に作用する。 P, M を線形化された線束とし、通常の線束として $P = L$ 、 $-M$ は擬有効とする。 P の線形化は自然線形化と異なってよい。非有界な集合 $I \subset \mathbb{Z}_{>0}$ について

$$0 \neq s_i \in H^0(X, M + iP)^T \quad (i \in I)$$

が存在するとき、ある整数 $m > 0$ について $H^0(X, mP)^T \neq 0$ である。Euler特性や $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ の消滅は仮定しない。

Theorem 1.1 · p. 2

Corollary 1.2 — 滑らかな半正反標準束の非消滅

滑らかな連結複素射影多様体 X で $-K_X$ が滑らかな半正計量を持つなら、ある整数 $m > 0$ について $H^0(X, -mK_X) \neq 0$ である。指数の一樣上界や第一冪の非消滅は主張していない。

Corollary 1.2 · p. 2

Theorem 7.2 — kernel条件による高次直像の消滅

$f : V \rightarrow Y$ を滑らかな連結射影複素多様体の間の全射とする。 D_V は滑らかな半正Hermitian計量を持つ線束、その曲率を θ とする。 Y 上の線束 Q には、局所重みが psh である正定値連続 Hermitian 計量があると仮定する。submersion locus の空でない通常開集合上で

$$\ker \theta \subseteq \ker df$$

ならば、すべての整数 $k, q \geq 0$ と $p > 0$ について

$$H^p(Y, R^q f_*(K_V + D_V) \otimes Q^k) = 0.$$

$k = 0$ も含む。 Q の重みは連続でよく、 D_V の係数計量には滑らかさを要求する。kernel 条件は nef 性のみから導かれるものではない。

Theorem 7.2 · pp. 17–19

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Cohomological transfer and equivariant anticanonical sections](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [DPS01](#) Jean-Pierre Demailly; Thomas Peternell; Michael Schneider — Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds : 自然同変 hard Lefschetz から無限個の捻り形式を得る。arXiv:math/0006205v2, 10 October 2000。
- [LMPTX23](#) Vladimir Lazić; Shin-ichi Matsumura; Thomas Peternell; Nikolaos Tsakanikas; Zhixin Xie — The Nonvanishing Problem for varieties with nef anticanonical bundle : 行列式の逆を擬有効とする。Documenta Mathematica 28 (2023), 1393–1440。
- [PT14](#) Mihai Păun; Shigeharu Takayama — Positivity of twisted relative pluricanonical bundles and their direct images : 特異係数の随伴直像計量と不変商の正值性。arXiv:1409.5504v1。
- [OpenAI26a](#) OpenAI — Anticanonical nonvanishing from smooth semipositivity : 残留 monodromy を保持した有限被覆構造と有限 étale norm。2026-09-26; commit fd4aeeb2ee4fc729c18d98444fed42fd0529eeeb。
- [Ber09](#) Bo Berndtsson — Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations : 滑らかな係数の随伴積分と不変直交商に半正性を与える。Annals of Mathematics 169 (2009), 531–560。
- [Dem09](#) Jean-Pierre Demailly — Analytic methods in algebraic geometry : §3 の Nadel 消滅入力を定理記述で照合する補助参照。December 2009 lecture notes, 180-page version; distinct from the July 2011 book cited in the manuscript。
- [OpenAI26b](#) OpenAI — Invariant anticanonical indices and conversion of twisted differentials : 自然反標準指数の実際の零値を含む多項式性。2026-09-26; commit fd4aeeb2ee4fc729c18d98444fed42fd0529eeeb。

- [Fujisawa15](#) Taro Fujisawa — A remark on the decomposition theorem for direct images of canonical sheaves tensorized with semipositive vector bundles : smooth Nakano半正係数の導来分解。
arXiv:1512.03887v1; arXiv header 12 December 2015 (PDF internal date June 27, 2021)。
- [Dem12](#) Jean-Pierre Demailly — Complex Analytic and Differential Geometry : Richbergの一樣平滑化と小さい曲率誤差。21 June 2012; 455-page author PDF。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 の証明 — 固定イデアルでの移送

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · p. 2

証明の道筋。 指標込みで次数の等しい切断比が作る共通体から底を選ぶ。水平次数のアフィン性と縦成分の最小値で正則な相対切断を作り、全非負次数の不変随伴直像をrank oneにする。最大値計量は変化する捻りを担当し、別の特異計量は底方向の正值性と零次数の非零Euler値を担当する。自然指数からの入力は[Corollary 4.3](#)、一般の X への降下は[Corollary 1.2](#)で扱う。

指定指標を持つ無限個の入力

$$0 \neq s_i \in H^0(X, M + iP)^T, \quad -M \in \overline{\text{Eff}}(X)$$

水平次数のアフィン性と縦係数の最小値

[§3, common ratio field and relative section · pp. 8–9](#) [§3, equation \(6\) · p. 9](#)

比の共通体と正規化した相対切断

$$\gamma : f^*(kB) \longrightarrow kP', \quad \text{rank}(f_*\mathcal{O}_V(E + jkP'))^T = 1$$

連続な最大値計量と特異な零次数積分を分ける

[Proposition 2.2 · pp. 6–8](#) [§3, equations \(7\)–\(8\) · pp. 9–10](#)

二つの計量と固定イデアル

$$kB : \text{continuous}, \quad -K_Y + D_* : \Theta \geq \delta\omega_Y, \quad \mathcal{O}_Y(-D_*) \subseteq \mathcal{I}$$

イデアルを固定して Nadel 消滅、例外補正を除く

[§3, equation \(9\) and interpolation · p. 10](#) [\[Dem09, Theorem 5.11, p. 38\]](#)

零捻りから正の不変切断へ

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{O}_Y(D_*) \otimes \mathcal{I}, \quad \chi(\mathcal{F}) = h^0(\mathcal{F}) > 0 \\ \implies H^0(X, jkP)^T &\neq 0 \quad (j > 0) \end{aligned}$$

指定線形化の切断から二つの計量と固定イデアルを経て誤差を除く

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 切断比の共通体から相対切断を作る

$N_i = M + iP$ と置く。 $p < q < b$ に対する $(b-p)N_q = (b-q)N_p + (q-p)N_b$ は線形化も保持する。同じ固定切断を分子・分母に掛けると、内側の指数に対応する不変切断比の体は共通になる。独立な比から射影的な底を作り、Stein分解でその関数体を $\mathbb{C}(X)$ 内の相対代数閉包にする。 T はこの底に自明に作用する。

正規等次元モデル $\mu : W \rightarrow X$ 、 $f_W : W \rightarrow Y$ と滑らかな解消 $\pi : V \rightarrow X$ 、 $f : V \rightarrow Y$ を取る。比が底関数であることから切断因子の水平部分は指数に関してアフィンとなり、非有界性はその傾きを有効にする。縦成分の係数／引戻し多重度の最小値を引き、分母を消すと

$$\gamma \in H^0(W, k\mu^*P - f_W^*(kB))^T, \quad k > 0$$

を得る。各底素因子の上で少なくとも一つの成分は γ の零因子に含まれない。比の体の超越次数が0なら、傾きが直接正則不変反標準切断を与えて終了する。

[§3, common ratio field and relative section · pp. 8–9](#)

2. 零次数を含む不変rank oneを確保する

$E = K_{V/X} \geq 0$ には自然な不変Jacobian切断がある。 $P' = \pi^*P$ の指標がずれても、このJacobianの自然作用は変えない。全 $j \geq 0$ で

$$\text{rank}(f_*\mathcal{O}_V(E + jkP'))^T = 1$$

となる。下界は $1_E\gamma^j$ から来る。二つの独立な不変切断があれば底のample捻りで大域化し、入力 s_i と γ の冪を掛けて同じ N_b の倍数の不変切断比を得る。共通体の構成からその比は底関数でなければならず、一般ファイバー上の独立性と矛盾する。ここで $j = 0$ を除かない。

§3, equation (6) · p. 9

3. 変化する捻りと零次数のために計量を分ける

Proposition 2.2から kB には連続半正計量がある。これとは別に、 $-M$ の擬有効性と底のample支配から $L' = \pi^*L$ に

$$i\Theta_h \geq \delta f^*\omega_Y, \quad \mathcal{I}(h) = \mathcal{O}_V \quad (\delta > 0)$$

を満たす特異計量を作る。滑らかな計量との小量混合にSkodaの可積分性を用いる。

零次数の随伴積分を不変な正則直交商へ移して、 $-K_Y$ 上の密度 F_ξ を得る。これは底全体で局所可積分である。境界素因子上で引戻し多重度を ℓ 、Jacobianの位数を a とすると、局所計算は $F_\xi(y) \geq c|y_1|^{2((a+1)/\ell-1)}$ を与える。この評価に基づく補正 $D_* \geq 0$ を加えて、 $-K_Y + D_*$ 上の計量を延長する。補正の支持は全ての支配成分が例外的な底因子に限定される。さらに等次元モデルの次元評価で底の余次元2以上へ落ちる成分も例外的と確認し、 f^*D_* 全体が X 上例外的となる。

§3, equations (7)–(8) · pp. 9–10 [PT14, Theorems 3.3.4–3.3.5, p. 24]

4. 自明とは限らない同じ乗数イデアルを保つ

延長計量の乗数イデアルを $\mathcal{J}$ とする。密度 F_ξ の局所可積分性から

$$\mathcal{O}_Y(-D_*) \subseteq \mathcal{J}$$

であり、 $\mathcal{J} = \mathcal{O}_Y$ とは仮定しない。 jkB の有界計量をテンソルしてもイデアルは変わらず、全 $j \geq 0$ でNadel消滅が

$$H^v(Y, \mathcal{O}_Y(D_* + jkB) \otimes \mathcal{J}) = 0 \quad (v > 0)$$

を与える。 $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y(D_*) \otimes \mathcal{J}$ は $\mathcal{O}_Y$ を含むので、 $\chi(Y, \mathcal{F}) = h^0(Y, \mathcal{F}) > 0$ である。Euler多項式は零多項式でなく、ある $j > 0$ の切断を与える。引戻して γ^j を掛け、例外補正 f^*D_* を除いて X へ押し戻すと、指定した線形化の jkP の不変切断が残る。

§3, equation (9) and interpolation · p. 10 [Dem09, Theorem 5.11, p. 38]

3. Proposition 2.2 の証明 — 正の連続最大値計量

証明対象 : Proposition 2.2 · pp. 6–8

Proposition 2.2 — 因子的正規化と最大値計量

X, Y を滑らかな連結射影多様体、 $L = -K_X$ を滑らかな半正計量を持つ線束とする。

$V \xrightarrow{\nu} W \xrightarrow{\mu} X$ 、 $g : W \rightarrow Y$ 、 $f = g\nu$ で、 W は正規、 g は射影的全射かつ等次元、 μ は双有理、 V は滑らかな射影的解消とする。 $D_V = (\mu\nu)^*L$ 、 $E = K_{V/X}$ とする。水平極を持たない $b\mu^*L$ の非零有理切断 s ($b > 0$) が、全 $k \geq 0$ で

$$H^0(V_\eta, E + kbD_V) = \mathbb{C}(Y)s_E s^k$$

を満たすとする。すると b, s を倍数・冪で置き換えた後、底の線束 Q と正則な注入 $g^*Q \rightarrow b\mu^*L$ があり、ファイバー上のノルムの最大値は Q に正の連続半正計量を与える。

同変版では、 T が図式に作用し底に自明に作用するものとし、 P は任意に線形化した L 、 s は $b\mu^*P$ の不変有理切断とする。rank 条件を $H^0(V_\eta, E + kbP_V)^T = \mathbb{C}(Y)s_E s^k$ へ替えてよい。このとき Q の作用は自明で、 $g^*Q \rightarrow b\mu^*P$ は同変である。

Proposition 2.2 · pp. 6–8

正規等次元モデル上の相対切断

s has no horizontal poles, $H^0(V_\eta, E + kbP_V)^T = \mathbb{C}(Y)s_E s^k$

縦次数の最小値を引き、正規性で正則性を得る
[Proposition 2.2 · pp. 6–8](#)

全ての底因子で非零成分を残す

$g^*Q \hookrightarrow b\mu^*P$, $M_e(y) = \max_{x \in W_y} |s_e(x)|^2$

不変部分を直交商として扱い、積分の冪根を取る
[\[Ber09, Theorem 1.2, 誌面 p. 533 / PDF p. 3\]](#) [Proposition 2.2 · pp. 6–8](#)

連続な最大値を psh 計量へ

$-k^{-1} \log \int_{V_y} |s_e|^{2k} d\mu_y \longrightarrow -\log M_e(y)$

余次元 2 の零集合を円板の最大値原理で排除
[Proposition 2.2 · pp. 6–8](#)

正の連続最大値と同変な注入

$M_e > 0$ on Y , h_Q continuous and semipositive

正規等次元性と不変直交商を使い連続最大値を正のpsh計量にする

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 正規化と等次元性で連続性を得る

各底素因子上で s の最小正規化位数を引き、分母を消して Q と注入を作る。零因子は各底素因子上の少なくとも一成分を欠く。局所枠 e の像を s_e とすると、 $M_e(y) = \max_{W_y} |s_e|^2$ は properness から上半連続、正規等次元写像の開性から下半連続である。消える底点の集合は代数的閉で、成分を欠く性質により余次元 2 以上となる。 $k = 0$ の rank 条件は一般ファイバーの連結性にも使う。

[Proposition 2.2 · pp. 6–8](#)

2. 不変部分を正則直交商として扱う

滑らかな随伴係数 $(kb + 1)D_V$ に Berndtsson の定理を適用する。不変直像は一般の部分線束として正にするのではなく、compact 平均で unitary な作用を得て、非零重み部分の直交補に対応する正則な商として扱う。その rank one 積分の正規化は

$$-\frac{1}{k} \log \int_{V_y} |s_e|^{2k} d\mu_y \longrightarrow -\log M_e(y).$$

滑らかな一般ファイバー上で μ_y は全台を持ち、局所一様収束が成り立つ。したがって最大値の負対数は psh となる。

[Ber09, Theorem 1.2, 誌面 p. 533 / PDF p. 3] Proposition 2.2 · pp. 6–8

3. 余次元2の零を排除し、全結論を得る

$M_e > 0$ の範囲へ連続性を用いて psh 延長する。残る余次元2以上の零集合に対して、境界が零集合を避ける円板とその平行移動に最大値原理を適用する。これが $-\log M_e$ の一様上界を与え、連続な M_e が0へ近づく可能性を排除する。従って M_e は全ての点で正で、枠変換則は Q の連続半正計量を定める。縦因子と相対切断の不変性により、同変版の注入と底の自明作用も保持される。

Proposition 2.2 · pp. 6–8

4. Corollary 4.3 の証明 — 自然指数から入力を作る

証明対象：Corollary 4.3 · pp. 11–12

Corollary 4.3 — 自然不変非消滅

X を滑らかな連結複素射影多様体、 $L = -K_X$ を滑らかな半正計量を持つ線束とする。代数的トーラス T が X に作用し、 $\chi(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ なら、自然線形化について、ある整数 $m > 0$ で $H^0(X, mL)^T \neq 0$ である。

自明なトーラスも含む。

Corollary 4.3 · pp. 11–12

自然指数の実際の零値

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) \neq 0, \quad I_T(am) = R(m), \quad R(0) = \chi(X, \mathcal{O}_X)$$

指数の非零多項式と同変 hard Lefschetz

[OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 1] [DPS01, Corollary 2.1.2, p. 8]

不変微分形式と固定行列式

$$\alpha_m \in H^0(X, \Omega_X^{n-q} \otimes L^{m+1})^T, \quad M \hookrightarrow \bigwedge^e \Omega_X^{n-q}$$

逆行列式の擬有効性を確認し、固定誤差を除く

[LMPTX23, Theorem 4.1, 誌面 p. 1409 / PDF p. 17] Theorem 1.1 · p. 2

自然不変な正の反標準切断

$$-M \in \overline{\text{Eff}}(X), \quad s_i \in H^0(X, M + a_i L)^T \implies H^0(X, mL)^T \neq 0$$

自然指数の実際の零値からhard Lefschetzと行列式で移送の入力へ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 実際の零値を持つ指数多項式を使う

連結トーラスは恒等写像とホモトピックに作用するので、Hodge分解を通して $H^q(X, \mathcal{O}_X)$ に自明に作用する。従って自然不変指数の零値は $\chi(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ である。同伴原稿の指数定理は、十分可除な進行上の多項式にこの実際の零値を対応させる。単に十分大きな指数で多項式というだけでは零多項式を排除できない。非零コホモロジーの次数を部分列で固定し、 $mL = K_X + (m+1)L$ に同変hard Lefschetzを適用して不変捻り微分形式を得る。

[OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 1] Proposition 4.1; Lemma 4.2 · pp. 10–11 [DPS01, Corollary 2.1.2, p. 8]

2. 行列式の固定誤差をTheorem 1.1で除く

$q = 0$ または $q = n$ なら既に正の反標準切断がある。それ以外は微分形式の一般点でのspanを取り、飽和した行列式線束 M を作る。大きな指数の形式を固定した補基底とwedgeすることで、非零かつ不変な $M + a_i L$ の切断を $a_i \rightarrow \infty$ で得る。cotangent tensor部分層の定理を滑らかな零境界対とnefな L へ適用して $-M$ を擬有効とし、自然線形化 $P = L$ でTheorem 1.1を適用する。

Corollary 4.3, proof · pp. 11–12 [LMPTX23, Theorem 4.1, 誌面 p. 1409 / PDF p. 17]

5. Corollary 1.2 の証明 — 不変切断の降下

証明対象：Corollary 1.2 · p. 2

証明の道筋。有限被覆構造は $\mathbb{C}^c \times V \times F$ の普遍被覆と残留compact torus作用を与える。 F に Corollary 4.3を適用し、不変標準枠を付けて降下させる。



compact monodromyに対する不変切断から有限normで元の X へ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. compact因子の切断を有限被覆へ降ろす

同伴原稿の構造定理により、有限étale被覆 $X' \rightarrow X$ のdeck作用はEuclidean因子上で平行移動、 V 上で自明、 F 上でcompact torus H を通る。 F では正次数の正則微分形式が消え、Hodge対称性から $\chi(F, \mathcal{O}_F) = 1$ である。 $\text{Pic}^0(F) = 0$ によりcompact作用をvery ample線束を通して代数化し、その代数的トーラス閉包の不変切断をCorollary 4.3で作る。不変標準枠とテンソルするとdeck不変になり X' へ降下する。 F が点の場合は定数切断を使う。

[OpenAI26a, Theorem 2.1, p. 5] Corollary 4.3 · pp. 11-12 §14.1, proof of Corollary 1.2 · p. 39

2. normにより元の X の切断を得る

$d = \deg(X'/X)$ の有限étale normは、得た切断を非零な $-mdK_X$ の切断へ送る。指数は共通冪や被覆次数で増加してよく、一様指数は結論に含まれない。構造定理の入力は有限被覆が直積であることを要求しない。また同伴原稿の非消滅主定理を入力としていない。

[OpenAI26a, Lemma 2.2, p. 8] §14.1, proof of Corollary 1.2 · p. 39

6. Theorem 7.2 の証明 — 連続捻りを通した調和的制限

証明対象：Theorem 7.2 · pp. 17–19

証明の道筋。連続な底計量を一様近似し、Bochnerエネルギーが消える極限を取る。kernel条件が極限形式に底の標準余接因子を強制するため、非零の類を一般ファイバー上で検出できる。このedge mapの単射と、滑らかな係数に対する導来分解を最後に組み合わせる。分解定理だけから消滅を結論しない。

底だけに連続性を許した随伴係数

$$A = D_V + k f^* Q, \quad k \geq 0, \quad \Theta_{D_V} = \theta \geq 0, \quad \ker \theta \subseteq \ker df$$

小さい負曲率を許し、弱極限で元の類を保つ

Lemma 7.1 · p. 17 [Dem12, Theorem I.5.21, pp. 43–44]

Theorem 7.2, equation (18) · p. 18

一様近似と零曲率エネルギーの極限

$$u_j \rightharpoonup u = \omega^\ell \wedge v, \quad v \text{ holomorphic}, \quad [\theta, \Lambda]u = 0, \quad \partial(hv) = 0$$

kernel 条件と正則性で底の wedge 因子を強制、垂直 Chern 方程式

Theorem 7.2, equations (19)–(21) · pp. 18–19

底の標準因子を外してファイバーで検出

$$v = f^*(dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_b) \wedge w, \quad \omega_y^\ell \wedge w_y \text{ harmonic}$$

$$H^\ell(V, K_V + A) \hookrightarrow H^0(Y, R^\ell f_*(K_V + D_V) \otimes Q^k)$$

滑らかな係数 D_V を分解後に Q^k を捻り、edge 単射と次元比較

[Fujisawa15, Theorem 1, p. 1] Theorem 7.2; Proposition 7.5 · pp. 19–20

分解の零列との比較で全消滅へ

$$h^\ell(V, K_V + A) = \sum_{p+q=\ell} h^p(Y, R^q f_*(K_V + D_V) \otimes Q^k)$$

$$\implies H^p(Y, R^q f_*(K_V + D_V) \otimes Q^k) = 0 \quad (k, q \geq 0, p > 0)$$

連続底計量の近似から高次直像消滅へ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 一様近似から曲率零方向の形式を残す

$k \geq 0$ を固定し、 $A = D_V + k f^* Q$ とする。Lemma 7.1のRichberg型近似は A 上の滑らかな計量 h_j を与え、 $h_j \rightarrow h$ は一様、 $\Theta_{h_j} \geq \theta - o(1)\omega$ となる。連続重みに小さい負曲率を許すことが重要であり、各近似計量が半正であるとは主張しない。固定した $H^\ell(V, K_V + A)$ の類の調和代表 u_j は一様 L^2 有界で、

Bochner–Kodaira恒等式から $\|(D'_j)^*u_j\|^2 + \langle [\theta, \Lambda]u_j, u_j \rangle \rightarrow 0$ を得る。 $v_j = *u_j$ の弱極限 v は正則で、 $u = \omega^\ell \wedge v$ が元の類を表す。固定参照計量の有限rank調和射影が、弱極限で同じ類を保持することを保証する。

Lemma 7.1 · p. 17 [Dem12, Theorem I.5.21, pp. 43–44] Theorem 7.2, equation (18) · p. 18

2. 分布的Chern方程式を一般ファイバーへ制限する

曲率commutatorの零エネルギーから、正曲率方向の正則余接形式はすべて v のwedge因子になる。kernel包含がある開集合上で底の余接形式も因子となり、正則性によりsmooth fibration locus全体で $v = f^*(dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_b) \wedge w$ となる。一方、 $D'_j v_j = 0$ を局所frameで $\partial(h_j v_j) = 0$ と書き、一様計量収束と弱 L^2 収束だけで $\partial(hv) = 0$ へ移す。計量の微分収束は使わない。

底の連続因子は垂直微分で一定なので、各smooth fiber上では滑らかな D_V 計量に対して $D'_{D_V|V_y} w_y = 0$ となる。ここで制限するのは $K_V + A$ に値を取る $(0, \ell)$ 形式である。定数因子 $K_Y|_y$ を外せば代表は $\omega_y^\ell \wedge w_y$ となり、これはファイバー上で調和的である。低次元ファイバーへの通常の (n, ℓ) 形式のpullbackと混同しない。非零類はある一般ファイバーで非零となり、Leray edge mapは単射となる。

Theorem 7.2, equations (19)–(21) · pp. 18–19

3. smooth係数の分解と次元比較で全量化を回収する

Fujisawaの定理はsmooth semipositive line D_V に適用する。lineの場合はNakano半正条件が曲率半正と一致し、 V のKähler性と f のproper surjectivityも満たされる。 $D_V + kf^*Q$ の連続計量にこの定理を直接適用するのではない。まず $Rf_*(K_V + D_V) \simeq \bigoplus_q R^q f_*(K_V + D_V)[-q]$ を得てから、底で Q^k をtensorする。projection formulaにより

$$h^\ell(V, K_V + D_V + kf^*Q) = \sum_{p+q=\ell} h^p(Y, R^q f_*(K_V + D_V) \otimes Q^k).$$

edge map単射は左辺を右辺の $p = 0$ 項以下に抑えるので、残りの全項は零となる。 $\ell > \dim V$ では左辺自体が零である。 k は任意の非負整数だったため、零捻りを含む全 $k, q \geq 0, p > 0$ を得る。この零捻りでの消滅が、後続Proposition 7.5のEuler補間に使われる。

[Fujisawa15, Theorem 1, p. 1] Theorem 7.2; Proposition 7.5 · pp. 19–20

7. どの論文が、どの段階を担うか

入力

Ber09

利用箇所

Proposition 2.2、p. 7

役割・確認範囲

滑らかな随伴積分の半正性。定理記述と不変直交商の使用を照合。

入力

PT14

利用箇所

§3、pp. 9–10

役割・確認範囲

特異な零次数係数の直像計量。generic multiplier-ideal同型と正則商を確認。

入力

Nadel消滅 (Dem09の記述で照合)

利用箇所

§3、p. 10

役割・確認範囲

正曲率を持つ $-K_Y + D_* + jkB$ 、固定 $\mathcal{J}$ 、全 $j \geq 0$ での消滅。元のNadel論文の全証明は未確認。

入力

Fujisawa15; Dem12

利用箇所

Theorem 7.2、pp.17–19

役割・確認範囲

一様平滑化とsmooth Nakano係数の導来分解。連続底捻りは分解後にtensorする。

入力

Invariant anticanonical indices and conversion of twisted differentials

利用箇所

Proposition 4.1 → Corollary 4.3、pp. 10–12

役割・確認範囲

Theorem 1.1の自然指数と実際の零値。Theorem 1.1の移送自体とは独立な入力。

入力

DPS01 · LMPTX23

利用箇所

Lemma 4.2 → Corollary 4.3、pp. 11–12

役割・確認範囲

$m + 1$ の微分形式と逆行列式の擬有効性。数値的非自明性は追加しない。

入力

Anticanonical nonvanishing from smooth semipositivity

利用箇所

§14.1、p. 39

役割・確認範囲

有限被覆構造とnormを帰結で使用。主定理の非消滅を再引用しない。

8. 原典を読む入口と確認範囲

- §3, common ratio field and relative section · pp. 8–9 — 指標を保持して比の共通体を作る。
- Proposition 2.2 · pp. 6–8 — 正規等次元モデル上の最大値計量。
- §3, equation (9) and interpolation · p. 10 — 自明とは限らない固定イデアルと零捻り。
- Corollary 4.3, proof · pp. 11–12 — 自然指数を移送定理の入力へ変える。
- §14.1, proof of Corollary 1.2 · p. 39 — 不変切断を降下させ有限normを取る。
- Theorem 7.2 · pp. 17–19 — 一様近似 · fiber detection · smooth係数の分解を区別する。
- §1.4 · pp. 4–5 — 本記事で詳説しない別経路の位置。

編集側ではTheorem 1.1 · Corollary 1.2の仮定と全結論、Proposition 2.2 · Corollary 4.3、§§2-4と§14.1の証明本文を読解した。入力原稿の自然指数 · 構造 · norm、および上記解析定理の記述と適用を照合した。Nadelの記述確認には2009年12月のDemailly講義ノートを使い、原稿が別箇所で挙げる2011年書籍とは区別している。

§§5-13のうち§7のLemma 7.1とTheorem 7.2は今回詳説した。残る別経路には正確なsource character、singular injectivity、curvature-null fieldのalteration、局所strictness、直像次数の安定化という別経路がある。本記事ではこれらを主定理に必要な前提とせず、証明の詳説 · 全接続の確認を対象外とした。§14.2-14.4のcohomology · 微分形式 · tensor holonomyによる別降下も同様である。外部証明の独立再検証と、flattening · 同変解消 · Skoda · psh延長の基礎文献の直接照合は未実施であり、専門家査読済みとはしない。

追加出力のうち、Theorem 5.2 (p.13) は正次数の正則形式がない場合、linearized ampleを持つtorus作用のgeneric cocharacterのsourceの**完全なT指標**を実際の切断で達成する。これは単なる不変非消滅より情報を残す。Theorem 11.1 (p.27) は固定 q でunbounded m の $H^q(X, mL) \neq 0$ を通常非消滅へ変換する別証明、Proposition 14.1 (p.41) はcompact · 単連結 · 非平坦 · de Rham既約の非負Ricci Kähler因子について、平行な正則体積形式か全正次数の共変tensor消滅かを与える追加結果である。これらは最短の移送 · 指数 · 降下経路の解説を優先するため、主張の位置と役割のみ紹介し、証明の詳説 · 直接入力 of 照合は今回の範囲外とする。

Theorem 5.2 · p. 13 Theorem 11.1 · p. 27 Proposition 14.1 · p. 41

Metric descent and rank-preserving contractions

零次随伴rank、二つの計量、縮約後の切断比

本原稿は、反標準計量を底へ降ろす操作と、得た切断を元の多様体へ戻す際の極の制御を扱う。主要な出力は、非加重可積分な底の計量、一般ファイバー上の切断と随伴rankを保つ縮約、許容境界上だけに極を持つ非消滅、自然なトーラス不変切断である。以下ではTheorems 2.1, 4.1, 6.1, 7.1を原典順に取り上げる。

原稿の著者: OpenAI · September 26, 2026 · 76 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 2.1 — Toroidalな体積計量

X, Y を滑らかな連結射影複素多様体、 $d = \dim Y > 0$ とし、 $L = -K_X$ が滑らかな半正値Hermitian計量 h 、曲率 α を持つとする。 W を正規整多様体とし、射影射 $p: W \rightarrow X$ は双有理、 $f: W \rightarrow Y$ は全射・同次元でstrict toroidal embeddingsに関してtoroidalであるとする。滑らかな射影解消 $\rho: Z \rightarrow W$ について $\pi = p\rho$, $g = f\rho$, $E_Z = K_{Z/X}$ と置き、全直像について $\mathrm{rk} g_* \mathcal{O}_Z(E_Z) = 1$ を仮定する。

底の素因子 Q とそれを支配する W の素因子 E に対し、 $a_E = \mathrm{ord}_E K_{W/X}$, $e_E = \mathrm{ord}_E f^* Q$ と置く。すると

$$a_Q = \max \left\{ 0, \min_{f(E)=Q} \left(\frac{1 + a_E}{e_E} - 1 \right) \right\}, \quad A_0 = \sum_Q a_Q Q$$

は有限台を持つ有効有理因子で、 $f^* A_0$ は p -例外的である。 $-K_Y + A_0$ は半正値特異Hermitian計量を持ち、その局所枠の二乗ノルムは因子による重みを掛けずに局所可積分であり、計量は非空Zariski開集合上で滑らかである。

さらに g が滑らかで随伴直像のbase changeが成り立つ非空Zariski開集合 $U \subset Y$ を取る。ある非空通常開集合 $V \subset g^{-1}(U) \setminus \text{Supp } E_Z$ 、Kähler形式 ω_Y 、 $c > 0$ について $\pi^*\alpha \geq cg^*\omega_Y$ が V 上で成り立てば、構成した計量は Y の非空通常開集合上で曲率が狭義正となる。これは大域的なKähler下界ではない。

Theorem 2.1 · p. 7

Theorem 4.1 — 切断とrankを保つ縮約

X を滑らかな連結射影複素多様体で $H^0(X, \Omega_X^q) = 0$ (すべての $q > 0$) を満たすものとし、 $L = -K_X$ が滑らかな半正値計量を持つとする。代数的トーラス T の作用と L の自然線形化を考える。 $f: X \dashrightarrow Z$ は滑らかな連結射影多様体への支配的 T -不変有理写像で、 $\mathbb{C}(Z)$ は $\mathbb{C}(X)$ 内で相対代数閉とする。解消 $\pi: Y \rightarrow X$, $f_Y: Y \rightarrow Z$, $L_Y = \pi^*L$, $E_Y = K_{Y/X}$, $\eta = \text{Spec } \mathbb{C}(Z)$ に對し、

$$H^0(Y_\eta, pL_Y|_{Y_\eta})^T \neq 0 \quad \text{for some } p > 0,$$

かつ、ある $a > 0$ のすべての正の倍数 m について

$$\dim_{\mathbb{C}(Z)} H^0(Y_\eta, (E_Y + mL_Y)|_{Y_\eta})^T = 1$$

と仮定する。すると、ある $r > 0$ について $H^0(X, rL)^T \neq 0$ であるか、 $Z \dashrightarrow W$ という支配的有理写像が存在する。後者では W は滑らかな連結射影多様体、 $\dim W < \dim Z$ で、 $X \dashrightarrow W$ は同じ二条件を満たし（整数は変わってよい）、 $\mathbb{C}(W)$ も $\mathbb{C}(X)$ 内で相対代数閉である。

Theorem 4.1 · p. 16

Theorem 6.1 — 許された極の台を持つ非消滅

V を滑らかな連結射影複素多様体で $H^0(V, \Omega_V^j) = 0$ (すべての $j > 0$) とする。 $D \geq 0$ は整因子、 $A = -K_V + D$ は半正値特異計量 h_A を持ち、標準切断 s_D を A 値最高次形式とみた測度 $|s_D|_{h_A}^2$ の全質量が有限であるとする。線束 L が局所有界な重みを持つ半正値計量を持てば、

$$H^0(V, aL + cD) \neq 0 \quad \text{for some integers } a > 0, c \geq 0.$$

有理線束 L についても a で分母を払えば同じ結論が成り立つ。 L はこの定理では反標準束に限定されない。

Theorem 6.1 · p. 34

Theorem 7.1 — 自然線形化での不変反標準切断

V を滑らかな連結射影複素多様体で $H^0(V, \Omega_V^j) = 0$ (すべての $j > 0$) とし、 $-K_V$ が滑らかな半正値Hermitian計量を持つとする。 V に作用する各代数的トーラス T に対して、ある整数 $m > 0$ が存在し、自然な反標準作用について

$$H^0(V, -mK_V)^T \neq 0$$

となる。 $m = 1$ や、指標で捻った任意の線形化の不変切断を主張しているわけではない。

Theorem 7.1 · p. 38

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Metric descent and rank-preserving contractions](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [Ber09](#) Bo Berndtsson — Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations : 滑らかな直像の半正値性と曲率式。全直像rank 1、または直交商となる不変部分に適用。arXiv:math/0511225v2, 20 August 2007。
- [DPS01](#) Jean-Pierre Demailly; Thomas Peternell; Michael Schneider — Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds : 有界計量の全幕で乗数イデアルが自明なことを使い、非零コホモロジーを捻った形式へ送る。arXiv:math/0006205v2, 10 October 2000。
- [CP19](#) Frédéric Campana; Mihai Păun — Foliations with positive slopes and birational stability of orbifold cotangent bundles : 符号付き境界を直接代入せず、正の境界とample摂動に対するorbifold商の傾き非負性を使う。Publications Mathématiques de l’IHÉS 129 (2019), 1–49。
- [HPS](#) Christopher D. Hacon; Mihnea Popa; Christian Schnell — Algebraic fiber spaces over abelian varieties: around a recent theorem by Cao and Păun : 実際の乗数イデアルを含む直像の計量。有限積分の生成元がrank 1直像を生成することを確認して使う。Author-hosted 53-page manuscript, retrieved 12 October 2026。
- [PT14](#) Mihai Păun; Shigeharu Takayama — Positivity of twisted relative pluricanonical bundles and their direct images : HPSの定式化の基礎となる特異L2直像計量。generic multiplier-ideal inclusionの同型条件も照合。arXiv:1409.5504v1, 19 September 2014。
- [Ou23](#) Wenhao Ou — On generic nefness of tangent sheaves : Druelの相対擬有効性の定式化と葉層の代数性。有限体積からの余接傾き評価で使用する。arXiv:1703.03175v4。
- [BDPP13](#) Sébastien Boucksom; Jean-Pierre Demailly; Mihai Păun; Thomas Peternell — The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension : 非bigな擬有効因子を消すmovable曲線類を選ぶ錐双対性。arXiv:math/0405285v1, 14 May 2004。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 4.1 — 主定理の証明概略

証明対象：Theorem 4.1 · p. 16

証明の道筋。 計量の降下と切断の降下を分け、後者では「存在」だけでなく、次の縮約で再び使える随伴rankまで回復する。原稿全体には並行する経路があり、Theorem 7.1はTheorem 6.1と二計量移送から従い、Theorem 4.1を必要としない。



計量降下、rank保存、許容極、不変切断の接続

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 二種類の底計量と二つの出口

Theorem 2.1は全零次随伴rankが1のとき、明示的な A_0 を用いて $-K_Y + A_0$ 上に非加重可積分な計量を作る。一方Lemmas 3.1-3.2は、有限体積を与える線束と切断を探す有界計量の線束を別々に降ろす。Theorem 4.1ではこの移送の滑らかな不変版を使い、支持movable類を消す因子の比から小さい底を選ぶ。Theorem 6.1では通常の特異版を使って次元帰納法を閉じる。両者のrank仮定を混同しない。

Lemmas 3.1-3.2 · pp. 12-15

2. 非消滅への経路

Theorem 7.1の商の一般ファイバーでは、作用の無限小ベクトル場の外積が不変切断を与え、不変な切断比は商の函数体へ降りる。これが零次を含む不変随伴rank 1を供給する。移送後の底にTheorem 6.1を適用し、元の許容境界が $D = 0$ であることから極が残らない。この経路は縮約定理の条件を無条件に仮定するものではない。

§7.1 · pp. 38–39

3. Theorem 2.1 の証明 — 曲率と非加重可積分性

証明対象：Theorem 2.1 · p. 7

主張は冒頭のTheorem 2.1を参照する。モデル W の同次元性は仮定であり、滑らかな解消 Z にも同次元性を要求してはいない。

零次の全随伴 rank を固定

$$\mathrm{rk} \, g_* \mathcal{O}_Z(K_{Z/X}) = 1, \quad L = -K_X$$

Jacobian 生成元が全直像を生成し、滑らかな直像正値性を適用

[\[Ber09, Theorem 1.2, p. 3\]](#)

積分密度を直像ノルムにする

$$g_* \pi^* \Omega_h = H \, dV_y, \quad -\log H \text{ psh}$$

分岐次数で補正を選び、full toroidal boundary で sub-klt を示す

[Lemma 2.2 · pp. 8–9](#)

全 valuation で補正を制御

$$A_0 = \sum_Q \max\{0, \min_{E \mapsto Q} ((1 + a_E)/e_E - 1)\} Q$$

$$f^* A_0 \text{ exceptional}, \quad \gamma_F > -1$$

密度の下界で psh 延長、指数の下界で積分を制御

[§§2.2–2.3; \(2.7\)–\(2.11\) · pp. 9–11](#)

非加重可積分な半正値計量

$$\Phi = -\log H + \sum_Q a_Q \log |t_Q|^2, \quad e^{-\Phi} \in L^1_{\mathrm{loc}}$$

追加の patch 下界から通常開集合上の狭義正値性

全零次rankとtoroidal次数から非加重可積分な計量を得る

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 例外台とすべてのvaluation

$a_Q > 0$ なら Q 上のすべての素因子は $a_E > 0$ で、 X 上例外的である。同次元性により垂直素因子は底の素因子を支配するため、補正の台が高次元の影に隠れない。 $\Theta = -K_{W/X} + f^* A_0 \leq 0$ と置き、full toroidal boundaryを D_W とする。 $B = D_W - \Theta$ は D_W を含む有効有理Cartier因子で、

$$A_{W,\Theta}(v) = A_{W,D_W}(v) + v(B) > 0$$

が全divisorial valuationで成り立つ。これが境界の交点上の新しい例外因子も含め、

$\gamma_F = \mathrm{coeff}_F(K_{Z'/X} - (g')^* A_0) > -1$ を与える。元の W に見える因子だけの検査では足りない。

[Lemma 2.2 · pp. 8–9](#)

2. 積分密度を計量と同定して延長する

$g_*\pi^*\Omega_h = H(y)dV_y$ と置く。全直像のrank 1とJacobian切断が、滑らかな開集合上で $g_*(K_{Z/Y} + \pi^*L) \simeq -K_Y$ を与えるため、 H はその直像線束の L^2 ノルムになる。滑らかな直像正值性により $-\log H$ はpshである。任意の部分線束への制限を正值とした議論ではない。

補正後の重みは $\Phi = -\log H + \sum a_Q \log |t_Q|^2$ である。分岐次数からの密度の下界が Φ の局所上界を与え、psh延長を可能にする。他方

$$e^{-\Phi} dV_y = g'_* \left(\prod_Q |t_Q \circ g'|^{-2a_Q} (\pi')^* \Omega_h \right)$$

と全valuationの $\gamma_F > -1$ を使うと、右辺の被積分測度は局所的に有界な正因子と $\prod |z_j|^{2\gamma_j}$ の積になり可積分である。propernessから底の局所可積分性を得る。 s_{A_0} を掛けて有限にする結論ではなく、枠ノルム自体の有限性である。元の滑らかな開集合上では密度も滑らかである。

[Ber09, Theorem 1.2, p. 3]

§§2.2-2.3; (2.7)–(2.11) · pp. 9–11

3. 局所的な狭義正值性

追加仮定の開集合 V ではJacobian切断が非零である。Chern-normalな生成元の曲率式は、係数曲率を積分する項と非負のprimitive項に分かれる。 $\pi^*\alpha \geq cg^*\omega_Y$ の下界を、生成元が消えないこのpatch上で積分すれば、各底接方向に正の寄与が得られる。滑らかさにより通常開近傍で狭義正となる。補正が消える開集合で行う議論なので、ここから大域的strict positivityは出ない。

[Ber09, Proposition 4.2; (4.8), pp. 14, 17]

4. Theorem 4.1 の証明 — 縮約後のrankを復元する

証明対象：Theorem 4.1 · p. 16

主張は冒頭のTheorem 4.1を参照する。一般切断の存在と正の可除指数におけるrank 1は別の仮定であり、両方を使って零次rank 1を導く。

二つの一般ファイバー条件

$$H^0(Y_\eta, pL_Y)^T \neq 0, \quad h^0(Y_\eta, E_Y + mL_Y)^T = 1$$

切断の冪で零次 rank を得て、正規化・不変直交商を使う

[§§4.1–4.3; Lemma 4.3 · pp. 16–21](#)

垂直最小値と二計量

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(s)/p &= H + f_0^*V, \quad H \geq 0 \\ K_Z + B^+ + M &\sim_{\mathbb{Q}} B^-, \quad \operatorname{Supp} B^- \subset G \end{aligned}$$

有効なら大域切断。そうでなければ余接傾きと形式から系を作る

[Lemmas 4.4–4.5 · p. 22](#)

支持類と零次数の系

$$V \cdot \beta = G \cdot \beta = 0, \quad D_j \sim m_j V + N, \quad D_j \cdot \beta = 0$$

三指数関係の水平等式、G 外の極の禁止、最大系の比を使う

[§4.6 · pp. 24–25](#)

水平補間と rank の復元

$$\begin{aligned} \dim W &< \dim Z, \quad \text{generic invariant section} \\ \text{all adjoint ratios} &\in \mathbb{C}(W) \implies \text{rank} = 1 \end{aligned}$$

垂直最小値、水平補間、切断比の制御によるrank保存

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 正規化した切断と許容極

一般切断 s を toroidal 同次元モデル $Y_0 \rightarrow Z$ で $\operatorname{div}(s)/p = H + f_0^*V$ と書く。 V の係数は各垂直成分の重複度で割った次数の最小値で、 $H \geq 0$ 、各底素因子の上には H の係数が 0 の成分がある。そのような成分がすべて X 上例外的になる底素因子の和を G とする。小さい $\delta > 0$ に対して $(H - \delta f_0^*G)_-$ は例外的である。したがって $V + \delta G$ の有効性が得られれば、その切断を正規化切断と掛け、 X へ押し下げて大域不変切断を得る。

正の rank 条件と s による乗法から零次 rank も 1 となる。不変直像は compact 平均による直交商なので滑らかな直像正值性を使える。高次 moment の極限は V の有界半正值計量を、零次密度は $K_Z + B^+ + M \sim_{\mathbb{Q}} B^-$ (M nef, $\operatorname{Supp} B^- \subset G$) を与える。後者は符号付き境界であり、有効 klt 境界と同一視しない。

[§§4.1–4.3; Lemma 4.3 · pp. 16–21](#)

2. 零次数の系から小さい底を選ぶ

$V + G$ がbigなら上の出口に入る。そうでなければ錐双対性により非零movable類 β を選び、 $V \cdot \beta = G \cdot \beta = B^- \cdot \beta = 0$ とする。 B^+ に $M + tA$ の一般有効代表を加えた有効klt境界へorbifold余接商の非負性を適用し、 $t \downarrow 0$ として余接tensor内の線束 N について $c_1(N) \cdot \beta \leq 0$ を得る。 $\chi(\mathcal{O}_Z) = 1$ 、Riemann–Roch、乗数イデアル付きhard Lefschetz、行列式抽出から

$$D_j \sim m_j V + N, \quad m_j \longrightarrow \infty, \quad D_j \cdot \beta = 0$$

を得る。零次数線形系の像次元を最大にしStein分解を取ると、 $\dim W < \dim Z$ で、そのような系の切断比はすべて $\mathbb{C}(W)$ へ入る。

[BDPP13, Theorem 2.2, p. 6]

[CP19, Theorem 1.3, p. 3]

[DPS01, Theorem 2.1.1, p. 8]

Lemmas 4.4–4.5 · p. 22

3. 水平部分の等式から存在と一意性を戻す

三指数の線形同値

$$(m_\ell - m_j)D_k \sim (m_\ell - m_k)D_j + (m_k - m_j)D_\ell$$

の両辺の比が底函数なので、 W 上水平な部分は実際の因子として等しい。水平重複度は m_j のaffine関数となり、有効性と $m_j \rightarrow \infty$ から傾きが非負になる。これが V の新しい一般ファイバー上の有効性を与え、正規化切断との積で L の一般不変切断を回復する。

rankの復元には追加の極の制御が要る。新しい一般ファイバーの二つの随伴切断の極を同じ底ample捻りで消し、Jacobianと正規化切断の幂で割る。旧rank条件から底の有理切断となり、 G 外では $H = 0$ かつ非例外的な成分が極を禁止する。残る比は β 次数0の同じ系の比なので $\mathbb{C}(W)$ に属する。これでrankは高々1、構成した切断とJacobianで十分可除な全正指数に非零元があり、ちょうど1になる。相対代数閉性はStein分解と体の包含を通じて保たれる。

Lemmas 4.6–4.7 · p. 23

§4.6 · pp. 24–25

5. Theorem 6.1 の証明 — 二計量を保つ次元帰納法

証明対象：Theorem 6.1 · p. 34

主張は冒頭のTheorem 6.1を参照する。ここでは原典§6.2の第一証明を追う。

有限体積の供給側と有界な目標側

$$A = -K_V + D, \quad \int_V |s_D|_{h_A}^2 < \infty; \quad (L, h_L) \text{ bounded}$$

$$H^0(V, \Omega_V^j) = 0 \quad (j > 0)$$

Riemann–Roch · hard Lefschetz · 行列式と有限体積の余接評価

Proposition 5.3 · p. 27

形式から行列式因子へ

$$N_i \sim M + m_i L, \quad m_i \rightarrow \infty, \quad -M + kD \text{ pseudoeffective}$$

許容系の比の最大性から水平切断と零次を含む rank を作る

§6.2 · pp. 35–36

最大許容系で小さい底と rank を得る

$$aL + cD - P \text{ pseudoeffective}; \quad \dim Y < \dim V$$

$$\rho \text{ has no horizontal poles, } h^0(J + p^*D + m_k p^*L) = 1$$

実乗数イデアル付き直像の正值性と許される極の台を保つ

Lemmas 3.1–3.2 · pp. 12–15

二計量移送後に帰納法を適用

$$(B, h_B) \text{ bounded, } \int_Y |s_{D_Y}|^2 < \infty$$

$$H^0(Y, aB + cD_Y) \neq 0 \implies H^0(V, a'L + c'D) \neq 0$$

捻った形式から一般切断を作り二計量を小さい底へ移す

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 捻った形式を有効因子へ変える

L の有界重みは全幂の乗数イデアルを自明にする。正次数形式がないことから $\chi(\mathcal{O}_V) = 1$ 、したがって $\chi(K_V + mL)$ は定数項が非零の多項式である。無限に大きい指数で非零のコホモロジーを hard Lefschetz に通し、捻った形式の generic span の行列式を取って $N_i \sim M + m_i L$ を得る。

有限な加重体積は、 $-K_V + D + A/m$ に有効近似を作り、境界 D を引いた対が sub-klt になることに使う。葉層の相対擬有効性と傾きの議論から $-M + kD$ が擬有効になる。滑らかな反標準計量や大域 strict curvature をこの段階の仮定に追加していない。

Lemma 3.3 · pp. 15–16

Proposition 5.3 · p. 27

[Ou23, Propositions 2.2, 3.1, pp. 5–6]

2. 最大許容系でrankを強制する

$aL + cD - P$ がある $a > 0, c \geq 0$ について擬有効になる系 $|P|$ を許容とする。積を取っても許容なので像次元最大の系が選べる。像が全次元なら $aL + cD$ は big で終わる。そうでなければ小さい連結ファイバー底 Y を取り、許容系の比は $C(Y)$ へ入る。

N_i の三指数関係の水平部分から極のない一般切断 ρ を作る。さらに、 $J + p^*D + mp^*L$ に一般ファイバー上で独立な二切断があれば、底捻りで極を消した比が許容系を大きくし最大性に反する。従って ρ の指数の倍数で、零次を含む rank 1 が得られる。

§6.2 · pp. 35–36

3. 有限体積と有界性を別々に渡す

Lemma 3.2 では $u_m = s_{J+p^*D}\rho^m$ が実際の乗数イデアル付き直像に属することを有限積分から確かめ、rank 1 なのでその生成元にする。 L^2 直像の正值性が零次密度と高次momentのpsh性を与える。後者の正規化極限は fiber supremum になり、Lemma 3.1 の垂直最小値による正規化と合わせて底の線束 B の有界半正值計量を与える。別の線束 $-K_Y + D_Y$ には有限な加重体積が残る。

底にも正次数形式がないので帰納法を適用する。得た $aB + cD_Y$ の切断を戻すと、極は D または例外台に限られる。押し下げ後、有限個の極を D の整倍で消して結論となる。有理線束では最初と最後に分母を払う。二つの計量を一つに置き換えると、この帰納法の仮定が保たれない。

[HPS, Theorem 21.1, pp. 31–32]

[PT14, Theorem 3.3.5, p. 24]

Lemmas 3.1–3.2 · pp. 12–15

6. Theorem 7.1 の証明 — 不変商から極のない切断へ

証明対象：Theorem 7.1 · p. 38

主張は冒頭のTheorem 7.1を参照する。ここでは§7.1のrank-one quotient構成を採る。

自然線形化と compact 平均

$$L = -K_V, \quad H^0(V, \Omega_V^j) = 0 \quad (j > 0), \quad T \curvearrowright V$$

作用場の外積と商函数の比から、零次も含む不変 rank を作る

[§7.1 · pp. 38–39](#)

商の一般不変切断と零次 rank

$$\mathbb{C}(Y) = \mathbb{C}(V)^T, \quad \rho = \text{action-field wedge} \otimes \text{base frame} \\ s_J \rho^m \neq 0, \quad h^0(J + mp^*L)^T = 1 \quad (m \geq 0)$$

滑らかな不変直像は直交商。通常の底へ二計量を移送

[Lemmas 3.1–3.2 · pp. 12–15](#)

二計量を降ろし許容極付き非消滅

$$B \text{ bounded semipositive, } -K_Y + D_Y \text{ finite weighted volume} \\ H^0(Y, aB + cD_Y) \neq 0$$

Theorem 6.1 の切断を戻し、 $D=0$ と例外台で極を除く

[Theorem 6.1 · p. 34](#)

元の境界は零なので極が残らない

$$H^0(V, -mK_V)^T \neq 0 \quad \text{for some } m > 0$$

自然な作用場の外積、二計量移送、許容極の除去

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 商の上で零次からrankを作る

compact real formで計量の重みを平均する。作用が自明ならTheorem 6.1を $D = 0$, $A = L = -K_V$ で適用する。そうでなければ $\mathbb{C}(V)^T$ の滑らかな射影商モデル Y を取る。トーラスの連結性からこの体は相対代数閉で、一般ファイバーに稠密軌道がある。独立な無限小作用場の外積と底の反標準有理枠、Jacobian切断から自然不変な一般反標準切断 ρ を作る。

不変な二つの随伴切断の比は商函数である。 $s_J \rho^m$ が零次も含めて非零元を与えるため、不変随伴rankはすべての $m \geq 0$ で1になる。滑らかな係数計量の下ではcompact平均が直交holomorphic projectionを与え、不変部分の計量は商計量である。ここで特異計量の任意の不変部分束の正值性は仮定していない。

[§7.1 · pp. 38–39](#)

[Ber09, Theorem 1.2, p. 3]

2. 許容境界が零であることを最後に使う

商が点なら作用場の全外積が既に大域切断を与える。正次元なら二計量移送を適用し、正次数形式のない底でTheorem 6.1を使う。得た切断を戻す操作は底函数による乗法なので自然不変性を保つ。元の境界が $D = 0$ であるため、極は例外台へ消え、滑らかな V 上の大域切断となる。

原典§7.2はlogarithmic orbit integralとsupremumのpsh性から同じ二計量移送へ入る別証明を与える。本記事の主経路は§7.1であり、別証明を追加の必要条件として接続していない。

Theorem 6.1 · p. 34

Lemma 7.2; §7.2 · pp. 39–42

7. どの論文が、どの段階を担うか

- 滑らかな直像曲率はTheorem 2.1の密度とstrictness、Lemmas 3.2/4.3の滑らかな不変版に使う。通常の特異版にはHPSの実乗数イデアル付き直像を使い、生成元の可積分性を別途確認する。
- hard LefschetzはLemma 3.3の形式を供給する。必要なのは有界重みから得る全冪の自明な乗数イデアルであり、nefだけを代入していない。
- orbifold余接正值性はLemma 4.4、Druel–Ouの相対擬有効性はProposition 5.3の有限体積型傾き評価で使う。符号付き境界・有効境界・非加重積分を区別する。
- 同カタログの Integrable metrics and effectivity with controlled boundary はTheorem 2.1を別証明の非加重移送に利用する。本稿のTheorems 6.1/7.1を同稿の主定理に依存させる接続は描かない。詳細はカタログの接続記録を参照する。

8. 原典を読む入口と確認範囲

- Lemma 2.2 · pp. 8–9 — 境界交点上を含む全valuationと例外台を確認する。
- §§2.2–2.3; (2.7)–(2.11) · pp. 9–11 — 積分密度の曲率と非加重可積分性を別々に読む。
- Lemmas 3.1–3.2 · pp. 12–15 — 二つの計量と許される極の台を追う。
- §4.6 · pp. 24–25 — 縮約後の切断比が底体へ戻る仕組みを確認する。
- §6.2 · pp. 35–36 — 許容線形系の最大性と次元帰納法を読む。
- §7.1 · pp. 38–39 — 自然不変切断と零次rankを作る箇所。

編集側では、上記四定理の仮定・量化・全結論、§§2–4、Proposition 5.3、§6.2、§7.1の主要段階を照合した。BerndtssonのTheorem 1.2と曲率式、DPSのTheorem 2.1.1、Campana–PăunのTheorem 1.3、HPSのTheorem 21.1、Păun–TakayamaのTheorem 3.3.5、OuのPropositions 2.2/3.1、BDPPのTheorem 2.2の記述と使用条件を確認した。原稿中の結論を紹介するもので、全証明の独立検証や専門家査読の完了を意味しない。

§§8–12のratio fieldの各変種、異なるboundary/rank条件の縮約、finite-flat normによる別構成は今回の詳説対象外である。弱toroidal化・同次元化の外部原典の再照合、全valuation計算やpsh極限の独立検証、外部入力の証明そのものは未実施である。Theorem 2.1はtoroidal同次元モデルを仮定する定理として記載した。

Integrable metrics and effectivity with controlled boundary

可積分性をklt境界へ変え、例外的な補正を消して反標準切断を戻す

本稿の基本経路は、特定切断の可積分性から台を制御した有効性を得て、それを固定擬有効誤差の除去へ使うものである。smooth semipositivityは $L = -K_X$ に滑らかな半正曲率計量が存在するという仮定であり、nef性のみへの置換は行わない。底に現れる特異計量には、重み付き可積分性とunweighted可積分性という異なる条件がある。

原稿の著者: OpenAI · September 26, 2026 · 45 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 指定境界上の補正を許す有効性

Y を正次元の滑らかな射影複素多様体、 $C \geq 0$ を整数因子とする。 $-K_Y + C$ に、曲率がKähler形式を支配し、 $\mathcal{J}(h) \supseteq \mathcal{O}_Y(-C)$ を満たす特異Hermitian計量 h が存在すると仮定する。任意の擬有効有理因子 M に対し、 C 上に台を持つ有効有理因子 C' が存在し、 $M + C'$ は有効有理因子と $\mathbb{Q}$ 線形同値になる。

Theorem 1.1 · p. 2

Theorem 4.3 — 補正因子近傍の有限生成

Y を正次元の滑らかな射影多様体、 A_0 を有理因子とする。 $-K_Y + A_0$ が半正の特異計量を持ち、その非消滅局所frameの二乗ノルムが局所可積分で、非空の通常開集合上で滑らかかつstrictly positiveであると仮定する。任意の有限個の有理因子 $P_1, \dots, P_s$ に対し、共通の $\epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ と整数 $k_0 > 0$ が存在し、実際の因子 $B_i = k_0(A_0 + \epsilon P_i)$ はCartierで、

$$R(Y; B_1, \dots, B_s) = \bigoplus_{(a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{N}^s} H^0\left(Y, \mathcal{O}_Y\left(\sum_i a_i B_i\right)\right)$$

は有限生成 $\mathbb{C}$ 代数となる。ここでは A_0 の有効性は仮定しない。

Theorem 4.3 · pp. 9–10

Theorem 5.1 — 一つの固定擬有効誤差の除去

X を滑らかな連結射影複素多様体、 $L = -K_X$ をsmoothly semipositiveとする。 P を固定した擬有効Cartier因子とする。非有界な正整数 m_j に対し、有効整数因子 $N_j \sim m_j L - P$ が存在すれば、ある正整数 m について $H^0(X, mL) \neq 0$ である。 P 自身の有効性や $L \neq 0$ は仮定しない。

Theorem 5.1 · p. 11

Corollary 5.6 — 固定次数のtwisted differentialからの変換

Theorem 5.1の X, L に対し、ある固定整数 $p \geq 0$ と非有界な正整数 m について $H^0(X, (\Omega_X^1)^{\otimes p} \otimes mL) \neq 0$ なら、 L の正の倍数に非零切断がある。 $(\Omega_X^1)^{\otimes p}$ を Ω_X^p に置き換えても成立する。これは通常切断の非消滅であり、不変切断という結論ではない。

Corollary 5.6 · p. 16

Theorem 9.2 — 自然な線形化についての不変非消滅

X を滑らかな連結射影複素多様体、 $\chi(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ とする。代数トーラス T が X に作用し、 $L = -K_X$ がsmoothly semipositiveなら、自然な接束の行列式の線形化に対して、ある正整数 m で $H^0(X, mL)^T \neq 0$ となる。

Theorem 9.2 · pp. 32–35

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Integrable metrics and effectivity with controlled boundary](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [BCHM10](#) C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon, J. McKernan — Existence of minimal models for varieties of log general type : big klt境界の随伴因子の非消滅。arXiv:math/0610203v2。
- [CL13](#) A. Corti, V. Lazić — New outlook on the Minimal Model Program, II : 多重次数付き随伴環の有限生成とVeronese。arXiv:1005.0614v3。
- [PT14](#) M. Păun, S. Takayama — Positivity of twisted relative pluricanonical bundles and their direct images : 乗数イデアル直像が一般同型の場合の特異計量の延長。arXiv:1409.5504v1 (2014); published in 2018。

- [OpenAI26b](#) OpenAI — Invariant anticanonical indices and conversion of twisted differentials : 零点での値を保持する不変指数。2026-09-26。
- [OpenAI26e](#) OpenAI — Metric descent and rank-preserving contractions : 通常変換の別経路におけるtoroidal volume計量。2026-09-26。
- [LMPTX23](#) V. Lazić, S. Matsumura, T. Peternell, N. Tsakanikas, Z. Xie — The Nonvanishing Problem for varieties with nef anticanonical bundle : cotangent tensorの飽和部分層の負の第一Chern類の擬有効性。Documenta Mathematica 28 (2023), 1393–1440。
- [DPS01](#) J.-P. Demailly, T. Peternell, M. Schneider — Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds : 滑らかな半正係数のhard Lefschetz全射。arXiv:math/0006205v2。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 5.1 — 主定理の証明概略

証明対象 : [Theorem 5.1](#) · p. 11

証明の道筋。 [Theorem 5.1](#)の固定誤差付き入力から始める。twisted tensorから出発する[Corollary 5.6](#)では、その前行列式抽出を一段加える。底の解析入力と[Theorem 1.1](#)の台を制御した代数的出力が合流し、例外補正を消す帰還で結論に至る。

1 二つの入口を区別

$$H^0(X, (\Omega_X^1)^{\otimes p} \otimes m_j L) \neq 0 \quad \text{or} \quad N_j \sim m_j L - P \geq 0$$

tensor からは行列式を抽出。固定誤差の入力ならここから開始

[Lemma 5.5 · p. 16](#)

2 固定誤差から一つの底へ

$$P \text{ pseudoeffective, } X \xleftarrow{\pi} Z \xrightarrow{f} Y, \quad M = \sum_Q \mu_Q(\pi^* R) Q$$

litaka maximality と直像正値性が重み付き metric を供給

[§5.2, \(5.4\) · p. 13](#)

3 解析入力と代数的補正を合流

$$\mathcal{J}(g) \subset \mathcal{O}_Y(-C), \quad \Theta_g \geq \delta \omega_Y \implies M + C' \sim_{\mathbb{Q}} G \geq 0$$

Theorem 1.1 の支持制御と Lemma 5.2 の帰還

[Lemma 5.2 · pp. 11-12](#)

4 元の多様体上の通常切断

$$f^* C' \text{ exceptional over } X \implies H^0(X, mL) \neq 0$$

主結果間の通常変換の全体図

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 固定するものと底で変換するもの

行列式は一つの擬有効誤差 P を固定し、litaka 体は全ての N_j の比を一つの底へ集める。底の垂直最小値 M と、rank 一の直像が与える $-K_Y + C$ の計量は別の役割を持ち、Theorem 1.1 で合流する。詳細は支持付き有効性、固定誤差の変換、tensor の抽出に分ける。

Theorem 5.1 · p. 11

2. 環と不変性は別の出力として追う

Theorem 4.3 は unweighted 可積分性から有限生成環を作り、後続の Exact orders に供給する。これは通常変換 5.1 の主証明が必要とする出力ではない。Theorem 9.2 は不変比の体を選び直し、底の不変関数で有理切断を補正する。通常の 5.1 から不変性を推論せず、不変な帰還を別に追う。

Theorem 4.3 · pp. 9-10

Theorem 9.2 · pp. 32-35

3. Theorem 1.1 の証明 — 重み付き近似から支持付き非消滅へ

証明対象：Theorem 1.1 · p. 2

証明の道筋。近似の固定部から境界とJacobianを引いた符号付き因子を作り、その正部をbig klt境界に組み込む。非消滅の入力はこの有効境界であり、符号付き因子そのものではない。

1 重み付き計量

$$\Theta_h \geq \omega, \quad |s_C|^2 e^{-\varphi} \in L^1_{\text{loc}}$$

固定部・Jacobian・境界の次数を比較

[Lemma 2.1; Theorem 2.2 · pp. 5–7](#)

2 符号付き近似

$$\Psi = G/r - \sigma^* C - K_{Y'/Y}, \quad \text{coeff } \Psi < 1$$

小さい有理数 $t > 0$ で ample 部分に tM を吸収

[Theorem 1.1 \(proof\); Lemma 3.1 · pp. 7–8](#)

3 big klt 境界

$$K_{Y'} + \Delta_t \sim_{\mathbb{Q}} \Psi^- + t\sigma^* M$$

非消滅、合理的回復、pushforward

[\[BCHM10, Theorem D, p. 13\]](#)

4 補正の台を保持

$$M + C' \sim_{\mathbb{Q}} D \geq 0, \quad C' = \sigma_* \Psi^- / t$$

重み付き可積分性と支持付き補正

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 可積分性が厳密な係数不等式を与える

小さいample有理因子 A を計量から差し引き、 $|r(-K_Y + C - A)|$ を解消して固定部 G と自由部を分ける。Lemma 2.1はNadel消滅・正則性と点延長による比較を使う。素因子沿いの固定部、 $\sigma^* C$ 、Jacobianの次数を a, j, k とすると、可積分性から $a/r - j - k < 1$ を得る。従って

$\Psi = G/r - \sigma^* C - K_{Y'/Y}$ の正部はkltで、負部の台は境界と例外集合に限られる。 $|s_C|^2 e^{-\varphi} \in L^1$ を $e^{-\varphi} \in L^1$ へ読み替えてはいけない。

Lemma 2.1; Theorem 2.2 · pp. 5–7

2. ampleの余地に M を入れ、補正だけを残す

$A + tM$ がampleとなる小さい有理数 $t > 0$ を取り、一般の自由因子と小係数のample代表を加えて $\Delta_t \geq 0$ を作る。すると (Y', Δ_t) はklt、 Δ_t はbig、 $K_{Y'} + \Delta_t \sim_{\mathbb{Q}} \Psi^- + t\sigma^*M$ は擬有効である。big-boundary非消滅の実線形同値を、有限個の有理係数不等式の有理解により有理線形同値へ戻す。pushforward後の補正 $C' = \sigma_*\Psi^-/t$ は C 上に台を持つ。近似を M より先に固定できるが、 t と C' は M に依存してよい。

[BCHM10, Theorem D, p. 13]

Theorem 1.1 (proof); Lemma 3.1 · pp. 7–8

4. Theorem 4.3 の証明 — unweighted計量から随伴環へ

証明対象：Theorem 4.3 · pp. 9–10

証明の道筋。通常開集合上のstrict性からbig性を得て、大域的strict下界を持つ計量へ混合する。unweighted可積分性を保持した同時摂動が、共通ample部分を持つ複数のklt境界を供給する。

1 unweighted 可積分性

$$B = -K_Y + A_0, \quad e^{-\varphi} \in L^1_{\text{loc}}$$

開集合の strict 性から big 性、計量混合、同時摂動
[Lemma 4.1 · pp. 8–9](#)

2 共通の摂動

$$\Delta_i \sim_{\mathbb{Q}} B + \epsilon P_i - H', \quad (Y, \Delta_i) \text{ klt}$$

随伴環の有限生成と共通分母の除去
[\[CL13, Theorem 3.2\(1\); Lemma 3.1, p. 5\]](#)

3 実際の因子の環

$$B_i = k_0(A_0 + \epsilon P_i), \quad R(Y; B_1, \dots, B_s) \text{ finitely generated}$$

unweighted可積分性から有限生成へ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 一つの共通摂動を許す計量

Lemma 4.1では体積判定、strong openness、小指数可積分性とHölder不等式を用い、元の計量とbig計量を小さい有理係数で混合する。全体でstrictな下界とframeの可積分性が両立し、有限個の P_i を滑らかな計量で加減できる。共通のample H' と $\epsilon > 0$ に対し、有効klt因子 $\Delta_i \sim_{\mathbb{Q}} -K_Y + A_0 + \epsilon P_i - H'$ が得られる。Theorem 1.1の重み付き条件だけではこの段階を代用しない。

Lemma 4.1 · pp. 8–9

2. 有限生成を実際のCartier因子へ運ぶ

$K_Y + \Delta_i + H'$ の多重次数付き随伴環に有限生成を適用する。共通の k_0 で因子と有理線形同値の分母を消し、それぞれの主因子を与える有理関数を掛けると、多重次数を保って所要の環とVeronese環が対応する。数値的同値だけではこの同一視はできない。これが後続のExact ordersに供給される有限生成である。

[CL13, Theorem 3.2(1); Lemma 3.1, p. 5]

5. Theorem 5.1 の証明 — 一つのIitaka体に誤差を集める

証明対象：Theorem 5.1 · p. 11

証明の道筋。 N_1 の一つのIitaka底を選ぶと、全 N_j の差を底の主因子で表せる。垂直方向の最小係数が底の擬有効因子 M を作る。rank一の直像で得る計量へTheorem 1.1を適用し、例外的補正を消す。

1 固定誤差を持つ切断

$$N_j \sim m_j L - P, \quad N_j \geq 0, \quad m_j \rightarrow \infty$$

比が底の体に属し、垂直最小値が極限で擬有効

[§5.2, \(5.1\)–\(5.3\) · p. 12](#)

2 一つの litaka 底

$$R = (N_1 - N_0)/(m_1 - m_0), \quad M = \sum_Q \mu_Q(\pi^* R) Q \text{ pseudoeffective}$$

全直像 rank 一と $\mathcal{I}(h) = \mathcal{O}_Z$

[\[PT14, Setup 3.2.1; Theorem 3.3.5, pp. 20, 24\]](#)

3 底の重み付き strict 計量

$$-K_Y + C, \quad \Theta_g \geq \delta \omega_Y, \quad \mathcal{I}(g) \supset \mathcal{O}_Y(-C)$$

補正の pullback は例外的、極を pushforward で除去

[Lemma 5.2 · pp. 11–12](#)

4 補正を消して戻す

$$M + C' \sim_{\mathbb{Q}} G \geq 0 \implies H^0(X, mL) \neq 0$$

固定誤差から反標準切断への全体経路

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 比の体・垂直最小値・rank一

平坦化を経て $X \xleftarrow{\pi} Z \xrightarrow{f} Y$ を準備し、底の余次元2以上へ写る素因子が π 例外的になるようにする。最終的な滑らかな Z の平坦性は主張しない。 $R = (N_1 - N_0)/(m_1 - m_0)$ に対し、同じ線形系の比が底の体に入ることから

$$\pi^* N_j = \pi^* N_0 + (m_j - m_0)(\pi^* R + f^* Q_j), \quad Q_j \sim_{\mathbb{Q}} 0$$

を得る。水平方向は非負となり、 $\mu_Q(\pi^* R) = \min_{D \mapsto Q} \text{ord}_D(\pi^* R) / \text{ord}_D(f^* Q)$ の和 M は、固定有効誤差を $m_j - m_0$ で割った極限により擬有効である。 Y が点なら既に有効性が得られ、 $\dim Y = \dim X$ なら L は big である。中間次元では $E = K_{Z/X}$ の直像の rank が2以上なら、底の ample twist を使って N_1 の比の体を広げられて矛盾する。

[§5.2, \(5.1\)–\(5.3\) · p. 12](#)

2. strict計量を作り、補正の極を消す

$b\pi^*N_1 \sim f^*H + D_1$ と $N_1 \sim m_1L - P$ から、 π^*L に底の正曲率を支配する特異計量がある。smooth semipositive計量との小さい混合により、 $\Theta_h \geq \delta f^*\omega_Y$ と全空間上の $\mathcal{J}(h) = \mathcal{O}_Z$ を得る。直像の乗数イデアル付き包含は同型なので、Păun–Takayamaの延長定理が通常直像へ適用できる。そのrank一の二重双対は $\mathcal{O}_Y(-K_Y + C)$ である。 C は整数有効因子、 f^*C は例外的であり、Fubiniにより s_C は可積分となる。Theorem 1.1 で $M + C' \sim_{\mathbb{Q}} G \geq 0$ とし、 $\pi^*R + f^*(G - M - C')$ を押し下げる。負係数を許す場所は例外集合だけなので、 X 上に実際の非零切断を得る。

[PT14, Setup 3.2.1; Theorem 3.3.5, pp. 20, 24]

§5.2, (5.4) · p. 13

Lemma 5.2 · pp. 11–12

別経路である §5.3 は元の滑らかな係数計量を保持し、toroidal volume定理から有理補正 A_0 と unweighted計量を得る。ここで必要なのは全直像rank一と水平strict patchである。通常開集合上のstrict性を大域的Kähler下界と同一視せず、Corollary 5.4の計量混合を経由する。

[OpenAI26e, Theorem 2.1, p. 7]

§5.3; Corollary 5.4 · pp. 13–15

6. Corollary 5.6 の証明 — 行列式で固定誤差を抽出する

証明対象：Corollary 5.6 · p. 16

証明の道筋。 固定したtensor束内の像を飽和し、その行列式を固定する。一つの基底成分だけを高いtwistの切断で置き換えて、非有界性を保つ。

1 固定次数の twisted tensor

$$H^0(X, (\Omega_X^1)^{\otimes p} \otimes m_j L) \neq 0$$

一つの基底成分だけを変えて指数を非有界に保つ

[Lemma 5.5 · p. 16](#)

2 飽和した像の行列式

$$A = \det S, \quad P = -A \text{ pseudoeffective}, \quad N_j \sim m'_j L - P \geq 0$$

$p = 0$ は自明、外積は tensor への交代埋込み

[Corollary 5.6 · p. 16](#)

3 通常の非消滅

$$H^0(X, mL) \neq 0 \quad (m > 0)$$

tensorから固定誤差を経る変換

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 一つの行列式を固定する

$\mathcal{O}_X(-mL) \rightarrow (\Omega_X^1)^{\otimes p}$ の像の一般点でのspanを飽和して S とし、 $A = (\bigwedge^{\text{rk} S} S)^{**}$ を取る。原稿は generic tangent nefness のcotangent部分束版を使って $P = -A$ を擬有効とする。有限個の元からなる一般基底の一つを順次置き換えれば、固定した A に値を取る行列式切断が非有界な正twistで得られる。飽和と reflexive 延長が大域切断を保証する。

[LMPTX23, Theorem 4.1, 誌面 p. 1409 / PDF p. 17]

[Lemma 5.5 · p. 16](#)

2. tensor · 外積 · 零次数を区別する

$p > 0$ では Theorem 5.1 を適用する。 $p = 0$ なら入力自身が所要の切断であり、外積は標数0の交代埋込みによって tensor へ帰着する。指数は「ある正の倍数」であり、すべての正整数での非消滅は主張しない。行列式切断が不変でも、通常の Theorem 5.1 だけで不変性の結論は得られない。

[Corollary 5.6 · p. 16](#)

7. Theorem 9.2 の証明 — 不変な有理切断を最後まで保持する

証明対象：Theorem 9.2 · pp. 32–35

証明の道筋。 零点の値を保持する不変指数から不変形式を作る。通常変換へ渡すのではなく、不変比の体と不変有理切断を保持し、補正を底の不変関数で行う。

1 自然な作用と非零の Euler 数

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) \neq 0, \quad L = -K_X \text{ smoothly semipositive}$$

零点値付き指数と係数 $(m+1)L$ の hard Lefschetz
[Proposition 9.1 · p. 32](#)

2 不変 twisted form と行列式

$$\sigma_j \in H^0(X, A + m_j L)^T \setminus \{0\}$$

invariant rank 一、曲率の核、全 valuation の可積分性
[§§9.1–9.2 · pp. 33–35](#)

3 不変比の底と可積分補正

$$V \geq f^* M, \quad F_0 + \epsilon M \sim_{\mathbb{Q}} G \geq 0$$

底の関数是不変、補正は例外的
[Lemma 5.2 · pp. 11–12](#)

4 指標を保った帰還

$$(\sigma_2/\sigma_1)^a f^* u \in H^0(X, mL)^T \setminus \{0\}$$

不変指数から指標を保った帰還

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 不変指数から底の曲率へ

連結トーラスの作用は $H^q(X, \mathcal{O}_X)$ に自明で、指数の零点値は $\chi(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ である。指数定理と compact 平均した hard Lefschetz は固定 p の不変切断 $H^0(X, \Omega_X^p \otimes (m+1)L)^T$ を非有界な m で与える。+1 は $K_X + (m+1)L = mL$ に必要である。行列式の不変切断 σ_j から不変比の体を作り、その相対代数閉包も連結性で不変になる。Lemma 9.3 の曲率交点評価と半正性から曲率の核が底への射の垂直方向に入り、水平 strict patch が得られる。不変直像の rank は一だが、全直像の rank 一はここでは主張しない。

[OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 1]

[DPS01, Theorem 2.1.1; Corollary 2.1.2, p. 8]

Proposition 9.1 · p. 32

2. 全valuationを検査し、不変な切断を戻す

別のsimplicial toroidalモデル W を用い、 $V = (\operatorname{div}(p^*\sigma_2) - \operatorname{div}(p^*\sigma_1))/(m_2 - m_1)$ と垂直最小値 M を取る。 $V \geq f^*M$ であり、 M は擬有効。不変直像の滑らかな直交商計量から体積密度 ρ を得る。補正 F_0 は $f^*F_0 \leq E_W = K_{W/X}$ を満たす。解消 $h: W' \rightarrow W$ 上で

$$K_{W'/W} + h^*(E_W - f^*F_0)$$

の全係数は -1 より大きい。第一項には W がkltであること、第二項には有効性を使う。これが高余次元上の例外素因子も含むunweighted可積分性を与える。Corollary 5.4を適用して $F_0 + \epsilon M \sim_{\mathbb{Q}} G \geq 0$ とし、 σ_2/σ_1 の冪に底の関数を掛けて戻す。両方が不変なので、例外補正を除いて延長した切断も自然な線形化について不変である。

§§9.1–9.2 · pp. 33–35

8. どの論文が、どの段階を担うか

入力

BCHMのbig-boundary非消滅

利用先

Theorem 1.1、Corollary 5.4

役割・確認範囲

klt・big境界と擬有効随伴因子の仮定を照合。入力証明は未検証。

入力

Corti–Lazićの随伴環

利用先

Theorem 4.3

役割・確認範囲

共通ample部分とklt境界から有限生成。定理記述を照合。

入力

Păun–Takayamaの特異直像

利用先

Theorem 5.1

役割・確認範囲

$\mathcal{J}(h) = \mathcal{O}_Z$ により一般同型の仮定が成立。記述と適用を照合。

入力

Invariant anticanonical indices

利用先

Proposition 9.1 → Theorem 9.2

役割・確認範囲

零点値を含む指数多項式。不変変換の直接入力。

入力

Metric descent and rank-preserving contractions

利用先

§5.3の別証明

役割・確認範囲

全rank一のtoroidal metric。通常変換の主証明とは別経路。

9. 原典を読む入口と確認範囲

- Lemma 2.1; Theorem 2.2 · pp. 5–7 — 重み付き可積分性から係数の厳密不等式へ。
- Theorem 1.1 (proof); Lemma 3.1 · pp. 7–8 — 補正の台を保持する非消滅。
- Theorem 4.3 · pp. 9–10 — unweighted計量から有限生成環へ。
- §5.2, (5.1)–(5.3) · p. 12 — 一つのIitaka体と垂直最小係数。
- §5.2, (5.4) · p. 13 — 大域的strict下界と特定切断の可積分性。
- §§9.1–9.2 · pp. 33–35 — 不変比の体と全valuationの可積分性。

上記は著者の主張と証明の構成の紹介である。編集側では§§2–5.5および§9の記述・証明本文を読み、BCHM、Corti–Lazić、Păun–Takayamaと同カタログの直接入力記述・使用箇所を照合した。generic tangent nefnessの入力とhard Lefschetzの記述も照合した。点延長・近似、体積判定・strong openness、toroidal準備の外部原典すべての記述照合は完了していない。§§6–8の別証明・Fano-type モデル、§§10–12の別不変構成・降下・extremal character法は本記事の詳細点検範囲外である。全証明の独立再検証や専門家査読を意味しない。

Exact orders and invariant anticanonical linear systems

有限生成環の境界rayで次数零を達成し、軌道次数から不変指標を得る

$\text{ord}(N_j)/m_j \rightarrow 0$ は、どの N_j も中心で消える可能性を排除しない。本稿は曲率のnull条件と有限生成を組み合わせ、同じ反標準 $\mathbb{Q}$ 線形同値類にvaluationが厳密に零の有効因子を得る。その後、generic orbitに沿う次数を指標へ変換する。smooth semipositivityをnef性だけに弱める主張ではない。

原稿の著者: OpenAI · September 26, 2026 · 41 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む ↗](#)

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 零valuationの厳密達成

X を正次元 n の滑らかな連結射影複素多様体とし、 $L = -K_X$ に滑らかな半正Hermitian計量を固定する。その曲率形式 α は $c_1(L)$ を表し、最大複素rankを ν とする。ample line bundle G_0 に対し、

$$\ell(D) = \begin{cases} D \cdot L^\nu \cdot G_0^{n-\nu-1} & \nu < n, \\ 0 & \nu = n \end{cases}$$

と置く。 v を X 上に中心を持つ $\mathbb{C}(X)$ の離散valuation、または零valuationとし、 M を任意の固定line bundleとする。有効整数因子 N_j と正整数 $m_j \rightarrow \infty$ が

$$\begin{aligned} N_j &\sim m_j L + M, \\ \ell(N_j) &= 0, \\ \frac{v(N_j)}{m_j} &\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

を満たせば、 $N \geq 0$ 、 $N \sim_{\mathbb{Q}} L$ 、 $v(N) = 0$ を満たす有理因子 N が存在する。 $-M$ の擬有効性、 $q(X) = 0$ 、Euler数の条件はこの定理の仮定ではない。

Theorem 1.1 · p. 3

Theorem 1.2 — 自然な反標準線形化の不変切断

X を滑らかな連結射影複素多様体、 $-K_X$ をsmoothly semipositiveとし、すべての $i > 0$ で $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ を仮定する。 X に作用する任意の代数トーラス T について、自然な反標準線形化に対し、ある正整数 m で $H^0(X, -mK_X)^T \neq 0$ となる。

Theorem 1.2 · p. 4

Corollary 5.1 — generic formal arc上の零次数

X を滑らかな整射影複素多様体、 $L = -K_X$ をsmoothly semipositiveとする。 $-M$ が擬有効なline bundle M とgeneric formal arc $\gamma : \text{Spec } F[[t]] \rightarrow X$ を取る。genericとはfraction pointが X の一般点に写ることをいう。有効整数因子 $N_j \sim M + m_j L$ 、正整数 $m_j \rightarrow \infty$ について $v_\gamma(N_j) = o(m_j)$ なら、ある整数 $r > 0$ と有効整数因子 $D \sim rL$ が存在し、 $v_\gamma(D) = 0$ となる。点多様体も含む。

Corollary 5.1 · p. 12

Proposition 10.1 — 非零Euler数の下での不変非消滅

W を滑らかな連結射影複素多様体、 $q(W) = 0$ 、 $\chi(W, \mathcal{O}_W) \neq 0$ とする。 $A = -K_W$ は滑らかな半正值Hermitian計量を持ち、代数的トーラス T が W に忠実に作用し、同変線形化されたvery ample線束が存在すると仮定する。自然線形化について、ある整数 $r > 0$ で $H^0(W, rA)^T \neq 0$ となる。

Proposition 10.1 · p. 25

Theorem 11.1 — 固定した擬有効な同変誤差の除去

X を滑らかな連結射影複素多様体、 $q(X) = 0$ 、 $A = -K_X$ を滑らかに半正值とする。 T は X に作用する代数的トーラスで、 A に自然線形化を与える。固定した擬有効 T -線形化線束 G と非有界な正整数集合 I について、各 $j \in I$ で $0 \neq \delta_j \in H^0(X, jA - G)^T$ が存在すれば、ある整数 $m > 0$ について $H^0(X, mA)^T \neq 0$ となる。

Theorem 11.1 · p. 27

Proposition 12.1 — 制御された不変素因子を含む有限錐

V を滑らかな連結有理連結射影複素多様体とし、 $L = -K_V$ は滑らかな半正値計量を持つとする。 V に代数的トーラス T が作用し、 L には自然線形化を与える。このとき $\mathrm{Pic}^T(V)_{\mathbb{R}}$ 内に、不変有効有理因子の類で生成される有理多面錐が存在し、ある整数 $a > 0$ で $aL - D$ が擬有効になるすべての不変素因子 D のdivisor linearizationの類 $[D]^T$ を含む。錐の生成元自体が同じ制御条件を満たすとは主張しない。

Proposition 12.1 · p. 31

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Exact orders and invariant anticanonical linear systems](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [OpenAI26e](#) OpenAI — Metric descent and rank-preserving contractions : toroidal volume計量と消える有理補正。2026-09-26。
- [OpenAI26f](#) OpenAI — Integrable metrics and effectivity with controlled boundary : 主経路の非加重有限生成と、有限錐経路の加重近似。2026-09-26。
- [DPS01](#) J.-P. Demailly, T. Peternell, M. Schneider — Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds : smooth semipositive係数でのhard Lefschetz全射。arXiv:math/0006205v2。
- [CDM17](#) Junyan Cao; Jean-Pierre Demailly; Shin-ichi Matsumura — A general extension theorem for cohomology classes on non reduced analytic subspaces : 乗数イデアル商類の延長。arXiv:1703.00292v2。
- [CL12](#) Paolo Cascini; Vladimir Lazić — New outlook on the Minimal Model Program, I : 共通ample部分を持つ多重随伴環の有限生成。arXiv:1009.3188v2。
- [Leh15](#) Brian Lehmann — Numerical triviality and pullbacks : 全収縮曲線上の数値自明性から数値pullback。arXiv:1109.4382v3。
- [EKL95](#) Lawrence Ein; Oliver Küchle; Robert Lazarsfeld — Local positivity of ample line bundles : very general点のSeshadri下界。arXiv:alg-geom/9408003v1。
- [PT14](#) M. Păun, S. Takayama — Positivity of twisted relative pluricanonical bundles and their direct images : 乗数イデアル条件を満たすrank一の特異直像計量。arXiv:1409.5504v1 (2014); published in 2018。
- [LMPTX23](#) V. Lazić, S. Matsumura, T. Peternell, N. Tsakanikas, Z. Xie — The Nonvanishing Problem for varieties with nef anticanonical bundle : 余接tensor内の行列式の負の擬有効性。Documenta Mathematica 28 (2023), 1393–1440。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 の証明 — nullな極の体から厳密達成へ

証明対象：Theorem 1.1 · p. 3

証明の道筋。 nullな極を持つ有理関数をもつ一つの相対代数閉な体にまとめる。その底にrank一の体積計量と有限生成環を作る。二つの固定因子で元の列を表し、境界rayにある実際の生成元を選ぶ。補正を押し下げて消す最後の操作を次節で詳説する。

1 null 条件を持つ近似列

$$N_j \sim m_j L + M, \quad \ell(N_j) = 0, \quad v(N_j)/m_j \rightarrow 0$$

↓
null な極の体の相対代数閉性と水平 strict patch
Lemmas 3.1–3.2 · pp. 9–10

2 共通の関数体と底

$$k = \{h : \ell((h)_\infty) = 0\}, \quad \text{rk } g_* \mathcal{O}_Z(K_{Z/X}) = 1$$

↓
toroidal volume と unweighted 可積分性を有限生成へ
[OpenAI26f, Theorem 4.3, pp. 9–10]

3 可積分計量と有限生成

$$p_* f^* A_0 = 0, \quad R(Y; k_0(A_0 + \epsilon P_1), k_0(A_0 + \epsilon P_0))$$

↓
係数の valuation で生成元を選び、補正を除去
Proposition 2.2 · pp. 7–8

4 境界 ray で厳密達成

$$N \sim_{\mathbb{Q}} L, \quad N \geq 0, \quad v(N) = 0$$

exact attainmentの全体経路

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 曲率のnull条件が全rank一を保証する

$k = \{0\} \cup \{h \in \mathbb{C}(X)^\times : \ell((h)_\infty) = 0\}$ は体である。モニック方程式の係数の極が代数的元の極を抑えるので、 k は相対代数閉で有限生成となる。 $X \xleftarrow{\pi} Z \xrightarrow{g} Y$ 、 $\mathbb{C}(Y) = k$ を取る。底の very ample 系の比の極を一つの null 因子で抑えると $\ell(\pi_* g^* H) = 0$ となる。 $E = K_{Z/X}$ の一般ファイバー上の任意の切断を Jacobian 切断で割った関数も null な極を持つため k に入り、次数零の全随伴直像の rank は一になる。

Lemmas 3.1–3.2 · pp. 9–10

2. 水平strict patchを可積分計量・有限生成へつなぐ

$\nu < n$ では $\int_Z (\pi^* \alpha)^\nu \wedge g^* \omega_H \wedge \pi^* \omega_0^{n-\nu-1} = 0$ である。半正性により最高次数形式自体が零となり、最大rankの開集合で $\ker \pi^* \alpha \subseteq \ker dg$ を得る。 $\nu = n$ の場合はこの包含が自明であり、いずれも小さい patch で $\pi^* \alpha \geq cg^* \omega_H$ となる。 $\nu = 0$ なら正次元の底は起こらない。

体の拡大をしない双有理な equidimensional toroidal モデル $X \xleftarrow{p} W \xrightarrow{f} Y$ を準備する。Metric descent の Theorem 2.1 は全rank一とこの patch を入力とし、 $p_* f^* A_0 = 0$ となる有効有理補正と、 $-K_Y + A_0$ の unweighted 可積分計量を供給する。その通常開集合上の strict 性から、Controlled boundary の Theorem 4.3 が有限個の方向に対する共通 ϵ, k_0 と有限生成環を与える。patch 上の strict 性を直接大域的下界と呼ぶことはしない。

§3.2, (3.4)–(3.6) · pp. 10–11

[OpenAI26e, Theorem 2.1, p. 7]

[OpenAI26f, Theorem 4.3, pp. 9–10]

3. 任意の固定補助lineを二方向の問題にする

指数の異なる二つの入力 N_1, N_2 を取り、その指数を u_1, u_2 とする。 $u_1 t_j^1 + u_2 t_j^2 = 1$ 、 $t_j^1 + t_j^2 = 1/m_j$ を解くと、 $D(\mathbf{t}) = t^1 N_1 + t^2 N_2$ に対し

$$N_j/m_j = D(\mathbf{t}_j) + \operatorname{div}_X(h_j), \quad D(\mathbf{t}_*) \sim_{\mathbb{Q}} L$$

となる。 h_j は有理関数の有理冪を形式的に扱う $k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の元であり、根を加える体の拡大ではない。主因子の極を N_1, N_2 で抑えるから h_j はこの体に属する。 $k = \mathbb{C}$ なら固定台上の極限がそのまま所要の因子となる。それ以外では垂直最小係数が有限個の有理一次関数の最小値となるので、端点近くの短い有理区間上で affine になる。両端の方向に有限生成を適用し、Proposition 2.2 により $N \sim_{\mathbb{Q}} L$ かつ $v(N) = 0$ を得る。

§4, (4.1) · pp. 11–12

3. Proposition 2.2 の証明 — 補正を消してからvaluationを比較する

証明対象 : Proposition 2.2 · pp. 7–8

Proposition 2.2 — 境界生成元の双有理な帰還

X, Y を滑らかな整射影複素多様体、 W を正規射影多様体、 $p : W \rightarrow X$ を双有理射、 $f : W \rightarrow Y$ を全射equidimensional射とする。 v は X 上に中心を持つ離散valuationまたは零valuation。

$A \geq 0$ は Y 上の有理因子で $p_* f^* A = 0$ 、 D_0, D_1 は X 上の有理Cartier因子とする。

$D(t) = (1 - t)D_0 + tD_1$ に対し

$$P(t) = \sum_Q \min_{E: f(E)=Q} \frac{\text{coeff}_E p^* D(t)}{\text{ord}_E(f^* Q)} Q = (1 - t)P(0) + tP(1)$$

が $0 \leq t \leq 1$ で成り立つと仮定する。有理数 $t_j \in [0, 1]$ 、 $t_j \rightarrow 0$ 、 $h_j \in \mathbb{C}(Y)^\times \otimes \mathbb{Q}$ が

$N_j = D(t_j) + \text{div}_X(h_j) \geq 0$ 、 $v(N_j) \rightarrow 0$ を満たすとする。ある $\epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ 、整数 $k > 0$ に対し

$B_i = k(A + \epsilon P(i))$ ($i = 0, 1$) がCartierで $R(Y; B_1, B_0)$ が有限生成なら、 $N \geq 0$ 、

$N \sim_{\mathbb{Q}} D_0$ 、 $v(N) = 0$ を満たす有理因子が存在する。

Proposition 2.2 · pp. 7–8

1 境界に近づく切断

$$s_j = f_j x^{a_j} y^{b_j}, \quad a_j / (a_j + b_j) \rightarrow 0$$

和の valuation 以下の単項式を選ぶ

Lemma 2.1 · pp. 5-6

2 一つの境界生成元

$$rx^0y^b, \quad v(r)/(\epsilon kb) \leq -v(D_0)$$

垂直最小値と水平係数の極限を使う

Proposition 2.2 · pp. 7-8

3 補正込みで有効

$$p^* D_0 + f^*(\operatorname{div}(h_*) + A/\epsilon) \geq 0$$

$p_* f^* A = 0$ で除去してから中心付き valuation を使う

Proposition 2.2 · pp. 7-8

4 pushforward 後の零値

$$N = D_0 + \operatorname{div}(h_*) \geq 0, \quad 0 \leq v(N) \leq 0$$

境界生成元の選択と例外補正の除去

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 有限個の実際の生成元から選ぶ

$t_j = a_j/d_j$ 、 $d_j = a_j + b_j$ とし、分母を除いて $s_j = h_j^{\epsilon k d_j}$ を**bigraded**環の次数 (a_j, b_j) の切断とする。各切断を生成元の単項式の和で書くと、和のvaluation以下の単項式が少なくとも一つある。境界ray外の生成元は第一次数を少なくとも一つ消費するので、その総寄与は $O(a_j)$ 。 $a_j/d_j \rightarrow 0$ を使うと、次数 $(0, b)$ の生成元 r で $v(r)/(\epsilon kb) \leq -v(D_0)$ となるものが存在する。有限生成な数値錐だけでは、この有理関数 r は得られない。

Lemma 2.1 · pp. 5-6

2. 補正のvaluationを零と仮定しない

$h_* = r^{1/(\epsilon kb)}$ と置く。生成元の切断不等式と垂直最小値から $p^*D_0 + f^*(\operatorname{div}(h_*) + A/\epsilon) \geq 0$ を得る。水平係数の非負性は入力列の極限から従う。これを p で押し下げると補正が消え、 $N = D_0 + \operatorname{div}_X(h_*) \geq 0$ となる。ここで初めて中心付き valuation の非負性を使い、 $0 \leq v(N) \leq 0$ と結ぶ。高次モデル上の例外補正が正の valuation を持っていたとしても支障はない。

Proposition 2.2 · pp. 7–8

4. Theorem 1.2 の証明 — source 重みから不変積へ

証明対象：Theorem 1.2 · p. 4

証明の道筋。 各余指標の source 重みを cohomology から取り出し、hard Lefschetz と行列式で有界な軌道次数を持つ因子列を作る。exact attainment は source 重みを実際の切断の正規化指標として達成させ、有限個の指標の積で重み零を作る。

1 source の重み

$$c = \text{wt}_\lambda(L|_S), \quad H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0 \quad (i > 0)$$

局所化と hard Lefschetz、行列式 rank の shift e

§7.2 · pp. 14–15

2 有界な軌道次数

$$N_j \sim m_j L + M, \quad v_\lambda(N_j) = c_M + ec$$

任意の固定補助 line を許す exact attainment

Theorem 1.1 · p. 3

3 source 重みを達成

$$v_\lambda(D) = 0 \implies \langle \chi/m, \lambda \rangle = c$$

全余指標の support function と有理凸結合

§7.3 · p. 15

4 指標を打ち消す積

$$0 \in \text{conv}\{\chi_i/m_i\} \implies H^0(X, rL)^T \neq 0$$

軌道次数から不変切断へ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. sourceの極端な重みを形式へ上げる

切断への左作用を $(g \cdot s)(x) = g(s(g^{-1}x))$ とする。余指標 λ の source S 上の自然な L の重みを c とすれば、非零の有効な余指標では $c > 0$ である。半正計量の軌道上の対数ノルムの凹性により c は固定成分の最大重みとなる。局所化公式の最高重みの係数は $\chi(S, (l-1)L|_S)$ で、その零点値は 1。従って大きい l で重み $(l-1)c$ の cohomology が非零となる。smooth 係数 lL の hard Lefschetz により、固定次数の $\Omega_X^a \otimes lL$ の固有切断へ持ち上がる。

§7.1 · p. 14

[DPS01, Theorem 2.1.1; Corollary 2.1.2, p. 8]

2. 行列式rankのshiftを保持する

像の一般点でのspanのrankを e とし、その行列式を $\bigwedge^e \Omega_X^a$ の中で飽和して M を固定する。原稿は Calabi–Yau 計量と部分束の曲率評価から $\ell(M) \leq 0$ を示す。基底の $e - 1$ 成分を固定して残りを変えると、 $M + m_j L$ の固有切断の重みは $(m_j - e)c$ となる。 S 上の M の重み c_M を用いると

$$v_\lambda(N_j) = m_j c + c_M - (m_j - e)c = c_M + ec$$

は有界である。効果性と交点評価により $\ell(N_j) = 0$ 。 $-M$ の擬有効性はこの構成で要求せず、Theorem 1.1 の「任意の固定 M 」を使う。 $m_j c$ だけを書くに必要な rank shift を失う。

§7.2 · pp. 14–15

3. exact orderを有限個の指標の積へ変える

generic orbit に対する $v_\lambda(\operatorname{div} s) = \mu - w$ から、零次数の切断は正規化指標 χ/m について $\langle \chi/m, \lambda \rangle = c$ を満たす。すべての余指標を動かすと、正規化切断重みの閉凸包の support function は source 重み c に一致する。 c が非零方向で正であるため零は内部に入り、有限個の実際の有理重みの凸包にも零が入る。有理凸結合の分母を除いて対応する固有切断を掛ければ、正の反標準倍数の非零不変切断を得る。自明トラス・点は直接処理でき、非有効作用では有効商へ移る。有限部分を含む作用核は自然な反標準 line 上で自明なので、商からの不変性が元の T について成立する。

Lemmas 6.1–6.2 · p. 13

§7.3 · p. 15

5. Corollary 5.1 の証明 — 形式弧を中心付き valuation へ

証明対象：Corollary 5.1 · p. 12

証明の道筋。 $-M$ の擬有効性で null 条件を得る。genericity で関数体を Laurent 級数体へ埋め込み、離散 valuation または zero valuation に帰着する。

1 generic な形式弧
 $\gamma : \operatorname{Spec} F[[t]] \rightarrow X, \quad -M \text{ pseudoeffective}$

非零 valuation を正規化、零 valuation も許す

[Corollary 5.1 · p. 12](#)

2 中心付き valuation と null 条件
 $\mathbb{C}(X) \hookrightarrow F((t)), \quad 0 \leq \ell(N_j) = \ell(M) \leq 0$

Theorem 1.1 を適用し共通分母を除く

[Theorem 1.1 · p. 3](#)

3 整数因子で零次数
 $N \sim_{\mathbb{Q}} L, \quad v_{\gamma}(N) = 0 \implies D = rN \sim rL$

形式弧へのexact attainmentの適用

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. null条件と中心を確認する

$\nu < n$ では ℓ は擬有効錐上非負、 $\ell(L) = 0$ だから $0 \leq \ell(N_j) = \ell(M) \leq 0$ となる。 $\nu = n$ では定義から $\ell = 0$ 。generic arcは $\mathbb{C}(X) \hookrightarrow F((t))$ を与え、 ord_t の像は零または $d\mathbb{Z}$ である。閉点の像 ξ で局所環が $F[[t]]$ へ入り、単元の次数が零となるので中心条件が成立する。

[Corollary 5.1 · p. 12](#)

2. 零次数を保って分母を除く

非零の場合は d で割り、零の場合もTheorem 1.1の許容するvaluationを使う。 $o(m_j)$ 条件はこの固定正規化で保たれる。得られた $N \sim_{\mathbb{Q}} L$ の係数と有理線形同値の分母を共通の $r > 0$ で除けば、 $D = rN \sim rL$ が有効整数因子で、弧の次数は厳密に零のままである。 X が点なら零因子を使う。

[Corollary 5.1 · p. 12](#)

6. Proposition 10.1 の証明 — Euler数から頂点を近似する

証明対象 : [Proposition 10.1 · p. 25](#)

主張は冒頭のProposition 10.1を参照する。Theorem 1.2より弱いコホモロジー仮定で、原典はTheorem 9.1の近似arc transferを使う。厳密な次数零の達成は必要ない。

1 source で Euler 数を保持

$$Q(m) = \chi(S_+, mA|_{S_+}), \quad Q(0) = \chi(W, \mathcal{O}_W) \neq 0$$

係数 $(m+1)A$ の hard Lefschetz と $-M$ の擬有効性

[\[DPS01, Theorem 2.1.1; Corollary 2.1.2, p. 8\];](#)

[\[LMPTX23, Theorem 4.1, 誌面 p. 1409 / PDF p. 17\]](#)

2 rank shift を持つ行列式

$$N_i \sim M + m_i A, \quad v(N_i) = \mu_M + s\mu_+$$

有界 arc order を任意に小さい正規化次数へ移す

[Theorem 9.1 · p. 21](#)

3 各頂点へ実際の指標を近づける

$$v(N)/r \rightarrow 0, \quad \langle \eta/r, \lambda \rangle \rightarrow \mu_+, \quad 0 \in \text{int } P$$

分母を払い、指標の和が零となる非零切断の積を取る

[Lemmas 6.1–6.2 · p. 13; §10, \(10.1\)–\(10.2\) · pp. 25–27](#)

4 有限個の有理凸結合を積にする

$$0 \in \text{conv}\{\eta_i/r_i\} \implies H^0(W, rA)^T \neq 0$$

sourceの最大指標、固定次数、頂点近似から不変積へ

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 非零Euler数をsourceの係数に残す

固定成分上の $A = -K_W$ の fiber character の凸包を P とする。非零cocharacter λ に対し、source成分 S_+ の重み μ_+ は nef 性と attracting decomposition により P の support function になる。忠実性と自然な反標準指標が接重みの和であることから $\mu_+ > 0$ 、従って 0 は P の内部にある。

固定点公式を無限大で展開すると、仮想コホモロジーの最大重み $m\mu_+$ の係数は

$Q(m) = \chi(S_+, mA|_{S_+})$ である。他成分の負の法線重みがこの最高係数への寄与を消す。連結トーラスは $H^j(W, \mathcal{O}_W)$ に自明に作用するため、 $Q(0) = \chi(W, \mathcal{O}_W) \neq 0$ 。Riemann–Roch と hard Lefschetz を係数 $(m+1)A$ で使い、一つの次数の捻った固有形式を非有界指数で得る。

[§10, \(10.1\)–\(10.2\) · pp. 25–27](#) [\[DPS01, Theorem 2.1.1; Corollary 2.1.2, p. 8\]](#)

2. 行列式のrank shiftが固定arc orderになる

形式のgeneric spanのrankを s 、飽和行列式を M とする。余接tensorへの包含と nef 反標準性から $-M$ は擬有効であり、 $p = 0$ では自明束として処理する。固定した有限個の基底形式で補ってwedgeを取り、

$$N_i \sim M + m_i A, \quad \text{section weight} = (m_i - s)\mu_+$$

を得る。generic orbit arcの次数はfiber weightからsection weightを引くので、 $v(N_i) = \mu_M + s\mu_+$ と一定になる。ここで s を落とすと次数計算が変わる。

§10, (10.1)–(10.2) · pp. 25–27 [LMPTX23, Theorem 4.1, 誌面 p. 1409 / PDF p. 17] Lemmas 6.1–6.2 · p. 13

3. 各頂点に近い実際の指標を掛ける

Theorem 9.1は任意に小さい $v(N)/r$ を持つ rA の切断を与える。その固有成分の一つは元の切断以下の次数を持ち、正規化指標は λ 方向で μ_+ へ近づく。すべてのcocharacterに対する非負次数から、実際の正規化指標は P 内にある。各頂点を露出する方向を選べばその頂点へ近づく指標が得られ、有限個を選んだ凸包にも 0 が残る。有理な凸結合の分母を払い、対応する非零切断の積を取ると自然不変切断になる。自明トーラスは近似transferの通常切断で終わる。

近似transfer自体は、固定因子のarc orderを零にし、nef reduction後の線束の一次jetを延長してbig性を得る経路である。その延長の全解析的証明はここでは再現しない。

Theorem 9.1 · p. 21 §9, (9.3)–(9.7) · pp. 22–24 Lemmas 6.1–6.2 · p. 13

7. Theorem 11.1 の証明 — 不変な商類を直接延長する

証明対象：Theorem 11.1 · p. 27

主張は冒頭のTheorem 11.1を参照する。ここでは不変性を最後まで保ち、頂点近似や一次jetの生成を経由しない。

1 極を制御した不変体

$$F = \{u \in \mathbb{C}(X)^T : bA - (u)_\infty \text{ pseudoeffective for some } b > 0\} \cup \{0\}$$

比が F に入るので全 $l \geq 1$ で不変随伴 rank 一

[§11, \(11.1\)–\(11.3\) · pp. 27–29](#); [Lemmas 8.2–8.4 · pp. 17–20](#)

2 不変 rank から有界計量と nef 降下

$$\tau \in H^0(S, aA_S - g^*L)^T, \quad L \text{ nef}, \quad q(Y) = 0$$

曲率集中と横断方向の非可積分性で商類を非零にする

[§11, \(11.4\)–\(11.5\) · pp. 29–30](#)

3 一点 fiber 上の非零不変商類

$$\mathcal{I}(h_J) = \mathcal{O}_S(-kP_\tau), \quad [s_E(\tau g^*e_L)^{p_0}] \neq 0$$

商への全射で持ち上げ、平均しても同じ非零類へ写す

[\[CDM17, Theorem 1.1, p. 2\]; §11, \(11.4\)–\(11.5\) · pp. 29–30](#)

4 延長・平均・例外因子の除去

$$H^0(S, mA_S + E)^T \neq 0 \implies H^0(X, mA)^T \neq 0$$

制御された不変体から nef な底と非零不変商類へ

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 不変体が全正指数の不変rankを強制する

F を、ある $b > 0$ で $bA - (u)_\infty$ が擬有効になる不変有理関数 u と零からなる体とする。極の不等式と連結トーラスの有限軌道の自明性により、 F は相対代数閉で有限生成である。底 Y の作用は自明で、底の任意の ample H に対し $bp^*A - f^*H$ が擬有効になる。

三指数の不変比は F に入るため、 δ_s/δ_r の水平次数は非負となる。normal equidimensional モデル上で垂直最小値を引いて、底線束 B と $\tau \in H^0(ap^*A - f^*B)^T$ を得る。各底素因子上には τ の次数零の成分がある。十分 ample な底捻りで不変随伴切断を大域化すると、その比の極も反標準で支配されるので F に入る。従ってすべての $l \geq 1$ で不変随伴 rank は一であり、通常 rank 一は仮定しない。

[§11, \(11.1\)–\(11.3\) · pp. 27–29](#)

2. 有界計量、nef reduction、局所的な極

Lemma 8.2ではsmoothな係数計量とcompact平均の直交商を使い、高次momentの極限から B の有界半正値計量を得る。 $q(X) = 0$ は $q(Y) = 0$ を与える。Lemma 8.3でnef reductionをflat modelへ移し、全収縮曲線上の数値自明性を確保する。Lehmannの数値pullbackと $\text{Pic}^0 = 0$ によるtorsionの除去から、 B はより小さい底のnef線束 L へ有理線形に降る。

$\dim Z = b > 0$ ならLemma 8.4で $B_k = kL + \epsilon H$ に一点へ集中する曲率を作る。十分大きい $m = ap_0$ に対し、式(11.4)の分解は $J = (m+1)A_S$ 上の不変計量 h_J とneat analytic singularitiesを持つ Ψ を与え、

$$i\Theta_{h_J} + (1+t)i\partial\bar{\partial}\Psi \geq 0 \quad (0 \leq t \leq 1), \quad \mathcal{I}(h_J) = \mathcal{O}_S(-kP_\tau)$$

となる。後者の等式は、残余特異因子の可積分性による十分性と、素因子上の整数極が可積分にならないことによる必要性を合わせたものである。

Lemmas 8.2–8.4 · pp. 17–20 [Leh15, Theorem 1.2, p. 1] [EKL95, Theorem 3.1, p. 14]
§11, (11.4)–(11.5) · pp. 29–30

3. 商類の非零性を保って平均し、例外因子を除く

Cao–Demailly–Matsumuraの延長定理は、 $K_S + J$ を係数に持つ $\mathcal{I}(h_J)/\mathcal{I}(h_J e^{-\Psi})$ の大域商類を持ち上げる。選んだfiber近傍の $s_E(\tau g^* e_L)^{p_0}$ は大きい方のイデアルに属し、fiber外で零と貼り合わさる。submersion点で係数がunitである一方、横断方向の極の指数 $3b/2 \geq b$ は局所非可積分性を強制するため、この商類は非零である。

底作用と枠作用が自明なので商類は不変である。延長した切断をcompact torusで平均しても同じ非零商類へ写る。こうして $mA_S + E$ の非零不変切断を得て、Jacobianの例外因子を除き X へ押し下げる。codimension二を越えて延長することで mA の大域不変切断を得る。底が点なら τ の押下げで直ちに終わる。

[CDM17, Theorem 1.1, p. 2] §11, (11.4)–(11.5) · pp. 29–30

8. Proposition 12.1 の証明 — 指標も保持する有限有効錐

証明対象：Proposition 12.1 · p. 31

主張は冒頭のProposition 12.1を参照する。これは一本のvaluationの零値達成ではなく、制御された不変素因子の類を一つの有限錐へ入れる主張である。

1 有限個を除き素因子を底へ送る

$$P \subset \mathbb{C}(V), \quad p^\diamond = \pi_* f^*, \quad p^\diamond[J]^T = 0$$

全零次 rank の特異直像計量と、係数 < 1 の加重近似

[PT14, Setup 3.2.1; Theorem 3.3.5, pp. 20, 24]; [OpenAI26f, Theorem 2.2, pp. 6–7]

2 加重可積分性と消える境界

$$|s_J|^2 e^{-\varphi} \in L^1, \quad D_0 = \Psi_-, \quad p^\diamond[D_0]^T = 0$$

随伴環の有限生成、weight-zero 射影、Gordan の補題

[CL12, Theorem A, p. 2]; §12.3, (12.10) · pp. 34–35

3 指標方向も含む近傍で有限生成

$$[D_0]^T \in \text{int conv}\{U_i^T\}, \quad R^T = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_b]$$

$D_0 + tR_0$ の次数を表し、消える補正を除き有限例外を加える

§12.3, (12.10) · pp. 34–35

4 次数の等式から有効有限錐へ

$$p^\diamond[R_0]^T \in \text{cone}\{p^\diamond[\text{div}(u_i)]^T\}$$

制御された極の体、消える境界、多重次数不変環

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 有限個を除く素因子を同じ底から引く

制御された素因子上だけに極を持つ関数の体を P とする。有理連結性は $\text{Pic}^0(V) = 0$ を与える。制御された素因子の類の有限個の基底を選ぶと、残りの素因子を含む主因子関係の関数は P に入り、その素因子は P の底へ垂直になる。適切な flat model を経由して、 V の素因子が底の余次元二以上へ写らないモデルを取る。

$p^\diamond = \pi_* f^*$ はこのモデル上で定まり、底の修正の例外因子を **divisor linearization** も含めて消す。有限個の例外を除き、制御された素因子 D は底の素因子 Q の $p^\diamond Q$ に一致する。Lemma 12.2 は全零次随伴 rank 一と有効不変補正 J を与え、 $p^\diamond[J]^T = 0$ となる。

§12.1; Lemma 12.2 · pp. 31–33

2. 加重近似から消える補正を作る

底 ample 方向を支配する擬有効性と smooth な計量を小さく混ぜ、 $\mathcal{I}(h) = \mathcal{O}_U$ かつ底方向に strict な係数計量を取る。Păun–Takayama の定理ではこの乗数イデアル条件が一般同型を保証する。rank 一の fiber 積分により $-K_Y + J$ の strict 計量が得られるが、可積分なのは $|s_J|^2 e^{-\varphi}$ である。

Controlled boundaryのTheorem 2.2は、 $\Psi = G/r - \sigma^* J - K_{Y'/Y}$ の係数をすべて1未満にし、 $D_0 = \Psi_-$ を $\sigma^* J$ と例外台に支持させる。従って $p^\diamond[D_0]^T = 0$ である。この等式は通常Picard群だけの等式ではなく、標準不変有理切断の押下げによって指標成分も零になる。近似定理の通常有理線形同値をそのまま同変同値とみなすことはしない。

[PT14, Setup 3.2.1; Theorem 3.3.5, pp. 20, 24] [OpenAI26f, Theorem 2.2, pp. 6–7]
§12.2, (12.5)–(12.9) · pp. 33–34

3. 不変環の有限生成を類の錐へ変換する

D_0 の周囲の有理多面体を $\text{Pic}^T(Y')_{\mathbb{R}}$ 内で選ぶ。小さい例外補正でample部分を確保し、各頂点の通常類を共通ample部分とSNC klt境界の随伴に書く。Cascini–Lazićの有限生成定理と共通可除指数により、多重次数環 R は有限生成となる。境界の一般代表自体が不変である必要はなく、 T 作用は実際の線形化された線束が定める。

生成元を固有成分へ分け、weight-zeroへの射影とGordanの補題により R^T も有限個の多重斉次元 u_i で生成される。任意の底の不変有効因子 R_0 に対し、小さい $t > 0$ で $[D_0]^T + t[R_0]^T$ を頂点の有理凸結合にし、分母とtorsionを払う。その標準切断を u_i の多項式で表して、同じ多重次数の非零単項式を一つ選ぶ。必要なのは次数の等式であり、元の切断との零因子の一致ではない。

$p^\diamond[D_0]^T = 0$ を使えば $p^\diamond[R_0]^T$ は $p^\diamond[\text{div } u_i]^T$ の錐に入る。最初に除いた有限個の不変素因子を加えれば、すべての制御された不変素因子を含む所要の有理多面錐となる。生成元は有効だが制御されるとは限らない。

[CL12, Theorem A, p. 2] §12.3, (12.10) · pp. 34–35

9. どの論文が、どの段階を担うか

入力

Metric descent, Theorem 2.1

利用箇所

§3.2、Theorem 1.1

役割・必要条件

全随伴rank一、equidimensional toroidalモデル、水平strict patchからunweighted計量と消える補正。

入力

Controlled boundary, Theorem 4.3

利用箇所

§§3.2–4, Theorem 1.1

役割・必要条件

二つの有理因子方向に共通の ϵ, k_0 を選び、実際の因子の環を有限生成にする。

入力

DPSのhard Lefschetz

利用箇所

§7.1, Theorem 1.2

役割・必要条件

lL のsmooth semipositivityで $(l-1)L$ 係数cohomologyの重みを形式へ上げる。

このexact attainment経路にはInvariant indicesの重み零指数定理を入力しない。局所化による extremal weight計算は本文内で行う。§§8–12にはnef reductionによる近似的移送と不変変換、controlled primeの錐による別経路があり、§§13–14は幾何学的構造定理を使う降下である。これらを Theorem 1.1の直接入力として矢印にしない。

後半の追加出力と未詳説範囲

Proposition 10.1, Theorem 11.1, Proposition 12.1は上で主張と核心を説明した。以下は残る別経路の位置付けであり、その全証明は詳説しない。

- Theorem 9.1 · p. 21は、 $q(W) = 0$ 、滑らかな半正値性、 $-M$ の擬有効性と有界arc orderの下で、任意の $\delta > 0$ に対する正規化次数 $< \delta$ を与える。Corollary 5.1の厳密結論に包含されるが、nef reductionによる別証明である。
- Theorem 12.4 · p. 36は有理連結の場合の自然不変非消滅で、Theorem 1.2に包含される結論の別証明である。§13 (p. 37) と§14 (pp. 38–39) は通常非消滅へ降ろす二つの構成を記すが、その詳細は未確認である。

§§13–14 · pp. 37–39

10. 原典を読む入口と確認範囲

- Lemma 2.1 · pp. 5–6 — 有限生成環から境界rayの元を実際を選ぶ。
- Proposition 2.2 · pp. 7–8 — 例外補正をpushforwardで消した後にvaluationを比較する。
- Lemmas 3.1–3.2 · pp. 9–10 — nullな極を持つ関数体と全rank一。
- §4, (4.1) · pp. 11–12 — 固定補助lineを二方向の因子へ符号付きで表す。
- §7.1 · p. 14 — sourceの極端なcohomological weight。
- §7.3 · p. 15 — exact orderから実際の指標と不変積へ。
- §10, (10.1)–(10.2) · pp. 25–27 — Euler数と行列式rank shiftから頂点近似へ。
- §11, (11.4)–(11.5) · pp. 29–30 — 不変商類を非零のまま持ち上げる。
- §12.3, (12.10) · pp. 34–35 — 次数の等式を指標付き有限錐に変換する。

著者の主張・証明経路を、固定版の§§1–7の本文に基づいて整理した。編集側では任意の固定 M 、中心付き／零valuation、全rank一、共通有限生成環、例外補正を消してからのvaluation評価、左作用の符号と行列式rank shiftを照合した。同カタログの非加重環・toroidal計量・加重近似の3入力、およびDPSの定理記述を照合した。追補ではCDM17の商類延長、CL12の多重随伴環、Leh15の数値pullback、EKL95のSeshadri下界、PT14の一般同型条件、LMPTX23の負の行列式の記述と使用箇所を確認した。局所化・attracting decomposition、Calabi–Yau、toroidal化の外部定理の全記述照合は未完了であり、追補では§§10–12.3の主要3結果と§8の入力、§9のtransfer核心も読解した。外部のnef reduction存在・Hilbert/flattening・Picard torsionの全記述再照合と、Theorem 12.4・§§13–14の証明詳細は範囲外である。全証明の独立再検証や専門家査読ではない。