

OpenAI Math Digest

CATALOGUE 037

通常二重点の鋭い体積ギャップ

総括・論文間のつながりと2篇の証明概説

独立した非公式の読解ガイド・日本語版

収録版: 2026-10-12

制作: Masataka Iwai・大阪大学

AI生成の解説には誤りや不正確な説明が含まれる可能性があります。重要な主張・証明は原論文でご確認ください。本冊子はWebサイトの解説をまとめたもので、原論文そのものではありません。専門家査読・形式検証は未実施です。

目次

総括に続き、公式カタログ順で全2篇の解説を収録しています。目次・引用はクリックできます。横長の表は紙面向けの項目一覧に組み直し、主張と参照先を保持しています。

00・カタログ037 総括	3
01・The ordinary-double-point gap in every dimension	7
02・The normalized-volume gap in dimension four	24

原論文の参照版: [fd4aeeb2ee4fc729c18d98444fed42fd0529eeeb](#)

[カタログ037 · 総括](#)[Web版を読む ↗](#)

CATALOGUE 037

通常二重点の鋭い体積ギャップ

The sharp ordinary-double-point volume gap

カタログ037の2論文は、境界が零の複素代数的klt特異点の正規化体積を扱う。全次元論文は四次元論文を帰納法の基底として用い、特異な n 次元germの上界 $2(n-1)^n$ と、等号成立が解析的通常二重点(ODP)に限られることを主張する。

1. 全2篇の要点 (公式順)

主結果の範囲を短くまとめています。正確な仮定と定式化は併記した原典の結果を参照してください。

[カタログ 037 · 2026-10-12 確認の固定参照版](#)

#

01

論文・概説

[The ordinary-double-point gap in every dimension →](#)

図中の略称: ODP gap in every dimension

September 24, 2026 · 57 ページ

[原論文 \(GitHub\) ↗](#)

主に何を主張するか

零境界の特異な複素代数的klt n 次元germ ($n \geq 2$) は正規化体積 $\leq 2(n-1)^n$ 、等号は解析的ODP。K半安定Q-Fano多様体の大域上界も導く。

[Theorem 1.1; Corollary 1.2 · p. 3 ↗](#)

議論の役割・概説

四次元の基底から帰納。安定退化、stabilizerの二場合、同次元supremumによる評価を経て、等号を元のgermへ戻す。

[証明概説を読む →](#)

#

02

論文・概説

The normalized-volume gap in dimension four →

図中の略称: Fourfold volume gap

September 24, 2026 · 20 ページ

[原論文 \(GitHub\)](#) ↗

主に何を主張するか

零境界の特異な複素代数的klt四次元germは正規化体積 ≤ 162 、等号は解析的ODP。孤立性やlci性を仮定しない。

[Theorem 1.1 · p. 1](#) ↗

議論の役割・概説

大きい体積から埋込み次元 ≤ 5 を導く構造定理。terminal Gorenstein三次元切断と既知lci体積定理を経て、全次元論文の基底を供給。

[証明概説を読む](#) →

2. 四次元の入力から全次元へ

公式掲載順は全次元論文、四次元論文の順だが、証明への直接入力は逆向きである。図中のキーは次の固定原稿を指す。外部文献の記述・用途・版は個別記事の図前文献案内を参照。

- [OpenAI26a] OpenAI — The ordinary-double-point gap in every dimension. September 24, 2026. 全次元の局所ギャップ、等号分類、大域的系. [原典](#) / [Original](#).
- [OpenAI26b] OpenAI — The normalized-volume gap in dimension four. September 24, 2026. 四次元の帰納基底. [原典](#) / [Original](#).

02 四次元での基底

The normalized-volume gap in dimension four

$\widehat{\text{vol}}(x, X) \leq 162$; 等号は解析的 ODP に限る.

[OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 1]

四次元の上界と等号分類を帰納法の基底へ入力

[OpenAI26a, Theorem 2.4, p. 9]

$n = 2, 3$ の既知結果と、 $n \geq 5$ の新しい帰納段階を併用

01 全次元の局所ギャップ

The ordinary-double-point gap in every dimension

$n \geq 2$, $\widehat{\text{vol}}(x, X) \leq 2(n-1)^n$; 等号は解析的 ODP.

[OpenAI26a, Theorem 1.1, p. 3]

局所・大域体積比較を特異点に適用（帰結での利用）

[OpenAI26a, §8.3, p. 53]

比較定理と滑らかな場合の外部入力は第 1 記事に記載

同じ全次元論文の大域的帰結

特異な K 半安定 $\mathbb{Q}$ -Fano 多様体:

$$(-K_V)^n \leq 2 \left(\frac{n^2 - 1}{n} \right)^n < 2n^n.$$

[OpenAI26a, Corollary 1.2, p. 3]

四次元の基底、全次元の帰納法、特異なFano多様体への帰結

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

四次元論文は、大きい正規化体積から埋込み次元を5以下へ抑え、超曲面に帰着して既知のlci体積定理を使う。全次元論文はこの四次元の上界と等号分類をTheorem 2.4として取り込み、 $n = 2, 3$ の既知結果と合わせて $n \geq 5$ の帰納法へ進む。同じ次元の特異点を含む途中の比較には、まだ証明していないギャップを仮定せず、体積密度の上限 M_n を用いる。

[OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 1] [OpenAI26a, Theorem 2.4, p. 9]
[OpenAI26a, Theorem 7.7; §8.2, pp. 48, 52]

全次元の局所定理から特異な K 半安定 $\mathbb{Q}$ -Fano多様体の大域体積上界を得るには、局所・大域比較を別途用いる。この特異な場合の小さい上界には、最適性や等号分類は主張されていない。 $V \not\cong \mathbb{P}^n$ に対する別の上界 $2n^n$ と等号分類は、特異な場合の厳しい評価と、滑らかな場合の外部定理を組み合わせる。

[OpenAI26a, Corollary 1.2, p. 3] [OpenAI26a, §8.3, p. 53]

供給元 → 利用先

四次元論文 Theorem 1.1 → 全次元論文 Theorem 2.4、§8.2

種別

証明への直接入力

使用内容・適用箇所

零境界の複素代数的klt四次元germに対する上界と解析的等号分類を、帰納法の $n = 4$ 基底に使う。

供給元 → 利用先

全次元論文 Theorem 1.1 → 同論文 Corollary 1.2、§8.3

種別

帰結での利用

使用内容・適用箇所

特異閉点で局所上界を適用し、局所・大域比較を介して反標準体積を抑える。

全次元の主張は四次元の主張を含むが、四次元論文の証明が全次元論文へ依存するという意味ではない。四次元記事では超曲面への帰着、全次元記事では帰納法・等号の復元と大域的系を詳説する。

3. 原典と確認範囲

公式概要の名称は The sharp ordinary-double-point volume gap、CONTENTSの見出しは The ordinary-double-point volume gap。分野は Algebraic and complex geometry。公式順と原稿は固定 commit fd4aeeb2ee4fc729c18d98444fed42fd0529eeebに揃え、両原稿は2026年9月24日版、参考文献込みで57頁・20頁である。

OpenAI Research Catalog · Catalog 037 · p. 5

記事は著者の主張と証明戦略を紹介する。編集側では、主要主張の仮定・結論、選択した証明本文、論文間の直接入力と適用箇所を原典に照合した。各記事の執筆者以外による内容点検を含むが、専門家査読や全証明の独立検証ではない。半群・フィルトレーション構成や解析評価の全細部、外部定理の証明全体は確認対象外であり、より細かな範囲は各記事末尾と出典記録に示す。

The ordinary-double-point gap in every dimension

安定退化、jet半群の飽和、同次元の上限値による帰納法

本原稿は、零境界の複素代数的klt特異点に対する通常二重点（ODP）の体積ギャップを、四次元までの結果から全次元へ進める。高体積の特異点を孤立Gorenstein K -polystable円錐へ退化し、整数gradingのstabilizerを用いて分類と体積評価を分岐させる。同次元の別の特異点へ移る場面では、未証明の帰納仮定を使わず、特異点全体の体積のsupremumを閉じる。

原稿の著者: OpenAI · September 24, 2026 · 57 ページ（参考文献を含む）

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — ODPの体積ギャップと等号分類

$n \geq 2$ とし、 x を正規複素代数的 n 次元多様体 X の特異閉点とする。 K_X は $\mathbb{Q}$ -Cartier、 X は x の近傍で零境界でkltと仮定する。このとき

$$\widehat{\text{vol}}(x, X) \leq 2(n-1)^n,$$

等号は複素解析的同型

$$(X, x)^{\text{an}} \simeq (\{z_0^2 + \cdots + z_n^2 = 0\} \subset \mathbb{C}^{n+1}, 0)$$

が存在するとき、かつそのときに限る。孤立性・complete intersection・smoothabilityは仮定しない。

ここで $R = \mathcal{O}_{X,x}$ 、 $\mathfrak{a}_t(v) = \{f : v(f) \geq t\}$ として

$$\text{vol}(v) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n! \ell(R/\mathfrak{a}_t(v))}{t^n}, \quad \widehat{\text{vol}}(x, X) = \inf_{v \text{ centered exactly at } x} A_X(v)^n \text{vol}(v).$$

A_X は log discrepancy で、滑らかな n 次元点の通常 blowup の例外因子では n 。無限 discrepancy の valuation の寄与は $+\infty$ と定める。密度 $d(x, X) = \widehat{\text{vol}}(x, X)/n^n$ と $p_n = 2((n-1)/n)^n$ を使う。

Corollary 1.2 — K-semistable Fanoの大域体積

V を $n \geq 2$ 次元のK-semistable $\mathbb{Q}$ -Fano多様体とする。 V が特異なら

$$(-K_V)^n \leq 2 \left(\frac{n^2 - 1}{n} \right)^n < 2n^n.$$

また $V \not\cong \mathbb{P}^n$ なら $(-K_V)^n \leq 2n^n$ であり、等号は V が滑らかな二次超曲面 $Q^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ または $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ である場合に限り、これらでは等号が成立する。 $n = 2$ では両者は同じ多様体を表す。特異な場合の小さい上界について、最適性等等号の場合の分類は主張されていない。

Corollary 1.2 · p. 3

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 ODP gap in every dimension を指します。外部入力には次の略号を使います。

- [Gra15](#) Robin Graham (lecturer); Josh Swanson (initial draft); Debbie Matthews (editor) — (Compact) Lie Groups and Representation Theory Lecture Notes : ODPの次数別harmonic polynomial表現の既約性。University of Washington lecture notes, 2015-05-29。
- [XZ25](#) Chenyang Xu; Ziquan Zhuang — Stable degenerations of singularities : klt germのminimizerと有限生成、K-semistable/K-polystable coneへの退化。arXiv:2205.10915v2, 2025-01-17。
- [XZ21](#) Chenyang Xu; Ziquan Zhuang — Uniqueness of the minimizer of the normalized volume function : minimizerの一意性・自己同型不変性と有限次数公式。arXiv:2005.08303v1, 2020-05-17。
- [LWX21](#) Chi Li; Xiaowei Wang; Chenyang Xu — Algebraicity of the metric tangent cones and equivariant K-stability : K-semistable coneからK-polystable coneへのspecial degeneration。arXiv:1805.03393v2, 2021-01-08。
- [BL21](#) Harold Blum; Yuchen Liu — The normalized volume of a singularity is lower semicontinuous : punctureの特異点を低次元帰納法で排除する下半連続性。arXiv:1802.09658v2, 2019-08-15; manuscript date 2019-08-16。
- [LX19](#) Yuchen Liu; Chenyang Xu — K-stability of cubic threefolds : 三次元の上界16・等号分類、および全次元のsmooth上界。arXiv:1706.01933v3, 2019-01-26。
- [LZ25](#) Chi Li; Zhengyi Zhou — Minimal log discrepancy and orbifold curves : 小stabilizerの枝で用いる一つ以下のstack pointを持つorbifold有理曲線。arXiv:2502.11847v1, 2025-02-17。
- [AOV11](#) Dan Abramovich; Martin Olsson; Angelo Vistoli — Twisted stable maps to tame Artin stacks : 有限evaluationの証明に使うtwisted stable mapsのproperness。Author-hosted manuscript, twisted-tame-10-01-2009.pdf; published J. Algebraic Geometry 20 (2011)。

- [CS19](#) Tristan C. Collins; Gábor Székelyhidi — Sasaki–Einstein metrics and K-stability : K-polystable isolated Fano coneのRicci-flat metricと安定性の用語対応。Geometry & Topology 23 (2019), 1339–1413; publisher PDF with final back cover.
- [ADK08](#) Carolina Araujo; Stéphane Druel; Sándor J. Kovács — Cohomological characterizations of projective spaces and hyperquadrics : 自由なgradingを得た後の実際のample line bundleによる高指数分類。arXiv:0707.4310v2, 2007-10-09; manuscript date 2007-07-29.
- [How01](#) Jason A. Howald — Multiplier ideals of monomial ideals : smooth atlas上のmonomialに対するNewton polyhedron内部判定。arXiv:math/0003232v1, 2000-03-31.
- [Fuj23](#) Osamu Fujino — Cone and contraction theorem for projective morphisms between complex analytic spaces : coarse klt pairとintegral $\mathbb{Q}$ -Cartier Weil divisorに対するnef and big vanishing。Version 0.00, 2023-10-09; author PDF.
- [Sta78](#) Richard P. Stanley — Hilbert functions of graded algebras : normal monoidの内部格子点によるcanonical moduleとGorenstein判定。Advances in Mathematics 28 (1978), 57–83; author-hosted scan.
- [EM04](#) Lawrence Ein; Mircea Mustață — Inversion of adjunction for local complete intersection varieties : weighted hypersurface boundでのinversion of adjunction。arXiv:math/0301164v2, 2003-07-30.
- [Liu18](#) Yuchen Liu — The volume of singular Kähler–Einstein Fano varieties : K/Ding semistabilityの同値と局所大域体積比較。arXiv:1605.01034v5, 2018-05-23.
- [LM26](#) Chi Li; Minghao Miao — On the volume of K-semistable Fano manifolds : 非射影空間のsmooth K-semistable Fanoの上界と等号候補。arXiv:2506.17420v3, 2026-05-20; manuscript title-page date 2026-05-22.
- [Ber16](#) Robert J. Berman — K-polystability of $\mathbb{Q}$ -Fano varieties admitting Kähler–Einstein metrics : 系の等号例でKE metricからK-polystabilityを得る。arXiv:1205.6214v3, 2015-06-09.
- [Liu22](#) Yuchen Liu — K-stability of cubic fourfolds : ODPの解析的同型・完備化から正規化体積を移す。arXiv:2007.14320v2, 2022-01-10.
- [OpenAI26b](#) OpenAI — The normalized-volume gap in dimension four : 零境界klt四次元での上界162と解析的等号分類を帰納基底へ供給。September 24, 2026.

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 — 主定理の証明概略

証明対象 : [Theorem 1.1](#) · [p. 3](#) 主張と正規化を参照。

証明の道筋。 $n = 2$ は商特異点の計算、 $n = 3$ は既存のギャップ定理、 $n = 4$ は同カタログの四次元稿を使う。以下は $n = N + 1 \geq 5$ 、 $d \geq p_n$ の円錐への帰着である。小さいstabilizerの枝は円錐を分類し、大きい枝は飽和半群と同次元sliceの評価を経由する。等号の解析は円錐の分類から元のgermへ戻る追加の議論を必要とする。



円錐への帰着、stabilizerによる分岐、等号から元のgermへの復元

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 体積を保ち、孤立Gorenstein円錐へ帰着する

安定退化とK-polystable退化は最小化valuationの値を保つ。生成元の持上げと平坦退化での上半連続性により $\text{edim}(X, x) \leq \text{edim}(C, o)$ も保たれる。従って最終円錐は特異である。punctureの点 P が特異なら、grading軌道に横断する $(n-1)$ 次元sliceと滑らかな曲線のétale積表示から、低次元の帰納仮定と Lemma 2.1により $d(P, C) \leq p_{n-1}$ 。一方、下半連続性は $d(o, C) \leq d(P, C)$ を与えるため $p_{n-1} < p_n$ と矛盾する。canonical index q の被覆に有限次数公式を適用すると $d(o, C) \leq 1/q$ であり、 $p_n > 1/2$ から $q = 1$ となる。

Proposition 2.5 · pp. 10–11 [XZ25, Theorem 1.2, p. 2] [LWX21, Theorem 1.2, p. 2]
 [BL21, Theorem 33(1), p. 23] [XZ21, Theorem 1.3, p. 1] [LX19, Theorem 1.3(1), p. 3]
 [OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 1]

2. 小さいstabilizerは自由なgradingと高指数分類を強制する

$A_C(\xi) = n$ と正規化し、primitive正整数gradingを $\zeta_i = (r_i/n)\xi + \epsilon_i$ 、 $\epsilon_i \rightarrow 0$ という絶対誤差で近似する。 $B_i = [C^\circ/\mathbb{G}_m]$ は滑らかなorbifoldで、忠実なweight-one line bundle L_i について $-K_{B_i} = r_i L_i$ 。 $m_{\max} \leq r/N$ なら、Li-Zhouのorbifold有理曲線から最小 L 次数の $\mathbb{P}(1, m) \rightarrow B$ を取る。変形の文字数上げが直接自由性を与える場合を除き、そのevaluationは有限全射となる。

全sheetの無限小移動を対称積にすると、rank b 、整数weight $-bm$ の非零対称tensorを得る。Ricci-flat cone metricによるBochner議論はReeb weight $\tau \geq -b$ を与え、固定した環生成元でのcharacter評価がrank依存の誤差を除く。従って整数 $nm - r$ は $o(1)$ 以下となる。丸めと接空間作用の忠実性から全stabilizerが自明、 $r = N$ または $N + 1$ 。高指数の滑らかなpolarized Fanoの分類により、section ringは二次円錐または多項式環である。 C の特異性が後者を除く。

Lemmas 2.6–2.7 · pp. 11–12 Theorem 3.1; proof · pp. 13–19 [LZ25, Proposition 2.6, p. 6]
 [AOV11, Theorem 4.3, p. 17] [CS19, Theorem 1.1, 誌面 p. 1340 / PDF p. 2]
 [ADK08, Theorems 1.1 and 1.3, pp. 1–2]

3. 大きいstabilizerでは体積のsupremumを閉じる

$m = m_{\max} \geq r/N$ で、横断座標のTaylor初項と元の次数を記録した半群 Γ を作る。近最小性によるmoment評価と指数分布の不等式からcanonical点 $c_0 = (r, 1, \dots, 1)$ が実cone K の内部に入る。adjoint liftingと合わせて $\Gamma = K \cap \Lambda$ 、 $\text{int } K \cap \Lambda = c_0 + \Gamma$ を得る。Theorem 5.3の節がこの非自明な整数的強化を説明する。

二つのfiltrationで構成する中央環は $G = D[v]$ 、Hilbert seriesは $(1-z)^{-n}$ 。別のstabilizer μ_h 、 $h \geq 2$ を持つ点を通るslice Y は元と同じ次元 n の特異klt germとなる。characterごとのcolengthの割合 $1/h$ により $d(o, C) \leq (p_n + M_n)/2$ 、ここで M_n は特異 n 次元klt germ全体の密度のsupremumである。 M_n に近づくgermを取るだけで $M_n \leq p_n$ を導く。元の m と新しい h を同一視してはならない。

Theorem 4.8 · p. 29 Theorem 5.3 · pp. 34–36 Proposition 6.4; Corollary 6.6 · pp. 41–43
 Theorem 7.7 · p. 48

4. 等号の円錐を分類し、元のgermへ戻す

$d(o, C) = p_n$ ではslice評価の各不等式が等号となり、 $h = 2$ 、 $u(\lambda_Y) = 1$ への正規化の下で $A_Y(u) = N$ 、 $\text{vol}(u) = 2$ を得る。制限valuation w は $A_C(w) = 2N$ 、 $\text{vol}(w) = 2^{-N}$ で最小値を達成するため、一意性から $w = (2N/n) \text{wt}_\xi$ 。特別な切断 $v \in S_m$ に $w(v) > 2$ を仮定すると、filtrationの低次部分に正の主要項の数え落としが生じ、体積評価は厳密不等式になる。従って $w(v) \leq 2$ 。絶対近似誤差から $Nm - r \leq o(1)$ を得て、整数性で $Nm \leq r$ となり小stabilizerの枝へ戻る。これがTheorem 7.11のODP円錐である。

元のgermはembedding dimensionが $n + 1$ 以下で、特異性からちょうど $n + 1$ なのでhypersurfaceとなる。Lemma 8.1の重み付き評価

$$\widehat{\text{vol}}(x, X) \leq \frac{d_F(\sum_{i=0}^n w_i - d_F)^n}{\prod_{i=0}^n w_i}$$

を使う。ここで $F = 0$ は局所方程式、 $w_i > 0$ は有理重み、 d_F は最小重みである。全重み1なら $q = \text{mult } F > 2$ を排除する。 $q = 2$ でも二次部分の欠けた方向の重みを $1 - \varepsilon$ にすると上界は $2(n - 1 - \varepsilon)^n / (1 - \varepsilon) < 2(n - 1)^n$ となる。等号は二次部分の非退化性を強制し、holomorphic Morse lemmaで解析的ODPを得る。退化先がODPであるだけでは、この復元は完了しない。

Lemmas 7.8–7.10; Theorem 7.11 · pp. 49–50 [XZ21, Theorem 1.1; Corollary 1.2, p. 1]

Lemma 8.1; Proposition 8.2 · pp. 51–52 [EM04, Theorem 1.1, p. 1] Proof of Theorem 1.1 · p. 52

5. 最適性はODPにおけるinfimumの計算で確認する

逆向きにはLemma 2.3を使う。二次円錐のminimizerは一意性によりcone scalingと $\text{SO}(n + 1, \mathbb{C})$ に不変である。各次数のharmonic polynomial表現の既約性により、minimizerは通常のdegree valuationの正倍となる。このvaluationのdiscrepancyは $n - 1$ 、volumeは2なので、全valuationにわたるinfimumは $2(n - 1)^n$ 。通常blowupを一つ試して上界を得るだけの計算と区別する。解析的ODPへの移行は完備化不変性を使う。これで定数の最適性と等号の逆向きが揃う。

Lemma 2.3 · pp. 8–9 [Gra15, Example 251; Theorem 257, pp. 56–57] [Liu22, Lemma 2.15, p. 7]

3. Theorem 5.3 — canonical shiftからjet半群の完全な飽和へ

証明対象：Theorem 5.3 · pp. 34–36

Theorem 5.3 — 飽和jet半群

§§4–5のorbifold jet dataを固定する。すなわち、 B は滑らかでeffectiveかつproperな N 次元複素orbifoldでprojective coarse spaceを持ち、 L はample、 $-K_B = rL$ 。選んだ点のstabilizerは μ_m 、 L のfiber characterは1、横断座標のcharacterは b_i 。 Γ は $H^0(B, jL)$ のtotal degree-lex順Taylor初項 (j, γ) の半群、

$$\Lambda = \{(j, \gamma) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^N : j \equiv \sum b_i \gamma_i \pmod{m}\}, \quad K = \overline{\text{cone}(\Gamma)}, \quad c_0 = (r, 1, \dots, 1).$$

K はfull-dimensional、次数の有界sliceは有界、正の定数rayを含み、指数orthant全体へ射影し、§4のjet実現性を満たす。 $c_0 \in \text{int } K$ と仮定すると、 K は有理多面coneで、各facetのprimitive非負support form $\eta \in \Lambda^*$ は $\eta(c_0) = 1$ を満たし、

$$\Gamma = K \cap \Lambda, \quad \text{int } K \cap \Lambda = c_0 + \Gamma.$$

特に Γ は有限生成で飽和し、その生成する群は Λ である。主定理の大stabilizerの枝ではTheorem 4.8が、十分先のgradingごとにこのinteriority仮定を供給する。

Theorem 5.3 · pp. 34–36

1 文字を保持する Taylor 半群

$$\Gamma \subset \Lambda = \{(j, \gamma) : j \equiv \sum b_i \gamma_i \pmod{m}\},$$

$$K = \text{cone}(\Gamma), \quad c_0 = (r, 1, \dots, 1) \in \Lambda.$$

moment と support の矛盾
 Lemmas 4.2–4.3 · pp. 22–23
 Theorem 4.8 · p. 29

multiplier ideal + vanishing
 [How01, Main Theorem, p. 2]
 Lemma 5.2 · pp. 31–34

2a 数値から内部性

$$H \geq 2/s \geq 2, \quad C_* < 2$$

近最小性と指数期待値評価
 $c_0 \in \text{int } K$

2b 独立な adjoint lifting

$$q \in \Lambda, \quad q + c_0 \in \text{int } K$$

$$\implies q \in \Gamma$$

smooth stack 上で jet を持ち上げる

内部の小球が support を有界にする
 Theorem 5.3 · pp. 34–36

格子近似と lifting が矛盾を作る
 Theorem 5.3 · pp. 34–36

3 primitive facet support の高さを 1 に固定

$$\eta \in \Lambda^*, \quad \eta(c_0) = 1.$$

微分可能点で、非有理・高さ 2 以上の support ray なら $q \notin K, q + c_0 \in \text{int } K$ が生じる。
 c_0 の小球が support の norm を抑え、有限個にする。

facet の整数値と平行移動；canonical module を適用
 Theorem 5.3 · pp. 34–36
 [Sta78, Theorem 6.7; normal-monoid reformulation, 誌面 pp. 81–82 / PDF
 pp. 25–26]

4 完全な飽和と canonical shift

$$\Gamma = K \cap \Lambda, \quad \text{int } K \cap \Lambda = c_0 + \Gamma.$$

有限生成・飽和；内部格子点の ideal が principal。
 $\mathbb{C}[\Gamma]$ は Gorenstein, $\deg \omega_{\bar{S}} = (r, N).$

moment評価とadjoint liftingを別々に確立して飽和へ合流させる

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. Interiorityを数値的に確保する

元の次数 j を $D_0 = Nj/r$ へ変換すると K は $D_0 \geq f(x)$ の epigraph となり、格子密度は $s = r/(Nm) \leq 1$ 。 $H = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}^N} e^{-f(x)} dx$ とおく。体積の下限は $H \geq 2/s$ を与え、degree と Taylor order を混ぜた valuation の近最小性は二つ目の moment 不等式を与える。もし c_0 が内部になれば $f(\mathbf{1}) \geq N$ であり、supporting linear form を用いて Theorem 4.4 の一様指数評価を適用できる。その定数 $C_* = (3/4)e^{4/3} - e/3 < 2$ が $H \geq 2$ と矛盾する。asymptotic 格子点数え上げはこの段階では飽和を仮定していない。

Lemmas 4.2–4.3 · pp. 22–23 Theorem 4.4; proof · pp. 24–28 Theorem 4.8 · p. 29

2. Adjoint liftingをinteriorityとは独立に証明する

Lemma 5.2 は $(j, \alpha) \in \Lambda$ と $(j, \alpha) + c_0 \in \text{int } K$ から $(j, \alpha) \in \Gamma$ を導く。有限個の既知の初項に合う正整数重みを選び、smooth stack として weighted blowup を作る。canonical shift が例外因子の次数を消すため、式 (5.6) の残りは $(j + r - j_0)\pi^*L$ という nef and big class になる。Howald の monomial multiplier ideal 公式は例外因子上の指定 monomial が必要な ideal に入ることを保証し、Lemma 5.1 の orbifold vanishing がその切断を持ち上げる。coarse space へ移した vanishing では、klt 境界と integral $\mathbb{Q}$ -Cartier Weil divisor への Fujino の定理が使われる。smooth atlas の character を保持することが降下に必要である。

Lemmas 5.1–5.2 · pp. 30–34 [How01, Main Theorem, p. 2] [Fuj23, Theorem 3.2.4, 誌面 p. 31 / PDF p. 41]

3. Supportの高さ1が有限生成とcanonical moduleを結ぶ

微分可能な境界点で support ray が非有理、または primitive support の c_0 での高さが 2 以上なら、格子点の近似を使い、 $q \notin K$ かつ $q + c_0 \in \text{int } K$ となる $q \in \Lambda$ を構成できる。これは adjoint lifting と矛盾する。 c_0 の周りの小球が support form の norm を抑えるため、高さ 1 の整数 support は有限個しかない。これが有理多面性を与える。

$q \in K \cap \Lambda$ なら $q + c_0$ は内部なので lifting から $q \in \Gamma$ 。逆に内部格子点は全 primitive facet で値が 1 以上なので、 c_0 を引いても K に残る。ここから二つの集合等式と有限生成を得る。内点の平行移動公式は normal semigroup ring の canonical module を principal にし、Lemma 6.1 で必要な Gorenstein 性と canonical degree (r, N) を供給する。飽和だけから Gorenstein 性を推論するのではない。

Theorem 5.3 · pp. 34–36

[Sta78, Theorem 6.7; normal-monoid reformulation, 誌面 pp. 81–82 / PDF pp. 25–26]

Lemma 6.1 · pp. 37–39

4. Theorem 7.7 — 同次元sliceをsupremumで制御する

証明対象：Theorem 7.7 · p. 48

Theorem 7.7 — 上界の帰納段階

§7の設定、すなわち $n = N + 1 \geq 5$ で、零境界klt germについてのODP体積定理が n 未満の全次元で成立すると仮定する。 M_n を正規複素代数的・ $\mathbb{Q}$ -Gorenstein・零境界の特異klt n 次元germの密度 d のsupremumとする。このとき

$$M_n \leq p_n = 2 \left(\frac{n-1}{n} \right)^n.$$

Theorem 7.7 · p. 48

1 二 filtration で別の作用を作る

$$\bar{S} = \text{gr}_T S, \quad D = \bar{S}/(\bar{v}), \quad G = \text{gr}_W S = D[v].$$

$$\text{Hilb}_W G(z) = (1-z)^{-n}, \quad \text{非自明な stabilizer } \mu_h, h \geq 2.$$

Rees の canonical form を比較；非 klt・smooth の場合を排除
[Proposition 6.4 · pp. 41–42](#) [Lemmas 7.1–7.3 · pp. 44–46](#)

2 同次元の特異 klt slice

$$\dim Y = n, \quad \lambda_Y \text{ の character } -1, \quad \ell = u(\lambda_Y) > 0.$$

$$A_C(w) \leq N\ell + A_Y(u), \quad \text{vol}(w) \leq \ell^{-n}.$$

minimizer の一意性、 λ_Y による文字間単射、colength の分割
[\[XZ21, Theorem 1.1; Corollary 1.2, p. 1\]](#) [Lemma 7.4; Proposition 7.5 · p. 47](#)

3 一つの character だけを数える

$$u_* = \text{不変な minimizer}, \quad A' = A_Y(u_*), \quad \sigma = \text{vol}(u_*).$$

$$\dim(R/\mathfrak{a}_t)_X = \frac{\sigma}{h} \frac{t^n}{n!} + o(t^n),$$

$$\text{vol}(w) \leq \min_{0 \leq x \leq 1} \{ \ell^{-n} x^n + (1-x)^n \sigma / h \}.$$

最適化と Hölder、 $h \geq 2$
[Lemma 7.6 · p. 48](#)

4 未証明の同次元上界を使わない

$$d(o, C) \leq (N/n)^n + (A'/n)^n \sigma / h$$

$$= p_n/2 + d(y, Y)/h \leq (p_n + M_n)/2.$$

Y が特異 klt なので $d(y, Y) \leq M_n$ 。

$d_i > p_n$ では小 stabilizer の枝を排除して極限へ
[Theorem 3.1 · p. 13](#) [Theorem 7.7 · p. 48](#)

5 supremum を閉じる

$$d_i \rightarrow M_n, \quad d_i \leq (p_n + M_n)/2 \implies M_n \leq p_n.$$

近似 grading は各円錐ごとに選ぶ。supremum の達成は不要。

二つのfiltration、character長の $1/h$ 、supremumを取る閉じ方

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 同次元の特異klt sliceを作る

最初のfiltration T は横断Taylor order、 $\bar{S} = \text{gr}_T S$ 、 $D = \bar{S}/(\bar{v})$ 。二番目はbasis $v^a e_i$ に $W = a + T(e_i)$ を与え、 $\text{gr}_W S = D[v]$ となる。 D のreducednessには体積仮定と $N \geq 4$ を用いる。全てのpuncture stabilizerが自明なら、Hilbert series $(1-z)^{-N}$ から D は次数1生成の多項式環となり、元の C まで滑らかになる。従ってstabilizer μ_h 、 $h \geq 2$ が存在する。

W -Rees total spaceのその点を通る横断slice Y には、character -1 の関数 λ_Y がある。canonical formの比較から、 u を Y のquasi-monomial valuation、 $\ell = u(\lambda_Y)$ 、 w を C への制限として

$$A_C(w) \leq N\ell + A_Y(u), \quad \text{vol}(w) \leq \ell^{-n}.$$

非kltなら $A_Y(u)/\ell$ が非正へ近づくtestで $\widehat{\text{vol}}(o, C) \leq N^n$ となり、 $2N^n$ という下限に矛盾する。 Y が滑らかとの仮定は、もう一方のdeformationの一般fiber $\mathbb{A}^N$ に非原点の μ_h 固定点を生じさせるため排除される。この特異性の確認が M_n を使う条件である。

Proposition 6.4; Corollary 6.6 · pp. 41–43 Lemmas 7.1–7.3 · pp. 44–46

2. 一つのcharacterへの制限が係数を改善する

Y のminimizer u_* は一意性により μ_h 不変。 $\sigma = \text{vol}(u_*)$ とすると、 λ_Y^j によるcharacter間の単射から各characterのcolength主要項は全体の $1/h$ となる。filtrationで商を二つに分けると、後半は全長ではなく一つのcharacter商に単射する。従って

$$\text{vol}(w) \leq \min_{0 \leq x \leq 1} \left\{ \frac{x^n}{\ell^n} + \frac{(1-x)^n \sigma}{h} \right\}.$$

これをdiscrepancy評価とHölder不等式に合わせ、 $A' = A_Y(u_*)$ として

$$d(o, C) \leq \left(\frac{N}{n} \right)^n + \frac{(A'/n)^n \sigma}{h} = \frac{p_n}{2} + \frac{d(y, Y)}{h} \leq \frac{p_n + M_n}{2}$$

を得る。ここでは同次元のODP上界を Y に適用していない。

Lemma 7.4; Proposition 7.5 · p. 47 Lemma 7.6 · p. 48

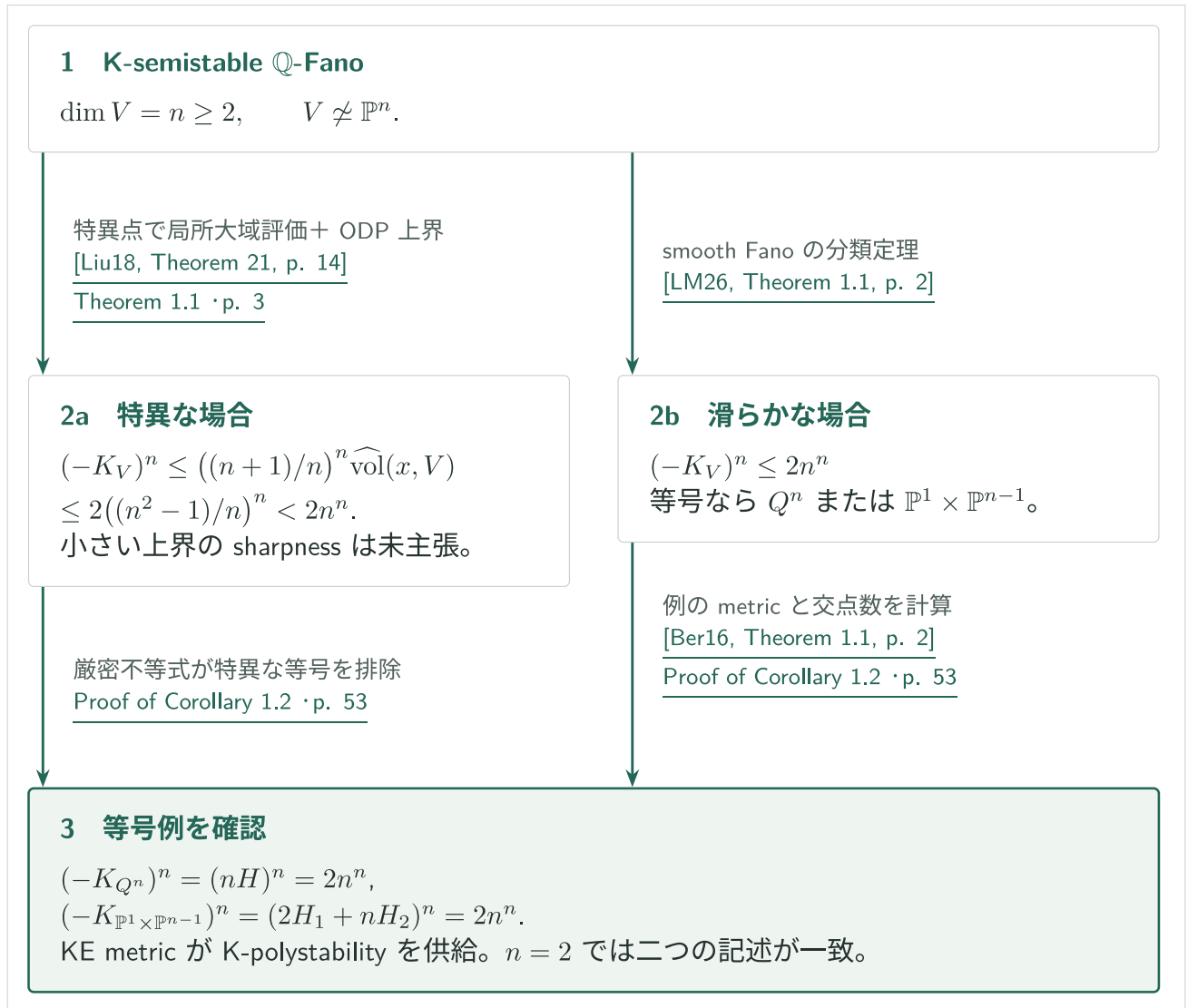
3. Supremumは達成されなくてもよい

$M_n > p_n$ なら $d_i > p_n$ で $d_i \rightarrow M_n$ となるgermを選ぶ。対応する円錐で小stabilizerの無限部分列があればTheorem 3.1とODPの体積計算に矛盾するため、各固定円錐で十分先の大stabilizer gradingを使う。 $d_i \leq (p_n + M_n)/2$ の極限を取れば $M_n \leq p_n$ となり矛盾する。grading近似の定数は各円錐ごとでよく、全germに一樣な近似速度もsupremumの達成も不要である。

Theorem 7.7 · p. 48

5. Corollary 1.2 — 局所評価から大域体積と等号例へ

証明対象：Corollary 1.2 · p. 3 三つの結論を参照。



特異点での局所大域評価とsmooth分類を合わせる

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 特異なFanoには厳しい上界を得る

K-semistability と Ding semistability の同値、および任意の centered valuation への局所大域比較から

$$(-K_V)^n \leq \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \widehat{\text{vol}}(x, V).$$

特異閉点で Theorem 1.1 を代入すると、系の $2((n^2-1)/n)^n$ となる。これは $2n^n$ 未満だが、この小さい値の最適性や等号例を得たことにはならない。

[\[Liu18, Theorem 21, p. 14\]](#) [\[Liu18, Theorem 13\(2\), p. 9\]](#) [Proof of Corollary 1.2 · p. 53](#)

2. $2n^n$ での等号はsmooth分類へ帰着する

$V \not\simeq \mathbb{P}^n$ が滑らかな場合にLi-Miaoの定理を適用する。特異な場合には既に厳密不等式を得たため、 $2n^n$ での等号はsmooth quadricまたは $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ に限る。Li-Miaoの入力はsmooth Fano manifoldに対するもので、特異な V へ直接適用しない。

[LM26, Theorem 1.1, p. 2]

3. 二つの例で等号を計算する

原稿はhomogeneous metricと積のKähler–Einstein metricにより両例のK-polystabilityを確認する。 H, H_1, H_2 をhyperplane classとして

$$(-K_{Q^n})^n = (nH)^n = 2n^n, \quad (-K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}})^n = (2H_1 + nH_2)^n = 2n^n.$$

$n = 2$ では $Q^2 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ であり、別の等号例を二重に数えてはいない。metricからK-polystabilityへの一般定理自体の証明は本概説の確認範囲外とする。

Proof of Corollary 1.2 · p. 53 [Ber16, Theorem 1.1, p. 2]

6. どの論文が、どの段階を担うか

供給結果

[OpenAI26b, Theorem 1.1, p. 1]

利用箇所

本稿Theorem 2.4、帰納基底

使用内容・必要な仮定

unrestrictedな零境界klt四次元での上界162と解析的等号分類

確認範囲

両記述と本稿pp.9–10の利用を照合。四次元稿の証明は別記事

供給結果

[XZ25, Theorem 1.2, p. 2] [XZ21, Theorem 1.1; Corollary 1.2, p. 1] [XZ21, Theorem 1.3, p. 1]
[LWX21, Theorem 1.2, p. 2]

利用箇所

Proposition 2.5、§7

使用内容・必要な仮定

最小値を保つ円錐退化、一意性、finite degree

確認範囲

定理記述と本稿の使用箇所を照合

供給結果

[LZ25, Proposition 2.6, p. 6] [AOV11, Theorem 4.3, p. 17] [CS19, Theorem 1.1, 誌面 p. 1340 /
PDF p. 2] [ADK08, Theorems 1.1 and 1.3, pp. 1–2]

利用箇所

Theorem 3.1

使用内容・必要な仮定

orbifold curve、properness、Ricci-flat metric、自由性を得た後の高指数分類

確認範囲

入力 of 仮定・記述・適用先を照合。入力証明は未再検証

供給結果

[How01, Main Theorem, p. 2] [Fuj23, Theorem 3.2.4, 誌面 p. 31 / PDF p. 41] [Sta78, Theorem
6.7; normal-monoid reformulation, 誌面 pp. 81–82 / PDF pp. 25–26]

利用箇所

Lemma 5.2、Lemma 6.1

使用内容・必要な仮定

monomial ideal、nef and big vanishing、内部格子点でcanonical moduleを記述

確認範囲

原典記述とsmooth atlas／coarse klt pair／normal monoidへの適用を照合

供給結果

[EM04, Theorem 1.1, p. 1]

利用箇所

Lemma 8.1

使用内容・必要な仮定

smooth ambient内のnormal Cartier hypersurfaceへのinversion of adjunction

確認範囲

Theorem 1.1の記述とweighted idealの利用を照合

供給結果

[Liu18, Theorem 21, p. 14] [LM26, Theorem 1.1, p. 2]

利用箇所

Corollary 1.2

使用内容・必要な仮定

local-to-global、smooth Fanoの上界と等号候補

確認範囲

原典記述・本稿p.53を照合。主定理の帰結への入力

7. 原典を読む入口と確認範囲

- §2.1; (2.1) · pp. 6–7 — 正規化とvaluationの範囲。
- Proposition 2.5 · pp. 10–11 — 特異性とGorenstein性が仮定ではなく結論となる帰着。
- Theorem 3.1; proof · pp. 13–19 — orbifold curveからtensorと自由なgradingへの接続。
- Theorem 4.8 · p. 29 — 指数期待値の評価がcanonical点の内部性に使われる位置。
- Lemmas 5.1–5.2 · pp. 30–34 — vanishing、multiplier ideal、指定jetの持上げ。
- Theorem 5.3 · pp. 34–36 — 有理多面性・高さ1・二つの格子点等式。
- Proposition 6.4; Corollary 6.6 · pp. 41–43 — 別のstabilizerを作る二つのfiltration。
- Lemma 7.4; Proposition 7.5 · p. 47 — 全長ではなく一つのcharacterを数える箇所。
- Theorem 7.7 · p. 48 — 同次元の帰納仮定を避けるsupremumの議論。

- Lemmas 7.8–7.10; Theorem 7.11 · pp. 49–50 — 等号から小stabilizerへ戻すstrict countと整数丸め。
- Lemma 8.1; Proposition 8.2 · pp. 51–52 — 元のgermの二次部分を非退化にするweighted test。
- Proof of Corollary 1.2 · p. 53 — 局所大域評価とsmooth等号例の別々の役割。

本概説は著者の主張と証明の構成を紹介する。編集側では主定理・系の仮定と全結論、§2のcone reduction、§3のclassificationへの接続、§§4–6のinteriority／adjoint lifting／二filtrationの記述、§§7–8の体積不等式・等号・hypersurfaceへの復元を本文で照合した。上記外部入力は定理の記述と適用条件を確認したが、その証明へ再帰的に進んではない。

未確認の範囲。 §4.3の指数期待値最適化の全計算、§6の全flatness・normality・canonical moduleの持上げ、§3のtwisted stable map境界と変形障害理論の全細部、ODP計算に用いるharmonic polynomialの既約性・完備化不変性の外部証明、metricからK-polystabilityへの一般定理の証明は独立検証していない。核心の接続を追ったことを全57頁の証明の正しさの認定とはしない。

The normalized-volume gap in dimension four

体積の下限から局所環を超曲面へ帰着し、既知のlci評価を適用する

原稿は、零境界の特異な複素代数的klt四次元芽について、正規化体積の上界162と等号の場合の解析的分類を主張する。新しい構造的帰着は、体積が162以上なら埋込み次元が5以下になることである。安定退化した錐のstabilizerを横断jetで制御し、discrepancyと極大イデアルの閾値を別々に評価して、terminal Gorenstein三次元切断を作る。

原稿の著者: OpenAI · September 24, 2026 · 20 ページ (参考文献を含む)

[GitHubで原稿を読む](#) ↗

1. 主要結果

Theorem 1.1 — 四次元の鋭い上界と等号分類

X を複素数体上の正規代数多様体、 $x \in X$ を特異な閉点とする。 $\dim X = 4$ 、 K_X は $\mathbb{Q}$ -Cartierで、 X は x の近傍で境界零のkltであると仮定する。このとき

$$\widehat{\text{vol}}(x, X) \leq 162 = 2 \cdot 3^4.$$

等号が成立することと、解析的芽が

$$(X, x) \simeq (\{z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0\} \subset \mathbb{C}^5, 0)$$

であることは同値である。孤立特異点、lci、商特異点、smoothabilityは仮定しない。以下は原稿が提示する論証の概説であり、全証明の独立検証ではない。

Theorem 1.1 · p. 1

体積は $\mathfrak{a}_t(v) = \{f \in \mathcal{O}_{X,x} : v(f) \geq t\}$ に対し

$$\text{vol}(v) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4!}{t^4} \ell(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{a}_t(v)), \quad \widehat{\text{vol}}(x, X) = \inf_{c_X(v)=x} A_X(v)^4 \text{vol}(v)$$

と正規化する。 $A_X(F) = 1 + \text{coeff}_F(K_Y - \mu^* K_X)$ はlog discrepancyで、discrepancy無限大の評価は $+\infty$ とする。全実付値での下限と中心が x である素因子付値での下限は一致する。この規約で滑らかな四次元点は256、通常二重点は162となる。

Section 2 · pp. 3–5

図の矢印に付した引用

略号のない定理・補題・節・式番号は本原稿 Fourfold volume gap を指します。外部入力には次の略号を使います。

- **XZ25** Chenyang Xu; Ziquan Zhuang — Stable degenerations of singularities : klt最小化付値の有限生成とK-semistable錐への安定退化。arXiv:2205.10915v2; published JAMS 38 (2025)。
- **LX18** Chi Li; Chenyang Xu — Stability of valuations: higher rational rank : 退化錐への体積・discrepancy保存と全付値での最小性。arXiv:1707.05561v2; published Peking Mathematical Journal 1 (2018)。
- **Li18** Chi Li — Minimizing normalized volumes of valuations : 埋込み次元比較に用いるIzumi型評価。arXiv:1511.08164v4, 2017-07-18; manuscript date 2017-07-19。
- **XZ21** Chenyang Xu; Ziquan Zhuang — Uniqueness of the minimizer of the normalized volume function : crepant有限Galois被覆に対する正規化体積の次数公式。arXiv:2005.08303v1, 2020-05-17; published CJM 9 (2021)。
- **Liu22** Yuchen Liu — K-stability of cubic fourfolds : 非孤立点の上界、lciの鋭い上界と等号分類、完成局所環による不変性。arXiv:2007.14320v2, 2022-01-10; manuscript date 2022-01-11。
- **FG12** Osamu Fujino; Yoshinori Gongyo — On canonical bundle formulae and subadjunctions : affine最小lci中心にklt境界を供給する。arXiv:1009.3996v1, 2010-09-21; internal version 1.17, 2010-09-12。
- **dFH09** Tommaso de Fernex; Christopher D. Hacon — Singularities on normal varieties : klt境界を持つ曲面のQ-factorial性。arXiv:0805.1767v2, 2008-10-25; published Compositio 145 (2009)。
- **Reid83** Miles Reid — Minimal models of canonical 3-folds : 指数1 terminal三次元特異点のcDV分類と超曲面表示。Advanced Studies in Pure Mathematics 1 (1983), 131–180; original spread scan。

各引用に結果番号とページを付します。誌面番号とPDF内の位置が異なる場合は両方を示します。GitHubの閲覧リンクではページ位置への自動移動を前提としません。

2. Theorem 1.1 — 主定理の証明概略

証明対象 : Theorem 1.1 · p. 1

証明の道筋。主張の上界は、 $V := \widehat{\text{vol}}(x, X) < 162$ なら既に成立する。 $V \geq 162$ の場合に局所環の構造を絞る。錐への帰着の後、stabilizer評価が二つに分岐し、 $A_C(F) \geq 3$ と閾値 $> 3/2$ が三次元切断で合流する。最後に元の芽へ戻ってlci定理を使う。図の最後の入力が上界・等号の必要条件・最適性を同時に供給するが、各結論の役割は分けて説明する。

1 大体積の場合に絞る
 $V = \widehat{\text{vol}}(x, X) \geq 162, \dim X = 4, \Delta = 0$ 特異な klt 芽

安定退化・次数公式・非孤立点の小さい上界

[Proposition 2.2; Lemma 2.1 · pp. 5–6](#)
[\[XZ25, Theorem 1.2, p. 2\]](#) [\[XZ21, Theorem 1.3, p. 1\]](#)
2 孤立 Gorenstein 錐へ
 $\widehat{\text{vol}}(o, C) = V, \quad \text{edim}(x, X) \leq \text{edim}(o, C)$

文字別 jet 評価が最小化 ray に反する付値を排除

[Lemma 3.3 · p. 8](#) [Proposition 3.4 · p. 9](#)
3 横断 jet で stabilizer を制限
 $m < 2r/5, \quad y = \lambda j, \quad \lambda = 5/(2r), \quad \lambda m < 1$

lc 抽出と Cartier 性

[Proposition 3.4 · p. 9](#)

Hilbert 双対性と subadjunction

[Proposition 4.3 · pp. 12–14](#)
[Proposition 5.1 · pp. 15–17](#)
4a 整数 discrepancy
 $A_C(F) > 5/2 \implies A_C(F) \geq 3$

すべての頂点中心の原始素因子

 $b_i = 1 : A_i - b_i \geq 2$
[Proposition 6.1 · pp. 17–18](#)
4b 低重み関数と lc 中心
 $0 < y < 5/3$ の非消滅

 $\text{lct}_o(C; \mathfrak{m}_o) > 3/2$
 $b_i \geq 2 : A_i - b_i > b_i/2 \geq 1$

二つの評価で terminal 性

5 二つの評価を切断で合わせる
 $A_i - b_i > 1 \implies H \text{ terminal Gorenstein}$
 $\text{edim}(o, H) \leq 4 \implies \text{edim}(x, X) \leq 5$
指数 1 の cDV 分類から $\text{edim}(H) \leq 4$ 、元の芽の $\text{edim} \leq 5$ へ
[\[Reid83, Theorem \(1.1\), 誌面 p. 138 / PDF p. 5; Section \(0.5\), 誌面 p. 134 / PDF p. 3\]](#)

埋込み次元 5 の特異四次元局所環は超曲面

[Proof of Theorem 1.1 · p. 18](#) [\[Liu22, Theorem 2.12, p. 6\]](#)

逆向きは ODP の体積計算、解析的同型は完成不変性

[\[Liu22, Lemma 2.15, p. 7\]](#)
6 元の芽へ lci 評価を適用
 $\widehat{\text{vol}}(x, X) \leq 162$
 $\widehat{\text{vol}}(x, X) = 162 \iff (X, x) \text{ analytic ODP}$

四次元の局所環帰着と上界・等号の全体像

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. 体積を保つ錐への帰着

安定退化で $C = \text{Spec gr}_v \mathcal{O}_{X,x}$ と最小化Reebベクトル ξ_* を得る。有限生成、錐上での体積・log discrepancyの保存、全中心付き付値の中での最小性が必要であり、固定Reeb錐だけでの最小化では足りない。Lemma 2.1は斉次生成元の持ち上げとIzumi評価を用い、 $\text{edim}(x, X) \leq \text{edim}(o, C)$ を得る。

[XZ25, Theorem 1.2, p. 2] [LX18, Theorem 1.3, p. 3; Lemma 4.10, p. 35] [Li18, Theorem 3.1, p. 6]

錐のpunctureに特異点があれば、その軌道の閉包により頂点の特異 locusは正次元となり、 $V \leq 4096/27 < 162$ に反する。指数 d のindex-one coverには有限次数公式を適用でき、 $dV \leq 256$ から $d = 1$ 。kltのCohen–Macaulay性と斉次Nakayamaで C はGorensteinとなる。十分近い原始整次数付けのdegree valuationについて、discrepancyを $r > 0$ 、体積を h とすれば $r^4 h \geq V$ かつ $r^4 h \rightarrow V$ である。

Proposition 2.2; Lemma 2.1 · pp. 5–6 [XZ21, Theorem 1.3, p. 1] [Liu22, Corollary 2.18, p. 9]

2. 二つの評価がterminal切断で合流する

Proposition 3.4は頂点中心の原始素因子すべてに $A_C(F) \geq 3$ を与える。Proposition 5.1は $\text{lct}_o(C; \mathfrak{m}_o) > 3/2$ を与える。極大イデアルのlog resolution上で $\mathfrak{m}_o \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y(-\sum b_i E_i)$ 、 $A_i = A_C(E_i)$ とすると、一般切断 H の通常discrepancyは $A_i - 1 - b_i$ である。 H はGorenstein Cohen–Macaulay四次元多様体のCartier切断なのでGorensteinかつ S_2 であり、Bertiniによる頂点外の滑らかさが R_1 を与えて正規となる。

$b_i = 1$ では $A_i - b_i \geq 2$ 、 $b_i \geq 2$ では $A_i - b_i > b_i/2 \geq 1$ 。したがって全係数は正で、 H はterminal Gorenstein三次元芽となる。ここでは閾値だけからterminal性を結論していない。Reidの指数1分類により特異な H は孤立cDV、したがって解析的超曲面であり、滑らかな場合も含め $\text{edim}(o, H) \leq 4$ 。よって

$$\text{edim}(x, X) \leq \text{edim}(o, C) \leq \text{edim}(o, H) + 1 \leq 5.$$

Proposition 6.1 · pp. 17–18

[Reid83, Theorem (1.1), 誌面 p. 138 / PDF p. 5; Section (0.5), 誌面 p. 134 / PDF p. 3]

3. 上界、等号の必要条件、最適性

特異な正規四次元芽で埋込み次元が5以下なら、元の局所環は五次元正則局所環の高さ1素イデアルによる商となる。正則局所環のUFD性でそのイデアルは主イデアルだから、 X 自身が代数的局所超曲面、従ってlciである。ここで錐だけが超曲面であることと混同しない。

この段階でLiuのlci定理を適用し $V \leq 2(4 - 1)^4 = 162$ を得る。同じ定理の等号分類により、 $V = 162$ なら元の芽はODPである。逆向きにはODPの体積が実際に162であることが必要であり、単に一つの付値が162を与えるだけでは下限の一致を示さない。ODPの頂点の通常blow-upの例外因子 E では

$A_X(E) = 3$ 、 $\text{vol}(E) = 2$ なので候補値は $3^4 \cdot 2 = 162$ となる。本稿は既知のlci定理の等号主張とこのODP計算をここで入力し、完成局所環の同型で体積が不変という結果を通じて解析的分類に結び付ける。これで上界の最適性も得られる。

Proof of Theorem 1.1 · p. 18 [Liu22, Theorem 2.12, p. 6] [Liu22, Lemma 2.15, p. 7]

3. Proposition 3.4 — 横断jetからstabilizerとdiscrepancyを制御する

証明対象：Proposition 3.4 · p. 9

Proposition 3.4 — 大体積錐のstabilizer上界

Proposition 2.2の錐 C 、 $V \geq 162$ 、最小化rayに近づく原始正整次数付けを考え、degree valuationのdiscrepancyを r とする。最小化rayに十分近いすべての次数付けに対し、 $C \setminus \{o\}$ のすべての点のstabilizer位数 m は $m < 2r/5$ を満たす。従って、頂点 o に中心を持つすべての原始素因子 F について $A_C(F) \geq 3$ である。

Proposition 3.4 · p. 9

1 有限 slice 上の試験付値

$$(u, z_1, z_2, z_3) : (1, \alpha, \alpha, \alpha), \quad A_C(v_\alpha) = r + 3\alpha$$

滑らかな slice の巡回作用と valuation ideal の長さ評価

[Lemma 3.1 · p. 7](#) [Lemma 3.3 · p. 8](#)

2 文字別 jet を数える

$$\dim S_j \sim h j^3 / 6, \quad \dim(\text{jets in one character}) \sim \ell^3 / (6m)$$

$$\text{vol}(v_\alpha) \leq \frac{h}{(1 + \alpha(mh)^{1/3})^3}$$

全中心付き付値での最小性を使い、 $\alpha = r\delta$ とする

[Proposition 3.4 · p. 9](#)

3 大きい stabilizer は体積を下げる

$$m/r \geq 2/5 \implies Q = mhr^3 \geq 324/5 > 64$$

$$\frac{V}{r^4 h} \leq \frac{(1 + 3\delta)^4}{(1 + \delta Q^{1/3})^3} \leq \kappa < 1$$

零点微分 $12 - 3Q^{1/3} < 0$ で固定した δ を選ぶ

[Proposition 2.2; Lemma 2.1 · pp. 5–6](#) [Proposition 3.4 · p. 9](#)

4 最小化 ray の近似と矛盾

$$r^4 h \longrightarrow V \quad \text{ゆえに} \quad m < 2r/5$$

$(\tilde{C}, E)$ の lc 性と mE の局所 Cartier 性

[Lemma 3.1 · p. 7](#) [Proposition 3.4 · p. 9](#)

5 Cartier 性で整数下界へ

$$A_C(F) \geq r \text{ord}_F(E) \geq r/m > 5/2$$

$$A_C(F) \in \mathbb{Z} \implies A_C(F) \geq 3$$

横断jetの文字ごとの計数とdiscrepancy下界

図を拡大 ↗ [TeXソース](#) ↓

1. 全付値最小性に対する試験付値

Lemma 3.1のgrading extractionは $K_{\tilde{C}} = \pi^* K_C + (r - 1)E$ とlc対 $(\tilde{C}, E)$ を持つ。stabilizer μ_m の滑らかなslice上で座標 (u, z_1, z_2, z_3) に重み $(1, \alpha, \alpha, \alpha)$ を与え、関数体へ制限した付値 v_α を用いる。 $\alpha > 0$ を有理数とすればこれは因子的付値に比例し、 $A_C(v_\alpha) = r + 3\alpha$ となる。

次数 j の関数の像は、 S_j の次元と、対応する文字のslice jet空間の次元の小さい方で抑えられる。後者の主要項は $\ell^3/(6m)$ であり、 m を忘れる通常のjet計数では必要な評価にならない。次数について積分すると

$$V \leq (r + 3\alpha)^4 \frac{h}{(1 + \alpha(mh)^{1/3})^3}.$$

Lemma 3.1 · p. 7 Lemma 3.3 · p. 8

2. 近似最小性との矛盾と整数性

$m/r \geq 2/5$ なら $Q = mhr^3 \geq 324/5 > 64$ 。 $\alpha = r\delta$ として右辺を r^4h で割った比 $(1 + 3\delta)^4/(1 + \delta Q^{1/3})^3$ の零点微分は $12 - 3Q^{1/3} < 0$ となる。小さな固定有理数 $\delta > 0$ が一様に1未満の比を与え、 $V/(r^4h) \rightarrow 1$ と矛盾する。各付値のcutoff極限を先にとるので、jet誤差項の次数付けに関する一様性は要求しない。

mE の局所Cartier性から $\text{ord}_F(E) \geq 1/m$ であり、lc性を使うと $A_C(F) \geq r \text{ord}_F(E) > 5/2$ 。 K_C がCartierなのでこれは整数で、 $A_C(F) \geq 3$ となる。以後 $y = \lambda j$ 、 $\lambda = 5/(2r)$ に再正規化するとcanonical weightは $5/2$ 、すべての非頂点stabilizerは $\lambda m < 1$ となる。

Proposition 3.4 · p. 9

4. Proposition 5.1 — 低重み関数と最小lc中心から閾値を上げる

証明対象：Proposition 5.1 · pp. 15–17

Proposition 5.1 — 極大イデアルの閾値

Proposition 2.2の四次元錐 C と頂点 o を取る。Proposition 3.4を満たす次数付けを固定し、canonical weightが $5/2$ となるよう重みを再正規化する。このとき

$$\text{lct}_o(C; \mathfrak{m}_o) > \frac{3}{2}.$$

閾値は o の近傍でのlog canonicityに対するもので、極大イデアルの場合は o を中心とする素因子の $A_C(F)/\text{ord}_F(\mathfrak{m}_o)$ の下限である。

Proposition 5.1 · pp. 15–17

1 短い重みの関数を得る

$$\lambda m < 1, \quad \text{wt}(\omega_C) = 5/2, \quad D = 5/3$$

$$\bigoplus_{0 < y < D} S_y \neq 0$$

Hilbert 周波数ギャップ・符号試験の後、共通重みの一般元を平均

[Lemma 4.1 · pp. 10–11](#) [Proposition 4.3 · pp. 12–14](#)

[Proposition 5.1, boundary and lc centers · pp. 15–16](#)

2 小さい閾値から lc 境界を作る

$$\text{lct}_o(C; \mathfrak{m}_o) \leq 3/2 \quad \text{と仮定}$$

$$(C, G) \text{ lc}, \quad \text{wt}(G) = td_0 < 5/2$$

境界重み $< 5/2$ で頂点を除外し、affine subadjunction を適用

[Proposition 5.1, boundary and lc centers · pp. 15–16](#) [\[FG12, Theorem 7.2, p. 11\]](#)

3 正次元の最小 lc 中心へ

$$1 \leq \dim Z \leq 3, \quad Z \text{ normal, CM}, \quad T = S/I_Z$$

$$T_y = 0 \quad (0 < y < D), \quad \lambda m < 1$$

曲線の正規性／曲面の Q-factorial 性／三次元中心の adjunction

[Proposition 5.1, center dimensions · pp. 16–17](#)

[\[dFH09, Proposition 7.2, p. 16; Corollary 7.15, p. 18\]](#)

4 中心上の非消滅の仮定を満たす

$$\dim Z = 1: T = \mathbb{C}[z], \quad 0 < \text{wt}(z) < 1$$

$$\dim Z = 2: \omega_T^{[q]} \hookrightarrow T \quad \text{正重み生成元を 1 へ}$$

$$\dim Z = 3: \omega_T^{[q]} \hookrightarrow T, \quad \deg = b - 5q/2 < 0$$

二・三次元では canonical module の正值性から短区間非消滅

[Lemma 4.2 · pp. 11–12](#) [Proposition 4.3 · pp. 12–14](#)

5 低重みの消滅と非消滅が矛盾

$$\exists y \in (0, D): T_y \neq 0$$

$$\text{lct}_o(C; \mathfrak{m}_o) > \frac{3}{2}$$

低重み関数の消滅と最小lc中心上の非消滅の矛盾

図を拡大 ↗ TeXソース ↓

1. Hilbert級数の周波数ギャップが短い重みを強制する

正規Cohen–Macaulay次数付き環 T に対し、canonical moduleの自然な重みを使って

$$\mu_T = \sum_y \dim T_y \delta_y + (-1)^{\dim T - 1} \sum_y \dim(\omega_T)_y \delta_{-y}$$

を作る。Lemma 4.1は $\lambda m < 1$ からHilbert級数の非零pole frequencyが $[-1, 1]$ 外にあることを示し、Fourier変換の台が $(-1, 1)$ にあるSchwartz関数 F に対して $\int F d\mu_T = \int F(y)P_T(y) dy$ を得る。 P_T は $H_T(s) = \sum_y \dim T_y e^{-sy}$ の $s = 0$ でのpolar partを記録する多項式である。本稿は次数付き自由分解を双対化して $H_{\omega_T}(z) = (-1)^{\dim T} H_T(z^{-1})$ を導き、この内部の計算を用いる。ここで後者の $H_T(z)$ は整数次のHilbert級数であり、 $z = e^{-\lambda s}$ である。

四次元環 S ではcanonical weight $5/2$ の対称性で、 $x = y + 5/4$ に移した密度は $a(x^3 + cx)$ となる。原稿はband-limited関数の二乗に符号を変える多項式を掛け、 $c \geq -1$ と $a \geq 432/625$ を得た後、区間 $(0, D)$ 、 $D = 5/3$ に関数重みがないと積分値の上下界が矛盾することを示す。Proposition 4.3(a)が従う。二・三次元の場合の同命題(b)には、 $\omega_T^{[q]} \hookrightarrow T$ が重みを正に下げるという追加条件がある。Lemma 4.2がcanonical sectionの正重みと P_T の次高次係数の正值性を供給する。

Lemma 4.1 · pp. 10–11 Lemma 4.2 · pp. 11–12 Proposition 4.3 · pp. 12–14

2. 閾値が小さいと低重み関数の共通零点にlc中心ができる

$\text{lct}_o(C; \mathfrak{m}_o) \leq 3/2$ と仮定する。 $0 < y < D$ の斉次関数の基底 f_i を取り、 $d_0 = \max \text{wt}(f_i) < D$ とする。冪を取って共通重み B に揃えたイデアル $\mathfrak{b}$ の閾値 $t = \text{lct}_o(C; \mathfrak{b}^{d_0/B})$ は $0 < t \leq 3/2$ であり、 $td_0 < 5/2$ 。十分多くの一般元の平均で作る有効斉次境界 G は総重み td_0 を持ち、 (C, G) はlcで、その全lc中心で f_i が消える。 $\mathfrak{b}$ が極大イデアルprimaryであるとは仮定しない。

grading extraction上では $A_{C,G}(F) > 0$ が中心ちょうど o のすべての F に成り立つ。これは $td_0 < 5/2$ により例外因子の係数差が正になるためで、 o 自体はlc中心でない。従って最小lc中心 Z は $1 \leq \dim Z \leq 3$ を満たす。affine subadjunctionを適用できるのは C が正規affine、 G が有効有理境界、 $K_C + G$ が $\mathbb{Q}$ -Cartier、対がlcであるためである。得られるklt対 (Z, Δ_Z) により Z は正規・有理特異点・Cohen–Macaulayとなる。

Proposition 5.1, boundary and lc centers · pp. 15–16 [FG12, Theorem 7.2, p. 11]

3. 中心の次元ごとに非消滅の仮定を確保する

$T = S/I_Z$ には元のgradingを誘導する。stabilizerは同じ点を C で見たものと同一なので $\lambda m < 1$ を保つが、作用は有効とは限らない。一方、 T_y は S_y の商であり、すべての f_i が Z 上で零なので $T_y = 0$ for $0 < y < D$ 。

$\dim Z = 1$ なら正規な次数付き曲線は $\mathbb{C}[z]$ であり、 z の重みはstabilizer条件から1未満となり直ちに矛盾する。 $\dim Z = 2$ ならklt境界を持つ曲面の $\mathbb{Q}$ -factorial性で Z 自体が $\mathbb{Q}$ -Gorenstein kltとなる。canonical reflexive powerの斉次生成元は正重みを持ち、それを1へ送って必要な重みを下げる単射を得る。

$\dim Z = 3$ では $U = Z \setminus \{o\}$ は滑らかな $C \setminus \{o\}$ 内の Cartier 因子である。非零低重み関数 f について $b = \text{wt}(f) < D$ 、 $q = \text{ord}_Z(f) \geq 1$ とすると、equivariant adjunction と f による乗法から $\omega_U^{\otimes q} \rightarrow \mathcal{O}_U$ が得られ、その次数は $b - q(5/2) < 0$ である。頂点を跨いで反射的に延長すれば $\omega_T^{[q]} \hookrightarrow T$ となる。 Z 全体の $\mathbb{Q}$ -Gorenstein 性を仮定する必要はない。二・三次元とも Proposition 4.3(b) の低重み非消滅と矛盾し、閾値の厳密な不等式を得る。

Proposition 5.1, center dimensions · pp. 16–17 [dFH09, Proposition 7.2, p. 16; Corollary 7.15, p. 18]

5. どの論文が、どの段階を担うか

入力

[XZ25, Theorem 1.2, p. 2] [LX18, Theorem 1.3, p. 3; Lemma 4.10, p. 35] [Li18, Theorem 3.1, p. 6]

利用箇所

Proposition 2.2、Lemma 2.1

役割と適用条件

klt 最小化付値の有限生成、退化錐の全付値最小性と体積保存、元の局所環への埋込み次元比較

確認範囲

指定版の結果記述と本稿 pp.4–6 の使用を照合

入力

[XZ21, Theorem 1.3, p. 1] [Liu22, Corollary 2.18, p. 9]

利用箇所

Proposition 2.2

役割と適用条件

crepant 有限 Galois 被覆の次数公式、非孤立点の小さい上界、 $dV \leq 256$

確認範囲

定理・系の仮定と本稿 p.6 を照合

入力

[FG12, Theorem 7.2, p. 11] [dFH09, Proposition 7.2, p. 16; Corollary 7.15, p. 18]

利用箇所

Proposition 5.1

役割と適用条件

affine最小lc中心のklt境界、二次元中心の $\mathbb{Q}$ -factorial性

確認範囲

指定版の記述と本稿pp.16–17を照合

入力

[Reid83, Theorem (1.1), 誌面 p. 138 / PDF p. 5; Section (0.5), 誌面 p. 134 / PDF p. 3]

利用箇所

Proposition 6.1

役割と適用条件

terminal Gorenstein三次元切断をcDV超曲面にする

確認範囲

見開き原典のTheorem (1.1)、§(0.5)と本稿p.18を照合

入力

[Liu22, Theorem 2.12, p. 6] [Liu22, Lemma 2.15, p. 7]

利用箇所

Theorem 1.1の結末

役割と適用条件

元の芽がlciになった後の上界・等号分類・解析的同型での不変性

確認範囲

Theorem 2.12、Lemma 2.15と本稿p.18を照合

同カタログの全次元原稿との関係はカタログ案内にまとめる。本稿が全次元原稿に依存するとする矢印は設けない。球充填やorbifold Riemann–Rochへの方法上の比較は、上記の直接入力とは区別する。

6. 原典を読む入口と確認範囲

- Theorem 1.1 · p. 1 — 仮定・零境界・次元・等号分類
- Proposition 2.2; Lemma 2.1 · pp. 5–6 — 体積保存と元の局所環への埋込み次元比較
- Lemma 3.3 · p. 8 — 文字ごとのjet計数がstabilizer位数を捉える箇所
- Proposition 4.3 · pp. 12–14 — Hilbert双対性と短区間非消滅の符号試験
- Proposition 5.1 · pp. 15–17 — lc境界の構成と中心次元ごとのcanonical module
- Proposition 6.1 · pp. 17–18 — 二つの評価からterminal切断を得る箇所
- Proof of Theorem 1.1 · p. 18 — lciへの帰着後に上界と等号を得る最終段階

主張、体積の正規化、Proposition 2.2、Lemma 3.3からProposition 3.4への評価、§4の符号と重みの帰着、Proposition 5.1のlc中心の三つの場合、§6の切断とlci定理への適用を原典本文で照合した。外部入力の上表の結果の記述と適用箇所を対象とし、その証明は再帰的に検証していない。

未確認として残すのは、Lemma 3.1のslice/extraction構成の全局所代数、§4の全Fourier・近似・moment計算の独立再計算、および三次元中心上の自然なgradingと反射的延長に関する全sheaf同型の独立検証である。これらの接続について原稿の説明は読んだが、概説の完成を原稿全体の正しさの認定とはしない。