

OpenAI Math Digest

CATALOGUE 046

Shafarevich正則凸性予想の反例

総括・論文間のつながりと2篇の証明概説

独立した非公式の読解ガイド・日本語版

収録版: 2026-10-13

制作: Masataka Iwai・大阪大学

AI生成の解説には誤りや不正確な説明が含まれる可能性があります。重要な主張・証明は原論文でご確認ください。本冊子はWebサイトの解説をまとめたもので、原論文そのものではありません。専門家査読・形式検証は未実施です。

目次

総括に続き、公式カタログ順で全2篇の解説を収録しています。目次・引用はクリックできます。横長の表は紙面向けの項目一覧に組み直し、主張と参照先を保持しています。

00・カタログ046 総括	3
01・A projective fourfold with large fundamental group and non-Stein universal cover	8
02・A surface counterexample to Shafarevich holomorphic convexity	22

原論文の参照版: 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a

カタログ046・総括

Web版を読む [↗](#)

CATALOGUE 046

Shafarevich正則凸性予想の反例

Counterexamples to Shafarevich holomorphic convexity

対象は「滑らかな連結射影複素多様体の、単連結な通常の普遍被覆は正則凸か」という予想である。公式順の第1論文はlargeな基本群を持つ四次元多様体、第2論文は有理曲線の無限連鎖を持つ曲面を構成する。ともに射影的な設定の反例を主張しており、一般のコンパクト複素多様体の例にすり替えない。

公式順の記事一覧

主結果の範囲を短くまとめています。正確な仮定と定式化は併記した原典の結果を参照してください。

カタログ 046 · 2026-10-13 確認の固定参照版

#

01

論文 · 概説

A projective fourfold with large fundamental group and non-Stein universal cover →

図中の略称: A projective fourfold with large fundamental group and non-Stein universal cover

October 5, 2026 · 41 ページ

原論文 (GitHub) ↗

主に何を主張するか

滑らかな連結射影複素四次元多様体 X に単純アーベル曲面 A を埋め込み、 X の基本群は large、 $\pi_1(A)$ の像は $\mathbb{Z}$ 。普遍被覆は正次元コンパクト解析部分多様体を含まず非Stein。

Theorem 1.1 · p. 1 ↗

議論の役割 · 概説

局所被覆と双曲的経路判定で無限巡回像を保ち、射影的実現を経て large な四次元多様体へ。閉じた持ち上げ曲面の H_3 を Stein 性の障害にする。

証明概説を読む →

02

論文・概説

A surface counterexample to Shafarevich holomorphic convexity →

図中の略称: A surface counterexample to Shafarevich holomorphic convexity
September 23, 2026 · 26 ページ

原論文 (GitHub) ↗

主に何を主張するか

滑らかな連結射影複素曲面 X 内に、有理成分からなる連結nodal曲線 Z_0 を構成し、 $\pi_1(Z_0)$ の像を無限にする。普遍被覆内の一点の正則包が非コンパクト。

Theorem 1.1 · p. 2 ↗

議論の役割・概説

重み付き群表示で無限性を確保し、境界の局所群を有限商で検出して射影的コンパクト化後も維持する。有理曲線の無限連鎖を正則凸性の障害にする。

証明概説を読む →

図の矢印に付した引用

- [OpenAI26a] OpenAI, A projective fourfold with large fundamental group and non-Stein universal cover, October 5, 2026、41 ページ。閉じた持上げ曲面の位相と、large条件を用いた正則凸性からStein性への帰着。

[OpenAI26a, Theorem 1.1, p. 1]

- [OpenAI26b] OpenAI, A surface counterexample to Shafarevich holomorphic convexity, September 23, 2026、26 ページ。有理成分からなる曲線全体の基本群像と、持上げの正則包による障害。

[OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 2]

同じ否定結論へ至る二つの経路

図の左右は別々に構成される空間であり、両論文の間の証明依存を表すものではない。



四次元側はlarge条件を併用し、曲面側は一点の正則包を直接調べる

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

四次元側では、単純アーベル曲面の持上げは閉じた複素曲面であり、三次ホモロジーが非零なのでSteinにはなれない。さらに普遍被覆に正次元コンパクト解析部分多様体がないため、仮に正則凸ならRemmert reductionが同型となりSteinになってしまう。この追加条件が非正則凸性への接続を担う。四次元論文の証明概説へ。

[\[OpenAI26a, Proposition 2.1, proof, p. 6\]](#) [\[OpenAI26a, Section 1.1, p. 2\]](#)

曲面側では、コンパクト有理曲線を含むこと自体は障害の結論ではない。連結な持上げ全体が閉かつ非コンパクトで、すべての正則関数がその上で定数になることにより、一点の正則包にこの全体が入る。曲面論文の証明概説で、無限性をコンパクト化後に保つ段階から読むことができる。

[\[OpenAI26b, Lemma 1.2, pp. 4–5\]](#)

原典・確認範囲

公式一覧は OpenAI Research Catalog, October 6, 2026、固定commit

1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a の046、PDF 6ページ。公式分野は **Algebraic and complex geometry**。CONTENTSの別見出しは Shafarevich counterexamples in dimension two and with large fundamental group であり、収録順と2本のリンクは一致する。

[OpenAI Research Catalog · Catalogue 046 · p. 6](#)

著者の主定理と、その構成・群像の保持・解析的障害をつなぐ証明箇所を照合した。記事は各々の直接入力について確認範囲と未確認事項を記す。外部結果の全証明や原稿全体の独立検証を意味しない。両原稿の相互引用・直接利用は照合範囲では確認しなかった。他カタログへの帰結での利用は曲面記事で区別し、未調査の関係を依存なしと扱わない。

A projective fourfold with large fundamental group and non-Stein universal cover

単純アーベル曲面の無限巡回像を作り、その階数3の格子被覆をStein性への障害にする。

本原稿が反例を主張するのは、滑らかな連結射影複素多様体 X の位相的普遍被覆 $\tilde{X}$ が正則凸である、というShafarevich予想である。構成は射影4次元に達し、さらにlarge fundamental groupを課す。単にコンパクト複素多様体や非射影Kähler多様体を作る議論ではない。以下は原稿の構成と論証の概説であり、編集側による全証明の正しさの認定ではない。

原稿の著者: OpenAI · October 5, 2026 · 41 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — large fundamental groupをもつ射影4次元の反例

滑らかな連結射影複素4次元多様体 X と、その中の単純アーベル曲面 $A \subset X$ が存在し、次を満たす。

1. X はlarge fundamental groupをもつ。すなわち、任意の正次元閉既約部分多様体 $Z \subset X$ に対し、正規化 Z^ν からの像 $\text{im}(\pi_1(Z^\nu) \rightarrow \pi_1(X))$ は無限である。
2. $\text{im}(\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(X)) \simeq \mathbf{Z}$ 。

$\tilde{X}$ には正次元コンパクト複素解析的部分多様体が存在せず、 $\tilde{X}$ はSteinではない。

Theorem 1.1 · p. 1

最後の二結論を合わせると正則凸性も否定される。正則凸な複素多様体のRemmert還元はStein空間への固有正則写像で、ファイバーは連結コンパクト解析空間である。正次元コンパクト解析部分空間がなければ全ファイバーは点となり、還元は同型、従って元の多様体はSteinになる。この追加論証は原稿§1.1にある。非Stein性だけから非正則凸性を結論しているわけではない。

Section 1.1 · p. 2

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [A projective fourfold with large fundamental group and non-Stein universal cover](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [Zar99](#) Yuri G. Zarhin — Hyperelliptic Jacobians without Complex Multiplication : 標数0でGalois群 S_6 の種数2曲線のJacobianを単純にする。arXiv:math/9909052v2, September 12, 1999 (preprint of the 2000 article)。
- [LP25](#) Claudio Llosa Isenrich and Pierre Py — Groups with exotic finiteness properties from complex Morse theory : Stover–Toledoの仮想巡回分岐被覆定理の定式化 ; 各labelに二重被覆を供給。Journal of Topology 18 (2025), e70013, author-hosted published PDF。
- [HL85](#) Helmut A. Hamm and Lê Dũng Tráng — Lefschetz theorems on quasi-projective varieties : ordinary locusの一般超平面切断で基本群を保存。Bulletin de la Société Mathématique de France 113 (1985), 123–142; NUMDAM scan。
- [Mil63](#) John Milnor — Morse Theory : Andreotti–FrankelのStein多様体のCW次元上界。Annals of Mathematics Studies 51 (1963); Stanford-hosted facing-page scan。
- [EKPR09](#) Philippe Eyssidieux, Ludmil Katzarkov, Tony Pantev and Mohan Ramachandran — Linear Shafarevich Conjecture : Remmert還元の定式化 ; large条件のもとで正則凸性からStein性へ。arXiv:0904.0693v1, April 4, 2009 (preprint of the 2012 article)。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 — 主定理の証明概略

証明対象 : [Theorem 1.1 · p. 1](#)

証明の道筋。 主張は上記Theorem 1.1を参照する。まず単純アーベル曲面の点ブローアップ Y から orbifold $\mathcal{S}$ への写像を作り、 π_1 の像を無限巡回群と計算する。次に曲面からの準同型を保って通常の滑らかな射影多様体へ移し、曲面上のブローアップを除く。最後に固定曲面を含む完全交叉でlarge条件を作り、普遍被覆中の曲面被覆から位相的障害を取り出す。

1 配置と曲面を構成

$A = \text{Jac}(C)$ 単純; $Y \rightarrow A$ は点ブローアップ
 $Y \xrightarrow{f} S$ 像は通常点領域

meridian 関係と局所経路判定を合わせる
[Theorem 6.1 · p. 28](#)

2 巡回上界と無限性の下界

$\text{im } \pi_1(Y) \subset \langle rb \rangle$ かつ $e^n \neq 1$ ($n \neq 0$)
 $\text{im}(\pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(S)) \simeq \mathbf{Z}$

曲面の群準同型を保って実現・blowdown
[Theorem 7.3 · p. 40](#)

3 通常の射影 ambient へ移す

$A \hookrightarrow S'$ 滑らか・連結・射影
 $\text{im}(\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(S')) \simeq \mathbf{Z}$

fiber の次元を制御し、Lefschetz で群像を保存
[Proposition 2.1 · p. 4](#)

4 固定曲面を含む 4 次元完全交叉

$A \subset X \subset S' \times B$, $\dim B = 6$
 X は large; $\text{im } \pi_1(A) \simeq \mathbf{Z}$

階数 3 の被覆・large 条件・Remmert 還元を使う
[Proof of Proposition 2.1 · p. 6](#) [Section 1.1 · p. 2](#)

5 普遍被覆の解析的障害

$A_K = \mathbf{C}^2/K \subset \tilde{X}$, $K \simeq \mathbf{Z}^3$, $H_3(A_K) \neq 0$
 非 Stein + 正次元コンパクト解析部分多様体なし $\Rightarrow$ 非正則凸

構成、巡回像、射影実現、被覆の障害を結ぶ全体図

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 構成と群像の計算を分ける

算術的複素双曲4次元球商上の超平面配置を、二つの符号被覆と分岐充填で滑らかな射影多様体 V にする。特別ファイバー $C \times C$ を交換する位数4の作用を利用し、その近傍だけを通常の滑らかな空間へ解消して $\mathcal{S}$ を得る。 $\mathrm{Sym}^2 C$ は $A = \mathrm{Jac}(C)$ の一点ブローアップなので、特別ファイバーへの有理写像を解消すると $Y \rightarrow \mathcal{S}$ ができる。群像の上界はmeridianの関係式、無限性の下界は局所被覆での経路読取りが担う。

Sections 4.4–4.6; Proposition 4.3 · pp. 17–19

2. 射影実現とlarge条件、解析的障害を接続する

Theorem 7.3の埋込み $A \hookrightarrow S'$ をProposition 2.1へ渡す。補助アーベル多様体への射影が非定数な部分多様体と、固定曲面内にある部分多様体を分けることでlarge条件を示す。一方、 A の基本群の核 $K \simeq \mathbf{Z}^3$ に対応する被覆 A_K が $\tilde{X}$ の閉複素部分多様体として現れる。その H_3 が消えないことがStein性を妨げる。ここで A_K は A の普遍被覆 $\mathbf{C}^2$ とは異なる。

Theorem 7.3 · p. 40; Proof of Theorem 1.1 · p. 41; Proposition 2.1 · pp. 4–6

3. Theorem 6.1 の証明 — 局所ラベルで巡回像の無限性を守る

証明対象：Theorem 6.1 · p. 28

Theorem 6.1 — 特別曲面の無限巡回像

Proposition 4.3の構成で算術的levelを十分深く取ると、 $A = \mathrm{Jac}(C)$ は単純アーベル曲面、 $Y \rightarrow A$ は有限回の点ブローアップ、 $\mathcal{S}$ は射影粗空間をもつ滑らかな連結effective proper orbifoldであり、通常点の領域に像をもつ写像 $f : Y \rightarrow \mathcal{S}$ は

$$\mathrm{im}(f_* : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(\mathcal{S})) \simeq \mathbf{Z}$$

を満たす。orbifoldの基本群は分類空間の基本群を意味する。

Theorem 6.1 · p. 28

1 六分岐点と二つの pencil

$g(C) = 2$, $A = \text{Jac}(C)$ は単純
各 label の二重符号被覆 $\rightarrow V$ 、特別 fiber $C \times C$

分岐の偶奇・位数 4 作用・有理写像の解消
Sections 4.4–4.6; Proposition 4.3 · pp. 17–19

2 通常点領域の曲面写像

$Y \rightarrow A$, $f: Y \rightarrow \mathcal{S}$
交換対称性の粗商を特別 fiber で解消

符号 0 の例外 meridian を殺し、共通 basepoint で比較
Lemmas 6.2–6.3 · pp. 29–30

3 巡回上界

$kh_i = 1 \ (i = 1, \dots, 4) \implies h_1 = \dots = h_4 = r$
 $h_5 = h_6 = b$, $\text{im } \pi_1(Y) \subset \langle rb \rangle$

有限巡回の可能性を残す上界へ、独立の下界を追加
Propositions 5.4–5.5 · pp. 23–24 Lemma 3.1 · p. 7

4 局所被覆の終点を読む

核の buffer 付き整合性＋一様双曲性
中心： $\ell_z + \ell_w$ ；外側： $\ker \ell_z \cap \ker \ell_w$

各幕が一辺；orbifold の零ホモトピーを局所関係へ移す
Lemmas 6.4–6.6 · pp. 32–34
Section 6.5 · pp. 34–35

5 非零の全幕を検出

$\text{diam}(\text{pr}_{\mathbb{B}} e^n) < u$, $n\ell(e) \neq 0 \ (n \neq 0)$
 $e^n \neq 1 \implies \text{im } f_* \simeq \mathbf{Z}$

符号被覆の構成から巡回上界と局所経路判定の下界を合わせる

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 六分岐点と局所配置を射影幾何へ実現する

四つの実代数的分岐点を $|\lambda_i| < 0.01$ に、残り二つを $\lambda_5 < -4$, $\lambda_6 > 4$ に置く。弱近似で根の位置と三つの素数での因数分解型を指定し、Galois群 S_6 の六次多項式を作る。Zarhinの結果より

$\text{End}(A) = \mathbf{Z}$ 、従って A は単純となる。ここで使うのは標数0、既約次数6、Galois群 S_6 の場合である。

[Zar99, Theorem 2.1, p. 2]

二つの座標対に六本のslopeと二本のcoupling hyperplaneを置く。coupling hyperplaneは赤い四本だけと交わる。Proposition 4.1により任意に大きな有界領域でこの有限配置と完全一致する深い合同球商を選ぶ。Stover-Toledoの仮想分岐被覆定理は、各label divisorごとに $d = 2$ として適用する。その各divisorの成分は滑らか・埋込み・相互に非交差である。その後共通有限被覆を取り、二つの符号指標を作る。交差する全divisorの和へ定理を直接適用しない。

Proposition 4.1 · pp. 14–15; Theorem 4.2; Section 4.3 · p. 16 [LP25, Theorem 4.2, p. 8]
[LP25, Theorem 4.2, p. 8]

配置の交差中心をブローアップし、例外meridianの符号をそこを通る成分数の偶奇で定める。分岐成分を分離して正規化すると滑らかな V と特別ファイバー $C \times C$ を得る。位数4の作用は局所的に $(p, q; u, v) \mapsto (q, p; v, -u)$ 。特別ファイバーでの粗商を明示的に解消し、他の固定点ではquotient stackを保つ。この区別が、曲面写像の像を通常点領域に置く保証になる。

Sections 4.4–4.6; Proposition 4.3 · pp. 17–19

2. 赤・青meridianは巡回上界だけを与える

六点orbifold pencilの群は

$$Q = \langle h_1, \dots, h_6 \mid h_i^2 = 1, h_1 \cdots h_6 = 1 \rangle.$$

偶語部分群が $\pi_1(C)$ である。coupling meridian k と赤meridian h_i の交点のブローアップは、符号0の例外因子を作る。従って $kh_i = 1$ が充填で課され、四つの赤meridianは共通のinvolution r になる。球面関係は二つの青meridianを b に同一視し、偶語の像は rb の冪からなる。Lemma 6.2の共通basepointでの押し出しにより、この計算が $\pi_1(Y)$ の像に伝わる。しかし、この段階では有限巡回像も除外されていない。

Lemmas 6.2–6.3 · pp. 29–30

3. 全ての非零冪を一辺として検出する

局所配置被覆の二面体ラベルから二つのtranslation ℓ_z, ℓ_w を読む。中心chartでは交換対称性に不変な和 $\ell_z + \ell_w$ 、外側では二つの核の共通部分を使う。Proposition 5.4はbufferをもつ重なりで核の一致を保証し、Proposition 5.5は対応する経路グラフの一樣双曲性を与える。局所経路判定Lemma 3.1の仮定は、prefix・逆向き・辺の持上げの整合性、短いprefix後の終点一致判定の不変性、一樣双曲性であり、Lemma 6.4が構成への適用を行う。

Lemma 3.1 · p. 7; Proposition 5.4 · pp. 23–24; Proposition 5.5 · p. 24; Lemma 6.4 · pp. 32–33

辺を「長さ有界」ではなく「球への射影の直径 $< u$ の経路」と定める。従ってtranslationが非零の loop e を特別ファイバー近くへ押すと、どの非零冪 e^n も一辺のままで、読取り終点は $nl(e) \neq 0$ だけ異なる。通常点領域では対称性が自由に作用するため、中心chartの商でもこの差は消えない。Lemma 6.6は、orbifoldで零ホモトピックなloopが局所の短い閉路関係でも自明になることを、一般位置と横断円板のmeridian関係を通じて示す。従って局所判定が $e^n \neq 1$ を全ての $n \neq 0$ について保証し、巡回上界と合わせて像は $\mathbf{Z}$ となる。局所ラベルを $\pi_1(\mathcal{S})$ の大域的二面体表現とみなしてはいけない。

Lemma 6.6; Sections 6.4–6.5 · pp. 33–35

4. Theorem 7.3 の証明 — 曲面からの準同型を保って射影実現する

証明対象：Theorem 7.3 · p. 40

Theorem 7.3 — 単純アーベル曲面そのものの埋込み

単純アーベル曲面 A 、滑らかな連結射影複素多様体 S' 、閉埋込み $A \hookrightarrow S'$ が存在し、

$$\mathrm{im}(\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(S')) \simeq \mathbf{Z}$$

を満たす。

Theorem 7.3 · p. 40

1 出発点は orbifold への写像

$$Y \xrightarrow{f} \mathcal{S}, \quad \text{im } f_* \simeq \mathbf{Z}$$

$Y \rightarrow A$ は点ブローアップ、 $f(Y)$ は通常点領域

一般切断の Lefschetz 同型を Ehresmann 変形で移す
[Lemma 7.1 · pp. 35–36](#)

[\[HL85, Theorem 1.1.3\(ii\), 誌面 p. 126 / PDF p. 5\]](#)

2 射影束の通常点領域で切断

$$Y \hookrightarrow S \xrightarrow{h} \mathcal{S}, \quad \pi_1(S) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathcal{S})$$

滑らかな射影 5 次元 ; $h \circ i = f$

曲面を保つ小解消と反復 blowup で標準局所模型へ
[Lemma 7.2 · pp. 36–40](#)

3 一つの例外曲線の法束を調整

$$E \subset Y_1 \subset T^3, \quad N_{E/T} \simeq \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$$

$$G \subset \hat{T}, \quad G \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$$

高い倍数の切断で収縮し、局所座標で滑らかさを確認
[Lemma 7.2 · pp. 36–40](#)

4 反対の ruling を射影的に収縮

$$H|_G = \mathcal{O}(\alpha, \beta), \quad \beta > \alpha > 0$$

$$(H + \alpha G)|_G = \mathcal{O}(0, \beta - \alpha)$$

点 blowup の逆順に繰り返す
[Theorem 7.3 · p. 40](#)

5 曲面そのものの埋込み

$$A \hookrightarrow S', \quad \text{im}(\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(S')) \simeq \mathbf{Z}$$

ambient 群と曲面準同型を各段階で保存

orbifoldから通常の射影多様体への移行と曲面の点ブローアップ除去

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. orbifoldを通常の射影ambientに置き換える

Lemma 7.1は、滑らかな連結effective proper Deligne–Mumford stack T が射影粗空間をもち、滑らかな射影曲面の写像 $Y \rightarrow T$ が通常点領域に入るとき、 $Y \hookrightarrow S \xrightarrow{h} T$ 、 $h_* : \pi_1(S) \simeq \pi_1(T)$ を実現する。 S は滑らかな射影5次元に取れる。接束と自明束の多数の直和から射影束を作ると、忠実な stabilizer表現により非通常点領域の余次元が増える。曲面のgraphを含み、その領域を避ける完全交叉を取る。

群の同型は、まず拘束のない一般切断にHamm–Lêの準射影Lefschetz定理を適用し、次に滑らかで境界を避ける完全交叉のパラメータ空間を道で結び、smooth proper familyのEhresmann同型で曲面を含む切断へ移す。曲面を含む切断を、理由なしに「一般超平面」と扱っていない。

Lemma 7.1 · pp. 35–36 [HL85, Theorem 1.1.3(ii), 誌面 p. 126 / PDF p. 5]
[HL85, Theorem 1.1.3(ii), 誌面 p. 126 / PDF p. 5]

2. ambientを変更して曲面上の例外曲線を除く

Lemma 7.2は、埋め込まれた滑らかな射影曲面の (-1) 曲線を一点へ吹き下げる操作を、新しい滑らかな射影ambientの中で実現し、ambient基本群の同型と曲面からの準同型の可換性を保つ。原稿は曲面を含む3次元を作り、必要な孤立nodeでは曲面を変更しない小解消を選び、例外曲線の法束を $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ に調整する。そのブローアップの例外因子 $G \simeq \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ を反対のrulingで収縮する。

大域的射影性を支えるのは、 $H|_G = \mathcal{O}(\alpha, \beta)$ 、 $\beta > \alpha > 0$ を満たすample束の構成である。

$D = H + \alpha G$ は G 上で $\mathcal{O}(0, \beta - \alpha)$ となり、高い倍数の切断が所要の収縮を作る。局所座標で収縮先と曲面像の滑らかさを確認する。これを点ブローアップの逆順に繰り返して A 自身を埋め込み、Theorem 6.1の実際の群準同型を保ったままTheorem 7.3へ至る。

Lemma 7.2 · pp. 36–40

5. Proposition 2.1 の証明 — large条件と非正則凸性

証明対象：Proposition 2.1 · p. 4

Proposition 2.1 — 巡回像の埋込みから主定理へ

A を単純アーベル曲面、 $A \hookrightarrow S'$ を滑らかな連結射影複素多様体への閉埋込みとし、 $\mathrm{im}(\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(S')) \simeq \mathbf{Z}$ と仮定する。このときlarge fundamental groupをもつ滑らかな連結射影4次元多様体 X と閉埋込み $A \hookrightarrow X$ が存在し、その基本群像は無限巡回、普遍被覆 $\tilde{X}$ は非Steinである。

Proposition 2.1 · p. 4

1 固定曲面を含む一般完全交叉

$$F = A \times \{0\} \subset X \subset S' \times B, \quad \dim B = 6, \quad \dim X = 4$$

$$\pi_1(X) \simeq \pi_1(S') \times \pi_1(B)$$

四点補間と次元計算で正次元 fiber を F 内に制限
[Lemma 2.3 · pp. 4–5](#)

[Proof of Proposition 2.1 · p. 5](#)

2 正次元部分多様体の無限群像

$Z \rightarrow B$ 非定数：コンパクト性と普遍被覆 $\mathbf{C}^6$
 $Z \subset F$ ： A の単純性と無限巡回像

large 条件の同値と被覆分類を使う
[Lemma 2.2 · p. 4](#)

[Proof of Proposition 2.1 · pp. 5–6](#)

3 large 条件と被覆成分

$\tilde{X}$ に正次元コンパクト解析部分多様体なし
 $K = \ker(\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(X)) \simeq \mathbf{Z}^3, \quad A_K = \mathbf{C}^2/K \subset \tilde{X}$

Stein 曲面の CW 次元は実 2 以下；閉部分多様体へ適用
[Proof of Proposition 2.1 · p. 6](#)

[\[Mil63, Theorem 7.2, 誌面 p. 39 / PDF p. 22\]](#)

4 閉複素曲面の位相的障害

$A_K \simeq_{\text{diff}} (S^1)^3 \times \mathbf{R}, \quad H_3(A_K, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$
 A_K は非 Stein $\implies \tilde{X}$ は非 Stein

非 Stein 性だけでなく、正次元コンパクト解析集合の不在を使う
[\[EKPR09, Introduction, p. 2\]](#)

5 正則凸性を否定する

もし正則凸なら、Remmert 還元の全 fiber は点
 $\implies \tilde{X}$ は Stein：矛盾

固定曲面を含む完全交叉からlarge条件と階数3格子被覆の障害を得る

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 固定曲面を保つ4次元完全交叉

$d = \dim S'$ 、 $\dim B = 6$ のアーベル多様体を取り、 $W = S' \times B$ 、 $F = A \times \{0\}$ とする。十分高い very ample 束の冪で $\mathcal{I}_F \otimes L^m$ の一般切断 $c = d + 2$ 本を取り、その共通零点を X とする。 F に沿う法微分の rank 低下の余次元は3で $\dim F = 2$ より大きく、各段階が滑らかになる。Lefschetzにより

$$\pi_1(X) \simeq \pi_1(S') \times \pi_1(B)$$

で、 A からの像は保たれる。

Lemma 2.3 の一様補間により、一つの B -fiber 内の $W \setminus F$ の相異なる四点で c 本全てが消える条件は余次元 $4c = 4d + 8$ 。四点のパラメータ空間の次元 $4d + 6$ を超えるので、一般切断では各 fiber の F 外の点は高々三つである。従って正次元 fiber 成分は F 内に限られる。

Lemma 2.3 · pp. 4–5; Proof of Proposition 2.1 · p. 5

2. 全ての正次元部分多様体に対する large 条件

$Z \subset X$ の B への像が非定数なら、 $\pi_1(Z^\nu) \rightarrow \pi_1(B)$ の像は無限である。有限なら torsion-free 性により零となり、 $Z^\nu \rightarrow B$ は $\mathbf{C}^6$ に持ち上がるが、コンパクト性により定数になって矛盾する。像が定数なら $Z \subset F$ 。 $Z = F$ では仮定の巡回像が使える。曲線の場合は正規化 D の Jacobian から A への非零準同型が単純性により全射となり、 $\pi_1(D)$ は $\pi_1(A) = \mathbf{Z}^4$ に有限指数の像をもつ。その無限巡回商への像も無限である。

これで large 条件を得る。Lemma 2.2 は large 条件と $\tilde{X}$ に正次元コンパクト解析部分多様体がないことの同値を与える。逆向きでは、コンパクト解析部分多様体の X への像が代数的で、正規化間の有限全射が基本群に有限指数像を与えることを使う。

Lemma 2.2 · p. 4; Proof of Proposition 2.1 · pp. 5–6

3. 曲面被覆の H_3 が Stein 性を妨げる

$\tilde{X} \rightarrow X$ は単連結な位相的普遍被覆に持ち上げた複素構造を入れたものである。

$K = \ker(\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(X)) \simeq \mathbf{Z}^3$ とすると、 A の逆像の一連結成分は

$$A_K = \mathbf{C}^2 / K \simeq_{\text{diff}} (S^1)^3 \times \mathbf{R}, \quad H_3(A_K, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}.$$

被覆分類によりこの核が成分の被覆を特定し、被覆 chart では成分が局所的に分離するため A_K は $\tilde{X}$ の閉複素部分多様体である。Andreotti–Frankel の次元上界は、複素2次元 Stein 多様体の CW ホモトピー次元が実2以下であることを与える。従って A_K は非 Stein。Stein 多様体の閉複素部分多様体は Stein なので、 $\tilde{X}$ も非 Stein となる。

Proof of Proposition 2.1 · p. 6 [Mil63, Theorem 7.2, 誌面 p. 39 / PDF p. 22]
[Mil63, Theorem 7.2, 誌面 p. 39 / PDF p. 22]

最後に §1 で述べた Remmert 還元と正次元コンパクト解析部分多様体の不在を合わせると、 $\tilde{X}$ は正則凸でもない。これは A_K の位相的障害を、large 条件を介して正則凸性への障害に変える段階である。

[EKPR09, Introduction, p. 2]

6. 外部入力と使用箇所

入力

ZarhinのTheorem 2.1

利用箇所

§4.1、p.13

使用内容と仮定

標数0、次数6、Galois群 S_6 から単純Jacobian

確認範囲

arXiv v2の主張と本稿の適用を照合。入力の証明全体は未検証

入力

Stover–Toledoの分岐被覆定理、Llosa Isenrich–Py Theorem 4.2の定式化

利用箇所

§4.3、p.16

使用内容と仮定

simplest typeの合同算術球商、相互非交差の埋込みtotally geodesic divisorに対する仮想二重分岐被覆

確認範囲

LP25 p.8の主張と各labelへの適用を照合。Stover–Toledo原証明は未検証

入力

Hamm–Lêの準射影Lefschetz定理

利用箇所

Lemma 7.1、pp.35–36

使用内容と仮定

ordinary locusの一般切断で基本群を保持し、変形で拘束付き切断へ移す

確認範囲

原稿の適用段落を照合。外部版のページ対応は出典記録に記載

入力

Andreotti–Frankelの次元上界、Milnor Theorem 7.2の定式化

利用箇所

Proposition 2.1、p.6

使用内容と仮定

Stein曲面の H_3 消滅

確認範囲

主張と A_K への適用を照合。Morse理論の証明は対象外

入力

Remmert還元 (Eyssidieux–Katzarkov–Pantev–Ramachandranの導入)

利用箇所

§1.1、p.2

使用内容と仮定

正則凸性とコンパクト解析ファイバーをもつStein還元

確認範囲

定式化と、本稿のlarge条件を併用する推論を照合

[Zar99, Theorem 2.1, p. 2] [LP25, Theorem 4.2, p. 8] [HL85, Theorem 1.1.3(ii), 誌面 p. 126 / PDF p. 5]

[Mil63, Theorem 7.2, 誌面 p. 39 / PDF p. 22] [EKPR09, Introduction, p. 2]

算術格子・射影性に関するBorel–Harish-ChandraとBaily–Borel、双曲幾何の標準評価、Serre vanishing・Bertini・数値的ample判定、stackの一般位置に関する全外部証明は再帰的に追っていない。これらは本稿内での使用箇所と主定理までの役割を確認した範囲にとどまり、外部原典の定理記述自体も今回未照合である。同じカタログの曲面反例を本稿の入力とする矢印は記録していない。

7. 原典を読む入口と確認範囲

- Proposition 2.1 and proof · pp. 4–6; Section 1.1 · p. 2 — 反例が対象とする予想、被覆成分と正則凸性への帰結
- Sections 4.4–4.6; Proposition 4.3 · pp. 17–19 — 特別ファイバーと通常点領域の曲面写像を構成する
- Theorem 6.1; Sections 6.1–6.5 · pp. 28–35 — 巡回上界と無限性の下界を区別して読む

- Lemmas 7.1–7.2; Theorem 7.3 · pp. 35–40 — 群準同型を保った射影実現と曲面blowdown

主結果の全結論、§2の被覆・位相的障害、§4の曲面とorbifold構成、§6の巡回上界・全非零冪の検出・orbifold関係との比較、§7の射影実現とブローアップ除去を読解し、ここで説明する帰着を照合した。§3の局所経路判定の全定数計算、§5の全有限モデルの核整合性・一様双曲性の証明は完全には追っていない。この二箇所は無限性の核心を支える原稿内入力であり、本記事の照合をもって独立に検証済みとはしない。外部入力の上表の定式化と適用を中心とし、その証明の再帰的検証・形式検証・専門家査読は未実施である。

A surface counterexample to Shafarevich holomorphic convexity

重み付き pro-2 商を射影曲面へ残し、有理曲線の無限鎖を普遍被覆に持ち上げる

原稿が対象とするのは「滑らかな連結射影複素多様体の普遍被覆は正則凸である」という Shafarevich 予想の通常の設定である。著者は複素次元2での反例を主張する。途中の有限被覆から滑らかな射影曲面を作り、その後で通常の単連結普遍被覆を取る。任意の非Stein被覆を反例とする議論ではない。

原稿の著者: OpenAI · September 23, 2026 · 26 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 射影曲面の普遍被覆に非コンパクトな一点正則包を作る

滑らかな連結射影複素曲面 X と、その中の連結節点曲線 Z_0 が存在し、 Z_0 の既約成分はすべて滑らかな有理曲線であり、

$$|\mathrm{im}(\pi_1(Z_0) \longrightarrow \pi_1(X))| = \infty$$

となる。 X の単連結普遍被覆 $\tilde{X}$ における Z_0 の逆像の連結成分は、閉・連結・非コンパクトな、コンパクト有理曲線の局所有限な和である。その上の任意の点の正則包は非コンパクトであり、 $\tilde{X}$ は正則凸でない。

Theorem 1.1 · p. 2

ここで複素多様体 V の非空コンパクト集合 K の正則包は

$$\hat{K}_V = \{v \in V : |g(v)| \leq \sup_K |g| \text{ for every } g \in \mathcal{O}(V)\}$$

である。射影曲面はコンパクト Kähler 多様体でもあるため、構成が成立すればその広いクラスでの全称命題にも反例を与える。ただし、原稿の構成対象は滑らかな射影曲面であり、任意のコンパクト複素多様体の被覆に関する分類や、すべての Kähler 多様体での非凸性を主張するものではない。

§1 · p. 2

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [A surface counterexample to Shafarevich holomorphic convexity](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [Groth03](#) Alexander Grothendieck et al. — Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1) : 非properな有限étale被覆の代数化と有限正規延長の一意性。2003 revised edition; arXiv:math/0206203v2. Main printed pagination of this edition is used, not the old marginal pagination.。
- [EH02](#) Santiago Encinas; Herwig Hauser — Strong resolution of singularities in characteristic zero : 滑らかな開部分を保つ強い解消。Commentarii Mathematici Helvetici 77 (2002), 821–845; publisher PDF。
- [Loj64](#) Stanisław Łojasiewicz — Triangulation of semi-analytic sets : 特殊ファイバーと両立する三角形分割。Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Ser. 3, 18 (1964), 449–474; Numdam PDF with cover page。
- [Stacks26a](#) The Stacks Project Authors — The Stacks Project — Relative normalization: Lemma 29.54.15 : Nagata性と有限型性から相対正規化の有限性。HTML tag 03GR, accessed 2026-10-13; unpaginated。
- [Stacks26b](#) The Stacks Project Authors — The Stacks Project — Finite morphisms are projective: Lemma 29.45.16 : 有限射から射影性。HTML tag 0B3I, accessed 2026-10-13; unpaginated。
- [Stacks26c](#) The Stacks Project Authors — The Stacks Project — Embedded resolution: Lemma 54.15.6 : 正則曲面上の境界を点blowupでSNC化。HTML tag 0BIC, accessed 2026-10-13; unpaginated。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 の証明 — 構成から正則包まで

証明対象 : [Theorem 1.1 · p. 2](#) 主張を参照する。

証明の道筋。 48点を除いた球面の族から、必要な境界関係を入れても無限な pro-2 群 Q を作る。局所境界群を検出する有限商を使って射影曲面 X を得る。その特殊ファイバーの有理成分と無限基本群像を合流させ、最後に普遍被覆上の一点正則包を調べる。詳細は無限商、有限被覆と下降、特殊ファイバー、正則包の順に読む。

A 標識球面の族と無限商

$$\Pi = \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus A_s) \longrightarrow Q, \quad |A_s| = 48, \quad |Q| = \infty$$

全境界像を有限化し、交点の群も検出する
[Proposition 5.3 · p. 20](#) [Lemma 6.1 · pp. 21–22](#)

B 局所群を検出して射影曲面へ

$$U' \longrightarrow U = Y \setminus D, \quad X \longrightarrow \bar{Y} \longrightarrow Y, \quad \rho_X : \pi_1(X) \rightarrow Q$$

垂直 meridian は自明、尾は二点分岐
[Lemma 6.2 · p. 23](#)

近傍収縮と properness で無限像を移す
[Lemma 6.3 · pp. 23–24](#)

C 有理節点ファイバー

$$Z = h^{-1}(c_*)_{\text{red}}$$

全成分が滑らかな $\mathbb{P}^1$

D 基本群像を特殊化

$$|\text{im}(\pi_1(Z_0) \rightarrow \pi_1(X))| = \infty$$

最大値原理で一点正則包へ
[Lemma 1.2 · pp. 4–5](#)

E ここで単連結普遍被覆を取る

$$W \subset \tilde{X}, \quad W \subseteq \widehat{\{w\}}_{\tilde{X}}$$

W は閉・非コンパクトな局所有限の有理曲線鎖

無限商と有理特殊ファイバーを合流させ、普遍被覆の非正則凸性へ進む

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 三種類の被覆を区別する

まず $B' \rightarrow B$ はパラメータ曲線の有限 étale 被覆で、48本の標識を切断にする。その射影完備化 $C' \rightarrow \mathbb{P}^1$ は指定点 $c_* \in C' \setminus B'$ で分岐指数をちょうど2に持つ。次に $U' \rightarrow U$ は有限群 P_f で定める有限 étale 被覆であり、その正規化と解消から X を作る。 $X \rightarrow Y$ は解消を含む射影射なので、全体で有限または非分岐と仮定しない。最後の $\tilde{X} \rightarrow X$ だけが単連結普遍被覆である。

§5.2; [Lemma 6.1 · pp. 18, 21–22](#)

2. 各結論を結ぶ接続

射影性と滑らかさは [Lemma 6.1](#)、特殊ファイバーの有理性・節点性は [Lemma 6.2](#)、ある連結成分 Z_0 の基本群像の無限性は [Lemma 6.3](#) が担う。無限性は個々の $\mathbb{P}^1$ から来るのではなく、成分の接合グラフのループから来る。これらを [Lemma 1.2](#) に入れると、主定理の閉性・局所有限性・非コンパクト性・一点正則包の結論がすべて得られる。

3. Proposition 5.3 の証明 — 幾何学的関係を入れても無限性を残す

証明対象 : Proposition 5.3 · p. 20

Proposition 5.3 — 境界の有限像とファイバーの稠密像

原典 §§3–5 の構成で、 $U = Y \setminus D$ は標識族をコンパクト化した滑らかな射影曲面の SNC 境界補集合とする。 Q は重み付き自由 pro-2 群 L に符号反転関係、十分深いモノドロミー関係、残る境界 meridian の十分大きい 2 冪を課した商である。この Q は無限であり、 $\rho : \pi_1(U) \rightarrow Q$ は各穿孔滑らかファイバー上で稠密像を持つ。 D の各成分 meridian の像は有限位数で、指定ファイバー D_* の各成分 meridian の像は自明である。

Proposition 5.3 · p. 20

1 基点付きモノドロミーと重み

$$K \twoheadrightarrow \Pi, \quad p\varphi_m = \beta_m p, \quad \deg(\varphi_m - 1) \geq 1$$

差分基底の次数を保ち、Frattini 商で関係を節約
[Proposition 4.2; Lemma 4.3; §5.1 · pp. 15–17](#)

2 48 生成元と 24 の符号反転関係

$$P(t) = (1+t)G(t), \quad G(t) = 3t(1+t)(1+t^2)^2$$

関係コスト $\leq tG(t)$

有限被覆とコンパクト化後に b を数えて e を選ぶ
[§5.2–5.3; Lemma 5.2 · pp. 18–20](#) [Proposition 5.3 · p. 20](#)

3 先に深さ、後に境界冪

$$97t \frac{(4t)^J}{1-4t} < \frac{1}{100}, \quad bt^{2^e} < \frac{1}{100}$$

重み付き判定：関係級数の収束も満たす
[Lemma 2.2; Lemma 5.2; Proposition 5.3 · pp. 6–7, 20](#)

4 境界関係の後も無限

$$t = \frac{49}{200}, \quad 1 - G(t) + \frac{1}{50} < -\frac{1}{125} < 0$$

$$|Q| = \infty, \quad \rho(\pi_1(F_s)) = Q$$

符号反転とモノドロミーの関係コストを抑え、境界を埋める余裕を残す

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 球面の実際のモノドロミーを制御する

$E = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega)$ 、 $\omega^3 = 1 \neq \omega$ とし、 $q: E \rightarrow E/\{\pm 1\} = \mathbb{P}^1$ と [4] が誘導する次数16の写像 f を使う。 $\bar{\omega}$ は $[\omega]$ が商球面へ誘導する自己同型を表す。5点を除いたパラメータ曲線 B 上で

$$A_s = \{z: f(z) = \bar{\omega}^j s \text{ for some } 0 \leq j \leq 2\}$$

は48点からなり、 $s_* = q(e_0)$ 、 $0 \neq e_0 \in E[2]$ の近くで24組に衝突する。6穿孔トーラスの基本群 F は階数7、[4] の被覆部分群 K は階数97、48穿孔球面の基本群 Π は階数47である。Proposition 3.2 の基点付き全射 $p: K \twoheadrightarrow \Pi$ と $p\varphi_m = \beta_m p$ が、トーラス上の次数評価を実際の球面モノドロミーへ移す。

[Lemma 3.1; Proposition 3.2 · pp. 8–9](#)

三つの二重被覆 $Y_j^2 = q(z) - \bar{\omega}^j s$ は基点上の持ち上げを持ち、重み1部分での作用を固定する。対の境界に重み2を与えると Proposition 3.4 により $\varphi_m - \text{id}$ は次数を1以上上げる。core と対境界を潰した L は48生成元を持ち、符号反転 σ を課すと階数24の pinched 球面群の pro-2 完備化を得る。Lemma 3.5 は $K \twoheadrightarrow \Pi$ を使い、pinching の核のモノドロミー不変性を仮定せずに $\Pi \rightarrow Q$ の不変性を導く。

Lemmas 3.3, 3.5; Proposition 3.4 · pp. 9–12

2. 24関係の節約と、選択順序

$H = (\mathbb{Z}/4)^2$ の二つの平行移動の差分から得る基底 $u_{i\ell,j}$ に重み $i + \ell + 1$ を与える。Proposition 4.2 は Frattini 商の $R = C \oplus dC$ を使い、24個の関係 $r_g = \sigma(g)g^{-1}$ だけで符号反転をすべて課す。その次数コストは $tG(t)$ 以下で、

$$P(t) = 3t(1 + t + t^2 + t^3)^2 = (1 + t)G(t), \quad G(t) = 3t(1 + t)(1 + t^2)^2.$$

深さ N のパラメータ生成元は高々 4^N 個で、各々について K の97生成元の関係を入れる。Lemma 4.3 の次数移送により、全コストは $97t(4t)^J/(1 - 4t)$ 以下になる。

Proposition 4.2; Lemma 4.3; §5.1 · pp. 15–17

$t = 49/200 < 1/4$ を固定し、まず深さ J を選んでそのコストを $1/100$ 未満にする。有限パラメータ被覆とコンパクト化を行ってから、残る境界成分数 b に対して $bt^{2^e} < 1/100$ となる e を選ぶ。したがって境界成分数を事前に制御する循環はない。原稿の評価 $G(t) > 257/250$ から

$$1 - P(t) + tG(t) + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} < -\frac{1}{125} < 0$$

となり、本文で証明された重み付き無限性判定 Lemma 2.2 が Q の無限性を与える。無限個のモノドロミー関係についても有界次数内の有限性と級数収束を確認している。 D_* の meridian は、切断に沿う基底ループと pinching で消える対境界の積なので既に消えている (Lemma 5.2)。

Lemma 2.2; Lemma 5.2; Proposition 5.3 · pp. 6–7, 20

4. Lemma 6.1 の証明 — 局所群全体を有限商で検出する

証明対象 : Lemma 6.1 · pp. 21–22

Lemma 6.1 — 有限局所検出とコンパクト化への下降

Y を滑らかな連結射影複素曲面、 D を SNC 因子、 $U = Y \setminus D$ とする。profinite 群への稠密像を持つ $\rho : \pi_1(U) \rightarrow Q$ が各成分 meridian を有限位数元へ送るなら、各局所境界補集合群の像全体に単射な有限商 $Q \twoheadrightarrow P_f$ が存在する。核で定める連結有限被覆 $U' \rightarrow U$ は、滑らかな連結射影曲面からの射影射 $p : X \rightarrow Y$ に延長され、 $D_X = X \setminus U'$ は SNC となる。また包含 $i : U' \hookrightarrow X$ について

$$\rho_X : \pi_1(X) \longrightarrow Q, \quad \rho_X i_* = \rho \pi_*$$

が存在する。解消は、正規化が既に滑らかで被約境界が SNC である任意の開部分を保存して選べる。

Lemma 6.1 · pp. 21–22

1 交点を含む局所境界群

$A_V = \rho(\pi_1(V \setminus D)), \quad \pi_1(V \setminus D) \cong \mathbb{Z}^r, \quad r \leq 2$
 A_V は有限、共役型も有限個

profinite 分離で全非単位元を同時に避ける
[Lemma 6.1 · pp. 21–22](#)

2 全局所像を有限商で検出

$N \triangleleft Q$ open, $N \cap gA_Vg^{-1} = 1, \quad P_f = Q/N$

有限 étale 代数化、有限正規化、強い解消
[\[Groth03, Exposé XII, Théorème 5.1, 誌面 p. 251 / PDF p. 267\]](#)
[\[EH02, The result, 誌面 pp. 822–823 / PDF pp. 2–3\]](#)

3 有限被覆を正規化・解消

$U' \rightarrow U, \quad X \rightarrow \bar{Y} \rightarrow Y$
 X は滑らか・連結・射影、既に良い開部分を保存

横断円板を下へ写し、局所像と核の両方に入れる
[Lemma 6.1 · pp. 21–22](#)

4 例外曲線の meridian も消して下降

$\rho\pi_*(\mu_E) \in N \cap gA_Vg^{-1} = 1$
 $\rho_X : \pi_1(X) \rightarrow Q, \quad \rho_X i_* = \rho\pi_*$

交点の局所群も同時に検出し、解消例外曲線の meridian まで消す

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 有限性・射影性・解消

小さい境界多重円板では補集合群は $\mathbb{Z}^r$ 、 $r = 1, 2$ である。可換な有限位数像が生成する $A_V \subset Q$ は有限で、共役を除く型も有限個しかない。profinite 性により全 $A_V \setminus \{1\}$ を避ける開正規部分群 N を取ると、 $N \cap gA_Vg^{-1} = \{1\}$ がすべての局所群について成立する。個別 meridian の位数だけを検出する選択では足りない。

$P_f = Q/N$ の被覆は非properな U にも適用される Riemann 存在定理で有限 étale 代数被覆となる。 Y を U' の関数体で正規化すると有限射になり、射影性を得る。標数0の強い解消と境界の点 blowup で X を作る。既に良い開部分を保つ性質が、次節の特殊ファイバーを壊さないために必要である。

[\[Groth03, Exposé XII, Théorème 5.1, 誌面 p. 251 / PDF p. 267\]](#)

[\[EH02, The result, 誌面 pp. 822–823 / PDF pp. 2–3\]](#)

2. 新しい境界 meridian も消える理由

$i_* : \pi_1(U') \rightarrow \pi_1(X)$ の核は D_X の成分 meridian の正規閉包である。任意の成分、特に解消例外曲線の滑らかな点を横断する小円板を Y へ写すと、その meridian の Q 像はある gA_Vg^{-1} に入る。一方 U' 上で閉じたループなので有限商 P_f で消え、その像は N にも入る。交わりが自明であるため全 meridian が消え、 ρ_X への下降が成立する。

Lemma 6.1 · pp. 21–22

5. Lemma 6.2 · Lemma 6.3 の証明 — 有理特殊ファイバーへ無限像を移す

証明対象 : Lemma 6.2 · p. 23

Lemma 6.2 — 特殊ファイバーの全成分が有理である

上の構成で $h : X \rightarrow Y \rightarrow C'$ と置く。解消は、 $Z = h^{-1}(c_*)_{\text{red}}$ の既約成分がすべて滑らかな有理曲線で、交点が通常の横断的二重点となるように選べる。

Lemma 6.2 · p. 23

Lemma 6.3 — ある連結成分の基本群像は無限

Lemma 6.2 の有理節点ファイバー Z は、 $\text{im}(\pi_1(Z_0) \rightarrow \pi_1(X))$ が無限となる連結成分 Z_0 を持つ。

Lemma 6.3 · pp. 23–24

1 指定ファイバーを保存

$$D_* : \mathbb{P}^1 + 24 \text{ tails}, \quad \rho(\mu_{D_*}) = 1$$

垂直方向は非分岐；二点分岐被覆の完備化は $\mathbb{P}^1$
[Lemma 6.2 · p. 23](#)

2 全成分は有理、交点は節点

$$(u, w) \mapsto (u, w^e), \quad \text{tail} \setminus \{2 \text{ points}\} \text{ covers } \mathbb{C}^*$$

$$Z = h^{-1}(c_*)_{\text{red}}$$

三角形分割で収縮近傍；properness で全ファイバーを含める
[\[Loj64, §3, Theorem 2, 誌面 p. 464 / PDF p. 17\]](#)

3 近い穿孔ファイバーの無限像

$$\rho(\pi_1(F_s)) \cap N \text{ is dense in infinite } N$$

$$V \searrow Z, \quad F'_s \subset V$$

包含のホモトピー因数分解；基点の共役を除く
[Lemma 6.3 · pp. 23–24](#)

4 連結成分 Z_0 へ無限像が移る

$$\pi_1(F'_s) \longrightarrow \pi_1(Z_0) \longrightarrow \pi_1(X)$$

$$|\text{im}(\pi_1(Z_0) \rightarrow \pi_1(X))| = \infty$$

特殊ファイバーの有理性と近傍への無限像の移送を合わせる

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 分岐は尾の二つの標識点だけに残る

二重底変換後の衝突は $w^2 = u^2$ となり、一回の blowup で2切断が分離する。下の D_* は無標識の主成分 $\mathbb{P}^1$ と24本の尾からなる。全垂直 meridian が消えているので、主成分の滑らかな点と垂直節点で正規化被覆は局所同型である。水平・垂直交点での局所正規延長は、水平 meridian の位数を e とすると

$$(u, w) \mapsto (u, v) = (u, w^e)$$

となる。有限性・正規性の解析化比較と有限正規延長の一意性により、このモデルは代数的正規化と一致する。ここでは既に滑らかな SNC 対なので解消を行わない。主成分上の被覆は非分岐で次数1、尾の被覆は二つの標識点だけで分岐する $\mathbb{C}^*$ の有限被覆のコンパクト化だから $\mathbb{P}^1$ である。

[Groth03, Exposé XII, Propositions 2.1(vi), 3.2(vi), 5.3, 誌面 pp. 242, 245, 254 / PDF pp. 258, 261, 270]

2. Properness が穿孔ファイバー全体を取縮近傍へ入れる

穿孔滑らかファイバー $F_s \subset U$ の Q 像は稠密なので、 P_f への像は全体であり、逆像 $F'_s \subset U'$ は連結である。その Q 像は $\rho(\pi_1(F_s)) \cap N$ で、無限開部分群 N に稠密、したがって無限である。下降式により $\pi_1(X)$ への像も無限になる。

コンパクト実解析多様体 X と閉半解析集合 Z を両立して三角形分割し、重心細分後に Z を full subcomplex にする。 Z の頂点座標の和が正となる開近傍 V は、その座標を正規化することで Z へ強変形収縮する。 h の properness から $h(X \setminus V)$ は閉で c_* を含まないので、十分近い全ファイバーが V に入る。連結な F'_s の包含はホモトピーを除いてある Z_0 を経由する。したがって基本群準同型は基点変更の共役を除いて因数分解し、その無限像が Z_0 に移る。

[Loj64, §3, Theorem 2, 誌面 p. 464 / PDF p. 17]

Lemma 6.3 · pp. 23–24

下の D_* の接合グラフは木だが、尾の次数 d の被覆は主成分の異なる d 枚と接するため、上の接合グラフまで木とは限らない。原稿は上のグラフを任意に指定せず、無限像を上近傍論証で確保する。

6. Lemma 1.2 の証明 — 非Stein性を經由せず一点正則包を調べる

証明対象：Lemma 1.2 · pp. 4–5

Lemma 1.2 — 有理曲線の閉じた無限鎖が正則凸性を妨げる

X を連結複素多様体、 $Z \subset X$ をコンパクト連結節点曲線とし、その既約成分は滑らかな有理曲線とする。 $\pi_1(Z) \rightarrow \pi_1(X)$ の像が無限なら、単連結普遍被覆 $\tilde{X}$ における逆像の各連結成分 W は閉で非コンパクト、コンパクト有理曲線の局所有限和である。 $\mathcal{O}(\tilde{X})$ のすべての関数は W 上で定数となり、任意の $w \in W$ について $\widehat{\{w\}}_{\tilde{X}}$ は非コンパクトである。

Lemma 1.2 · pp. 4–5

1 単連結普遍被覆に持ち上げる

$\tilde{X} \rightarrow X, \quad W \subset \pi^{-1}(Z_0)$
 $\pi_1(Z_0)/\ker(\pi_1(Z_0) \rightarrow \pi_1(X))$ is infinite

被覆の核、 $\pi_1(\mathbb{P}^1) = 0$ 、節点の局所二枝性

Lemma 1.2 · pp. 4-5

2 閉・非コンパクトな有理曲線鎖

$W = \bigcup C_\alpha, \quad C_\alpha \cong \mathbb{P}^1$
 局所有限；無限枚の閉離散ファイバー

最大値原理と、交点を通じた定数の一致

Lemma 1.2 · pp. 4-5

3 すべての正則関数が W 上定数

$g|_{C_\alpha}$ constant, W connected $\implies g|_W$ constant

正則包の定義へ直接代入する

Lemma 1.2 · pp. 4-5

4 一点正則包が非コンパクト

$W \subseteq \widehat{\{w\}}_{\tilde{X}} \quad (w \in W)$
 閉非コンパクトな W はコンパクトな包に入らない

無限枚被覆と最大値原理から、閉非コンパクト集合を含む一点正則包を得る

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 持上げの閉性・局所有限性・非コンパクト性

$W \rightarrow Z$ は $\ker(\pi_1(Z) \rightarrow \pi_1(X))$ に対応する被覆なので無限枚であり、閉離散無限ファイバーを持つからコンパクトではない。 W は閉逆像の連結成分なので閉である。各有理成分は単連結だから、その持上げは同型なコンパクト $\mathbb{P}^1$ になる。節点で二枝しかない小さい evenly covered 近傍が、持上げた成分族の局所有限性を保証する。

2. 閉じた無限鎖が一点正則包に入る

最大値原理により $g \in \mathcal{O}(\tilde{X})$ は各コンパクト成分上で定数となる。連結性と局所有限性により、成分をつなぐ道に沿ってその定数は一致する。したがって任意の $w \in W$ で

$$W \subseteq \widehat{\{w\}}_{\tilde{X}}.$$

右辺がコンパクトなら、その閉部分集合 W もコンパクトとなって矛盾する。これが正則凸性への直接の障害であり、コンパクト曲線の存在から非Stein性だけを述べて終える議論ではない。

Lemma 1.2 · pp. 4–5

7. どの外部結果が、どの段階を担うか

供給元

Groth03, Exposé XII, Théorème 5.1

利用箇所

§5.2, Lemma 6.1

使用内容・適用条件

有限型複素スキームの有限 étale 被覆と解析的被覆の比較。properness は不要

確認範囲

定理の記述と両適用を照合

供給元

Groth03, Exposé XII, Propositions 2.1(vi), 3.2(vi), 5.3

利用箇所

Lemma 6.2

使用内容・適用条件

正規性・有限性の解析化比較、稠密開集合上で一致する有限正規延長の一意性

確認範囲

記述と局所モデルへの適用を照合

供給元

EH02, “The result”; Stacks26a–c, Tags 03GR, 0B3I, 0BIC

利用箇所

Lemma 6.1

使用内容・適用条件

相対正規化の有限性、有限射の射影性、滑らかな開部分を保つ解消と境界解消

確認範囲

記述・使用箇所を照合。外部証明全体は未検証

供給元

Loj64, §3, Theorem 2

利用箇所

Lemma 6.3

使用内容・適用条件

実解析多様体の局所有限半解析族と両立する三角形分割。 X のコンパクト性から有限化

確認範囲

定理の記述と収縮近傍への適用を照合

重み付き Golod–Shafarevich 法には先行文献が挙げられるが、この記事の直接入力は一稿内で証明する Lemma 2.2 である。先行研究の全定理を独立に証明し直したとは扱わない。§1.2 が挙げる special Kähler 多様体の可換性論文と半代数的普遍被覆論文は、主構成への入力ではなく、得た反例の追加比較に使われる。その追加帰結はこの記事の主構成点検の対象外とする。

8. 原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 1.1 · p. 2 — 反例の正確な対象と全結論
- Proposition 4.2; Lemma 4.3; §5.1 · pp. 15–17 — 重み付き関係コストと実際の球面モノドロミーの接続
- Proposition 5.3 · p. 20 — 全境界関係を入れた後の無限性
- Lemma 6.1 · pp. 21–22 — 局所群全体の検出と解消例外meridianへの適用
- Lemmas 6.2–6.3; proof of Theorem 1.1 · pp. 23–24 — 有理性と無限像の合流、主定理への最後の接続

- Lemma 1.2 · pp. 4-5 — 閉非コンパクト集合を一点正則包に入れる理由

編集側では Theorem 1.1、Lemma 1.2、§§3-6 の主構成・次数評価・有限局所検出・特殊ファイバーへの移送を読み、上記外部入力の記事と使用箇所を照合した。原稿の主張を紹介する概説であり、全証明の独立検証や専門家査読を完了したものではない。Frattini 商での全線形計算、全モノドロミー計算、Lemma 2.2 の完備代数の証明全体を独立に再構成する作業、§1.1 の先行研究比較、§1.2 の追加帰結は未実施である。確認した接続とこの未確認範囲を区別する。