

OpenAI Math Digest

CATALOGUE 067

6次元のCampana–Petersen予想

カタログ案内と1篇の証明概説

独立した非公式の読解ガイド・日本語版

収録版: 2026-10-13

制作: Masataka Iwai・大阪大学

AI生成の解説には誤りや不正確な説明が含まれる可能性があります。重要な主張・証明は原論文でご確認ください。本冊子はWebサイトの解説をまとめたもので、原論文そのものではありません。専門家査読・形式検証は未実施です。

目次

カタログ案内に続き、収録論文1篇の解説を掲載しています。目次・引用はクリックできます。横長の表は紙面向けの項目一覧に組み直し、主張と参照先を保持しています。

00・カタログ067 案内	3
---------------	---

01・The Campana–Peternell conjecture in dimension six	5
--	---

原論文の参照版: 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a

[カタログ067 · 案内](#)[Web版を読む ↗](#)

CATALOGUE 067

6次元のCampana–Peternell予想

The Campana–Peternell conjecture in dimension six

このカタログは1本を収録する。一般のCampana–Peternell予想のうち複素次元6を扱い、既知のPicard数・擬指数の分類と、二つのファイバー構造から得る特性数制約・VMRT認識を結び付ける。Albaneseファイバーの次元が6以下のコンパクトKähler多様体の通常の普遍被覆への帰結も含む。

1. 公式順の記事一覧

主結果の範囲を短くまとめています。正確な仮定と定式化は併記した原典の結果を参照してください。

[カタログ 067 · 2026-10-13 確認の固定参照版](#)

#

01

論文・概説

[The Campana–Peternell conjecture in dimension six →](#)

図中の略称: The Campana–Peternell conjecture in dimension six

September 25, 2026 · 27 ページ

[原論文 \(GitHub\) ↗](#)

主に何を主張するか

nef接束を持つFano六次元多様体の有理等質性。Albaneseファイバーの次元が6以下の場合の普遍被覆と正Kähler–Einstein計量への帰結。

[Theorem 1.1 · p. 2; Corollary 1.2 · p. 4; Corollary 7.1 · p. 21 ↗](#)

議論の役割・概説

既知のPicard数・擬指数の分類に、二重のファイバー構造から得る特性数制約とVMRT認識を接続する。

[証明概説を読む →](#)

2. 読む入口

記事の全体図では、 $\rho \geq 2$ の既知の枝と $\rho = 1$ で残る擬指数 $4 \cdot 5$ を分ける。数値制約とVMRT認識が本稿の中心である。Albaneseの系では有限被覆上の束と普遍被覆上の積を区別する。

入力はカタログ外の既知文献である。本原稿の本文・参考文献で他のOpenAI原稿への直接引用は確認されなかった。その他のカタログとの包含・一般化関係は未調査である。

3. 原典と確認範囲

公式の番号・名称は固定版OpenAI Research Catalogのoverview PDF p.8、収録順は同版CONTENTSに照合した。原稿は2026年9月25日版、参考文献を含め27ページである。

OpenAI Research Catalog · Catalogue 067 · p. 8 Theorem 1.1; Corollary 1.2 · pp. 2–4

主結果と証明の主要接続、既知入力の記事と適用箇所を本部が自己点検した。独立査読・全証明の形式検証ではない。原典別の確認範囲と残る未確認は記事末尾を参照。

The Campana–Petersen conjecture in dimension six

二つのファイバー構造から特性数を制約し、VMRTを認識する

Campana–Petersen予想の一般形は、nef接束を持つ滑らかな複素射影Fano多様体が任意次元で有理等質多様体になるという主張である。本原稿が新たに扱うのは複素次元6である。Picard数が大きい既知の場合を切り離し、Picard数1の極小有理曲線族を調べる。中心となる擬指数5の計算は、評価写像の3次元ファイバーと曲線パラメータ空間の間に交点数を比較する。

原稿の著者: OpenAI · September 25, 2026 · 27 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — Fano六次元多様体の有理等質性

X を滑らかな連結複素射影Fano多様体とする。 $\dim_{\mathbb{C}} X = 6$ かつ T_X がnefなら、 X は有理等質多様体、すなわち連結半単純複素代数群 G と放物型部分群 P に対する G/P に同型である。Picard数に追加条件は課さない。これは任意のnef接束を持つ六次元射影多様体をFanoと仮定せず分類する主張ではない。

Theorem 1.1 · p. 2

Corollary 1.2 — Albaneseファイバーと通常の普遍被覆

X を解析的な意味でnefな正則接束を持つ連結コンパクトKähler多様体とし、

$$\tilde{q}(X) = \max\{h^1(X', \mathcal{O}_{X'}) : X' \rightarrow X \text{ は連結有限étale被覆}\}, \quad d = \dim_{\mathbb{C}} X - \tilde{q}(X)$$

と置く。 $0 \leq d \leq 6$ なら、連結有限étale被覆 $X' \rightarrow X$ で次を満たすものがある。

1. $\alpha : X' \rightarrow A = \text{Alb}(X')$ は連結ファイバーを持つ滑らかな固有全射で、 A は次元 $\tilde{q}(X)$ の複素トーラスである。全ファイバーは次元 d の有理等質多様体であり、 $d = 0$ では点を許す。

2. 一つのファイバー F を固定すると、 α は正則局所自明な F 束であり、 X の通常の普遍被覆は

$$\tilde{X} \simeq F \times \mathbb{C}^{\tilde{q}(X)}$$

となる。この積は準射影多様体に双正則で、正則凸である。Remmert還元は $F \times \mathbb{C}^{\tilde{q}(X)} \rightarrow \mathbb{C}^{\tilde{q}(X)}$ という射影である。特に $\dim_{\mathbb{C}} X \leq 6$ なら全結論が成立する。 A の射影性や X' 自体の直積性は結論に含まれない。

Corollary 1.2 · p. 4

Corollary 7.1 — 正Kähler–Einstein計量

X を nef 接束を持つ滑らかな連結複素射影Fano多様体とし、 $1 \leq \dim_{\mathbb{C}} X \leq 6$ とする。Ricci形式を $\rho(\omega) = -i\partial\bar{\partial} \log \det(g_{a\bar{b}})$ とする規約の下で、

$$\rho(\omega) = \omega, \quad [\omega] = 2\pi c_1(-K_X)$$

を満たすKähler形式 ω が存在する。

Corollary 7.1 · p. 21

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [The Campana–Peternell conjecture in dimension six](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [Kan16](#) Akihiro Kanemitsu — Fano n -folds with nef tangent bundle and Picard number greater than $n - 5$: Picard数の大きい場合と次元5以下の分類。arXiv:1505.02952v1, 12 May 2015; published 2016。
- [Kan17](#) Akihiro Kanemitsu — Fano 5-folds with nef tangent bundles : 極小有理曲線族と擬指数4の評価写像の分解。arXiv:1503.04579v1, 16 March 2015; published 2017。
- [DH17](#) Thomas Dedieu and Andreas H\"oring — Numerical characterisation of quadrics : 擬指数が次元以上の場合の射影空間・二次超曲面の認識。Author manuscript dated 9 December 2016; published 2017。
- [Mok08s](#) Ngaiming Mok — Geometric structures on uniruled projective manifolds defined by their varieties of minimal rational tangents : 1次元VMRTの分類による擬指数3の除外。Astérisque 322 (2008), 151–205; published scan。
- [Keb02](#) Stefan Kebekus — Families of singular rational curves : 一般点での接写像の有限性。arXiv:math/0004023v2, 6 June 2000; published 2002。
- [HM99](#) Jun-Muk Hwang and Ngaiming Mok — Varieties of minimal rational tangents on uniruled projective manifolds : 接方向の張る分布の可積分性と非可積分性。Several Complex Variables, MSRI Publications 37 (1999), 351–389; published PDF with cover。

- [Mok08r](#) Ngaiming Mok — Recognizing certain rational homogeneous manifolds of Picard number 1 from their varieties of minimal rational tangents : Segre VMRTからGr(2,5)を認識。Author PDF IMR2005-09, 22 pages; published in AMS/IP 42 (2008), 41–61。
- [EGHP06](#) David Eisenbud, Mark Green, Klaus Hulek, and Sorin Popescu — Small schemes and varieties of minimal degree : 次数3の非退化3次元像をscrollに絞る。arXiv:math/0404517v5, 15 November 2004; published 2006。
- [Del71](#) Pierre Deligne — Théorie de Hodge: II : 不変サイクル・固定部分からHodge直像の自明性を得る。Publications Mathématiques de l’IHÉS 40 (1971), 5–57; published scan。
- [BS58](#) Armand Borel and Jean-Pierre Serre — Le théorème de Riemann–Roch : 相対Riemann–Rochによる特性数の消滅。Bulletin de la Société Mathématique de France 86 (1958), 97–136; published scan。
- [DPS94](#) Jean-Pierre Demailly, Thomas Peternell, and Michael Schneider — Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles : 最大不正則度の被覆とFanoファイバーを持つAlbanese写像。Author manuscript dps1.pdf, 47 pages; published J. Algebraic Geometry 3 (1994), 295–345。
- [BB96](#) Frédéric Bien and Michel Brion — Automorphisms and local rigidity of regular varieties : 有理等質多様体の局所剛性。Compositio Mathematica 104 (1996), 1–26; published scan。
- [Poc25](#) Paweł Poczobut — An algebraic variant of the Fischer–Grauert Theorem : Theorem 1.1に再掲された解析的Fischer–Grauert定理。Mathematische Zeitschrift 310, Article 33 (2025), published 25 April 2025。
- [CHK13](#) Benoît Claudon, Andreas Höring, and János Kollár — Algebraic varieties with quasi-projective universal cover : Steinかつ可縮な底の普遍被覆上での分裂。Author manuscript universal-final.pdf, 14 pages; published J. reine angew. Math. 679 (2013), 207–221。
- [Dem18](#) Jean-Pierre Demailly — Fano manifolds with nef tangent bundles are weakly almost Kähler–Einstein : §1で再掲する等質多様体の正Kähler–Einstein計量。Author manuscript special_issue_mok.pdf, 6 pages; published Asian J. Math. 22 (2018), 285–290。

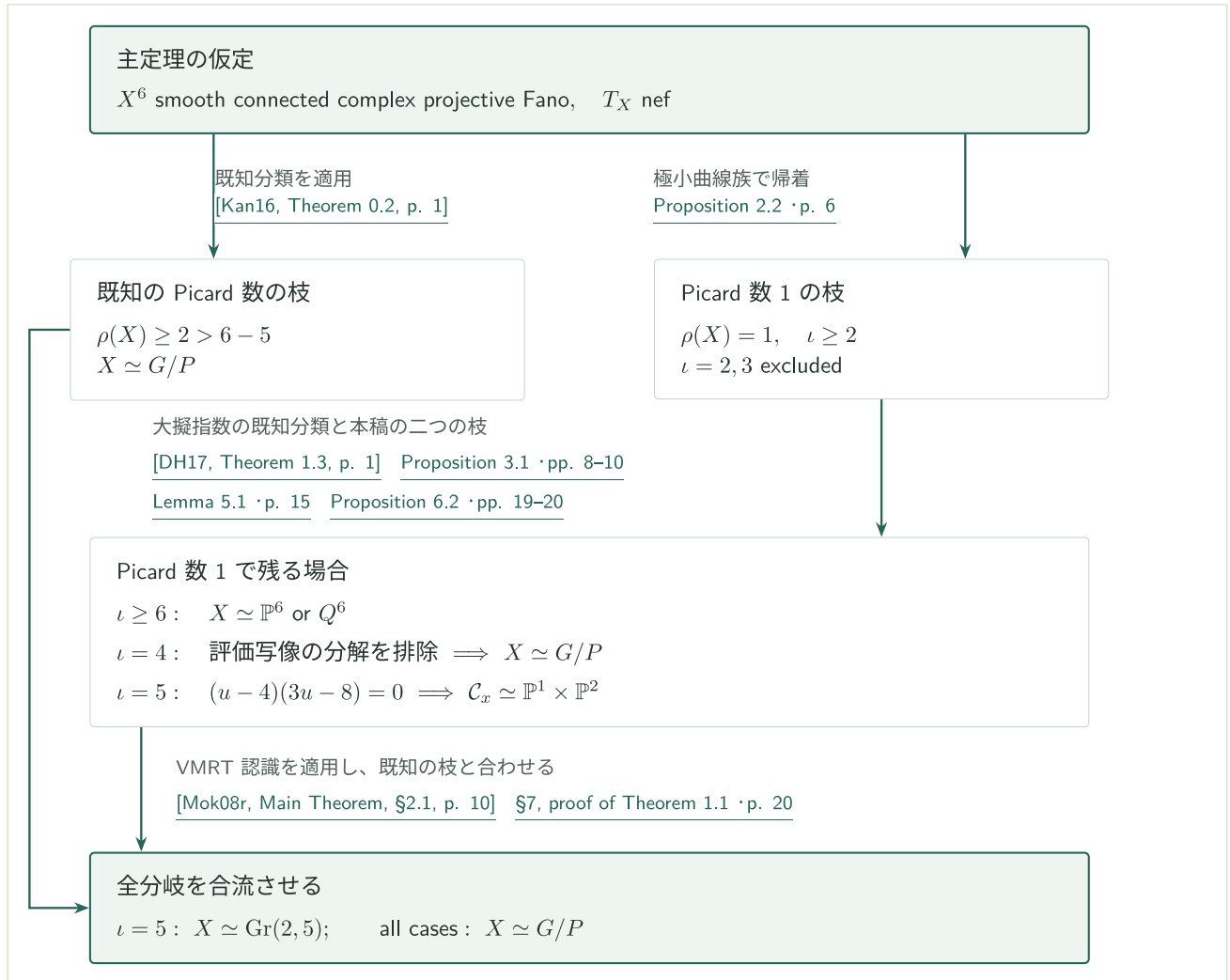
各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

以下は原稿の論証の解説である。外部入力の記事と適用箇所の照合、原稿本文の読解、全証明の独立検証を区別する。Fischer–Grauertと等質計量の入力は、それぞれPoczobutとDemaillyによる再掲を照合している。

2. Theorem 1.1 の証明 — Picard数と擬指数の全分岐

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · p. 2

証明の道筋。 主定理に対し、 $\rho(X) \geq 2$ を既知の分類で処理し、 $\rho(X) = 1$ で擬指数 ι を分ける。原典の擬指数の記号 d は、系のファイバー次元と区別するためこの記事では ι と書く。擬指数4では評価写像の分解を排除し、擬指数5の数値制約をVMRTの認識へ渡す。



Picard数と擬指数による分類の全体図

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 既知のPicard数の範囲を切り離す

射影性より $\rho(X) \geq 1$ 。 $\rho(X) \geq 2$ なら $\rho(X) > 6 - 5$ なので Kanemitsu の分類が適用できる。原稿はこの枝の収縮やファイバーを改めて分類せず、既知結果を直接入力する。残りは $\rho(X) = 1$ である。

[Kan16, Theorem 0.2, p. 1]

2. 極小曲線族による擬指数の帰着

最小反標準次数 ι の曲線族 V と普遍族 $\pi: U \rightarrow V$ 、評価写像 $e: U \rightarrow X$ を取る。nef 性はすべての曲線を free にし、次数の最小性は分裂を禁じる。既知の極小族の定理から U, V は滑らかで射影的、 π は滑らかな $\mathbb{P}^1$ -fibration、 e は相対次元 $\iota - 2$ の滑らかな全射で連結ファイバーを持つ。原稿の Proposition 2.1 は、各 π -ファイバー C 上で

$$T_e|_C \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{\oplus(\iota-2)}$$

を示す。写像空間を微分して $H^0(T_U|_C) \rightarrow H^0(e^*T_X|_C)$ が全射となり、両辺の次元が等しいことから核の H^0, H^1 が消える。一般の曲線だけでなく全ファイバー上の分裂であることが、後の束の降下に必要なことになる。

Proposition 2.1 · pp. 5–6 [Kan17, Proposition 1.6, p. 4]

微分 $\mathcal{O}(2) \rightarrow \varphi^*T_X$ から $\iota \geq 2$ 。 $\iota = 2$ なら e が同型になり、 $X \rightarrow V$ の曲線ファイバー上で次数0の非零 nef 因子が得られ、 $\rho(X) = 1$ に反する。 $\iota = 3$ では有限接写像により VMRT が1次元となり、 Mok–Hwang の分類に現れる次元は2、3、5であって6ではない。 $\iota \geq 6$ なら全有理曲線 B に $-K_X \cdot B \geq 6$ が成立し、 Dedieu–Höring より $X \simeq \mathbb{P}^6$ または Q^6 となる。

Proposition 2.2 · p. 6 [Mok08s, Theorem 15, 誌面 p. 199 / PDF p. 50] [DH17, Theorem 1.3, p. 1]

3. 残る二枝を合流させる

$\iota = 4$ は Proposition 3.1、 $\iota = 5$ は Proposition 6.2 へ進む。前者は有理等質性、後者は $X \simeq \text{Gr}(2, 5)$ を与える。擬指数4の議論で最後に残る評価写像が $\mathbb{P}^2$ -fibration なら、外部の Proposition 4.1 は $\mathbb{P}^3$ または $\text{LG}(3, 6)$ まで同定し、六次元では後者となる。この細分は主定理に余分な仮定を加えない。以上で全 Picard 数・全擬指数の枝が主定理へ接続する。

Proposition 3.1 · pp. 8–10 Proposition 6.2 · pp. 19–20 [Kan17, Proposition 4.1; Remark 4.2, p. 12]
§7, proof of Theorem 1.1 · p. 20

3. Proposition 3.1 の証明 — 擬指数4と二つの収縮

証明対象： Proposition 3.1 · pp. 8–10

Proposition 3.1 — 擬指数4の六次元多様体

X を滑らかな複素 Fano 六次元多様体とする。 T_X が nef、 $\rho(X) = 1$ 、擬指数が4なら、 X は有理等質多様体である。

Proposition 3.1 · pp. 8–10

評価写像の分解の枝を仮定

$$U \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} X, \quad q: W \rightarrow Y, \quad \dim W = 7$$

nef 性と二つの曲線族から相対次数を得る

[Kan17, Theorem 3.3, p. 9] [Kan17, Remark 2.3, p. 5]

相対次数を固定し、候補を絞る

$$a = b = -1, \quad q\text{-fibres} : \mathbb{P}^2, Q^3, K(G_2)$$

Hard Lefschetz と対合を適用する

Proposition 3.1 · pp. 8–10

Betti 数と交点数で二つの候補を排除

$$\mathbb{P}^2 : b_6 = b_4 - 1; \quad m_1 = m_2 = 5m_4 > 0, \quad m_3 = 3m_4$$

$$\dim Y = 4, \quad q\text{-fibre} = Q^3$$

直交束の相対二次超曲面として計算する

Proposition 3.1 · pp. 8–10

整数性との矛盾から有理等質性へ

$$q_*(-K_q)^4 = 0, \quad -K_q = 3h - \lambda z, \quad \lambda \in \mathbb{Z}$$

$$0 = 81m_3 - 108\lambda m_4 \implies \lambda = 9/4$$

評価写像の分解とファイバー候補の排除

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 分解と相対次数を固定する

Kanemitsuの結果は、有理等質性を与える場合か、 $e = g \circ f : U \rightarrow W \rightarrow X$ で f, g, π が滑らかな $\mathbb{P}^1$ -fibrationとなる場合へ分ける。後者には滑らかな初等Mori収縮 $q : W \rightarrow Y$ があり、 $\dim W = 7$ 。 $H = c_1(T_X)/4$ 、 $h = g^*H$ 、 $c = c_1(T_g)$ 、 C を π -ファイバーとして $a = c_1(T_f) \cdot C$ 、 $b = c \cdot f(C)$ と置く。 $T_e|_C = \mathcal{O}(-1)^{\oplus 2}$ より $a + b = -2$ 、 $a \leq -1$ 。 $c - bh$ は Y の豊富類の正の倍の引き戻しであり、 $g_*c = 2$ 、 $g_*c^2 = 0$ から $b \leq 0$ を得る。 $b = 0$ は適切な曲線 $D \subset X$ 上の曲面 $g^{-1}(D)$ が q で2次元像を持つことと交点数0を衝突させて除外し、 $a = b = -1$ となる。

[Kan17, Theorem 3.3, p. 9] [Kan17, Proposition 4.1; Remark 4.2, p. 12] Lemma 2.3 · p. 7
Proposition 3.1 · pp. 8–10

2. ファイバー候補を二次三次元まで絞る

相対次数 -1 を入力すると q のファイバー候補は $\mathbb{P}^2, Q^3, K(G_2)$ となる。 $\mathbb{P}^2$ の場合、二つのLeray–Hirsch分解と Y のPoincaré双対性が $b_6(X) = b_4(X) - 1$ を与え、Hard Lefschetzに反する。残る場合には $z = (h + c)/2$ が Y から降下し、 $\dim Y \leq 4$ より $z^5 = 0$ である。

$$m_i = \int_W h^{7-i} z^i, \quad m_0 = m_5 = m_6 = m_7 = 0, \quad m_1 = \int_X H^6 > 0.$$

g のコホモロジー対合は $z \mapsto h - z$ となり、最高次で符号を反転する。偶数指数の関係から $m_1 = m_2 = 5m_4$ 、 $m_3 = 3m_4$ を得る。従って $m_4 > 0$ 、 $\dim Y = 4$ となり、 $K(G_2)$ の枝も消えて q は Q^3 -fibrationとなる。

[Kan17, Remark 2.3, p. 5] Proposition 3.1 · pp. 8–10

3. 直交束の消滅と整数性を衝突させる

Fischer–Grauertで局所自明化し、 $\mathrm{Aut}(Q^3) = \mathrm{PGO}_5 \simeq \mathrm{SO}_5$ を使うと、 W は行列式自明な階数5の直交束の相対二次超曲面となる。原稿はGAGAで代数化し、随伴公式から $q_*(-K_q)^4 = 0$ を得る。他方 $-K_q = 3h - \lambda z$ で、 g のファイバーとの次数から $\lambda \in \mathbb{Z}$ 。射影公式は

$$0 = \int_W (-K_q)^4 z^3 = 81m_3 - 108\lambda m_4$$

を与え、 $m_3 = 3m_4$ から $\lambda = 9/4$ となって矛盾する。分解の枝が消え、既知の有理等質な場合だけが残る。原稿はWatanabeの同じ擬指数4の結果も挙げるが、ここで説明したのは原稿自身の交点論的な別証明である。

[Poc25, Theorem 1.1 (Fischer–Grauert), p. 1] Proposition 3.1 · pp. 8–10

4. Lemma 5.1 の証明 — 幾何学的制約から二次方程式へ

証明対象：Lemma 5.1 · p. 15

$\rho(X) = 1, \iota = 5$ とし、 $\dim U = 9, \dim V = 8$ 。 $h = e^*c_1(T_X)/5$ 、 $c = c_1(T_\pi)$ 、 $\ell = 2h - c$ 、 $E = T_e$ と置く。 r, s, t は E の形式的Chern根に h を足した三つの根の基本対称式とする。 h を整数係数のline bundleの第一Chern類と仮定しない。一般の評価ファイバー $F = e^{-1}(x)$ には有限接写像 $\tau_x : F \rightarrow \mathbb{P}(T_x^*X) \simeq \mathbb{P}^5$ があり、 $L = \tau_x^*\mathcal{O}(1)$ は豊富かつ大域生成、 $c_1(L) = \ell|_F$ 、 $r|_F = c_1(T_F)$ である。

Lemmas 4.1–4.2 · pp. 10–11 [Keb02, Theorems 3.3–3.4, pp. 7–8]

Lemma 5.1 — 数値制約

A, C_1, N を原典§4の有理係数行列・添字集合とする。具体的に、 A は重み9の交点単項式に対する(4.11)–(4.16)の関係行列、 C_1 は(4.18)の129個の選択座標である。 $\ker A$ の基底からその座標を選んだ行列を P とし、 N は $\ker(P^T)$ の基底の行簡約形の非零行から作る。 $\xi \in \mathbb{Q}^{11}$ 、 $\eta \in \mathbb{Q}^{18}$ が

$$\xi_0 = \eta_0 = 1, \quad N(\xi_i \eta_j)_{(i,j) \in C_1} = 0$$

を満たすなら、 $32 - 20\eta_1 + 3\eta_1^2 = 0$ 。幾何学から構成する座標では $\eta_1 = u = c_1(T_F)L^2/L^3$ である。

Lemma 5.1 · p. 15 §§4.4–4.5; (4.11)–(4.19) · pp. 13–15

二つの滑らかな射を使う

$$\pi : U^9 \rightarrow V^8, \quad e : U^9 \rightarrow X^6, \quad E = T_e$$

ℓ, r, s, t descend to V

降下する類の消滅、固定部分、相対 GRR を使う

[Lemma 4.3; \(4.4\) · p. 12](#) [§§4.4–4.5; \(4.11\)–\(4.19\) · pp. 13–15](#)

線形の交点制約を構成する

$$Av = 0, \quad A \in \text{Mat}_{1785 \times 581}(\mathbb{Q})$$

$$e_* \text{td}_i(E) = e_* [\text{td}(E) \text{ch}(E^*)]_i = 0 \quad (i > 3)$$

重み $3 \cdot 4$ の直像を一つの数で表す

[§§4.4–4.5; \(4.11\)–\(4.19\) · pp. 13–15](#)

射影公式で選択座標を積へ変える

$$N(\xi_i \eta_j)_{C_1} = 0, \quad |C_1| = 129, \quad \xi_0 = \eta_0 = 1$$

$$\eta_1 = u = c_1(T_F)L^2/L^3$$

三次の積へ持ち上げ、有限体上界と有理基底を結合

[§§5.1–5.3 · pp. 16–18](#)

有理数上の二次関係を得る

$$\dim_{\mathbb{Q}} K_3 \leq 6; \quad 6 \text{ rational columns, } \det = -16/5$$

$$32 - 20u + 3u^2 = 0 \iff u = 4, 8/3$$

交点関係、射影公式、正確算術による二次制約

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 二つの射から線形関係を取り出す

$\delta = \pi^* \pi_*$ とすると、 π の対合は $\bar{\alpha} = \alpha - c\delta\alpha$ 、 $\delta(\alpha\gamma) = (\delta\alpha)\gamma + \bar{\alpha}\delta\gamma$ を満たす。実際の line bundle $e^*(-K_X) \otimes (T_\pi^*)^{\otimes 2}$ のファイバー次数は 1 で、 E とのテンソル積は全 π -ファイバー上で自明になる。これを降下させると r, s, t も V から来る。従って V から来る重み 9 の積は消え、 X から来る重み 7 以上の類も消える。

さらに X の単連結性と Deligne の固定部分の結果を使い、原稿の Lemma 4.3 は $R^j e_* \Omega_{U/X}^p$ の自明性を導く。相対 GRR を $\mathcal{O}_U$ と E^* へ適用すると

$$e_* \mathrm{td}_i(E) = 0, \quad e_* [\mathrm{td}(E) \mathrm{ch}(E^*)]_i = 0 \quad (i > 3).$$

これらを同じ重みの多項式に展開したものが $Av = 0$ である。最後の関係は積分の消滅であり、すべての多項式がコホモロジー類として 0 だと読み替えない。

Lemma 2.3 · p. 7 Lemmas 4.1–4.2 · pp. 10–11 Lemma 4.3; (4.4) · p. 12

[Del71, Theorem 4.1.1 (ii), 誌面 p. 40 / PDF p. 37] [Del71, Corollary 4.1.2, 誌面 p. 42 / PDF p. 39]

[BS58, §7, Riemann–Roch theorem, 誌面 p. 113 / PDF p. 18]

2. 射影公式が積の構造を供給する

重み $3 \cdot 4$ の不変単項式 G_j の e_* は、それぞれ $H^0(X, \mathbb{Q})$ 、 $H^2(X, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}h_X$ に入る。そのため $D = L^3 > 0$ を使い $e_* G_j = D\eta_j h_X^{w_j-3}$ と一つの数で記述できる。重み 6 の底の単項式 M_i の正規化交点数を ξ_i とすると、射影公式は選択座標を共通の正数 $D \int_X h_X^6$ で割ったものが $\xi_i \eta_j$ に等しいことを示す。線形関係だけでなく、この積の構造が非線形制約の入力となる。

§§4.4–4.5; (4.11)–(4.19) · pp. 13–15

3. 有限体の階数と有理数上の証明を結合する

$N(\xi_i \eta_j) = 0$ を $\eta_a \eta_b$ 倍し、同じ三つ組を同一視した座標上の線形空間 K_3 を作る。原稿の有限体 $\mathbb{F}_{10007}$ 上の計算は 6820 座標における核次元 6 を与え、有理数上では $\dim K_3 \leq 6$ という上界になる。さらに有理数上で二重スライスの全関係を満たす 6 本の列を与え、ある小行列式 $-16/5 \neq 0$ を確認して基底とする。線形汎関数

$$32v_{0,(0,0,0)} - 20v_{0,(0,0,1)} + 3v_{0,(0,1,1)}$$

はこの基底上で 0 となる。積座標へ戻して $\xi_0 = \eta_0 = 1$ を使えば、 $(u-4)(3u-8) = 0$ が従う。有限体だけで有理恒等式を断定する議論ではない。付録はこの有限計算の実行可能な証明書を与える。

§§5.1–5.3 · pp. 16–18 Appendix A · pp. 22–25

5. Proposition 6.2 の証明 — 数値制約から Grassmann 多様体へ

証明対象：Proposition 6.2 · pp. 19–20

Proposition 6.2 — 擬指数5の認識

X を滑らかな複素Fano六次元多様体とする。 T_X がnef、 $\rho(X) = 1$ 、擬指数が5なら、 $X \simeq \text{Gr}(2, 5)$ である。

Proposition 6.2 · pp. 19–20

有限接写像と二次制約

$$\tau_x : F^3 \rightarrow \mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}^5, \quad L = \tau_x^* \mathcal{O}(1) \\ u = 4 \text{ or } 8/3$$

分布の可積分性と非可積分性を衝突させる

[Lemma 6.1 · p. 19](#) [\[HM99, Propositions 1.2.1–1.2.2, 誌面 pp. 356–357 / PDF pp. 7–8\]](#)

線形非退化性と切断種数

$$\langle \mathcal{C}_x \rangle = \mathbb{P}^5, \quad L^3 \geq 3 \\ 0 \leq g(B) = 1 + (1 - u/2)L^3$$

最小次数分類と正規性で接写像を同型にする

[\[EGHP06, Theorem 0.1, p. 2\]](#) [Proposition 6.2 · pp. 19–20](#)

次数3の滑らかな Segre 像

$$u = 8/3, \quad L^3 = 3, \quad \deg \tau_x = 1 \\ \mathcal{C}_x \text{ normal} \implies F \simeq \mathcal{C}_x \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$$

Picard 数1とモデルの VMRT 同値を入力する

[\[Mok08r, Main Theorem, §2.1, p. 10\]](#)

Grassmann 多様体を認識

$$\mathcal{C}_x \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5 \\ X \simeq \text{Gr}(2, 5)$$

非退化性、切断種数、scrollの正規性とVMRT認識

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 接方向像は全空間を張る

$\mathcal{C}_x = \tau_x(F)$ のアフィン錐が真部分空間 $W_x \subset T_x X$ を張ると仮定すると、 $4 \leq \dim W_x \leq 5$ 。接二重ベクトル $\alpha \wedge v$ が $\bigwedge^2 W_x$ を張らなければ、これらを除く非零交代形式が存在し、錐の4次元接空間は等方的となる。階数の評価から残るのは $\dim W_x = 5$ 、交代形式の階数2だけである。しかし2次元の symplectic 商への錐の像は高々1次元の既約錐、従って直線となり、 W_x を張ることに反する。よって二重ベクトルは全空間を張る。

Hwang–Mokの一方の命題はこの条件から分布の可積分性を与え、他方は $b_2(X) = 1$ かつVMRTが線形退化という仮定から非可積分性を与える。この矛盾で $\mathcal{C}_x \subset \mathbb{P}^5$ の非退化性が従う。VMRTの滑らかさはまだ使わない。

Lemma 6.1 · p. 19 [HM99, Propositions 1.2.1–1.2.2, 誌面 pp. 356–357 / PDF pp. 7–8]

2. 切断種数で次数と接写像の次数を決める

大域生成かつ豊富な L の一般の2切断の交わり B は、BertiniとKodaira消滅による連結性から滑らかな連結曲線となる。随伴公式と有限射の次数公式は

$$g(B) = 1 + (1 - u/2)L^3 \geq 0, \quad L^3 = \deg(\tau_x) \deg(\mathcal{C}_x) \geq 3$$

を与える。 $u = 4$ は負の種数を与えて不可能。 $u = 8/3$ なら $g(B) = 1 - L^3/3$ であり、 $L^3 = 3$ 、 $\deg(\tau_x) = 1$ 、 $\deg(\mathcal{C}_x) = 3$ となる。

Proposition 6.2 · pp. 19–20 [EGHP06, Theorem 0.1, p. 2]

3. 正規性を通じてSegre像を認識する

最小次数の分類により $\mathcal{C}_x$ は次数3の3次元有理正規scrollで、錐の可能性も残る。原稿はその座標環を重み $(-a_1, -a_2, -a_3, 1, 1)$ の $\mathbb{G}_m$ 作用の不変環として表し、正規性を示す。有限双有理な τ_x はそこで初めて同型になり、 F の滑らかさが像へ移る。錐を排除すると $a_i > 0$ 、 $\sum a_i = 3$ より $(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 1)$ 、すなわち $\mathcal{C}_x = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ である。

これは $T_A \operatorname{Gr}(2, 5) = \operatorname{Hom}(A, \mathbb{C}^5/A)$ 内の階数1写像の射影化に一致する。 $\operatorname{Gr}(2, 5)$ は階数2の既約コンパクトHermitian対称空間であり、 X のPicard数1と一般点での射影的VMRT同値が揃ったので、MokのMain Theoremが $X \simeq \operatorname{Gr}(2, 5)$ を与える。

[EGHP06, Theorem 0.1, p. 2] Proposition 6.2 · pp. 19–20 [Mok08r, Main Theorem, §2.1, p. 10]

6. Corollary 1.2 の証明 — Albanese束から普遍被覆へ

証明対象：Corollary 1.2 · p. 4

系の主張に戻り、ここでは d をファイバー次元、 $q = \tilde{q}(X)$ とする。

最大不正則度を実現する被覆

$$X' \rightarrow X, \quad q = \tilde{q}(X), \quad d = \dim X - q \leq 6$$

滑らかで連結な Fano ファイバーを得る

[DPS94, Theorem 3.14, p. 31] [Kan16, Theorem 0.2, p. 1]

Albanese ファイバーを分類

$$\alpha: X' \rightarrow A, \quad \dim A = q$$

$d = 6$: Theorem 1.1; $1 \leq d \leq 5$: $\rho(F) > d - 5$; $d = 0$: $F = \text{pt}$

剛性と Fischer–Grauert、Stein 可縮底での分裂を使う

[Poc25, Theorem 1.1 (Fischer–Grauert), p. 1] [CHK13, Theorem 4.4, p. 11]

局所自明性から普遍被覆の積へ

$$H^1(F, T_F) = 0, \quad \tilde{A} = \mathbb{C}^q \text{ Stein, contractible}$$

$$\tilde{X} \simeq F \times \mathbb{C}^q$$

射影性・コンパクト性と正則関数の降下を使う

§7.2 · pp. 21–22

残る幾何学的結論

$$F \times \mathbb{A}^q \text{ quasi-projective}$$

$$F \times \mathbb{C}^q \longrightarrow \mathbb{C}^q \text{ Remmert reduction}$$

有限étale被覆、局所自明性と通常の普遍被覆の分裂

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 最大不正則度の被覆でファイバーを分類する

有限étale被覆でもKähler性と解析的nef性は保たれる。各被覆のAlbanese写像は全射なので不正則度は $\dim X$ 以下の整数となり、最大値 q が実現する。Demailly–Peternell–Schneiderはその被覆の滑らかなAlbanese全射と連結Fanoファイバーを与える。ファイバーの接束はnefで、次元は d 。 $d = 6$ にはTheorem 1.1、 $1 \leq d \leq 5$ には $\rho(F) \geq 1 > d - 5$ を使う既知の分類、 $d = 0$ には点を対応させる。 X が0次元の場合も点として最初に処理する。

[DPS94, Proposition 3.9, p. 25] [DPS94, Theorem 3.14, p. 31] [Kan16, Theorem 0.2, p. 1]

§7.2 · pp. 21–22

2. 局所剛性を経て普遍被覆を分裂させる

$H^1(F, T_F) = 0$ による局所変形剛性からファイバーの同型型は局所定数となり、連結な A 上で一つの F に固定される。Fischer–Grauertにより α は正則局所自明となる。 $d = 0$ では α 自体が同型である。 $\tilde{A} = \mathbb{C}^q$ はSteinかつ可縮なので、Claudon–Höring–Kollárの定理は $\tilde{X}' \simeq \tilde{F} \times \mathbb{C}^q$ を与える。有理等質 F は単連結であり、連結有限étale被覆は通常の普遍被覆を変えないので、主張する $\tilde{X}$ の積が得られる。

[BB96, §3.7, 誌面 pp. 17–18 / PDF pp. 18–19] [Poc25, Theorem 1.1 (Fischer–Grauert), p. 1]
 [CHK13, Theorem 4.4, p. 11] §7.2 · pp. 21–22

3. 準射影性・正則凸性・Remmert還元

F は射影的なので $F \times \mathbb{A}^q$ は準射影的である。積から $\mathbb{C}^q$ への射影は固有で連結コンパクトファイバーを持ち、正則関数は各ファイバー上で定数となる。従って射影の構造層の直像は $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^q}$ であり、Stein底へのこの射がRemmert還元を与える。 $q = 0$ でも底を点として成立する。また $0 \leq q \leq \dim X$ なので、 $\dim X \leq 6$ なら $d \leq 6$ が自動的に満たされる。

§7.2 · pp. 21–22

7. Corollary 7.1 の証明 — 等質計量の正規化

証明対象：Corollary 7.1 · p. 21

正Kähler–Einstein計量の主張では、分類後の標準的な等質計量の存在を入力する。



分類から正Kähler–Einstein計量と規格化へ

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 正のEinstein定数を1にする

次元6では主定理、次元1から5ではKanemitsuの既知結果で X を有理等質とする。Alekseevskii–Perelomovの構成をDemailly §1の記述を通じて入力し、 $\rho(\sigma) = \lambda\sigma$ 、 $\lambda > 0$ を満たすKähler形式を得る。定数倍でRicci形式は変わらないので $\omega = \lambda\sigma$ とすれば $\rho(\omega) = \omega$ となる。採用した規約でRicci形式は $2\pi c_1(-K_X)$ を表すため、コホモロジー類の結論も同時に得られる。

[Kan16, Theorem 0.2, p. 1] [Dem18, §1 (Alekseevskii–Perelomov construction), p. 1] Corollary 7.1 · p. 21

8. どの論文が、どの段階を担うか

入力

Kanemitsuの二論文、Dedieu–Höring、Mokの1次元VMRT分類

利用箇所

§2、§3、§7

内容・必要条件

Picard数の閾値、擬指数、滑らかな評価写像と収縮

確認範囲

定理記述と本稿での使用を照合

入力

Deligne、Borel–Serre

利用箇所

§4

内容・必要条件

単連結な底、滑らかな射影射、固定部分とGRR

確認範囲

記述と式(4.4)への接続を照合。相対Hodge–de Rham同定のGriffiths原典は未照合

入力

Kebekus、Hwang–Mok、Eisenbud–Green–Hulek–Popescu、Mokの認識定理

利用箇所

§§4, 6

内容・必要条件

有限接写像、非退化性、最小次数、Picard数1のVMRT認識

確認範囲

入力記述と適用を照合。外部証明の再検証はしない

入力

Demailly–Peternell–Schneider、Bien–Brion、Fischer–Grauert、Claudon–Höring–Kollár

利用箇所

Corollary 1.2

内容・必要条件

Albaneseファイバーの分類、剛性、局所自明性、Stein可縮底

確認範囲

記述と適用を照合。Fischer–GrauertはPoczobutでの再掲を使用

入力

Alekseevskii–Perelomov

利用箇所

Corollary 7.1

内容・必要条件

有理等質多様体上の正Einstein計量

確認範囲

Demailly §1での再掲を照合。1986年原典は未照合

これらはカタログ外の既知文献からの直接入力（最後の二行は帰結への入力）である。本稿の本文・参考文献で他のOpenAI原稿への直接引用は確認されなかった。036・052等との追加の包含・一般化・別証明関係は未調査であり、「依存なし」とは扱わない。034 SchnellのCampana–Peternell不等式とも区別する。

9. 原典を読む入口と確認範囲

- Proposition 2.2 · p. 6 — 既知の枝と擬指数4・5への帰着
- Proposition 3.1 · pp. 8–10 — 分解された評価写像のファイバー候補の排除
- §§4.4–4.5; (4.11)–(4.19) · pp. 13–15 — 幾何学から線形・積関係への移行
- §§5.1–5.3 · pp. 16–18 — 有限体の上界と有理数上の基底を区別して読む
- Proposition 6.2 · pp. 19–20 — 次数・正規性・VMRT認識をつなぐ
- §7.2 · pp. 21–22 — 有限被覆の束と普遍被覆の積を区別する
- Corollary 7.1 · p. 21 — Ricci形式の正規化を確認する

主要結果と中間命題の記述、§§2–7の上記証明箇所、付録の有限計算の構成を読んだ。既知の枝を含む主定理への接続と、Corollary 1.2の全結論・Corollary 7.1の正規化を原典と照合した。これは本部による自己点検であり、独立査読や全証明の形式検証ではない。

原典付属の計算証明書をassertion有効で実行し、`N done · pass`を確認した。使用環境とログは付属点検記録に保存した。Griffithsの相対Hodge–de Rham同定、GAGAの原典、Fano多様体の有理連結性等の標準入力の前証明、Alekseevskii–Perelomovの1986年原典は今回の追加照合範囲外である。有限計算の成功だけで幾何学的入力の妥当性まで認定しない。