

OpenAI Math Digest

CATALOGUE 039

Nagata予想と最大Seshadri定数

総括・論文間のつながりと4篇の証明概説

独立した非公式の読解ガイド・日本語版

収録版: 2026-10-15

制作: Masataka Iwai・大阪大学

AI生成の解説には誤りや不正確な説明が含まれる可能性があります。重要な主張・証明は原論文でご確認ください。本冊子はWebサイトの解説をまとめたもので、原論文そのものではありません。専門家査読・形式検証は未実施です。

目次

総括に続き、公式カタログ順で全4篇の解説を収録しています。目次・引用はクリックできます。横長の表は紙面向けの項目一覧に組み直し、主張と参照先を保持しています。

00・カタログ039 総括	3
01・Nagata's conjecture for plane curves	9
02・Maximal Seshadri constants on arbitrary polarized surfaces	20
03・Maximal Multipoint Seshadri Constants in Higher Dimensions	32
04・Maximal multipoint Seshadri constants in positive characteristic	43

原論文の参照版: 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a

[カタログ039 · 総括](#)[Web版を読む](#) ↗

CATALOGUE 039

Nagata予想と最大Seshadri定数

Nagata's conjecture and maximal Seshadri constants

平面曲線のNagata不等式と、豊富な直線束の通常の等重み多点Seshadri定数を扱う4本を収録する。平面篇は非常に一般的な $r \geq 10$ 点で任意の重複度に対する厳密不等式を主張する。残る3本は固定した偏極多様体に対して、十分大きいすべての整数 r で体積上界を達成するという主張である。各主張と編集側の照合範囲は記事で区別する。

収録論文

主結果の範囲を短くまとめています。正確な仮定と定式化は併記した原典の結果を参照してください。

カタログ 039 · 2026-10-15 確認の固定参照版

#

01

論文・概説

Nagata's conjecture for plane curves →

図中の略称: Nagata's conjecture for plane curves

2026-09-23 · 24 ページ

原論文 (GitHub) ↗

主に何を主張するか

複素平面の非常に一般的な $r \geq 10$ 点で、任意の重複度をもつ全非零有効曲線に厳密Nagata不等式。等重み多点定数は $1/\sqrt{r}$ 。

Theorem 1.1 · p. 1; Corollaries 6.1–6.2 · p. 22 ↗

議論の役割・概説

普遍的な等重複度系を法束上に特殊化し、平方数は係数比較、非平方数は衝突と θ 行列の階数で排除。

証明概説を読む →

#

02

論文・概説

Maximal Seshadri constants on arbitrary polarized surfaces →

図中の略称: Maximal Seshadri constants on arbitrary polarized surfaces

2026-09-23 · 19 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

固定した滑らかな整複素射影曲面と ample L に対し、十分大きい全 r の非常に一般的な点配置で $\varepsilon = \sqrt{(L^2/r)}$ 。非可算代数閉標数 0 にも拡張。

[Theorem 1.1 · p. 2; Corollary 5.5 · p. 18](#) ↗

議論の役割・概説

節点の指数境界・圧縮と有限トーラス群で jet 単射性を作り、非等重複度曲線も含む nef 性へ。

[証明概説を読む](#) →

#

03

論文・概説

Maximal Multipoint Seshadri Constants in Higher Dimensions →

図中の略称: Maximal Multipoint Seshadri Constants in Higher Dimensions

2026-10-05 · 20 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

固定した滑らかな整複素射影多様体、 $n \geq 3$ 、ample L で、十分大きい全 r の非常に一般的な点において $\varepsilon = (L^n/r)^{1/n}$ 。

[Theorem 1.1 · pp. 1–2](#) ↗

議論の役割・概説

二切片変形を反復し、次数付き性による内部充填と全 jet の全射性から下界を得る。

[証明概説を読む](#) →

#

04

論文・概説

Maximal multipoint Seshadri constants in positive characteristic →

図中の略称: Maximal multipoint Seshadri constants in positive characteristic

2026-10-05 · 17 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

正標数の代数閉体上の固定した滑らかな整射影多様体 ($n \geq 2$) と ample L に対し、十分大きい全 r の幾何学的一般点において $\varepsilon = (L^n/r)^{1/n}$ 。可算体も含む。

[Theorem 1.1 · pp. 1–2; Remark 6.3 · p. 16](#) ↗

議論の役割・概説

形式的jet移送、標数2でも二枝のある節点、中国剰余定理で手法を正標数化。

[証明概説を読む](#) →

方法の関係と読む入口

図の破線は、後続原稿が明示する方法の継承・作り直しを表す。先行論文の主定理を証明の前提として使う直接依存ではない。平面篇は、全 $r \geq 10$ を扱う別の論証として分離して示す。図中のキーは OpenAI 著の次の固定版を指す。

- [OpenAI26a](#) OpenAI — Nagata's conjecture for plane curves — 平面の厳密不等式と strict nef 性の別経路; 2026-09-23.
- [OpenAI26b](#) OpenAI — Maximal Seshadri constants on arbitrary polarized surfaces — 節点・圧縮・有限群による曲面のjet単射性; 2026-09-23.
- [OpenAI26c](#) OpenAI — Maximal Multipoint Seshadri Constants in Higher Dimensions — 次数付き指数集合と全jet全射性への一般化; 2026-10-05.
- [OpenAI26d](#) OpenAI — Maximal multipoint Seshadri constants in positive characteristic — 形式代入と幾何学的一般点による正標数への再構成; 2026-10-05.

[\[OpenAI26a, Theorem 1.1; Corollary 6.2, pp. 1, 22\]](#)[\[OpenAI26b, Theorem 1.1; Corollary 5.5, pp. 2, 18\]](#)[\[OpenAI26c, Theorem 1.1, pp. 1–2\]](#)

[OpenAI26d, Theorem 1.1; Remark 6.3, pp. 1–2, 16]

01 平面曲線：全 $r \geq 10$ の厳密不等式*Nagata's conjecture for plane curves*

$$d\sqrt{r} > \sum_i m_i \implies \varepsilon(\mathcal{O}(1); p_1, \dots, p_r) = 1/\sqrt{r}$$

法束への特殊化、平方数の係数比較、非平方数の theta 行列

この経路を、下の一般偏極多様体の証明へ接続しない

[OpenAI26a, Theorem 1.1; Corollary 6.2, pp. 1, 22]

02 曲面：jet 単射性による消滅*Maximal Seshadri constants on arbitrary polarized surfaces*

節点の指数境界・圧縮・有限トーラス群

$$\varepsilon = \sqrt{L^2/r} \quad (\text{十分大きい全 } r)$$

節点・圧縮・原始格子方向を、ラベル付き多項式空間へ拡張

[OpenAI26c, §1.1; Proposition 4.1, pp. 2, 9–14]

03 高次元：全 jet への全射性へ作り直す*Maximal Multipoint Seshadri Constants in Higher Dimensions*

二切片変形・次数付き支持の内部充填・補間

$$\varepsilon = (L^n/r)^{1/n}, \quad n \geq 3, \quad k = \mathbb{C}$$

曲面・高次元の構成を再証明：解析極限を形式代入へ

[OpenAI26d, §1.1; §4; §5, pp. 2, 8–14]

04 正標数：形式的移送と幾何学的一般点*Maximal multipoint Seshadri constants in positive characteristic*

$$y^2 + xy - x^3 = \xi\eta, \quad K_r = \overline{k(U_r)}$$

$$\varepsilon_r = (L^n/r)^{1/n}, \quad n \geq 2, \quad \text{char } k > 0$$

破線＝方法の継承・再構成。先行する最大性の主定理の直接入力ではない

4本の問題範囲と、曲面・高次元・正標数の方法上の関係

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

平面篇では、法束への特殊化と二つの極限が厳密不等式を与え、Corollary 6.2でstrict nef性とSeshadri定数を導く。一般曲面篇の十分大きい r での最大性と、平面の全 $r \geq 10$ での厳密性を同一視しない。

曲面篇の節点・圧縮・原始格子方向を、高次元篇は二切片変形として作り直す。最終検査は曲面篇のjet単射性から、高次元篇の全jetへの全射性へ変わる。正標数篇はさらに形式的jet移送と二枝の節点を使い、幾何学的一般点で条件を同時に満たす。標数2や可算代数閉体を含むための変更である。

方法を供給する箇所

曲面篇 Propositions 3.2, 3.4; Lemma 4.3

作り直す箇所

高次元篇 §1.1; Proposition 4.1

役割・確認した相違

残りの座標をラベルとして保持し、実数切片を変形。必要な論証は高次元篇で再証明

方法を供給する箇所

曲面篇の同じ3結果、および高次元篇 §§2–6

作り直す箇所

正標数篇 §1.1; §§2–5

役割・確認した相違

解析的極限を形式代入へ、節点を $y^2 + xy - x^3$ へ変更。内部充填と補間も再証明

[OpenAI26b, Propositions 3.2, 3.4; Lemma 4.3, pp. 8–10, 14]

[OpenAI26c, §1.1; Proposition 4.1, pp. 2, 9–14]

[OpenAI26d, §1.1; §4; §5, pp. 2, 8–14]

原典・確認範囲

公式番号・分野名はOpenAI Research Catalogの「Algebraic and complex geometry」（032–068）に従う。039は概要PDFの6ページにあり、上表はCONTENTSの公式順を保つ。参照版はcommit 1581d4cbdd69a0faf34b2089614fe2a814316a6a。

OpenAI Research Catalog · 039 · p. 6

各記事で主結果の全結論、原典の必要な証明本文、直接入力の記事と使用箇所を点検した。平面篇のChow原著の定理記述・位置の照合は保留であり、ほかの外部結果の全証明、全解析的評価、全次数構成の独立検証は行っていない。他カタログへの接続は網羅調査しておらず、未調査を「依存なし」と扱わない。図は確認した方法関係の選択であり、全引用文献の依存網ではない。

Nagata's conjecture for plane curves

法束への特殊化と楕円曲線上の補間を経て、等重みの nef 境界を得る

本原稿は、非常に一般的な平面の点における不均等な重複度を、全配置で存在する均等重複度の系へ帰着し、その存在を排除する。以下は著者が掲げる定理と証明の接続の概説であり、原稿全体の独立した正しさの認定ではない。

原稿の著者: OpenAI · 2026-09-23 · 24 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 全重複度について同時に成り立つ狭義不等式

$r \geq 10$ を整数とし、 $U_r \subset (\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^2)^r$ を相異なる順序付き r 点の空間とする。著者は、真の Zariski 閉集合の可算和 $E_r \subset U_r$ で補集合が非空となるものが存在し、任意の $(p_1, \dots, p_r) \notin E_r$ に対し、次が成り立つと主張する。任意の次数 $d \geq 1$ の非零有効平面曲線 C と、 $\text{mult}_{p_i} C \geq m_i$ を満たす任意の $m_i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$d\sqrt{r} > \sum_{i=1}^r m_i.$$

可約曲線・非被約曲線を含む。例外集合は次数・重複度ベクトルによらず一つであり、ここでの配置は「非常に一般」である。単一の Zariski 閉集合上の主張に置き換えない。 $r = 9$ は主張の範囲外である。

Theorem 1.1 · p. 1

Corollary 6.1 — 非可算な標数零体への移行

k を非可算代数閉体、 $\text{char } k = 0$ 、 $r \geq 10$ とする。 $\mathbf{P}_k^2$ の相異なる順序付き r 点の空間でも、真の閉集合の可算和の非空な補集合上で Theorem 1.1 と同じ次数・重複度・曲線の規約による狭義不等式が同時に成り立つ。

Corollary 6.2 — strict nef、平方零、最大多点 Seshadri 定数

Theorem 1.1 または Corollary 6.1 の点配置で平面をブローアップした X において、 H を直線の引戻し、 E_i を例外曲線とする。このとき

$$N_r = \sqrt{r}H - \sum_i E_i \quad \text{は strictly nef,} \quad N_r^2 = 0.$$

ここで用いるのは等重みの多点定数であり、正規化は

$$\varepsilon(\mathcal{O}(1); p_1, \dots, p_r) = \sup\{t \geq 0 : H - t \sum_i E_i \text{ is nef}\} = \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

一点定数でも、個別の重みを指定した定数でもない。非平方の r では値は無理数となる。

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Nagata's conjecture for plane curves](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [StacksN](#) The Stacks Project Authors — The Stacks project — Divisors：法束を $\mathcal{O}_B(k)$ と同定する。Online chapter PDF and tag statement consulted 2026-10-15。
- [StacksC](#) The Stacks Project Authors — The Stacks project — Cohomology of Schemes：平方の場合に切断空間の次元を計算する。Online chapter PDF and tag statement consulted 2026-10-15。
- [StacksT](#) The Stacks Project Authors — The Stacks project — Algebraic Curves：非振れの次数0の線束を選ぶ。Online chapter PDF and tag statement consulted 2026-10-15。
- [Chow49](#) W.-L. Chow — On Compact Complex Analytic Varieties：Lemma 3.3の解析的像の代数性に使用。原著の定理記述は未照合。American Journal of Mathematics 71 (1949), 893–914; original theorem location unverified。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 の証明 — 全配置の存在を二つの極限で矛盾させる

証明対象：Theorem 1.1 · p. 1

証明の道筋。 反例の存在条件を閉集合として記述し、巡回積によって均等重複度へ移る。平方の場合は高々二つの係数が矛盾を与える。非平方の場合は、三次曲線の法束上で残る $r - 9$ 点を衝突させて非零核を作る一方、楕円曲線を退化させた数値行列の列独立性を示す。図はこの分岐と最後の矛盾をまとめている。

1 反例を全配置の均等系へ

$$\mathcal{U}_r(d, m), \quad d/m \leq \sqrt{r}, \quad (d, m) \mapsto (Nd, Nm)$$

閉 incidence 条件と巡回積、法座標の拡大
[Lemma 2.1 · pp. 3–4](#); [Proposition 2.2 · pp. 4–6](#)

2 任意の法変位へ特殊化

$$0 \neq F(w) = \sum_j f_j w^j, \quad f_j \in H^0(B, L^{d-kj}), \quad \text{mult}_{(a_i, c_i)} F \geq m$$

二つの最高係数で矛盾
[Proposition 2.3 · pp. 6–7](#)

九点の強制零点を除く
[Lemma 2.4](#); [Proposition 3.1 · pp. 8–9](#)

平方 $r = k^2$

$A = L^k(-P)$ を非捩れに選ぶ
 $j < m$: 零点数と次数で排除
 $j = m$: $c \notin \text{im}(\text{ev})$

非平方 r

$$3 < d/m < \sqrt{r}, \quad q = r - 9$$

$$w = \sigma_P v, \quad \tilde{F} = \sigma_P^{-m} F(\sigma_P v)$$

$$\deg(T \otimes A^{m-j}) = h > 0 \quad (0 \leq j \leq m)$$

τ を固定して点を衝突、零点数を保存
[Lemma 4.1 · pp. 13–14](#)

3 非平方：各曲線上で非零核を得る

$$\ker J_\tau \neq 0, \quad I = \{(\ell, b) : b < m, \ell < q(m - b)\}$$

theta 級数の全固定階微分が収束
[Lemma 4.2](#); [Proposition 4.3 · pp. 14–17](#)

4 正規化基底の極限を計算

$$H_{E_j, K, \tau} \longrightarrow e^{Kx+jy}, \quad B_\tau \longrightarrow B_0 = (K^\ell j^b)$$

縮小多角形と共通倍で格子端点誤差を吸収
[Lemmas 5.1–5.4 · pp. 18–21](#)

5 行の個数を制御して補間

$$N_K \leq m, \quad \#\{K : N_K \geq t\} \leq q(m - t + 1)$$

$$S \subset mD_\lambda + (0, U_0), \quad q(1 - \lambda)m \geq 1$$

行補間の全射性と非零小行列式の持続
[Proposition 5.5](#); [Theorem 1.1 proof · p. 21](#)

6 全配置の存在を排除する

$$\text{rank } B_0 = \#S \implies \ker J_\tau = 0 \quad (\tau \ll 1)$$

非零核と矛盾し、平方・非平方とも $d_0 \sqrt{r} > \sum_i m_i$

Theorem 1.1の平方・非平方の場合と極限行列による矛盾

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 可算例外集合、巡回積、法束多項式

固定した次数 e と重複度ベクトル $\mathbf{n}$ に対し、非零の曲線が存在する配置の集合 $A_{e,\mathbf{n}}$ は Taylor 条件行列の最大列小行列式で定義される閉集合で、 $\mathbf{Q}$ 上定義される。真の $A_{e,\mathbf{n}}$ をすべて除いた E_r の外で反例があれば、その一つの存在条件は U_r 全体で成り立つ。点の巡回置換に対応する r 個の式の積を取ると、 $d = rd_0$ 、 $m = \sum_i m_i > 0$ に対して

$\mathcal{U}_r(d, m)$: すべての相異なる点配置に、次数 d 、各点重複度 $\geq m$ の非零形式が存在

が成り立ち、 $d/m \leq \sqrt{r}$ となる。ここで $\mathcal{U}_r$ は本原稿の性質 $U_r(d, m)$ を配置空間と区別して書いたもの。任意の共通倍数 (Nd, Nm) にも同じ性質が成り立つ。

滑らかな次数 k の平面曲線 B と $L = \mathcal{O}_B(1)$ に対し、法束は $M = L^k$ 。点を B に向けて動かし法方向を拡大すると、任意の相異なる $a_i \in B$ と任意の法ベクトル $c_i \in M_{a_i}$ において重複度 m 以上を持つ

$$0 \neq F(w) = \sum_{j=0}^{\lfloor d/k \rfloor} f_j w^j, \quad f_j \in H^0(B, L^{d-kj})$$

を得る。最小の s 次数を取り出す際、残る項の w 指数が異なることが非零性を保証する。重複度は移動点に中心を移した局所式の微分条件を $s = 0$ へ延長して保つ。特殊配置から一般配置への逆向きの変形を仮定するのではなく、全配置での存在を特殊配置で矛盾させている。

Lemma 2.1 · pp. 3–4

Proposition 2.2 · pp. 4–6

[StacksN, Tag 0B3P, Lemma 15.2, p. 26]

2. 平方の場合は等号も排除する

$r = k^2$ 、 $k \geq 4$ とする。 $P = \sum a_i$ を $A = M(-P)$ が非振れとなるよう選び、法ベクトルの組 c は評価写像 $H^0(B, M) \rightarrow \bigoplus_i M_{a_i}$ の像の外に取る。これは torsion が可算であることと、 $h^0(B, M) = (k^2 + 3k)/2 < r$ による。

F の最高次数を j とする。 $d \leq km$ なら $j \leq m$ 。 $j < m$ のとき最高係数の必要な零点数が次数を超えるか、境界 $d = km$ で非自明な次数零束 A^{m-j} に非零切断を与えて矛盾する。残る $j = m$ 、 $d = km$ では最高係数 f_m が非零定数で、各ファイバー上 $F = f_m(w - c_i)^m$ 。次の係数が $(f_{m-1}(a_i)) = -mf_m(c_i)$ を満たすため、選んだ c が評価写像の像に入ってしまう。これが狭義の境界を含む排除である。

Proposition 2.3 · pp. 6–7

[StacksC, Tag 01XT, Lemma 8.1, p. 16]

[StacksT, Tag 0C1Z, Lemma 17.1, p. 36]

3. 非平方の場合：固定曲線上の衝突と数値行列の極限

d/m は有理数なので $d/m < \sqrt{r}$ 。三次曲線の九点で法変位を零にすると、 $j < m$ の係数に $(m-j)P$ の零点が強制される。Lemma 2.4 は $d \leq 3m$ を排除する。 $A = L^3(-P)$ 、 $T = L^{d-3m}$ とし、 $w = \sigma_P v$ 、 $\tilde{F} = \sigma_P^{-m} F(\sigma_P v)$ により最初の $m+1$ 係数を同じ正次数 $h = 3(d-3m)$ の束 $T \otimes A^{m-j}$ に置く。 $j > m$ には $\sigma_P^{j-m} H^0(B, L^{d-3j})$ を用い、その直和を W_τ とする。

$B = X_\tau = \mathbf{C}^*/\tau^{\mathbf{Z}}$ 、 $0 < \tau < 1$ とし、原典の multiplier を持つ theta 束を用いる。次数3の切断系は点・接ベクトルを分離するため解析的埋込みを与え、Lemma 3.3 は Chow の定理により像を代数的な平面三次曲線とする。Chow 原著の定理箇所は今回未照合である。

まず τ を固定する。残り $q = r - 9$ 点を局所座標 (x, y) の $y = 0$ 上で衝突させる。 b 回の y 微分後には各点で $m - b$ 次以上の零点があるので、正規化した有限次元切断の非零極限に対し Rouché の定理が零点の合計を保存し、

$$J_\tau : W_\tau \longrightarrow \mathbf{C}^I, \quad I = \{(\ell, b) : 0 \leq b < m, 0 \leq \ell < q(m-b)\}, \quad \ker J_\tau \neq 0$$

を得る。次に theta 級数の剰余類ごとの基底を正規化すると、その局所式は e^{Kx+jy} へ固定次数の全微分とともに収束する。したがって行列は $B_0 = (K^\ell j^b)$ に収束する。 τ をまたぐ核ベクトルの連続選択は使わない。

Lemma 2.4; Proposition 3.1 · pp. 8–9

Lemmas 3.2–3.3; §3.3 · pp. 10–12

Lemma 4.1 · pp. 13–14

Lemma 4.2; Proposition 4.3 · pp. 14–17

4. 行補間で列独立性を得て、すべての反例を排除する

指数集合 $S = \{(j, K)\}$ は原典 (4.4) の有限集合であり、 $3 \mid d$ の場合の次数零ブロック $(d/3, 0)$ も含む。 $a = 3(\sqrt{r} - 3)$ 、 $\rho = 3(d/m - 3)$ とし、 $0 < \Delta \in \mathbf{Q}$ を $\rho + \Delta\rho/9 < a$ となるよう選ぶ。さらに $\lambda < 1$ を十分1に近く取ると、 S は縮小多角形 $mD_\lambda + (0, U_0)$ に入る。この多角形の最大水平幅は $m\lambda$ 、幅が s 以上の高さの区間長は $q(m\lambda - s)$ である。ここで $2a + a^2/9 = q$ が効く。

あらかじめ (d, m) を共通倍して $q(1 - \lambda)m \geq 1$ とすれば、格子点端点の誤差を吸収して

$$N_K := \#\{j : (j, K) \in S\} \leq m, \quad \#\{K : N_K \geq t\} \leq q(m - t + 1) \quad (1 \leq t \leq m)$$

を得る。大きい行から順に補間し、既処理の高さで消える $\prod_{a < i} (K - K_a)$ を掛けると、各補正項は $\ell < q(m - b)$ を保つ。したがって $K^\ell J^b$ の許された空間が S 上の全関数へ全射となり、 B_0 は列フルランクである。非零最大小行列式の連続性により小さい正の τ でも J_τ は単射となり、前段の非零核と矛盾する。

共通倍は比 d/m と Δ, λ を変えず、点の衝突・行列極限の前に一度だけ取る。平方・非平方の両方で $\mathcal{U}_r(d, m)$ が排除されるため、最初の一つの E_r の外で任意の次数・不均等重複度に狭義不等式が戻る。

Lemmas 5.1–5.4 · pp. 18–21

Proposition 5.5; Theorem 1.1 proof · p. 21

3. Corollary 6.1 の証明 — 有理係数の閉条件を移す

証明対象：Corollary 6.1 · p. 22

Theorem 1.1 の全量化を、上の Corollary 6.1 の体へ移す。

1 違反する系の存在条件

$d\sqrt{r} \leq \sum_i m_i, \quad A_{d,\mathbf{m}} \subset U_r$
 $\mathbf{Q}$ 係数の Taylor 条件行列の小行列式

複素数上の定理と非零有理小行列式
[Theorem 1.1 · p. 1](#); [Corollary 6.1 · p. 22](#)

2 体拡大で真の閉集合を保つ

$A_{d,\mathbf{m},\mathbf{C}} \neq U_{r,\mathbf{C}} \implies A_{d,\mathbf{m},k} \neq U_{r,k}$

非可算性から $2r$ 個の代数的独立座標を選ぶ
[Corollary 6.1 · p. 22](#)

3 一つの非空な補集合で全不等式

$U_{r,k} \setminus \bigcup_{d,\mathbf{m} \text{ violating}} A_{d,\mathbf{m},k} \neq \emptyset$
 全 $d \geq 1 \cdot$ 全 $m_i \geq 0$ に狭義不等式

Corollary 6.1の有理係数のincidence条件と非空性

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 真の incidence locus と非空な補集合

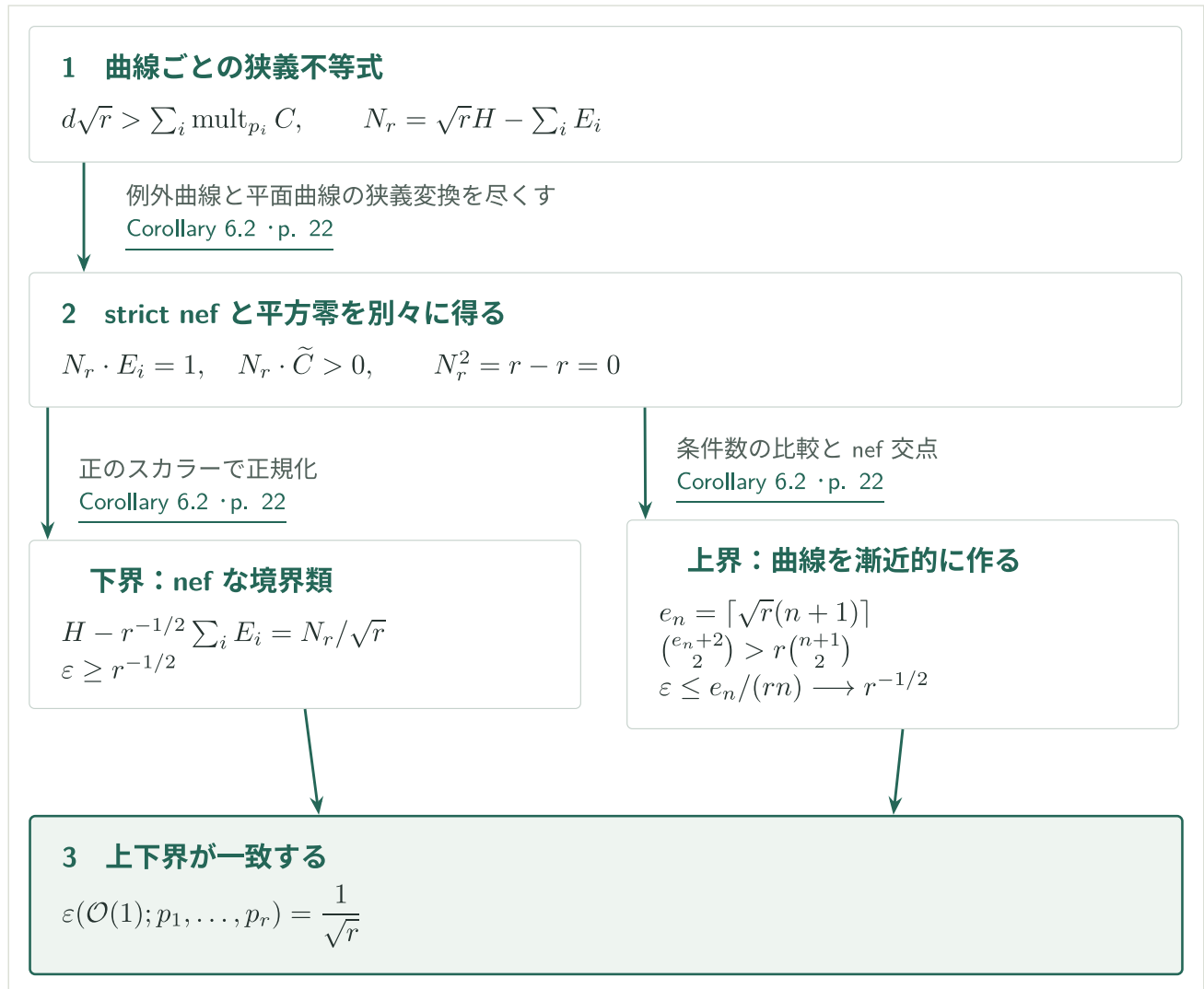
違反する各 $(d, \mathbf{m})$ の incidence locus は $\mathbf{Q}$ 係数の小行列式で定義される。複素数上で真なら、有理数上も真で、標数零の体拡大後も非零小行列式は非零である。これら可算個の閉集合を除けばすべての不等式が同時に成立する。非可算な k では $\mathbf{Q}$ 上代数的独立な $2r$ 個の座標を選び、全閉集合と対角線を避ける。 $k \hookrightarrow \mathbf{C}$ という埋込みは不要である。

Corollary 6.1 · p. 22

4. Corollary 6.2 の証明 — 曲線ごとの正性と漸近上界を合わせる

証明対象：Corollary 6.2 · p. 22

Corollary 6.2 の三つの結論について、狭義不等式からの下界と、条件数からの上界を分ける。



Corollary 6.2のstrict nef · 平方零 · 上下界の一致

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. すべての既約曲線との交点と自己交点

ブローアップの既約曲線は例外曲線か平面曲線の狭義変換である。前者に対し $N_r \cdot E_i = 1$ 、後者に対し $N_r \cdot \tilde{C} = d\sqrt{r} - \sum_i \text{mult}_{p_i} C > 0$ 。よって strictly nef である。一方、 $H^2 = 1$ 、 $H \cdot E_i = 0$ 、 $E_i \cdot E_j = -\delta_{ij}$ から $N_r^2 = r - r = 0$ 。この数値等式だけから nef 性を推論しているのではない。

Corollary 6.2 · p. 22

2. 正規化した下界と、補間条件数による上界

$N_r/\sqrt{r} = H - r^{-1/2} \sum_i E_i$ が nef なので $\varepsilon \geq r^{-1/2}$ 。逆向きには $e_n = \lceil \sqrt{r}(n+1) \rceil$ を取り、 $\binom{e_n+2}{2} > r \binom{n+1}{2}$ から、各点で少なくとも n 重の次数 e_n の非零形式 D を得る。 $H - t \sum_i E_i$ が nef なら

$$0 \leq e_n - t \sum_i \text{mult}_{p_i} D \leq e_n - trn,$$

従って $t \leq e_n/(rn) \rightarrow 1/\sqrt{r}$ 。この上界は任意の配置の条件数から得られ、非常に一般的な配置での困難は一致する下界にある。各曲線との交点が正であることと、漸近的な上限が境界値に等しいことは両立する。

Corollary 6.2 · p. 22

5. どの論文が、どの段階を担うか

供給元と結果

[StacksN, Tag 0B3P, Lemma 15.2, p. 26]

利用箇所

Proposition 2.2, p. 4

使用内容・必要な仮定

滑らかな平面曲線を有効 Cartier 因子として法束を同定

確認範囲

記述と適用を照合

供給元と結果

[StacksC, Tag 01XT, Lemma 8.1, p. 16]

利用箇所

Proposition 2.3, p. 7

使用内容・必要な仮定

$H^1(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}) = 0$ と制限完全列

確認範囲

記述と適用を照合

供給元と結果

[StacksT, Tag 0C1Z, Lemma 17.1, p. 36]

利用箇所

Proposition 2.3, p. 6; Lemma 2.4, p. 8

使用内容・必要な仮定

標数零の滑らかな射影曲線の各有限位数 torsion の有限性

確認範囲

記述と適用を照合

供給元と結果

Chow49

利用箇所

Lemma 3.3, p. 11

使用内容・必要な仮定

コンパクトな解析的埋込みの閉像の代数性

確認範囲

利用箇所と仮定を照合。原著の記述・番号は未照合

Dumnicki の評価行列、Evain の衝突、Rosengren の θ 規約は原稿が明記する手法上の背景である。ここで用いる行補間・衝突条件・正規化収束は原稿内で証明されているため、それら背景文献からの未確認な直接依存の矢印は付けない。他カタログとの網羅的な接続調査は未実施である。

6. 原典を読む入口と確認範囲

- Lemma 2.1 · pp. 3–4 — 全次数・全重複度に共通の例外集合と均等化。
- Proposition 2.2 · pp. 4–6 — 法方向の極限で非零性と重複度を保つ箇所。
- Proposition 2.3 · pp. 6–7 — 平方の場合の境界等号を排除する二段階。
- Lemma 4.1 · pp. 13–14 — 楕円曲線を固定してから点を衝突させる。
- Lemma 4.2; Proposition 4.3 · pp. 14–17 — 基底の正規化と数値行列の極限。
- Lemmas 5.1–5.4 · pp. 18–21 — 総次元ではなく行の分布を制御する。
- Corollary 6.2 · p. 22 — strict nef · 平方0 · 定数の上下界を区別する。

編集側では主要結果の仮定・全結論と、§§2-6 の上記証明箇所を原典本文に照らした。特に、任意重複度への帰着、平方の等号、固定曲線上の衝突とその後の行列極限の順序、格子端点の誤差、Seshadri 定数の上下界の別々の根拠を確認した。Stacks の三入力は原文の記述と適用を照合した。Chow 原著の定理記述、外部結果の証明、背景文献全体、解析的評価の全面的な独立検証は未実施である。

§§2-6 · pp. 3-22

Maximal Seshadri constants on arbitrary polarized surfaces

節点曲線から有限補間へ、等重複度の消滅からnef境界へ

原稿は、任意の滑らかな整射影複素曲面と豊富な直線束に対し、点数が十分大きければ非常に一般の点で多点Seshadri定数が体積上界に一致すると主張する。固定した節点曲線から切断の初項を三角形へ移し、その形を点数ごとに調整して有限群上のjet評価を単射にする。最後にRiemann–Rochを使い、等重複度の消滅から不均等な重複度を持つ曲線も排除する。

原稿の著者: OpenAI · 2026-09-23 · 19 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 任意の偏極曲面での十分大きな点数に対する最大性

S を滑らかな整射影複素曲面、 L を S 上の豊富な直線束とする。 $H = L^2$ とし、相異なる順序付き r 点の配置空間を

$$U_r = \{(p_1, \dots, p_r) \in S^r : p_i \neq p_j \ (i \neq j)\}$$

と書く。原稿の定理は、整数 $r_0 = r_0(S, L)$ が存在し、各整数 $r \geq r_0$ に対し、真のZariski閉部分集合の可算和 $Z_r \subset U_r$ で補集合が非空のものを取り、すべての $\mathbf{p} \in U_r \setminus Z_r$ について

$$D_0 = \pi^* L - \sqrt{\frac{L^2}{r}} \sum_{i=1}^r E_i$$

がnefになる、という主張である。ここで $\pi : Y \rightarrow S$ は指定点のブローアップ、 E_i は例外曲線である。その帰結として

$$\varepsilon(S, L; \mathbf{p}) = \sqrt{\frac{L^2}{r}}.$$

Theorem 1.1 · p. 2

正規化は等しい例外係数を使う多点定数であり、

$$\varepsilon(S, L; \mathbf{p}) = \inf_C \frac{L \cdot C}{\sum_i \text{mult}_{p_i} C} = \sup\{\lambda \geq 0 : \pi^* L - \lambda \sum_i E_i \text{ is nef}\}.$$

C は少なくとも一点を通る整曲線を走る。分母を r で割る正規化や重み付き定数ではない。各曲線の重複度は等しいと仮定しない。「非常に一般」は上記の可算和の補集合を意味し、一つのZariski開集合で全jet条件を同時に満たすという主張ではない。

§1; equation (1.1) · pp. 1–2

この定理が扱うのは偏極に依存する閾値以降の定性的Nagata–Biran予想である。平面の全点数 $r \geq 10$ における厳密な不均等重複度不等式は、本稿が参考文献[14]として挙げる別原稿の結果であり、ここでの閾値や非厳密不等式からそのまま導かれるものではない。本稿の主定理証明はその平面定理を入力しない。

§§1–1.1 · pp. 2–3

Corollary 5.5 — 非可算な代数閉体、標数0

K を非可算な標数0の代数閉体、 S/K を滑らかな整射影曲面、 L を豊富な直線束とする。整数 $r_0 = r_0(S, L)$ が存在し、各 $r \geq r_0$ について、 U_r 内の真のZariski閉部分集合の可算和を除く非空の集合のすべての点で

$$\varepsilon(S, L; p_1, \dots, p_r) = \sqrt{\frac{L^2}{r}}.$$

標数0と非可算性をともに仮定する。可算な代数閉体上の有理点に同じ非空性を主張する系ではない。

Corollary 5.5 · p. 18

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Maximal Seshadri constants on arbitrary polarized surfaces](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [SPVar](#) The Stacks Project Authors — The Stacks Project — Varieties：非常に豊富な系の一般切断の滑らかさ。version ed88ff78, compiled July 14, 2026; retrieved October 15, 2026。
- [SPMor](#) The Stacks Project Authors — The Stacks Project — More on Morphisms：Bertiniの幾何学的既約性。version ed88ff78, compiled July 14, 2026; retrieved October 15, 2026。
- [StacksN](#) The Stacks Project Authors — The Stacks Project — Divisors：正則埋込みとブローアップのRees代数。version ed88ff78, compiled July 14, 2026; retrieved October 15, 2026。

- [SPMod](#) The Stacks Project Authors — The Stacks Project — Sheaves of Modules : principal partsと有限階微分作用素。version ed88ff78, compiled July 14, 2026; retrieved October 15, 2026。
- [SPChow](#) The Stacks Project Authors — The Stacks Project — Chow Homology and Chern Classes : 曲面Riemann–Rochの入力。version ed88ff78, compiled July 14, 2026; retrieved October 15, 2026。
- [SPDual](#) The Stacks Project Authors — The Stacks Project — Duality for Schemes : Serre双対による最高次コホモロジーの消滅。version ed88ff78, compiled July 14, 2026; retrieved October 15, 2026。
- [SPRes](#) The Stacks Project Authors — The Stacks Project — Resolution of Surfaces : 例外因子の係数と点のイデアル冪の対応。version ed88ff78, compiled July 14, 2026; retrieved October 15, 2026。
- [SPLim](#) The Stacks Project Authors — The Stacks Project — Limits of Schemes : 有限表示の射影データの下降。version ed88ff78, compiled July 14, 2026; retrieved October 15, 2026。
- [SPDes](#) The Stacks Project Authors — The Stacks Project — Descent and Algebraic Spaces : 体拡大に対する豊富性の下降。version ed88ff78, compiled July 14, 2026; retrieved October 15, 2026。
- [StacksC](#) The Stacks Project Authors — The Stacks Project — Cohomology of Schemes : 体拡大と大域切断の可換性。version ed88ff78, compiled July 14, 2026; retrieved October 15, 2026。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

Stacksの結果番号は参照した章PDFの番号を使い、安定したTagも併記する。外部入力の記事と本稿での適用を照合し、その証明自体の再帰的な検証とは区別する。

2. Theorem 1.1の証明 — 形を調整した三角形から最大性へ

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · [p. 2](#) 仮定 · 全結論を参照する。

証明の道筋。 節点曲線で初項を囲み、対角スライスを圧縮して面積 $H/2$ の三角形を作る。各十分大きな r に対して三角形と指数 r の格子を先に選び、すべての k, m に一樣なtorus上のjet検査を得る。二つの有限行列の移送と開条件で非常に一般の曲面点へ移し、[Proposition 5.3](#)による下界と[Lemma 5.4](#)の普遍的上界を合わせる。

1 節点から指数領域を作る

$$V \in |dL|, \quad H = L^2, \quad \nu_t(H^0(kL)) \subset kQ_t$$

$$P_t = \text{conv}\{(-b, 0), (a, 0), (0, 1/d)\}, \quad \text{area}(P_t) = H/2$$

原始方向の幅を $\sqrt{rH}$ に調整し、指標ごとの三角形を検査する

Proposition 4.2 · pp. 12–13

Lemma 4.3; Corollary 4.4 · pp. 14–15

2 各点数に形と有限群を合わせる

$$r \geq r_0 : \quad t, G \text{ を固定, } |G| = r, \quad w = \sqrt{H/r}$$

$$\forall k, m \in \mathbb{Z}_{>0}, m > kw : \quad J_G^m|_{\mathcal{M}(kP_t)} \text{ は単射}$$

圧縮と解析的移送で各テストを実現し、開条件と Baire 性で共通化

Lemma 3.3; Proposition 3.4; Corollary 3.5 · pp. 9–11

Lemma 5.1 · p. 15

3 非常に一般の配置で全 jet 条件を同時に満たす

$$U_r \setminus Z_r \neq \emptyset, \quad H^0(S, kL \otimes \bigcap_i I_{p_i}^m) = 0 \quad (m > kw)$$

$$Z_r \text{ は真の Zariski 閉集合の可算和}$$

負の曲線を有効化して矛盾を得る；上界は別の jet 次元計算

Proposition 5.3 · pp. 16–17

Lemma 5.4 · p. 17

4 nef 下界と普遍的上界を合わせる

$$D_0 = \pi^*L - w \sum_i E_i \text{ は nef} \implies \varepsilon \geq w$$

$$\varepsilon \leq w \implies \boxed{\varepsilon(S, L; \mathbf{p}) = \sqrt{L^2/r}}$$

節点から三角形、有限群、非常に一般のjet条件を経てnef境界と最大性へ進む全体図

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 節点の交点数が初項を囲み、圧縮がjet条件を移す

eL を非常に豊富に取り、点のブローアップ上で $2e\pi^*L - E$ を非常に豊富にする。その二乗の一般切断を、例外曲線と異なる二点で横断的に交わるよう選ぶ。Bertiniによる滑らかさと既約性を合わせ、押し下げて $V \in |dL|$ 、 $d = 4e$ を得る。 V は整で、一つの通常節点以外は滑らかである。節点の二枝を $xz = 0$ とする局所座標を固定する。

Lemma 3.1; Proposition 3.2 · pp. 6–8

[SPVar, Lemma 47.3 (Tag 0FD6), p. 108]

[SPMor, Lemma 32.3 (Tag 0G4F), p. 94]

$t > T > 1$ を $(1+t)^2 > d^2 Ht$ となるように取り、 $a = dHt/(1+t)$ 、 $b = dH/(1+t)$ 、 $c = 1/d$ とする。 V を成分に持たない kL の切断の最小重み v は、両枝との局所交点数から $v(1+1/t) \leq kdH$ を満たす。 V を j 回含む場合は先に除き、初項の指数を (j, j) だけ移す。従って全初項が

$$kQ_t, \quad Q_t = \text{conv}\{(0, 0), (a, 0), (c, c), (0, b)\}$$

に入る。 $q = \alpha - \beta$ で対角スライスを縦にし、その下端を0へ移すと

$$P_t = \text{conv}\{(-b, 0), (a, 0), (0, c)\}, \quad \text{area}(P_t) = H/2$$

になる。面積を揃えるだけではjet評価は移らない。Proposition 3.4は各整数スライスの基底 $u^q v^{\beta_q} (v-1)^h$ に $v = 1 + sy$ を代入し、 s^{-h} 倍して $u^q y^h$ へ収束させる。非零最大小行列式の持続で P_t の単射性が Q_t へ戻り、Proposition 2.2の重み付き解析的拡大縮小が初項から元の切断へ戻す。構成点は相異なり、 k, m ごとに異なってよい。

Lemma 3.3; Proposition 3.4; Corollary 3.5 · pp. 9–11

Lemma 2.1; Proposition 2.2 · pp. 4–6

2. 各十分大きな整数 r に対して、全次数に使える有限群を選ぶ

$w = \sqrt{H/r}$ と置く。Lemma 4.3は $t > T$ と原始格子ベクトル u を選び、 P_t 上の $\det(u, -)$ の幅をちょうど $\sqrt{rH}$ にする。具体的には $R = \sqrt{rH}$ 、 $W = dH$ 、 $a_0 = WT/(1+T)$ として、 $R/(4W) < j \leq R/(2W)$ を満たす2の冪 j を選ぶ。十分大きな r では区間 $(d(R-jW), d(R-ja_0))$ の長さが2を超えるので奇数 i を選べる。 $u = (i, j)$ は原始であり、 $i/d + ja = R$ となる $a \in (a_0, W)$ を連続パラメータ t で実現する。これが平方数に限らない全整数 r を扱う箇所である。

Lemma 4.3; Corollary 4.4 · pp. 14–15

u を整数基底 (u, v_0) へ補い、 $M = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}(rv_0)$ とする。これを消すtorusの有限群 G は $|G| = r$ を満たす。 G の指標射影で指数を M の剰余類ごとに分解し、非零成分を格子 M の座標へ移す。得られるLaurent多項式の支持三角形は面積 $(kw)^2/2$ 、縦幅 kw である。Lemma 4.1はその $(1, 1)$ での消滅次数を kw 以下と評価する。その証明は各水平行から $(U-1)^e$ を共通に除き、残りの高さの幅を $kw - e$ 以下に抑えるものである。局所座標変換のJacobianは $r \neq 0$ なので消滅次数は保存され、 $m > kw$ で全 G 上に m 重に消える非零多項式は存在しない。

重要な量化の順序は、 (S, L) から r_0 を固定し、次に各 r について t, G を固定し、その後ですべての正整数 $k, m, m > kw$ を扱うことである。固定された重複度だけの漸近的補間では足りない。

Proposition 4.2 · pp. 12–13

Lemma 4.1 · pp. 11–12

3. 特殊な検査点から非常に一般の配置へ、そしてnef下界へ

Corollary 3.5で各 (k, m) の単射性を曲面のある r 点で実現する。Lemma 5.1はprincipal-parts束を用いてjet評価を代数的なベクトル束の写像として表し、非単射集合を最大小行列式で定義する。従って各単射集合は非空Zariski開集合である。 (k, m) は可算個なので、それらの共通部分は真の閉集合の可算和の補集合となる。複素多様体 $U_r(\mathbb{C})$ のBaire性により非空である。ここで初めて、すべての次数について同じ配置を使える。

Lemma 5.1 · p. 15

[SPMod, Section 29 (Tag 0G3P), pp. 45–46]

[StacksN, Sections 22, 33 (Tags 0638, 010F), pp. 47, 81–82]

その配置でProposition 5.3を適用し、 D_0 のnef性、従って $\varepsilon \geq w$ を得る。等しい重複度の切断を排除したことから、不均等な曲線の排除へ移る接続は同命題のRiemann–Roch論法であり、数値的な同値として省略しない。

Proposition 5.3 · pp. 16–17

4. 普遍的上界と合わせて等号を得る

上界は補間による下界とは別の議論で、任意の相異なる点配置について成立する。 $0 < \alpha < w$ 、

$m_k = \lceil k\alpha \rceil$ とすると、Riemann–Rochの $h^0(kL) \geq Hk^2/2 + O(k)$ はjet条件数

$r_2^{(m_k+1)} = r\alpha^2 k^2/2 + O(k)$ を上回る。従って $F_k \sim k\pi^*L - m_k \sum E_i$ を有効に取れる。 $\pi^*L - \lambda \sum E_i$ がnefなら

$$0 \leq (\pi^*L - \lambda \sum E_i) \cdot F_k = kH - \lambda r m_k.$$

$k \rightarrow \infty$ 、次いで $\alpha \uparrow w$ とすると $\lambda \leq w$ となる。したがって前段の $\varepsilon \geq w$ と合わせて $\varepsilon = w$ 。単に $D_0^2 = 0$ と計算するだけでは下界は出ない。

Lemma 5.4 · p. 17

Proof of Theorem 1.1 · p. 17

3. Proposition 5.3の証明 — 等重複度からすべての曲線へ

証明対象：Proposition 5.3 · pp. 16–17

Proposition 5.3 — Homogeneous tests imply nefness

S を滑らかな整射影複素曲面、 L を豊富、 $p_1, \dots, p_r$ を相異なる点とし、 $H = L^2$ 、 $w = \sqrt{H/r}$ と置く。すべての正整数 k, m で $m > kw$ ならば、全 p_i で少なくとも m 重に消える $L^{\otimes k}$ の非零切断が存在しないと仮定する。このとき、点をブローアップした Y 上の $D_0 = \pi^*L - w \sum_i E_i$ はnefである。

Proposition 5.3 · pp. 16–17

$A = \pi^*L$ 、 $E = \sum_i E_i$ と書く。 A はnef、 $A^2 = H$ 、 $A \cdot E_i = 0$ 、 $E_i \cdot E_j = -\delta_{ij}$ である。

1 nef でないと仮定する

$$D_0 = A - wE, \quad D_0^2 = 0, \quad D_0 \cdot C < 0 \\ C \neq E_i, \quad A \cdot C > 0, \quad A = \pi^*L \text{ は nef}$$

$-2\delta D_0 \cdot C > 0$ を使い、次に $s > w$ へ動かす
Proposition 5.3 · pp. 16–17

2 有理摂動で正の自己交点を得る

$$D = A - sE - \delta C, \quad s > w, \quad s, \delta \in \mathbb{Q}_{>0} \\ D^2 > 0, \quad A \cdot D > 0$$

nef な A で $K_Y - kD$ を排除し、Riemann–Roch を適用
Lemma 5.2 · p. 16
[SPDual, Lemma 27.1(6)–(7) (Tag 0FVV), p. 69]
[SPChow, Section 66 (Tag 02UO), p. 154]

3 有効な倍数を作る

$$h^2(kD) = 0, \quad h^0(kD) \geq \chi(kD) = \frac{1}{2}k^2D^2 + O(k) > 0 \\ F \sim kD, \quad F \geq 0$$

曲線を足し戻し、例外次数を点のイデアル冪へ戻す
[SPRes, Lemma 3.4(4), Section 3 (Tag 0AGP), p. 7]
Proposition 5.3 · pp. 16–17

4 等重複度の禁止と矛盾する

$$F + k\delta C \sim kA - mE, \quad m = ks > kw \\ H^0(S, kL \otimes \bigcap_i I_{p_i}^m) \neq 0 \implies \perp \implies \boxed{D_0 \text{ は nef}}$$

負の曲線から正の自己交点を持つ有理因子を作り、等重複度の非零切断との矛盾を得る

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 負の曲線を引き、境界の外へ有理摂動する

D_0 がnefでないなら、 $D_0 \cdot C < 0$ となる整曲線 $C \subset Y$ がある。 $D_0 \cdot E_i = w > 0$ なので C は例外曲線ではなく、 $A \cdot C > 0$ である。十分小さな正の有理数 δ について

$$(D_0 - \delta C)^2 = -2\delta D_0 \cdot C + \delta^2 C^2 > 0, \quad A \cdot (D_0 - \delta C) > 0.$$

連続性から、 w より大きい十分近い有理数 s を取り、 $D = A - sE - \delta C$ でも $D^2 > 0$ 、 $A \cdot D > 0$ を保てる。 D 自身のnef性は必要ない。

Proposition 5.3 · pp. 16–17

2. Serre双対とRiemann–Rochで有効倍数を得る

分母を払う十分大きな k について、 $A \cdot (K_Y - kD) < 0$ となる。 A はnefなので $K_Y - kD$ は有効因子に線形同値でなく、Serre双対から $h^2(kD) = 0$ を得る。さらに

$$h^0(kD) \geq \chi(\mathcal{O}_Y(kD)) = \frac{k^2 D^2 - kD \cdot K_Y}{2} + \chi(\mathcal{O}_Y) > 0.$$

これはLemma 5.2の適用である。参照したStacksのRiemann–Rochは一般のGrothendieck–Riemann–Rochの記述であり、ここでは滑らかな射影曲面上の直線束に特殊化して用いる。

Lemma 5.2 · p. 16

[SPDual, Lemma 27.1(6)–(7) (Tag 0FVV), p. 69]

[SPChow, Section 66 (Tag 02UO), p. 154]

3. 曲線を足し戻し、等しい重複度の禁止に戻る

有効 $F \sim kD$ を取り、 k を s, δ の分母で可除にすると

$$F + k\delta C \sim kA - mE, \quad m = ks > kw.$$

ブローアップの恒等式 $\pi_* \mathcal{O}_Y(-mE) = \bigcap_i I_{p_i}^m$ と射影公式により、これは全点で m 重に消える kL の非零切断を与え、仮定に反する。従って D_0 はnefである。曲線 C の元の各点での重複度が互いに異なっている、この有効化と足し戻しにより等重複度の検査へ帰着できる。

[SPRes, Lemma 3.4(4), Section 3 (Tag 0AGP), p. 7]

Proposition 5.3 · pp. 16–17

4. Corollary 5.5の証明 — 解析的な点を移さず、失敗集合を下降する

証明対象：Corollary 5.5 · p. 18 仮定・結論を参照する。

証明の道筋。 (S, L) を $\mathbb{Q}$ 上有限生成な部分体 $F \subset K$ へ下降し、 $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ を使って閾値を得る。複素数上の解析的構成点ではなく、jet 評価の非単射集合を K へ基底変換する。

1 有限生成体へ下降する

$$F \subset K, \quad F/\mathbb{Q} \text{ は有限生成}, \quad F \hookrightarrow \mathbb{C}$$

$$(S_0, L_0)/F \longmapsto (S_{0,\mathbb{C}}, L_{0,\mathbb{C}}), \quad r_0$$

複素数上の nef 境界が核を排除；大域切断と小行列式を基底変換

[Theorem 1.1 · p. 2](#)

[\[StacksC, Lemma 5.2 \(Tag 02KH\), p. 10\]](#)

[Corollary 5.5 · p. 18](#)

2 全 jet 失敗集合の真性を保存する

$$B_{a,m} \subset U_{r,0}, \quad m > a\sqrt{H/r}$$

$$B_{a,m,\mathbb{C}} \neq U_{r,\mathbb{C}} \implies B_{a,m,K} \neq U_{r,K}$$

非可算性で $2r$ 個の独立元を選び、代数閉性で体埋込みを延長

[Corollary 5.5 · p. 18](#)

3 共通補集合に点を取る

$$F(U_{r,0}) \hookrightarrow K, \quad Z_r = \bigcup_{a,m:m > a\sqrt{H/r}} B_{a,m,K}$$

$$U_{r,K} \setminus Z_r \neq \emptyset$$

全 jet 検査から下界へ；曲面 Riemann–Roch で上界も得る

[Proposition 5.3 · pp. 16–17](#)

[Lemma 5.4 · p. 17](#)

4 代数的な nef 化と上界を適用する

$$\pi^*L - \sqrt{H/r} \sum_i E_i \text{ は nef, } \quad \varepsilon = \sqrt{L^2/r}$$

有限生成体への下降、非単射集合の真性、非可算体上の非空補集合と最大性

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 複素数上の最大性で失敗集合が真であることを示す

射影方程式と L の有限な貼合せデータを F へ下降する。豊富性を保つ $(S_0, L_0)/F$ を取り、 $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ の後に Theorem 1.1 の r_0 を固定する。交点数 H は体拡大で変わらない。各 $r \geq r_0$ と $m > aw$ に対し、 $U_{r,0}$ 上の jet 評価の非単射集合 $B_{a,m}$ を小行列式で定義する。大域切断の flat base change により同じ行列条件を各体で比較できる。

[\[SPLim, Lemma 10.1 \(Tag 01ZM\), p. 25\]](#)

[SPDes, Lemma 13.1 (Tag 0D3C), pp. 21–22]

[StacksC, Lemma 5.2 (Tag 02KH), p. 10]

複素数上で $A - wE$ が nef となる配置を選べば、評価の核にある非零切断は有効類 $aA - mE$ を与えるが、その nef 類との交点は $aH - rmw < 0$ になる。従って $B_{a,m}$ は複素数上で真であり、 F 上でも K 上でも真である。 r_0 は全 (a, m) に共通である。

Corollary 5.5 · p. 18

2. 非可算性で全条件を同時に満たし、代数的な結論を再適用する

F は可算であり、 K は非可算なので、 F 上代数的に独立な $2r$ 個の元を K 内で選べる。 K が代数閉であることを使い、 $F(U_{r,0}) \hookrightarrow K$ へ延長する。これが与える K 点は $U_{r,0}$ の生成点へ写るので、すべての $B_{a,m}$ を避ける。ゆえに $Z_r = \bigcup_{a,m:m>aw} B_{a,m,K}$ の補集合は非空である。その全点で均等jet条件が成立し、任意の標数0体上で使える Lemma 5.2、Proposition 5.3、Lemma 5.4 の代数的議論から、nef 下界と一致する上界を得る。

Corollary 5.5 · p. 18

5. どの文献が、どの段階を担うか

供給元と結果

SPVar Lemma 47.3、SPMor Lemma 32.3

利用箇所

Lemma 3.1、p. 7

使用内容・必要な仮定

滑らかな整曲面上の非常に豊富な系の一般切断を滑らか・整にする。例外曲線との二点横断性は本稿内の制限写像の全射で確保。

確認範囲

記述と適用条件を照合。外部証明は対象外。

供給元と結果

StacksN §§22, 33、SPMod §29

利用箇所

Lemma 3.1、p. 7 ; Lemma 5.1、p. 15

使用内容・必要な仮定

Rees代数によるブローアップ、正則対角と principal parts。単射性の開性は本稿の小行列式の議論。

確認範囲

引用先の構成と本稿の有限jet説明を照合。

供給元と結果

SPDual Lemma 27.1、SPChow §66

利用箇所

Lemma 5.2、p. 16 ; Lemma 5.4、p. 17

使用内容・必要な仮定

最高次コホモロジーの消滅と二次のEuler標数。 D はnefと仮定せず、 A のnef性と $D^2, A \cdot D > 0$ を使う。

確認範囲

記述・特殊化・使用箇所を照合。

供給元と結果

SPRes Lemma 3.4(4)

利用箇所

Proposition 5.3、p. 17

使用内容・必要な仮定

二次元正則局所環の点ブローアップで例外次数をイデアル冪へ戻す。

確認範囲

記述と適用を照合。

供給元と結果

SPLim Lemma 10.1、SPDes Lemma 13.1、StacksC Lemma 5.2

利用箇所

Corollary 5.5、p. 18

使用内容・必要な仮定

有限表示の下降、豊富性の下降、flat base change。非可算性は共通補集合の点の存在に使う。

確認範囲

記述と適用を照合。

平面Nagata原稿は閾値と厳密不等式の比較対象であり、本稿のTheorem 1.1へ向かう直接依存ではない。Dumnicki、Ciliberto–Farnik–Kürönya–Lozovanu–Roé–Shramov、Gundlachへの言及は方法の背景として区別され、本稿は必要な移送・指数評価・三角形の補間評価を内部で証明する。これら背景文献の証明は今回の点検対象としていない。他カタログとの未収録の接続は未調査である。

§§1–1.1 · pp. 2–3

6. 原典を読む入口と確認範囲

- Lemma 3.1; Proposition 3.2 · pp. 6–8 — 節点との交点が初項の指数を制限する。
- Lemma 3.3; Proposition 3.4; Corollary 3.5 · pp. 9–11 — 対角方向の圧縮を有限jet行列で移送する。
- Proposition 4.2 · pp. 12–13 — 指数 r の格子と指標分解による補間。
- Lemma 4.3; Corollary 4.4 · pp. 14–15 — r に先に閾値を置き、全jet次数へ一様に適用する。
- Proposition 5.3 · pp. 16–17 — 等重複度の消滅を任意の曲線への不等式へ変える。
- Lemma 5.4 · p. 17 — 下界と独立に普遍的上界を確認する。
- Corollary 5.5 · p. 18 — 標数0への移行と非可算性の役割。

編集側では、主結果の仮定・全結論、§§2–5の上記の証明箇所、直接入力 of Stacks の記述と使用箇所を照合した。特に、 r_0 を jet 次数より先に固定する順序、特殊点から非常に一般の配置へ移る開条件、不均等な曲線を等重複度へ戻す有効化、上界と下界の合流を確認対象にした。これは著者の結論を説明するための読解・接続照合であり、全証明の独立な正しき認定や外部入力 of 証明全体の検証ではない。最適な r_0 、少数点での正確な値、一般の重み付き定数、正標数への拡張は本記事の主張に含めない。

§§2–5 · pp. 4–18

Maximal Multipoint Seshadri Constants in Higher Dimensions

実数切片の変形と次数間加法性から、体積上界を達成するjet分離へ

本稿は、固定した滑らかな複素射影多様体の通常多点Seshadri定数について、点数が十分大きいすべての整数で体積上界に一致するという主張を扱う。核心は、切断の初項指数を体積を保って細長い単体へ変形し、加法性から内部の格子点を埋め、全jetの全射性を得ることである。以下は原稿の論証の紹介と接続の照合であり、証明全体の正しさを認定するものではない。

原稿の著者: OpenAI · 2026-10-05 · 20 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 非常に一般的な多点での最大性

X を次元 $n \geq 3$ の滑らかな整複素射影多様体、 L をample line bundle、 $V = L^n$ とする。相異なる順序付き点の配置空間を

$$U_r(X) = \{(p_1, \dots, p_r) \in X^r : p_i \neq p_j \ (i \neq j)\}$$

とする。本稿の定数は、少なくとも一つの指定点を通る整曲線 $C \subset X$ について

$$\varepsilon(X, L; \mathbf{p}) = \inf_C \frac{L \cdot C}{\sum_{i=1}^r \text{mult}_{p_i} C}.$$

点が C の外にあれば重複度は0である。これは通常の曲線で定義した等重み多点定数であり、分母を r で割る正規化も、高次元サイクルによる定数への置換も行わない。

ある整数 $r_0 = r_0(X, L) \geq 1$ が存在し、各整数 $r \geq r_0$ について、 $U_r(X)$ の真Zariski閉集合の可算和 Z_r を、補集合が空でないように取れて、

$$\varepsilon(X, L; \mathbf{p}) = \left(\frac{V}{r} \right)^{1/n} \quad (\mathbf{p} \in U_r(X) \setminus Z_r)$$

が成り立つ、と原稿は主張する。同じ配置でのblow-up $\pi : Y \rightarrow X$ と例外因子 E_i について、これは実因子類

$$D_w = \pi^*L - w \sum_{i=1}^r E_i, \quad w = (V/r)^{1/n}$$

がnefで $D_w^n = 0$ となることと同値である。単一の非空Zariski開集合上の「一般」ではなく、可算個の条件を同時に満たす「非常に一般」を用いる。 r_0 は固定した (X, L) に依存し、結論は $r \rightarrow \infty$ での漸近等式ではなく、しきい値以降の各点数での厳密な等式である。

Theorem 1.1 · pp. 1-2

これは $n \geq 3$ の定性的Nagata–Biran–Szemberg型主張である。平面の全点数 $r \geq 10$ に対するNagata予想や、曲面・任意標数・重み付き定数についての主張をこの定理から追加しない。

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Maximal Multipoint Seshadri Constants in Higher Dimensions](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [OpenAI26b](#) OpenAI — Maximal Seshadri constants on arbitrary polarized surfaces：節点の指数評価・対角圧縮・原始格子方向の方法上の先行稿。本稿で再証明するため、曲面の最大性定理を直接入力にしない。September 23, 2026。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

上記の外部文献は方法上の先行稿として区別する。主定理で必要な有限次数のjet移送、指数の圧縮、内部充填は本稿内で証明され、曲面最大性定理を前提としない。

2. Theorem 1.1の証明 — 指数集合から全jetへ

証明対象：Theorem 1.1 · pp. 1-2 仮定と全結論を参照する。

証明の道筋。完全交叉旗から加法的指数集合を取り、二切片変形を $n - 1$ 回反復して細長い単体を得る。加法性と漸近的な全密度から内部格子点を確保し、一変数のHermite補間で全jetを分離する。変形の機構を次節、非常に一般的な配置への移行と上下界の合流を第4節で説明する。

$\Delta(a_1, \dots, a_n) = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : \sum x_i/a_i \leq 1\}$ 、 $M(F)$ は指数集合 F のLaurent単項式空間とする。

1 旗で切断を指数化する

$$S_k \subset k\Delta(1/D, \dots, 1/D, D^{n-1}V)$$

$$\#S_k = h^0(X, kL), \quad S_k + S_l \subset S_{k+l}$$

最小切片 ℓ で全反復の適用条件を確保し、体積・個数・加法性を保つ

[Proposition 3.1 · pp. 8–9; §6.1, equations \(6.1\)–\(6.3\) · pp. 16–17](#)

2 二切片変形を反復する

$$w = (V/r)^{1/n} < \ell/100, \quad P_* = \Delta(w, \dots, w, rw)$$

$$F_k \subset kP_*, \quad \#F_k = h^0(X, kL), \quad F_k + F_l \subset F_{k+l}$$

全密度と加法性で内部格子点を確保する

[Lemma 5.1 · pp. 14–15](#)

[Lemma 5.2; Proposition 5.3 · pp. 15–16](#)

3 内部を埋めて全 jet を補間する

$$\forall 0 < \theta < w, \quad k \gg_{\theta} 1: \quad M(F_k) \rightarrow \bigoplus_i J_{(1, \dots, 1, c_i)}^{[k\theta]}$$

内部の小単体を平行移動し、中国剰余定理を使う

jet を X へ戻し、可算個の開条件を同時に課す。曲線と blow-up で評価

[§6.2, equation \(6.4\) · p. 17; Lemma 6.1; equation \(6.6\) · p. 18](#)

[§6.4, equations \(6.7\)–\(6.8\) · p. 19](#)

4 共通配置で上下界を合わせる

$$\mathbf{p} \in U_r(X) \setminus Z_r: \quad w \leq \varepsilon(X, L; \mathbf{p}) \leq w$$

$$D_w = \pi^*L - w \sum_i E_i \text{ は nef, } \quad D_w^n = 0$$

加法的指数から補間とSeshadri等式に至る全体像

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 旗から体積の正しい初期単体へ

DL を very ample とし、一般の $n-1$ 個の切断による滑らかな整完全交叉旗を選ぶ。旗に沿って切断を順に割り、最後の曲線上で零点次数を評価すると、辞書式初項 α は

$$D \sum_{i < n} \alpha_i + \frac{\alpha_n}{D^{n-1}V} \leq k$$

を満たす。したがって $S_k \subset k\Delta(1/D, \dots, 1/D, D^{n-1}V)$ 、 $\#S_k = h^0(X, kL) = Vk^n/n! + O(k^{n-1})$ であり、初項の乗法性から $S_k + S_l \subset S_{k+l}$ も保たれる。固定した次数で有限個の初項を露出する正の重みを選び、局所座標を縮小する。jet 行列の非零最大小行列式の持続により、 $M(S_k)$ での全射性を $H^0(X, kL)$ へ戻せる。重みが次数に依存しても、旗・初項順序・指数集合の加法性は固定されている。

[Proposition 3.1 · pp. 8–9](#)

2. 全点数に共通のしきい値と反復

初期単体の最小切片を $\ell > 0$ とする。 $r \geq r_0$ なら $w = (V/r)^{1/n} < \ell/100$ となるように、 r を固定する前に r_0 を選ぶ。 Proposition 4.1 で二切片 (A, B) を $(w, AB/w)$ に変え、残った大きい切片を次の座標と組み合わせる。各入力 $A, B \geq \ell$ であり、 $w \max(3/A, 2/B) \leq 3w/\ell < 1/16$ だから毎回適用できる。積 V を保ったまま $n - 1$ 回で

$$P_* = \Delta(w, \dots, w, rw), \quad F_k \subset kP_* \cap \mathbb{Z}^n, \quad F_k + F_l \subset F_{k+l}, \quad \#F_k = h^0(X, kL)$$

を得る。点数を平方数等に限定する操作はない。

§6.1, equations (6.1)–(6.3) · pp. 16–17

3. 密度を指定された指数に変え、補間する

$\text{vol}(P_*) = V/n!$ なので欠ける格子点は $o(k^n)$ 個である。密度だけでは特定の点の存在を保証しない。

Lemma 5.1 は、固定した内部コンパクト集合 K の各 $y \in kK \cap \mathbb{Z}^n$ に対し、 $k_1 = \lfloor k/2 \rfloor$ 、 $k_2 = k - k_1$ への分解 $y = y_1 + y_2$ を $\gg k^n$ 個用意する。穴に落ちる候補は $o(k^n)$ 個なので両方が F_{k_i} に入る分解が残り、加法性により $y \in F_k$ となる。境界上の格子点については主張しない。

Lemma 5.1 · pp. 14–15

$0 < \theta < w$ 、 $\theta/w < \lambda < 1$ を取り、 λP_* を内部へ平行移動する。十分大きい k では F_k がその格子点を含み、単項式による平行移動は torus 上の jet 代数で単元の乗法となる。 $m = \lfloor k\theta \rfloor$ に対し

$$E_{r,m} = \{(\beta, b) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} : |\beta| + b/r < m + 1\}$$

は $k\lambda P_*$ に含まれる。相異なる $c_i \in \mathbb{C}^*$ を取り、 $(x' - 1)^\alpha$ の各係数に対して $(Y - c_i)^{m+1-|\alpha|}$ を法とする中国剰余定理を使うと、 $(1, \dots, 1, c_i)$ で次数 m までの任意の全 jet を実現する。これが Proposition 5.3 の全射性であり、各変形を逆向きにたどって X 上のある相異なる配置へ移せる。配置は θ, k に依存してよい。

Lemma 5.2; Proposition 5.3 · pp. 15–16

3. Proposition 4.1 の証明 — 実数の二切片を整形する

証明対象： Proposition 4.1 · pp. 9–10

Proposition 4.1 — 二切片変形

$n \geq 2$ 、 $A, B, a_3, \dots, a_n > 0$ は実数とし、すべての $k \geq 1$ で有限集合

$S_k \subset k\Delta(A, B, a_3, \dots, a_n) \cap \mathbb{Z}^n$ が $S_k + S_l \subset S_{k+l}$ を満たすとする。 $H = AB$ 、

$d = \max(3/A, 2/B)$ と置く。 $dw < 1/16$ を満たす任意の実数 $w > 0$ に対し、有限集合 S'_k が存在して

$$S'_k \subset k\Delta(w, H/w, a_3, \dots, a_n) \cap \mathbb{Z}^n, \quad \#S'_k = \#S_k, \quad S'_k + S'_l \subset S'_{k+l}$$

となる。さらに各 $k \geq 1, m \geq 0, r \geq 1$ について、 $M(S'_k)$ がある相異なる r 個のtorus点で次数 m までのjetへ全射なら、 $M(S_k)$ もある相異なる r 個のtorus点で同じ次数のjetへ全射である。配置の一致は要求しない。

Proposition 4.1 · pp. 9–10

残りの指数 γ をラベルとして固定すると、二座標の範囲は $\kappa\Delta(A, B)$ 、 $\kappa = k - \sum_{i \geq 3} \gamma_i/a_i \geq 0$ である。以下の操作はそのラベルを保ち、実数 κ による拡大と両立する。

1 残りの座標をラベルにする

$$\kappa = k - \sum_{i \geq 3} \gamma_i / a_i, \quad f \in M(\kappa \Delta(A, B))$$

$$g = y^2 - x^2(1+x) = \xi \eta, \quad f = g^j f_0, \quad H = AB$$

正規化上の次数と二枝の零点次数を比較し、 g^j を戻す

[§4, equations \(4.3\)–\(4.13\) · pp. 10–11](#)

2 二枝の消失次数で初項を囲む

$$\nu_t(f) \in \kappa Q, \quad Q = \text{conv}\{0, (a, 0), (c, c), (0, b)\}$$

$$a + b = W = dH, \quad c = 1/d, \quad \text{area}(Q) = H/2$$

shear と対角圧縮の後、 j を 2 冪、 i を奇数に選び $i/d + ja = R$ とする

[§4, equations \(4.14\)–\(4.19\) · pp. 12–14](#)

3 原始方向の幅を正確に指定する

$$P = \text{conv}\{(-b, 0), (a, 0), (0, c)\}, \quad R = H/w$$

$$u = (i, j) \text{ は原始}, \quad \text{range}_P \det(u, \cdot) = R$$

横・縦圧縮は消失次数で定義する。固定次数の非零小行列式で jet を戻す

[Lemmas 2.2–2.7 · pp. 5–7; Proof of Proposition 4.1 · pp. 10–14](#)

4 面積から幅を求め、二回圧縮する

$$h_{\max} = H/R = w, \quad S'_k \subset k\Delta(w, H/w, a_3, \dots, a_n)$$

$$\#S'_k = \#S_k, \quad S'_k + S'_l \subset S'_{k+l}$$

$$\text{変形後の全 jet 全射性} \implies \text{変形前の全 jet 全射性}$$

節点の指数評価と原始格子方向を用いた二切片変形

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 節点から同面積の四角形へ

$g = y^2 - x^2(1+x)$ を使い、 $g = \xi \eta$ となる局所座標を取る。 $f = g^j f_0$ から節点成分を除くと、正規化 $x = v^2 - 1, y = v(v^2 - 1)$ 上の次数は $(\kappa - jd)W$ 以下、 $W = \max(2A, 3B) = dH$ である。二枝 $v = \pm 1$ における零点次数の和により、重み $(1, t)$ の最小値 μ は $(1 + 1/t)\mu \leq (\kappa - jd)W$ を満たす。 g^j の初項 (j, j) を戻せば、初項は

$$\kappa Q, \quad Q = \text{conv}\{(0, 0), (a, 0), (c, c), (0, b)\}, \quad a = \frac{Wt}{1+t}, \quad b = \frac{W}{1+t}, \quad c = 1/d$$

に入る。 $t > T = d^2 H$ では Q は面積 $H/2$ の四角形となる。各ラベルの初項基底と積の適合性により、指数の個数と次数間加法性を保持する。

[§4, equations \(4.3\)–\(4.13\) · pp. 10–11](#)

2. 原始方向を調整して幅を正確に指定する

$\text{shear}(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha - \beta, \beta)$ の後、第二座標に沿う消失次数で圧縮すると

$P = \text{conv}\{(-b, 0), (a, 0), (0, c)\}$ を得る。 $R = H/w$ とし、 j を $R/(2W)$ 以下の最大の2冪に選ぶ。

$dw < 1/16$ から、区間 $(d(R - jW), d(R - ja_0))$ 、 $a_0 = WT/(1 + T)$ の長さが2を超える。そこに奇数 i を取り、 $i/d + ja = R$ となる $t > T$ を選べば $u = (i, j)$ は原始で、 $\det(u, \cdot)$ の P 上の幅は正確に R となる。

u を整基底に延ばすと、その横切片長はtent型である。面積 $H/2$ と縦幅 R から最大横幅は $H/R = w$ 。横方向、縦方向の順に圧縮すると $\Delta(w, R)$ になる。切片の有理性は使わない。これは格子点を単に平行移動する操作ではなく、各行のLaurent多項式空間の $z = 1$ での消失次数へ置き換える操作である。

§4, equations (4.14)–(4.19) · pp. 12–14

3. 固定した支持集合と次数ごとのjet移送を分ける

初項順序・整格子変換・圧縮の消失次数は全次数で固定し、ラベル付き空間の積を保つ。一方、解析的縮小の小パラメータやtie-breakを露出する重みは、有限次数・有限配置ごとに選んでよい。導関数まで収束する有限行列の非零小行列式を使うため、残り $n - 2$ 変数を含む全jetの全射性が逆向きに移る。この区別が、反復後の加法性と補間の両方を支える。

Lemmas 2.2–2.7 · pp. 5–7

4. Theorem 1.1の証明 — 非常に一般的な配置と上下界の合流

証明対象：Theorem 1.1 · pp. 1–2 主定理の等式・nef性・零の自己交点をここで結ぶ。

1 有限次数の非空開条件

$$O_{j,k} = \{\mathbf{p} : H^0(X, kL) \twoheadrightarrow \bigoplus_i J_{p_i}^{\lfloor k\theta_j \rfloor}(kL)\}$$

$$0 < \theta_j \uparrow w, \quad k \geq k_j$$

principal parts の局所自由性で開性、複素 Baire 性で非空性
[§6.2, equation \(6.4\) · p. 17](#)

2 非常に一般的な共通配置を取る

$$Z_r = \bigcup_{j \geq 1} \bigcup_{k \geq k_j} (U_r(X) \setminus O_{j,k})$$

$$U_r(X) \setminus Z_r \neq \emptyset$$

非零の制限切断を選び、Hilbert–Samuel 重複度で局所交点を評価
[Lemma 6.1; equation \(6.6\) · p. 18](#)

3 曲線との交点で下界を得る

$$kL \cdot C \geq \lfloor k\theta_j \rfloor \sum_i \text{mult}_{p_i} C$$

$$\varepsilon \geq \theta_j \quad (j \geq 1), \quad \theta_j \uparrow w$$

狭義変換との交点式と例外曲線を調べる。零の自己交点だけでは nef 性を導かない
[§6.4, equations \(6.7\)–\(6.8\) · p. 19](#)

4 独立な上界と合わせて nef 類を得る

$$0 \leq t < \varepsilon : \quad D_t \text{ nef}, \quad 0 \leq D_t^n = V - rt^n$$

$$\varepsilon \leq w \implies \varepsilon = w, \quad D_w \text{ nef}, \quad D_w^n = 0$$

可算個のjet条件と曲線の重複度から上下界を合わせる

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 特殊配置での存在から共通の非常に一般的な配置へ

固定した整数 k, m でのjet全射性は、 X が滑らかなため局所自由な principal parts 束への写像の最大小行列式で定義される Zariski 開条件である。 $\theta_j \uparrow w$ を選び、各 j で全 $k \geq k_j$ について非空開集合 $O_{j,k} \subset U_r(X)$ を得る。 $Z_r = \bigcup_j \bigcup_{k \geq k_j} (U_r(X) \setminus O_{j,k})$ を除く。 $U_r(X)(\mathbb{C})$ は局所コンパクト Hausdorff で Baire 空間、各真代数的閉集合は複素位相で内部を持たないため、補集合は非空である。構成した特殊な torus 配置そのものを一般配置と呼ぶのではなく、非零 rank 条件と可算交叉によって移している。

[§6.2, equation \(6.4\) · p. 17](#)

2. 全jetから通常のリ重復度による下界へ

Lemma 6.1 では、 A の次数 $m \geq 1$ までの全jet分離から、すべての整曲線 C に対して $A \cdot C \geq m \sum_i \text{mult}_{p_i} C$ を得る。ある指定点上で $\mathfrak{m}_C^m / \mathfrak{m}_C^{m+1}$ の非零元をjetに持ち上げ、他の指定点で零jetを処方することで、 C に恒等的には消えない切断を選ぶ。特異曲線でも、非零 $f \in \mathfrak{m}_C^m$ について

$$q \text{ length}(\mathcal{O}_C/(f)) = \text{length}(\mathcal{O}_C/(f^q)) \geq mq e(\mathcal{O}_C) + O(1)$$

から局所交点数が m 倍の通常のHilbert–Samuel重複度以上となる。 $A = kL$ 、 $m = \lfloor k\theta_j \rfloor$ として、まず $k \rightarrow \infty$ 、次に $j \rightarrow \infty$ とすれば $\varepsilon \geq w$ を得る。

Lemma 6.1; equation (6.6) · p. 18

3. blow-upの上界とnef類の結論

任意の相異なる配置で $D_t = \pi^*L - t \sum E_i$ とする。例外因子内の曲線には $D_t|_{E_i} = t\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)$ が非負で、他の曲線 Γ は $C \subset X$ の狭義変換だから

$$D_t \cdot \Gamma = L \cdot C - t \sum_i \text{mult}_{p_i} C.$$

原典は特異な C でも $E_i \cdot \Gamma = \text{mult}_{p_i} C$ となることを、最大イデアルのblow-upとその例外ファイバーのHilbert–Samuel重複度で説明する。したがって $0 \leq t < \varepsilon$ なら D_t はnefであり、

$$0 \leq D_t^n = V - rt^n$$

から全配置で $\varepsilon \leq w$ を得る。第2段階の下界と合わせて等号になる。その下界を各曲線の式に戻せば D_w がnef、交点計算から $D_w^n = 0$ である。逆に D_w のnef性は各狭義変換との交点から $\varepsilon \geq w$ を与えるので、上界と合わせて同値性が従う。零の自己交点だけからnef性を推論してはいない。

§6.4, equations (6.7)–(6.8) · p. 19

5. どの論文が、どの段階を担うか

本稿は曲面稿の方法を拡張するが、その最大性定理への直接依存ではない。曲面稿の有限torus群でのjetの単射性に対し、本稿は多項式空間を変形して全次元のjetの全射性を作る。原典§1.1は、必要な適応版を本稿内で証明すると明記する。

§1.1; §4 · pp. 2, 9

供給元 · 結果

曲面稿 Proposition 3.2

本稿の箇所

Proposition 4.1、pp. 10–11

関係と使用内容

方法上の一般化：節点二枝の評価をラベル付き二変数多項式へ

確認範囲

先行主張と本稿の適応証明を照合

供給元・結果

曲面稿 Proposition 3.4

本稿の箇所

Proposition 4.1、p. 12

関係と使用内容

方法上の一般化：対角sliceを圧縮

確認範囲

単射性と全射性の違いを区別

供給元・結果

曲面稿 Lemma 4.3

本稿の箇所

Proposition 4.1、pp. 12–14

関係と使用内容

方法上の一般化：原始方向を連続調整し実数幅を得る

確認範囲

しきい値と方向選択の記述を照合

[OpenAI26b, Proposition 3.2, p. 8] · [OpenAI26b, Proposition 3.4, pp. 9–10] ·
[OpenAI26b, Lemma 4.3, p. 14]

Nagata、Biran、Küchle、Roé–Ross等は背景として引用されるが、この概説の証明矢印には置かない。Demailly、Ito、Okounkov体・半群理論、Dumnickiの先行結果も本稿の動機付け・方法の文脈であり、ここで説明した接続は本稿内の補題で追っている。これらの外部証明全体と未掲載のカタログ間接続は未調査である。

6. 原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 1.1 · pp. 1–2 — 量化、基礎体、通常多点定数とnef因子の結論。
- Proof of Proposition 4.1 · pp. 10–14 — 実数切片を許す節点・圧縮・原始方向の核心。
- Lemma 5.1 · pp. 14–15 — 密度だけでなく次数間加法性が内部点を埋める理由。
- Lemma 5.2; Proposition 5.3 · pp. 15–16 — 細長い単体での全jet補間と内側への平行移動。
- §6.2, equation (6.4) · p. 17 — 有限次数の存在から共通の非常に一般的な配置へ。

- Lemma 6.1; equation (6.6) · p. 18 — 特異な曲線上でも通常の重複度を用いる下界。
- §6.4, equations (6.7)–(6.8) · p. 19 — blow-upによる上界と nefness の同値。

編集側では、Theorem 1.1 の全結論と量化、§§2–6 の主要証明本文、曲面稿の上記3結果の記述と本稿の参照箇所を照合した。完全交叉旗、二切片変形、内部充填、補間、可算共通配置、曲線の重複度、blow-up の上下界を追った。外部歴史的結果の証明の再帰的検証、専門家査読、形式検証は行っていない。原稿の定理紹介と、この限定された照合を区別する。

Maximal multipoint Seshadri constants in positive characteristic

形式的jet移送と格子点の充填から、幾何学的一般点で体積上界へ

本原稿は、正標数の滑らかな射影多様体上で通常の等重み多点Seshadri定数が、十分大きいすべての点数で体積上界に等しいと主張する。切断環を次数付き指数集合に移し、節点による二切片変形と補間を経て下界を作る。点配置は幾何学的一般点で固定し、可算体上で「非常に一般的な閉点」を選ぶ議論は用いない。

原稿の著者: OpenAI · 2026-10-05 · 17 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 幾何学的一般点における最大性

k を標数 $p > 0$ の代数閉体、 X/k を次元 $n \geq 3$ の滑らかな整射影多様体、 L を豊富な直線束とする。順序付き相異点の配置空間を $U_r \subset X^r$ 、 $K_r = \overline{k(U_r)}$ とし、その幾何学的一般点が定める点を $p_1, \dots, p_r \in X(K_r)$ とする。本稿の定数は

$$\varepsilon_r(X, L) = \inf_C \frac{L_{K_r} \cdot C}{\sum_{i=1}^r \text{mult}_{p_i} C},$$

である。 C は少なくとも一つの p_i を通る整曲線を動き、通らない点での重複度は0とする。重みはすべて1で、 r による平均化も高次元サイクルへの置換もしない。

ある整数 $r_0 = r_0(X, L)$ が存在し、すべての整数 $r \geq r_0$ について

$$\varepsilon_r(X, L) = \left(\frac{L^n}{r} \right)^{1/n}$$

が成り立つ、というのが著者の主張である。 $n = 2$ にも同じ結論が成り立つことを Remark 6.3 が述べる。 r_0 未満の全点数や、任意の k -有理点配置を対象とした結論ではない。

Theorem 1.1 · pp. 1–2

Remark 6.3 · p. 16

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 [Maximal multipoint Seshadri constants in positive characteristic](#) を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [Stacks0H90](#) The Stacks Project Authors — The Stacks Project — Lemma 10.133.9 (Tag 0H90) : 主部加群の対角イデアルによる記述。使用箇所 : §2 p4, Lemma 2.4 pp5–6。HTML, accessed 2026-10-15; unpaginated。
- [Stacks0H8Z](#) The Stacks Project Authors — The Stacks Project — Lemma 10.133.8 (Tag 0H8Z) : 主部の基底変換。使用箇所 : §2 p4, Proposition 5.3 p14。HTML, accessed 2026-10-15; unpaginated。
- [Stacks0FD6](#) The Stacks Project Authors — The Stacks Project — Lemma 33.47.3 (Tag 0FD6) : 射影埋込みの一般超平面切断の滑らかさ。使用箇所 : Proposition 3.1 p7。HTML, accessed 2026-10-15; unpaginated。
- [Stacks0G4G](#) The Stacks Project Authors — The Stacks Project — Remark 37.32.4 (Tag 0G4G) : 次元2以上の滑らかな射影多様体の滑らかで既約な超平面切断。使用箇所 : Proposition 3.1 p7。HTML, accessed 2026-10-15; unpaginated。
- [Stacks0AZV](#) The Stacks Project Authors — The Stacks Project — Definition 43.15.1 (Tag 0AZV) : Hilbert–Samuel重複度と長さの先頭係数。使用箇所 : Lemma 6.1 p15; Lemma 6.2 p16。HTML, accessed 2026-10-15; unpaginated。
- [OpenAI26b](#) OpenAI — Maximal Seshadri constants on arbitrary polarized surfaces : 方法上の背景。主定理を直接入力せず、本稿で必要な命題を再証明する。2026-09-23。
- [OpenAI26c](#) OpenAI — Maximal Multipoint Seshadri Constants in Higher Dimensions : 方法上の背景。主定理を直接入力せず、本稿で必要な命題を再証明する。2026-10-05。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

Stacksの参照はページのないHTML版であり、タグと結果名で位置を特定する。図は本稿で再証明した命題・補題を指す。曲面篇・高次元篇は方法の出所として挙げられ、両篇の最大性の定理を本稿の証明の前提としない。

2. Theorem 1.1 — 主定理の証明概略

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · pp. 1–2

証明の道筋。 [Theorem 1.1](#) の下界は、旗による指数集合、二切片変形、内部充填と補間を経て作る。

$V = L^n$ 、 $w = (V/r)^{1/n}$ とおく。上界は別にブローアップ上の交点数から示す。

1 旗から次数付き指数へ

$$S_N \subset N\Delta(1/D, \dots, 1/D, D^{n-1}V)$$

$$\#S_N = h^0(X, NL) = VN^n/n! + o(N^n)$$

旗の次数評価と二切片変形を $n-1$ 回適用

[Proposition 3.1 · pp. 7–8](#) [Proposition 4.1 · pp. 8–11](#)

2 切片の積と個数を保存

$$F_N \subset N\Delta(w, \dots, w, rw), \quad w = (V/r)^{1/n}$$

次数付き性と後向き jet 移送を保つ

密度と加法性、剰余定理、非空開条件

[Lemma 5.1 · p. 12](#) [Proposition 5.3 · pp. 13–14](#)

3 内部充填から jet 分離へ

$$0 < \theta < w, \quad m = \lfloor N\theta \rfloor$$

$$H^0(X_{K_r}, NL_{K_r}) \rightarrow \bigoplus_i J_{p_i}^m(NL_{K_r})$$

局所長さから曲線下界、別にブローアップで上界

[Lemma 6.1 · p. 15](#) [Lemma 6.2 · pp. 15–16](#)

4 上下界を合わせる

$$\varepsilon_r \geq \lim_{\theta \uparrow w} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\lfloor N\theta \rfloor}{N} = w$$

$$D_s \text{ nef} \implies 0 \leq D_s^n = V - rs^n \implies \varepsilon_r \leq w$$

$$\varepsilon_r = w, \quad D_w \text{ nef}, \quad D_w^n = 0$$

指数集合からjet分離、曲線下界と体積上界の一致へ

[図を拡大 ↗](#) [TeXソース ↓](#)

1. 同じ次数付き構造を保って切片を変える

DL が非常に豊富となる D を取り、滑らかな完全交差旗を選ぶ。Bertiniの適用時には、切断する各多様体が次元2以上で、 DL による射が埋込みであることを使う。旗に適合する局所座標で辞書式最小指数を取ると、

$$S_N \subset N\Delta(1/D, \dots, 1/D, D^{n-1}V), \quad S_N + S_M \subset S_{N+M}, \quad \#S_N = h^0(X, NL) = \frac{V}{n!}N^n + o(N^n)$$

を得る。ここで $\Delta(a_1, \dots, a_n) = \{x_i \geq 0 : \sum_i x_i/a_i \leq 1\}$ 。最初の $n-1$ 座標の消滅を旗の方程式で順次割り、最後の曲線上の切断の零点次数で最後の指数を抑えるのが包含の根拠である。Proposition 4.1 を $n-1$ 回適用し、切片の積と各次数の個数を保ちながら $\Delta(w, \dots, w, rw)$ へ移す。どの段階でも、変形後のjet分離から変形前のjet分離へ戻れる。

Proposition 3.1 · pp. 7–8

Proposition 4.1 · pp. 8–11

2. jet分離による下界と、独立した体積上界

Proposition 5.3は、任意の固定した $0 < \theta < w$ について、十分大きいすべての N で NL が幾何学的一般点の組において $\lfloor N\theta \rfloor$ 次までのjetを分離することを与える。Lemma 6.1では、曲線の一つの局所環の非零な $\mathfrak{m}^m/\mathfrak{m}^{m+1}$ の元を指定し、他点では零jetを指定する。このため、得られる切断は全指定点で m 次以上消えながら、曲線上で恒等的には消えない。局所不等式 $\text{length}(R/(f)) \geq me(R)$ により、特異な整曲線も含め

$$NL_{K_r} \cdot C \geq \lfloor N\theta \rfloor \sum_i \text{mult}_{p_i} C.$$

$N \rightarrow \infty$ 、次に $\theta \uparrow w$ として $\varepsilon_r \geq w$ となる。

他方、 $0 \leq s < \varepsilon_r$ を有理数とし、点のブローアップ上で $D_s = \pi^* L_{K_r} - s \sum E_i$ を考える。例外因子内の曲線には $D_s|_{E_i} = s\mathcal{O}_{\mathbf{P}^{n-1}}(1)$ 、それ以外には $E_i \cdot \tilde{C} = \text{mult}_{p_i} C$ を使い、 D_s のnef性を得る。したがって $0 \leq D_s^n = V - rs^n$ であり、 $\varepsilon_r \leq w$ 。上界を示すだけでは最大性はず、jetからの下界との合流が必要である。

Proposition 5.3 · pp. 13–14

Lemma 6.1 · p. 15

Lemma 6.2 · pp. 15–16

3. 境界因子と曲面の場合

nef錐の閉性と上下界の一致から D_w はnefで、 $D_w^n = 0$ となる。これは通常の曲線定義とブローアップ上の交点数を使った接続であり、数値だけから同値を宣言しているのではない。Remark 6.3では、旗・二切片変形・補間・交点数の各段階が $n=2$ でも使え、変形が1回で済むことを確認している。任意の曲線との厳密な正の交わりまでは主張していない。

Proof of Theorem 1.1; Remark 6.3 · p. 16

3. Proposition 4.1 — 節点による二切片変形

証明対象：Proposition 4.1 · pp. 8–11

Proposition 4.1 — 個数・積・jet移送を保つ変形

$n \geq 2$, $A, B, a_3, \dots, a_n > 0$ とし、有限集合の次数付き族 $S_N \subset \mathbf{Z}^n$ が $S_N \subset N\Delta(A, B, a_3, \dots, a_n)$ を満たすとする。 $H = AB$, $d = \max\{3/A, 2/B\}$ とおく。
 $dw < 1/16$ を満たす任意の $w > 0$ に対して、次数付き族 S'_N で

$$S'_N \subset N\Delta(w, H/w, a_3, \dots, a_n), \quad \#S'_N = \#S_N$$

を満たし、各次数で後向きのjet移送を持つものが存在する。後向きとは、 $M(S'_N)$ のある相異なる r 個のトース点での m 次jet分離が、 $M(S_N)$ のある点組での同じ分離を含意することをいう。
 $M(S)$ は指数集合 S のLaurent単項式の張る空間である。 $n = 2$ では残りの切片はない。

Proposition 4.1 · pp. 8–11

1 標数 2 でも節点の二枝を保持

$$g = y^2 + xy - x^3 = \xi\eta, \quad x = v(v+1), \quad y = v^2(v+1)$$

$v = 0, -1$ の消滅次数の和を次数で抑える

二枝の評価と形式的代入を用いる
 [Lemma 4.2 · p. 9](#) [Lemmas 2.2–2.4 · pp. 4–6](#)

2 最小指数を面積一定の四角形へ

$$\nu_t(f) \in \kappa Q, \quad \text{area}(Q) = H/2$$

有限個の初項を整数重みで実現し、jet 行列の階数を戻す

$dw < 1/16$ から、 t と原始方向を全次数で固定
 [Lemma 4.3 · pp. 10–11](#)

3 原始方向で高さを指定

$$u = (i, j) \in \mathbf{Z}^2, \quad \gcd(i, j) = 1, \quad q_2 - q_0 = H/w$$

せん断・圧縮後の三角形に整数基底変換

面積から最大切片 w 、各圧縮で個数と jet 移送を保存
 [Lemmas 2.5–2.6 · p. 6](#) [Proposition 4.1 · pp. 8–11](#)

4 横・縦の圧縮で切片を変える

$$S'_N \subset N\Delta(w, H/w, a_3, \dots, a_n), \quad \#S'_N = \#S_N$$

区間上界を得る。中間整数の充填はまだ主張しない

標数2でも二枝を持つ節点と格子圧縮

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 二つの枝の消滅次数で指数を抑える

$g = y^2 + xy - x^3$ を使う。 $Z^2 + Z - x$ の二つの単根 $0, -1$ をHensel持ち上げると、 $g = \xi\eta$ となる形式座標が得られる。標数2でも 0 と $-1 = 1$ は異なる。パラメータ表示 $x = v(v+1)$, $y = v^2(v+1)$ で、 g の倍数でない因子の $v = 0, -1$ での消滅次数の和を次数で抑える。重み順序 $(\alpha + t\beta, \beta)$ の最小指数は、これにより面積 $H/2$ の四角形 Q に入る。

形式座標を用いるだけでは補間は移らない。Lemma 2.3で各次数の有限個の初項を実現する共通整数重みを選び、Lemma 2.4で $z_a = s^{\lambda_a}(Q_a + \delta_a)$ を切断jet環に代入する。列を正規化した評価行列は $s = 0$ で単項式の行列になる。非零最大小行列が $k((s))$ 上でも非零となる。 $\delta = 0$ は実際の $k((s))$ -点を定め、代入写像はその点の m 次jet環を経由する。行列の全射性とjet環の同次元性から、この環写像は同型となる。中心の重複は全射性に反するため、相異点での分離が得られ、対応する開集合は非空である。次数ごとの重みは変えてよいが、次数付き性を支える形式座標と順序は固定する。

Lemma 4.2 · p. 9

Lemmas 2.2–2.4 · pp. 4–6

2. 原始格子方向と圧縮を全次数で固定する

せん断と一度の圧縮で Q を同面積の三角形へ送る。Lemma 4.3は t と原始ベクトル $u = (i, j)$ を選び、 $z \mapsto \det(u, z)$ の高さの幅を正確に H/w にする。 j を2の冪、 i を適切な开区間内の奇数に選ぶので、原始性と実数切片の調整が両立する。整数基底変換後、横圧縮・縦圧縮により最終的な境界が $\Delta(w, H/w)$ となる。残りの指数はラベルとして保持する。

ここでの圧縮は「区間内の整数をすべて埋める」操作ではない。標数 p では $\langle 1, z^p \rangle$ の $z = 1$ での消滅次数が $0, p$ となり、中間が欠ける。Lemma 2.6が保証するのは区間による上界・個数・次数付き性・後向き移送である。全内部格子点の充填は次節の別の論証を必要とする。

Lemma 4.3 · pp. 10–11

Lemmas 2.5–2.6 · p. 6

4. Proposition 5.3 — 内部充填から幾何学的な一般点へ

証明対象：Proposition 5.3 · pp. 13–14

Proposition 5.3 — 幾何学的一般点でのjet分離

k は正標数の代数閉体、 X/k は次元 $n \geq 2$ の滑らかな整射影多様体、 L は豊富、 $V = L^n$ とする。
ある $r_0(X, L)$ が存在し、各整数 $r \geq r_0$ と各実数 $0 < \theta < (V/r)^{1/n}$ に対し、 $N_0(r, \theta)$ が存在する。
すべての $N \geq N_0$ で、 $H^0(X, NL)$ はある相異なる r 個の k -点において $\lfloor N\theta \rfloor$ 次までのjetを分離する。
その点組は N に依存してよい。同じ分離が K_r への基底変換後、固定した幾何学的一般点 $p_1, \dots, p_r$ でも成り立つ。

Proposition 5.3 · pp. 13–14

1 次数付き支持の密度

$$F_N \subset NP_*, \quad \#F_N = \text{vol}(P_*)N^n + o(N^n) \\ F_N + F_M \subset F_{N+M}, \quad P_* = \Delta(w, \dots, w, rw)$$

ほぼ半分の次数への分解と加法性
[Lemma 5.1 · p. 12](#)

2 固定内部領域の全格子点

$$K \subseteq \text{int}(P_*) \implies NK \cap \mathbf{Z}^n \subset F_N \\ cN^n \text{ 個の分解を } o(N^n) \text{ 個の欠落では排除できない}$$

縮小・整数平行移動で E_m を入れ、剰余定理で jet を補間
[Lemma 5.2 · p. 13](#) [Proposition 5.3 · pp. 13–14](#)

3 細長い単体で多点補間

$$E_m = \{(\beta, b) : |\beta| + b/r < m + 1\}, \quad m = \lfloor N\theta \rfloor \\ q_i = (1, \dots, 1, c_i), \quad c_i \neq c_j, \quad c_i \neq 0$$

後向き jet 移送、評価階数の開条件、基底変換
[Lemmas 2.2–2.4 · pp. 4–6](#) [Proposition 5.3 · pp. 13–14](#)

4 同じ幾何学的一般点へ移す

$$\exists (x_1, \dots, x_r) \text{ with jets } \implies U_{N,m} \subset U_r \text{ nonempty open} \\ \text{Spec } K_r \longrightarrow U_{N,m}, \quad K_r = \overline{k(U_r)} \\ \text{可算体上で開集合の共通部分の閉点を選ばない}$$

内部の全格子点、Chinese remainder補間、開条件

図を拡大 ↗ [TeXソース](#) ↓

1. 密度を個々の格子点の存在へ変換する

初期切片の最小値を ℓ とし、 $w < \ell/100$ となる r_0 を選ぶ。各二切片変形で処理する A, B は ℓ 以上だから、 $w \max(3/A, 2/B) < 1/16$ を満たす。最終族 F_N は $P_* = \Delta(w, \dots, w, rw)$ 内で $\#F_N = \text{vol}(P_*)N^n + o(N^n)$ を持つ。

Lemma 5.1は、この密度と加法性を併用する。固定した内部コンパクト集合の格子点 y には、ほぼ半分ずつの次数に属する和 $y = y_1 + y_2$ という分解が少なくとも cN^n 個ある。一方、欠落点が排除する分解は $o(N^n)$ 個なので、両項が族に属する分解が残り、 $y \in F_N$ となる。密度だけを個別格子点の存在と取り違えない。

Lemma 5.1 · p. 12

2. 細長い単体で補間し、非空開集合へ移送する

$m = \lfloor N\theta \rfloor$ とし、

$$E_m = \{(\beta, b) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^{n-1} \times \mathbf{Z}_{\geq 0} : |\beta| + b/r < m + 1\}$$

を取る。相異なる非零 $c_i \in k$ について、 $q_i = (1, \dots, 1, c_i)$ での任意のjetを $(x' - 1)^\alpha h_\alpha(Y)$ の和で表す。中国剰余定理により $h_\alpha \in \deg h_\alpha < r(m - |\alpha| + 1)$ で選べるため、その全単項式は E_m に入る。階乗や通常微分への依存はない。

$\theta/w < \lambda < 1$ と小さい正ベクトル v で $v + \lambda P_* \subset \text{int } P_*$ とする。整数平行移動を合わせて E_m を内部充填領域に入れ、トーラス上で単項式を掛けてもjet分離を保つことを使う。後向き移送で X 上のある点組へ戻る。各固定した r, θ, N について分離は主部束への評価写像の最大階数条件なので、 U_r 内の非空開条件となる。

Lemma 5.2 · p. 13

Proposition 5.3 · pp. 13–14

3. 同じ幾何学的一般点で全条件を満たす

整な U_r の一般点は各非空開集合に属し、主部の基底変換はjet評価と両立する。したがって同じ K_r -点組で必要な全分離条件が成立する。 k -点の可算無限個の開集合の共通部分を選ぶ必要はなく、可算代数閉体も含まれる。この結論を「 k 上の任意の一般閉点で成立する」と置き換えない。

Proposition 5.3 · pp. 13–14

5. どの論文が、どの段階を担うか

供給元

Stacks 0FD6 / 0G4G (上記文献案内)

利用箇所

Proposition 3.1, pp.7–8

使用内容・条件

埋込みと次元2以上から滑らかで整な旗を選ぶ

確認範囲

外部記述と適用条件を照合

供給元

Stacks 0H90 / 0H8Z

利用箇所

§2 p.4; Proposition 5.3 p.14

使用内容・条件

主部の記述・基底変換と評価の開条件

確認範囲

記述と使用箇所を照合、局所自由性は本稿の滑らかさと対称冪のフィルトレーションも使用

供給元

Stacks 0AZV

利用箇所

Lemma 6.1 p.15

使用内容・条件

重複度を長さの漸近係数とする

確認範囲

定義と本稿の局所長さの計算を照合

供給元

曲面篇・高次元篇

利用箇所

§1.1 p.2; §4 p.8

使用内容・条件

節点・次数付き支持・切片変形という方法の背景

確認範囲

主定理の直接依存ではない。本稿は必要な結果を再証明

6. 原典を読む入口と確認範囲

- Lemmas 2.2–2.4 · pp. 4–6 — 形式的代入から実際のjet分離への移行。
- Proposition 4.1 · pp. 8–11 — 節点・原始格子方向・圧縮の三段階。
- Proposition 5.3 · pp. 13–14 — 密度から全格子点、補間から幾何学的一般点への移行。
- Proof of Theorem 1.1; Remark 6.3 · p. 16 — 上下界を合わせ、曲面にも適用する箇所。

編集側では§§2–6の証明本文、形式的移送、節点の二枝、原始格子方向、内部充填、補間、一般点への移行、上下界の接続を読んで照合した。外部Stacks入力記述と使用条件を確認した。外部結果の全証明を再帰的に検証したものではなく、専門家査読・形式検証でもない。全次数の構成の完全な独立検証、他カタログとの接続の網羅調査は未実施である。著者の主張する最大性と、この編集上の照合範囲を区別する。